

离散数学 2021 秋期末考试 (回忆版)

- 真值表 (略)
- Huffman 树的构造过程
 - 给定一系列权值, 画出 Huffman 树; (略)
 - 证明: 所有节点权值均不同的 Huffman 树中权最小的两个节点一定是兄弟。
- 定义: $\text{ord}_p(g) = k$, 如果 k 满足: $g^k \equiv 1 \pmod{p}, k \in \mathbb{N}, k$ 最小
 - 证明: $\text{ord}_p(g) \mid p - 1$;
 - 证明: $\langle \mathbb{Z}_p, + \rangle = \langle g \rangle$, 其中 g 满足 $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, p \in \mathbb{N}$
- 设 $\langle G, \times \rangle$ 是群, A, B 均为 G 的正规子群
 - 证明: 如果 $\exists g_1, g_2 \in G, s.t. g_1 A = g_2 A$. 那么 $\exists a \in A, s.t. g_2 = a g_1$;
 - 证明: 如果 $A \cap B = \{e\}$ 那么 $\forall a \in A, \forall b \in B, a \times b = b \times a$ 。
- 已知一种神奇的算法 A , 用来计算 $\min \sum_{e \in E} c(e)x(e)$, 其中 $c(e)$ 为每条边上的费用函数 (即权值), $u(e)$ 是边的流量上限, $x(e)$ 为流。 A 的输入为网络 N , 输出为流 f 。
 - 用算法 A 来设计一个求网络最大流的算法;
 - 用算法 A 来设计一个求 $s \rightarrow t$ 的最短路径 (带权的)。
 - 你是菜鸟驿站总代理, 你想寄。现在你要安排一堆卡车将 s 点的物资运输到 t 点, 经过网络 N 。每条路都有两个限制: 1. 收费 c , 每条路为定值, 不同的路的收费不同; 2. 车流上限 u , 每条路为定值, 不同的路的上限不同。为了使得总费用最小, 你通过算法 A 来帮你算出来怎么安排卡车的行进路线;
 - 算法 A 具体是怎么实现的你并不知道, 你只能通过不同的输入参数和输出结果来设计你需要的算法;
 - 你不能直接使用最大流算法直接求解(a), 对于 (b) 同理, 必须使用算法 A 。
- 给定完全图 G , 设计一种 TSP 算法
 - 给定 6 个点的坐标 (二维), 给出 2 倍近似 TSP 算法。(略)
 - 给定 6 个点的坐标 (三维), 重新定义“距离”为: $d(v_1, v_2) = \sum_{i=1}^n |x_{i1} - x_{i2}|$, 请问: 能否通过 (a) 的算法来求解该问题。如果能, 则画出哈密顿回路, 如果不能, 请说明理由。

附 1-期中考试第 2 题:

- 证明中国剩余定理。
- 给中国剩余定理套层皮出道当 vtuber, 证明套皮的中国剩余定理。

附 2-期中考试第 5 题:

考虑线性方程 $Ax=b$, 其中 A, b 给定。证明:

- x 的解空间在向量的加法运算下构成群 $\langle X, + \rangle$ 。
- 证明这个群 $\langle X, + \rangle$ 与整数加法群同构。

(我期中考试就特么解出来这两题, 卷面 29 分, 寄!)