期中考试注意事项

必须要掌握的公式：

(I) $\int_{\partial D} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{A} = \int_{D} (\text{div } \mathbf{X}) dV$

(II) $\int_{\partial S} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S} (\text{curl } \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{A}$

第 1 章：

(1) 给定空间电荷分布计算电场强度，有几个比较好的办法，优先级如下：

a) 如果是对称性很强的结构，比如球、圆柱「前提是圆柱无限长」，或者是无限大平板、无限长直导线，可以使用高斯定理

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

计算电场强度 $\mathbf{E}$。

因此，电荷密度为 $\rho = \epsilon_0 \text{div } \mathbf{E}$。

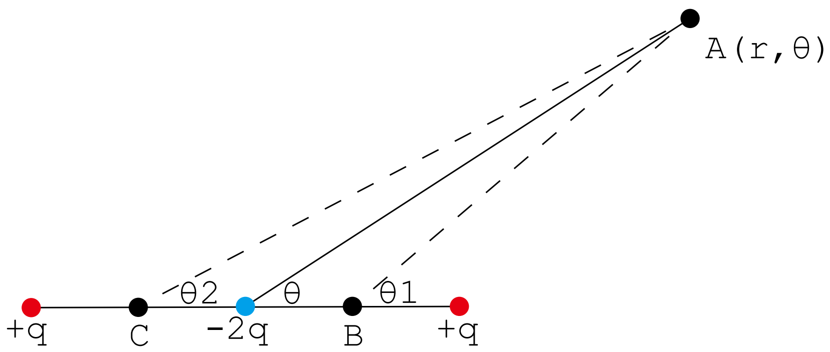
b) 计算电势 $V(x, y, z)$，再通过

$$\mathbf{E} = -\text{ grad } V = -\frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z)\mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial y} V(x, y, z)\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial z} V(x, y, z)\mathbf{k},$$

计算电场强度 $\mathbf{E}$。因为这样可以规避矢量带来的困难。

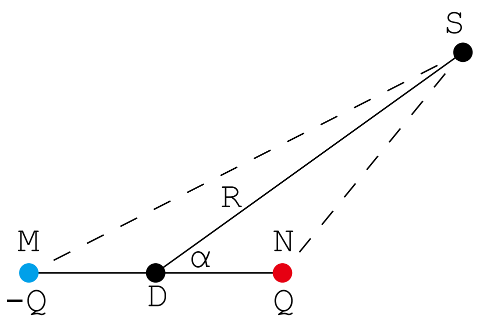
c) 直接叠加计算电场强度 $\mathbf{E}$。这个适用于几个点电荷的情况，例如 **1.5**；或者是对称性很强，但是办法 a) b) 都不适用，例如**PPT电磁学第二章-Li 5 P41 例2.4 (2)；1.7 左半圆环在O点产生的电场强度。**

(2) 给定一组点电荷，相互距离很近，比如下图，计算远处的电势与电场强度



这个时候一定要找出相互配对的电偶极子，不要盲目计算。

电偶极子的电势如下



$$
\begin{aligned}
V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{NS}-\frac{1}{MS}\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+(D/2)^2-RD\cos\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(D/2)^2+RD\cos\alpha}}\right) \\
&\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(D/R)\cos\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{1+(D/R)\cos\alpha}}\right) \\
&\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\left(1+\frac{D}{2R}\cos\alpha\right)-\left(1-\frac{D}{2R}\cos\alpha\right)\right) \\
&= \frac{QD}{4\pi\epsilon_0 R^2}\cos\alpha\,.
\end{aligned}
$$

