第十周作业答案

罗曾宇

题目 1. 无限长的矩形波导管，在 $z=0$ 处被一块垂直地插入的理想导体平板完全封闭，求在 $z=-\infty$ 到 $z=0$ 这段管内可能存在的波模.

解答. 与前面情况不同，因为插入了一块理想导体平板，波导管一侧封闭，这里我们处理的不是一个无线扩展的平面波，而是在波导管内不断反射的电磁波，设 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ 是方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0, k=\frac{\omega}{c},$$

满足条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0, \boldsymbol{e_n}\times\boldsymbol{E}|_S=0,$$

的解，界面 S 是管壁.

这里的第二条边界条件其实就是在说电场是垂直于导体表面的. 这里的两条边界条件不是随手写的，务必好好想想是怎么来的，比如，$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ 是微分形式，在边界处理应失效，为何后面还能使用？关键原因是理想导体内电磁场为零，这个条件写成积分形式后依然可以转化为微分形式. 还有，不是 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 吗？那第二条边界条件是怎么来的，$\boldsymbol{B}$ 呢，不考虑了吗？依然是前面那个原因，理想导体内电磁场为零，如果初始磁场为零，那么它将保持为零.

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ 的三个直角分量均满足方程

$$\nabla^2E_i+k^2E_i=0, i=x,y,z,$$

其中 $k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=\dfrac{\omega^2}{c^2}$，令 $E_x=X(x)Y(y)Z(z)$，可以得到三个一维波动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2X=0,\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2Y=0,\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2Z=0,$$

它们都有形如 $C_i\cos k_ix_i+D_i\sin k_ix_i$ 的通解，因此

$$E_x=(C_1\cos k_xx+D_1\sin k_xx)(C_2\cos k_yy+D_2\sin k_yy)(C_3\cos k_zz+D_3\sin k_zz),$$

设波导管 x 方向的宽度为 a，y 方向的宽度为 b，由边界条件可知

$$x=0,a\text{处},\frac{\partial E_x}{\partial x}=0,E_y=E_z=0,$$
$$y=0,b\text{处},\frac{\partial E_y}{\partial y}=0,E_x=E_z=0,$$
$$z=0\text{处},\frac{\partial E_z}{\partial z}=0,E_x=E_y=0,$$

可以解得

$$E_x=A_1\cos k_xx\sin k_yy\sin k_zz,$$
$$E_y=A_2\sin k_xx\cos k_yy\sin k_zz,$$
$$E_z=A_3\sin k_xx\sin k_yy\cos k_zz,$$

其中

$$k_x=\frac{m\pi}{a},k_y=\frac{n\pi}{b},(m,n=0,1,2)$$
$$k_z=\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}=\sqrt{(\frac{\omega}{c})^2-(\frac{m\pi}{a})^2-(\frac{n\pi}{b})^2},$$

管内电场还应满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，即

$$A_1k_x+A_2k_y+A_3k_z=0,$$

也就是说 A_1,A_2,A_3 中只有两个是独立的，最后的解中对每一组 m,n 值，管内有两种独立的波模.

题目 2. 电磁波 $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\boldsymbol{E}(x,y)e^{i(k_z z-\omega t)}$ 在波导管中沿 z 方向传播，试使用 $\nabla\times\boldsymbol{E}=i\omega\mu_0\boldsymbol{H}$ 及 $\nabla\times\boldsymbol{H}=-i\omega\mu_0\boldsymbol{E}$ 证明电磁场所有分量都可用 $E_z(x,y)$ 及 $H_z(x,y)$ 这两个分量表示.

解答. 由于波导管看成无限长，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的振幅只是 x,y 的函数：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x,y)e^{i(k_z z-\omega t)},\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(x,y)e^{i(k_z z-\omega t)},$$

将上述两式代入 $\nabla\times\boldsymbol{H}=-i\omega\epsilon_0\boldsymbol{E}$，有

$$-i\omega\epsilon_0 E_x=\frac{\partial H_z}{\partial y}-ik_z H_y,$$

$$-i\omega\epsilon_0 E_y=-\frac{\partial H_z}{\partial x}+ik_z H_x,$$

$$-i\omega\epsilon_0 E_z=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y},$$

又由 $\nabla\times\boldsymbol{E}=i\omega\mu_0\boldsymbol{H}$, 有

$$i\omega\mu_0 H_x=\frac{\partial E_z}{\partial y}-ik_z E_y,$$

$$i\omega\mu_0 H_y=-\frac{\partial E_z}{\partial x}+ik_z E_x,$$

$$i\omega\mu_0 H_z=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y},$$

联立上述两组方程可得

$$E_x=\frac{i}{k^2-k_z^2}(\omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial y}+k_z\frac{\partial E_z}{\partial x}),$$

$$E_y=\frac{i}{k^2-k_z^2}(-\omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial x}+k_z\frac{\partial E_z}{\partial y}),$$

$$H_x=\frac{i}{k^2-k_z^2}(-\omega\epsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial y}+k_z\frac{\partial H_z}{\partial x}),$$

$$H_y=\frac{i}{k^2-k_z^2}(\omega\epsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial x}+k_z\frac{\partial H_z}{\partial y}).$$

这组方程表明，波导内电磁场的纵向分量E_z 和 H_z 不能同时为零，否则所有横向分量均为零.

实际应用中可以选择 $E_z=0, H_z\neq 0$(TE 波)，或 $H_z=0, E_z\neq 0$(TM 波).

