第三周作业答案

罗曾宇

题目 1. 有一内外半径分别为 r_1 和 r_2 的空心介质球，介质的电容率为 ϵ. 使介质内均匀带静止自由电荷 ρ_f，求
(1) 空间各点的电场;
(2) 极化体电荷和极化面电荷分布.

解答.
(1) 由介质中的高斯定理, 当 $r < r_1$ 时,

$$D \cdot 4\pi r^2 = 0,$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\epsilon_0 = 0,$$

当 $r_1 < r < r_2$ 时，

$$D \cdot 4\pi r^2 = \rho_f \cdot \frac{4}{3}\pi(r^3 - r_1^3),$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\epsilon = \frac{(r^3 - r_1^3)\rho_f}{3\epsilon r^3}\boldsymbol{r},$$

当 $r > r_2$ 时，

$$D \cdot 4\pi r^2 = \rho_f \cdot \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3),$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\epsilon_0 = \frac{(r_2^3 - r_1^3)\rho_f}{3\epsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}.$$

所以

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\dfrac{(r_2^3-r_1^3)\rho_f}{3\epsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}, & r>r_2\\ \dfrac{(r^3-r_1^3)\rho_f}{3\epsilon r^3}\boldsymbol{r}, & r_1<r<r_2\\ \boldsymbol{0}. & r<r_1\end{cases}$$

(2) 仅在 $r_1<r<r_2$ 中发生极化，

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}-\epsilon_0\boldsymbol{E}=(\epsilon-\epsilon_0)\boldsymbol{E}=\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon}\frac{(r^3-r_1^3)\rho_f}{3r^3}\boldsymbol{r},$$

极化体电荷分布

$$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\frac{\epsilon-\epsilon_0}{3\epsilon}\rho_f\nabla\cdot\boldsymbol{r}=-(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon})\rho_f,(r_1<r<r_2)$$

极化面电荷分布，$r=r_1$ 时，

$$\sigma_P=\boldsymbol{P}(r<r_1)|_{r=r_1}\cdot\boldsymbol{e_r}+\boldsymbol{P}(r_1<r<r_2)|_{r=r_1}\cdot(-\boldsymbol{e_r})=0,$$

$r=r_2$ 时，

$$\sigma_P=\boldsymbol{P}(r_1<r<r_2)|_{r=r_2}\cdot\boldsymbol{e_r}+\boldsymbol{P}(r>r_2)|_{r=r_2}\cdot(-\boldsymbol{e_r})=\frac{r_2^3-r_1^3}{3r_2^2}(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon})\rho_f.$$

题目 2. 内外半径分别为 r_1 和 r_2 的无穷长中空导体圆柱，沿轴向流有恒定均匀自由电流 $\boldsymbol{J}_f$, 导体的磁导率为 μ. 求磁感应强度和磁化电流.

解答. 以圆柱中心轴为 z 轴，则 $\boldsymbol{J}_f=J_f\boldsymbol{e_z}$, 由安培环路定理, 当 $r<r_1$ 时，

$$H\cdot 2\pi r=0,$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}=0,$$

当 $r_1<r<r_2$ 时，

$$H\cdot 2\pi r=J_f\cdot\pi(r^2-r_1^2),$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=\frac{\mu(r^2-r_1^2)}{2r}J_f\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\mu(r^2-r_1^2)}{2r}J_f\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_r=\frac{\mu(r^2-r_1^2)}{2r^2}\boldsymbol{J_f}\times\boldsymbol{r},$$

当 $r>r_2$ 时,

$$H\cdot 2\pi r=J_f\cdot\pi(r_2^2-r_1^2),$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}=\frac{\mu_0(r_2^2-r_1^2)}{2r}J_f\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\mu_0(r_2^2-r_1^2)}{2r}J_f\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_r=\frac{\mu_0(r_2^2-r_1^2)}{2r^2}\boldsymbol{J_f}\times\boldsymbol{r},$$

所以磁感应强度

$$\boldsymbol{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0(r_2^2-r_1^2)}{2r^2}\boldsymbol{J_f}\times\boldsymbol{r}, & r>r_2\\ \dfrac{\mu(r^2-r_1^2)}{2r^2}\boldsymbol{J_f}\times\boldsymbol{r}, & r_1<r<r_2\\ \boldsymbol{0}. & r<r_1\end{cases}$$

接下来求磁化电流,仅在 $r_1<r<r_2$ 中导体被磁化,磁化强度

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}),$$

$$\boldsymbol{M}=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\boldsymbol{H}=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\frac{(r^2-r_1^2)}{2r^2}\boldsymbol{J_f}\times\boldsymbol{r},$$

磁化电流密度

$$\boldsymbol{J}_M=\nabla\times\boldsymbol{M}=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\frac{1}{2}\nabla\times((1-\frac{r_1^2}{r^2})\boldsymbol{J_f}\times\boldsymbol{r})=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\boldsymbol{J_f},$$

注:

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \boldsymbol{F}_\rho & \rho\boldsymbol{F}_\varphi & \boldsymbol{F}_z\end{vmatrix},$$

$$\nabla\times((1-\frac{r_1^2}{r^2})\boldsymbol{J_f}\times\boldsymbol{r})=\nabla\times(\frac{r^2-r_1^2}{r}J_f\boldsymbol{e}_\varphi)=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & r\times\dfrac{r^2-r_1^2}{r}J_f & 0\end{vmatrix}=2\boldsymbol{J_f}.$$

表面磁化电流密度, 当 $r=r_1$ 时，

$$\alpha_M=\boldsymbol{M}(r<r_1)|_{r=r_1}\times\boldsymbol{e_r}+\boldsymbol{M}(r_1<r<r_2)|_{r=r_1}\times(-\boldsymbol{e_r})=\boldsymbol{0},$$

当 $r=r_2$ 时，

$$\alpha_M=\boldsymbol{M}(r_1<r<r_2)|_{r=r_2}\times\boldsymbol{e_r}+\boldsymbol{M}(r>r_2)|_{r=r_2}\times(-\boldsymbol{e_r})=-(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\frac{r_2^2-r_1^2}{2r_2}\boldsymbol{J_f}.$$

题目 3. 证明两个闭合的恒定电流圈之间的相互作用力大小相等，方向相反 (但两个电流元之间的相互作用力一般并不服从牛顿第三定律).