这个公式可以背下来，考试不需要写这个推导，我是不会给你扣分的。

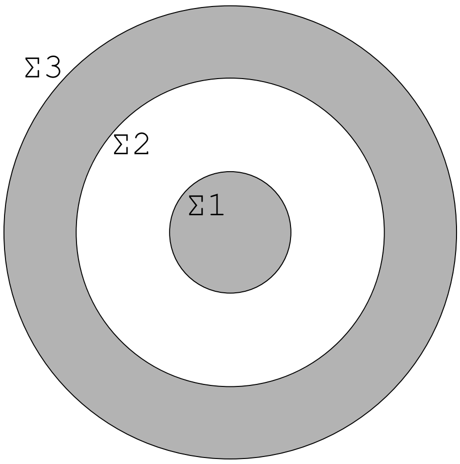
因此，(+q −2q +q) 可以被分成两组电偶极子 (+q −q) (−q +q) 的叠加，这样就可以计算远处的电势 V，再通过 $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}V=-\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta}$ 计算电场强度 $\mathbf{E}$。具体流程可以参考 **1.17** 解答。

第 2 章：

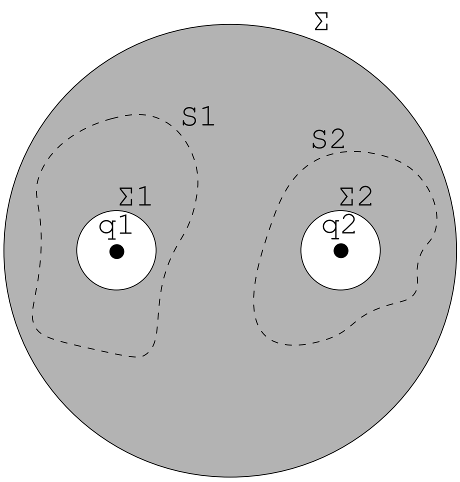
⑴ 计算导体存在时，空间的电荷分布。顺序如下：

a) 求出导体所有空腔表面的电荷量，或者找出含有空腔表面电荷量的表达式。

这个时候一定要抓住导体内部电场强度为 0 的特点。在导体内部选取一个能包住空腔的高斯面，根据高斯定理，高斯面包围的电荷总量为 0，因此，空腔**表面**和空腔**内部**的电荷总量为 0。如下图所示，空腔内表面是 Σ_2，空腔内部的电荷量是 Σ_1 表面上的电荷量，因此，Σ_2 表面上的电荷量与 Σ_1 表面上的电荷量之和为 0；



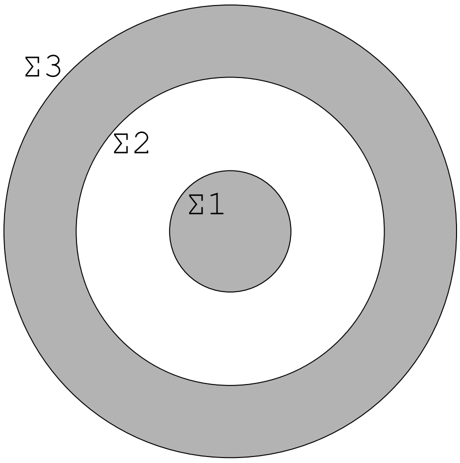
如下图所示，左边空腔表面是 Σ_1，左边空腔内部的电荷量是 q_1，因此，Σ_1 表面上的电荷量与 q_1 之和为 0，相当于，Σ_1 表面上的电荷量为 $-q_1$。同理，Σ_2 表面上的电荷量为 $-q_2$。



b) 求出导体外表面的电荷量，或者找出含有外表面电荷量的表达式。

这个时候一定要抓住导体内部不带电的特点，相当于电荷只能存在于表面上「否则，根据高斯定理，导体内部电场强度将不会处处为 0」。如下图所示，导体外表面是 Σ_3，导体空腔表面是 Σ_2，因此，Σ_3 表面的电荷量与 Σ_2 表面上的电荷量就是导体的总电荷量。

(I) 如果题目说明了导体不带电，那么 Σ_3 表面的电荷量与 Σ_2 表面上的电荷量之和为 0；
(II) 如果题目说明了导体带电量为 Q，那么 Σ_3 表面的电荷量与 Σ_2 表面上的电荷量之和为 Q；