这题没啥好说的，细心计算即可.

题目 3. 写出矩形波导管内磁场 $\boldsymbol{H}$ 满足的方程及边界条件.

解答. 由麦克斯韦方程组，可得波导管内时谐波的场方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0, \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=i\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}),$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=0, \nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=-i\omega\epsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}),$$

对最后一条方程两边同时求旋度，可知磁场强度的空间分布函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 满足亥姆霍兹方程(注意这里一定要强调是空间分布函数，因为约去了 $e^{-i\omega t}$，考试时也是一样)

$$\nabla^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})+k^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=0, k=\frac{\omega}{c},$$

而在理想导体表面，边值关系为

$$\boldsymbol{e_n}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})|_S=\boldsymbol{\alpha}_f, \boldsymbol{e_n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})|_S=0,$$

将最后一条方程左右两边同时叉乘 $\boldsymbol{e_n}$，可得

$$\boldsymbol{e_n}\times(\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}))|_S=0.$$

题目 4. 论证矩形波导管内不存在 TM_{m0} 或 TM_{0n} 波.

解答. 矩形波导内的电场为 (这里直接使用结论，具体可以翻阅课本)

$$E_x=A_1\cos k_x x\sin k_y y e^{i(k_z z-\omega t)},$$

$$E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)},$$

$$E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)},$$

其中 $k_x = \dfrac{m\pi}{a}, k_y = \dfrac{n\pi}{b}, A_1 k_x + A_2 k_y - i A_3 k_z = 0$, 由 $i\omega\mu_0 \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{E}$, 可得

$$i\omega\mu_0 H_x = (k_y A_3 - i k_z A_2) \sin k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)},$$

$$i\omega\mu_0 H_y = (-k_x A_3 + i k_z A_1) \cos k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)},$$

$$i\omega\mu_0 H_z = (k_x A_2 - k_y A_1) \cos k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)},$$

当 $n = 0, k_y = 0, \sin k_y y = 0$，故 $H_y = 0$，TM 波 $H_z = 0$，故 $A_2 = 0$，因而 $H_x = 0$，即不存在 TM_{m0} 波.

当 $m = 0, k_x = 0, \sin k_x x = 0$，故 $H_x = 0$，TM 波 $H_z = 0$，故 $A_1 = 0$，因而 $H_y = 0$，即不存在 TM_{0n} 波.

题目 5. 频率为 $30 \times 10^9 Hz$ 的微波，在 $0.7cm \times 0.4cm$ 的矩形波导管中能以什么波模传播？在 $0.7cm \times 0.6cm$ 的矩形波导管中能以什么波模传播？

解答. 频率为 $\nu = 30 \times 10^9 Hz$ 的微波，波长为 $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = 1cm$. 在截面积为 $a \times b$ 的矩形波导内，截止角频率和相应波长为

$$\omega_{c,m,n} = \pi c \sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2},$$

$$\lambda_{m,n} = \frac{2\pi c}{\omega_{c,m,n}} = \frac{2ab}{\sqrt{m^2 b^2 + n^2 a^2}},$$

当 $a = 0.7cm, b = 0.4cm$ 时，

$$\lambda_{1,0} = 1.4cm > 1cm, \lambda_{1,1} = 0.695cm < 1cm, \lambda_{0,1} = 0.8cm < 1cm,$$

当 $a = 0.7cm, b = 0.6cm$ 时，

$$\lambda_{1,0} = 1.4cm > 1cm, \lambda_{1,1} = 0.911cm < 1cm, \lambda_{0,1} = 1.2cm > 1cm,$$

所以 $0.7cm \times 0.4cm$ 波导只能传播 TE_{10} 波，$0.7cm \times 0.6cm$ 波导只能传播 TE_{10} 波或者 TE_{01} 波.

题目 6. 一对无限大的平行理想导体板，相距为 b，电磁波沿平行于版面的 z 方向传播，设波在 x 方向是均匀的，求可能传播的波模和每种波模的截止频率.

解答. 波在 x 方向均匀，即 $\boldsymbol{E}$ 与坐标 x 无关，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{E}(y)e^{i(k_z z-\omega t)}, k_x=0.\boldsymbol{E}(y)$ 的每一个直角分量 E_i 均满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2E_i}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2E_i=0,$$

其通解为

$$E_i=A_i\cos k_y y+B_i\sin k_y y,(i=x,y,z)$$

A_i 和 B_i 为待定系数，由边界条件 $\boldsymbol{e_n}\times\boldsymbol{E}|_S=0,\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，即有

$$y=0,b\text{处},\frac{\partial E_y}{\partial y}=0,E_x=E_y=0,$$

由此得

$$E_x=A_1\sin k_y y,E_y=A_2\cos k_y y,E_z=A_3\sin k_y y,$$

其中 $k_y=\dfrac{m\pi}{b},m=0,1,2...,k_z=\sqrt{k^2-k_y^2}=\sqrt{(\dfrac{\omega}{c})^2-(\dfrac{m\pi}{b})^2}$,

再由条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ 得

$$A_2k_y=iA_3k_z,A_1\text{独立},$$

即对每一个 m 值，有两种独立的波模，截止频率为 $\omega_{c,m}=\dfrac{m\pi c}{b}$.

波导的题写起来都比较套路化，考试的概率也比较大，希望同学们搞清楚作业题，熟悉大概的解题流程.