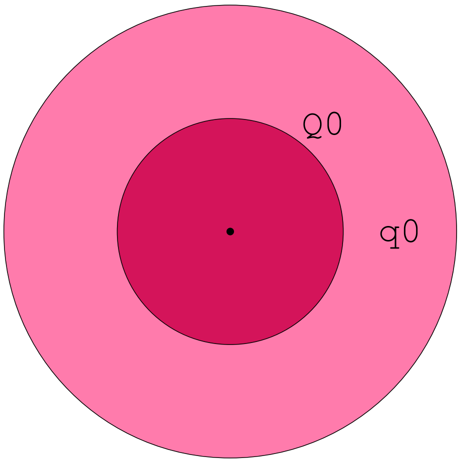


并且还要留意**静电屏蔽现象**：导体所有空腔之间、所有空腔与导体外表面与外面之间的电荷分布是不会相互影响的，也不会相互给予作用力。通俗来说，如果只分析空腔的情况，那就可以完全忽视外表面与外面，只需要处理空腔表面与空腔内部这两个部分即可；如果只分析外表面与外面的情况，那就可以完全忽视空腔表面与空腔内部，只需要处理外表面与外面这两个部分即可。详见 **2.5**。

(2) 计算某一导体接地后，空间的电荷分布，或者找出含有空间电荷分布的表达式：

如下图所示，假设中心的玫瑰红部分是一个金属球「导体」，一开始带电量为 0，现在让它接地。这个时候，千万不要直接得出“金属球在接地后，带电量为 0”这个假设，因为接地，代表有一根导线连接金属球与大地，电荷可以在这根导线上转移。如果电荷发生转移了，那么金属球带电量就不为 0 了。

因此，在接地后，金属球的带电量是一个未知数。但是不要慌，我们可以假设金属球带电量为 Q_0，再通过空间电荷分布 q_0 计算金属球的电势「只需要计算球心处的电势即可，因为导体内部电势处处相等」，这样可以得到一个表达式 $V = f(Q_0, q_0)$，只要令这个表达式为 0，就可以求出 Q_0 的大小。也就是说，抓住“金属球在接地后，电势为 0”这个特点。



(3) 如果空间中只含有**一种**电介质，并且在空间**自由电荷**分布已知的情况下，计算各个物理量「如果空间电荷分布未知，你可以进行一个假设，比如 **2.15**，你可以假设金属球带电量为 Q_0，然后根据这个假设来计算各个物理量」。顺序如下：

(I) 根据公式 $\int_\Sigma \mathbf{D}\cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{free enclosed in }\Sigma}$ 与**自由电荷**的分布，计算电位移矢量 $\mathbf{D}$。

(II) 根据电介质 $\mathbf{E},\mathbf{D},\mathbf{P}$ 三者之间的关系 $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E},\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$，计算电场强度与极化矢量 $\mathbf{E},\mathbf{P}$。

(III) 根据公式 $\rho' = -\operatorname{div}\mathbf{P}$ 与 $\int_\Sigma \mathbf{P}\cdot d\mathbf{A} = -Q_{\text{ind enclosed in }\Sigma}$，计算**极化电荷**体密度 ρ' 与介质表面的极化电荷面密度 σ'。

请注意，题目中所说的带电都是指**自由电荷**「比如，金属球带电量为 Q_0，无限长直导线电荷密度为 λ」，因为极化电荷是在自由电荷出现以后才会产生，相当于，自由电荷的出现，是极化电荷出现的起因。

(4) 如果空间中含有**多种**电介质，那么就会有**边界条件「非常重要，请参考 2.19, 2.20」**：如果两介质的接触面上**没有自由电荷，也没有电流通过**「相当于电荷不会移动」，那么

$$\begin{cases} D_1^\perp = D_2^\perp, \\ E_1^\top = E_2^\top, \end{cases}$$

相当于，电位移矢量在垂直于接触面的方向上，是保持一致的；电场强度在平行于接触面的方向上，是保持一致的。

如果有面电荷密度为 σ 的自由电荷，则应该改为

$$\begin{cases} D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma, \\ E_1^\top = E_2^\top, \end{cases}$$

可以在边界上选取高度远小于半径的圆柱面与宽度远小于长度的长方形环路，利用高斯定理与安培环路定理，证明这个结论。

做题顺序如下：

(I) 先假设每一种电介质中的各个物理量 $\mathbf{E}_i, \mathbf{D}_i$。$\mathbf{D}_i = \epsilon_i \mathbf{E}_i$。
(II) 根据边界条件，推导出对于不同下标 i， $\mathbf{E}_i, \mathbf{D}_i$ 之间的关系。
(III) 如果电荷分布已知，先求 $\mathbf{D}_i$，然后再求 $\mathbf{E}_i$「参考 2.12, 2.16」；如果极板之间的电压已知，先求 $\mathbf{E}_i$ ，然后再求 $\mathbf{D}_i$「参考 2.17, 2.20」。

(5) 电容器的串联与并联：

串联时

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \ldots + \frac{1}{C_n},$$

并联时

$$C = C_1 + \ldots + C_n,$$

请务必注意，和电阻器的串联与并联公式是**相反**的！

(6) 电像法：

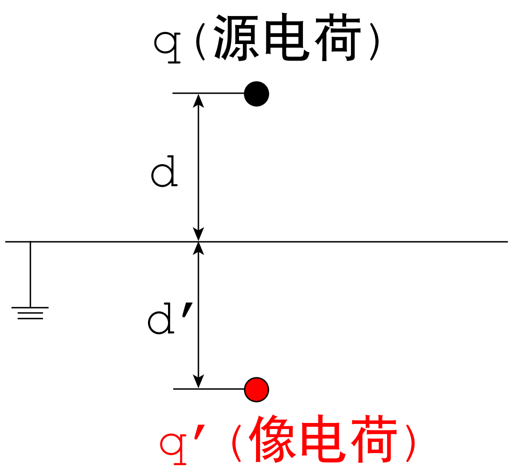
只需要记忆平面情况和球面情况，推导不需要掌握。如下图所示，

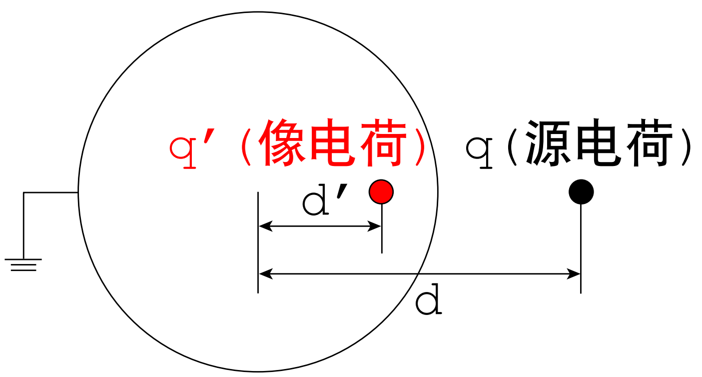
a) 对于平面情况，$q' = -q$，$d' = d$。

b) 对于球面情况，$q' = -\frac{R}{d}q$，$d' = \frac{R^2}{d}$。

含有电介质的情况我自己也记不住，可以选择不去管它。

关于知识点，请参考**PPT电磁学第二章-Li 7 P1-18，因为没什么好讲的。**





第 3 章：

(1) 给定两个体系A、B「多于 2 个的情况也是一样的」，计算A、B的自能；A、B之间的互能；空间的总能。有两种办法，优先级如下：

a) 顺序如下：

(I) 计算只存在A时，空间电场强度的分布，A的自能是 $W=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2dV$。如果有电介质，那么A的自能是 $W=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dV$。B的自能也是同样道理。

(II) 计算A、B都存在时，空间电场强度的分布，空间总能是 $W=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2dV$。如果有电介质，那么空间总能是 $W=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dV$。

(III) A、B之间的互能 = 空间的总能 − A的自能 − B的自能。

b) 顺序如下「**这个不适用于存在电介质的情况，因为电介质会有极化电荷**」：

(I) 计算只存在A时，空间电场强度的分布，再计算空间电势的分布。A的自能是 $W=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}Vdq=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}V(x,y,z)\rho(x,y,z)dxdydz$，如果A是点电荷，那么A的自能是不能求的，因为它不收敛，题目也不会要求你在这个情况下求出A的自能。B的自能也是同样道理。

(II) 计算**不存在A**时，空间电场强度的分布，再计算空间电势的分布 $V_1(x,y,z)$；计算**不存在B**时，空间电场强度的分布，再计算空间电势的分布 $V_2(x,y,z)$。令A的电荷分布是 $\rho_1(x,y,z)$，B的电荷分布是 $\rho_2(x,y,z)$，A、B之间的互能是 $W=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}V_1(x,y,z)\rho_1(x,y,z)dxdydz+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}V_2(x,y,z)\rho_2(x,y,z)dxdydz$。如果A、B是点电荷，那么A、B之间的互能是 $W=\frac{1}{2}V_1Q_1+\frac{1}{2}V_2Q_2$，其中 V_1 是不存在A时，空间电势的分布在A处的值；V_2 是不存在B时，空间电势的分布在B处的值；Q_1,Q_2 是A、B的电荷量。

(III) 空间的总能 = A、B之间的互能 + A的自能 + B的自能。

这两种办法计算出来的能量是完全一样的，在此不做证明，比较麻烦。

(2)「**推导不需要掌握，但是题目一定要会做**」，在平板被抽出距离为 x 后，计算平板受力的大小，有两种情况：

a) 普适性的做法，顺序如下：

(I) 计算在平板被抽出距离为 x 后，空间的总能 $W(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$。这个是关于 x 的一个函数。
(II) 平板受力为 $F = \frac{dW}{dx}$。
(III) 让平板保持平衡，需要施加外力 $-F$，与平板受力大小相等，方向相反。

b) 特殊情况，电容器两端电压保持不变，顺序如下：

(I) 计算在平板被抽出距离为 x 后，电容器的电容 $C(x)$ 的大小，空间的总能 $W(x) = \frac{1}{2}C(x)V^2$。
(II) 平板受力为 $F = \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dC}{dx}V^2$。
(III) 让平板保持平衡，需要施加外力 $-F$，与平板受力大小相等，方向相反。

c) 特殊情况，电容器两端电荷量保持不变，顺序如下：

(I) 计算在平板被抽出距离为 x 后，电容器的电容 $C(x)$ 的大小，空间的总能 $W(x) = \frac{Q^2}{2C(x)}$。
(II) 平板受力的大小为 $F = \frac{dW}{dx} = -\frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx}$。
(III) 让平板保持平衡，需要施加外力 $-F$，与平板受力大小相等，方向相反。

第 4 章：

(1) 电阻器的串联与并联：

串联时

$$R = R_1 + \ldots + R_n,$$

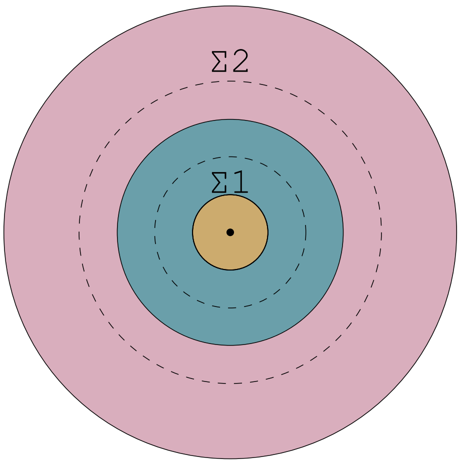
并联时

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_n},$$

请务必注意，和电容器的串联与并联公式是**相反**的！

(2) 基尔霍夫定律。简直弱智，下一个。

(3) 别的部分就没什么好说的了。直接以 **4.14** 为例，**4.14** 我觉得值得讲一下：



在稳恒电流条件下，对于任意三维区域的表面 Σ，具有如下条件

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = 0,$$

这也相当于

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0,$$

否则，电荷会在空间的某些位置积累或耗散，不满足稳恒条件。

选取圆柱面 Σ_1，可得

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = J_1(r) 2\pi r L - I = 0,$$

「圆柱的上表面流入电流 I，因此上表面电流密度的通量为 $-I$」

因此

$$J_1(r) = \frac{I}{2\pi r L}, (R_1 < r < R_0)$$

选取圆柱面 Σ_2，可得

$$\int_{\Sigma_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = J_2(r) 2\pi r L - I = 0,$$

因此

$$J_2(r) = \frac{I}{2\pi r L}, (R_0 < r < R_2)$$

因此

$$E_1(r) = \frac{J_1(r)}{\sigma_a} = \frac{I}{2\pi \sigma_a r L}, (R_1 < r < R_0)$$

$$E_2(r) = \frac{J_2(r)}{\sigma_b} = \frac{I}{2\pi \sigma_b r L}, (R_0 < r < R_2)$$

$$V = \int_{R_1}^{R_0} E_1(r) dr + \int_{R_0}^{R_2} E_2(r) dr = \frac{I}{2\pi L}\left(\frac{1}{\sigma_a} \log\left(\frac{R_0}{R_1}\right) + \frac{1}{\sigma_b} \log\left(\frac{R_2}{R_0}\right)\right),$$

接下来请自行解决。

(3) emmmm… 我想了想，还是讲一下 **4.13** 吧：

在**非稳恒**电流条件下，对于任意三维区域的表面 Σ，具有如下条件

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{dQ}{dt},$$

「Q 是区域内部的电荷量，相当于被表面 Σ 包围的电荷量」这也相当于

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

这个时候，虽然已经不是稳恒电路了，**但是 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 这个公式是一直都成立的。**

选取半径为 $r(a < r < b)$ 的球面，可得

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = J(r,t) 4\pi r^2 = -\frac{dQ(t)}{dt},$$

因此

$$J(r,t) = -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dQ(t)}{dt}, (a < r < b)$$

电位移矢量为

$$D(r,t) = \frac{Q(t)}{4\pi r^2}, (a < r < b)$$

电场强度为

$$E(r,t) = \frac{D(r,t)}{\epsilon} = \frac{Q(t)}{4\pi \epsilon r^2}, (a < r < b)$$

根据 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 可得

$$-\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{\sigma}{\epsilon}\frac{Q(t)}{4\pi r^2},$$

代入初始条件 $Q(0) = q$ 可得

$$Q(t) = q \exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon} t\right),$$

因此电流强度为

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = q\frac{\sigma}{\epsilon} \exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon} t\right).$$

对于焦耳热，有两种计算办法：

a）先计算电阻值 R，焦耳热 $Q=\int_0^\infty I(t)^2 R dt$：

$$R=\int_a^b \frac{dr}{4\pi\sigma r^2}=\frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right),$$

$$Q=\int_0^\infty I(t)^2 R dt=\left(q\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2\frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{2\sigma}{\epsilon}t\right)dt=\frac{q^2}{8\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right),$$

b）直接积分，焦耳热 $Q=\int_{\mathbb{R}^3\times(0,\infty)}\frac{J(x,y,z,t)^2}{\sigma}dxdydzdt$：

$$Q=\int_{\mathbb{R}^3\times(0,\infty)}\frac{J(r,t)^2}{\sigma}4\pi r^2 drdt=\left(q\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2\frac{1}{4\pi\sigma}\int_0^\infty\int_a^b \exp\left(-\frac{2\sigma}{\epsilon}t\right)\frac{1}{r^2}drdt=\frac{q^2}{8\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$