解答. 先讨论两个闭合的恒定电流圈，由安培定律，电流圈 $\boldsymbol{L_1}$ 对电流圈 $\boldsymbol{L_2}$ 的总作用力

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{12}&=\oint_{L_2}I_2d\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{B}_1\\&=\oint_{L_2}I_2d\boldsymbol{l}_2\times\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L_1}\frac{I_1d\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}\\&=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_2}\oint_{L_1}\frac{d\boldsymbol{l}_2\times(d\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3}\\&=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_2}\oint_{L_1}[\frac{d\boldsymbol{l}_1(d\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3}-\frac{\boldsymbol{r}_{12}(d\boldsymbol{l}_2\cdot d\boldsymbol{l}_1)}{r_{12}^3}],\end{aligned}$$

上式第一项

$$\begin{aligned}\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_2}\oint_{L_1}\frac{d\boldsymbol{l}_1(d\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3}&=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_1}d\boldsymbol{l}_1\oint_{L_2}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}\cdot d\boldsymbol{l}_2\\&\overset{\text{Stokes 定理}}{=\!=\!=\!=}\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_1}d\boldsymbol{l}_1\int_{\boldsymbol{S}}(\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3})\cdot d\boldsymbol{S}=0,\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{F}_{12}=-\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_2}\oint_{L_1}\frac{\boldsymbol{r}_{12}(d\boldsymbol{l}_2\cdot d\boldsymbol{l}_1)}{r_{12}^3},$$

同理

$$\boldsymbol{F}_{21}=-\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{\boldsymbol{r}_{21}(d\boldsymbol{l}_2\cdot d\boldsymbol{l}_1)}{r_{21}^3},$$

且 $\boldsymbol{r}_{12}=-\boldsymbol{r}_{21}$, 所以 $\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$, 即两个闭合的恒定电流圈之间的相互作用力大小相等，方向相反.

接下来讨论两个电流元之间的相互作用力, 按照安培定律，

$$d\boldsymbol{F_{12}}=I_2d\boldsymbol{l}_2\times\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1d\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}[\frac{d\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{r}_{12}\cdot d\boldsymbol{l}_2)}{r_{12}^3}-\frac{\boldsymbol{r}_{12}(d\boldsymbol{l}_1\cdot d\boldsymbol{l}_2)}{r_{12}^3}],$$

$$d\boldsymbol{F_{21}}=I_1d\boldsymbol{l}_1\times\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2d\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{r}_{21}}{r_{12}^3}=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}[\frac{d\boldsymbol{l}_2(\boldsymbol{r}_{21}\cdot d\boldsymbol{l}_1)}{r_{12}^3}-\frac{\boldsymbol{r}_{21}(d\boldsymbol{l}_2\cdot d\boldsymbol{l}_1)}{r_{12}^3}],$$

显然，一般情况下 $d\boldsymbol{F}_{12}\neq-d\boldsymbol{F}_{21}$，那么，原因是什么呢，为何此处违背了牛顿第三定律？

我们需要从头审视。牛顿第三定律的本质是动量守恒，上面产生矛盾的原因在于——磁场力并非“超距作用”，电磁场是一种物质，它也具有动量。对于两个闭合的恒定电流圈，以 Γ_A，Γ_B，Γ_{EM} 分别表示两个电流圈和空间中恒定磁场的动量，由系统的动量守恒定律可知

$$\frac{\Gamma_A}{dt}+\frac{\Gamma_B}{dt}+\frac{\Gamma_{EM}}{dt}=0,$$

恒定电流圈激发的是恒定磁场，空间中的电磁场动量密度不随时间变化，即

$$\frac{\Gamma_{EM}}{dt}=0,$$

所以

$$\frac{\Gamma_A}{dt}+\frac{\Gamma_B}{dt}=0,$$

即两个闭合的恒定电流圈之间的相互作用力满足牛顿第三定律.

对于两个孤立电流元，诚然，按答案所言，确实不存在恒定(此处“恒定”指的是电流元静止，并且其中电流的大小方向不变) 的孤立的电流元 (因为这明显违背了电荷守恒定律)，但这并不能算是一个解释，属于是要流氓加糊弄的行为 (***doge***)。

非恒定情况下，让一个点电荷以 $\boldsymbol{v}$ 的速度运动，当然可以看作是一个电流元. 以 Γ_1，Γ_2，Γ_{EM} 分别表示两个电流元和空间中电磁场的动量，由

系统的动量守恒定律可知

$$\frac{\Gamma_1}{dt}+\frac{\Gamma_2}{dt}+\frac{\Gamma_{EM}}{dt}=0,$$

运动的点电荷激发的不是恒定电磁场，空间中的电磁场动量密度一般会随时间变化 (这很好理解，随着两个电流元的运动，空间中的电磁场会不断变化)，即

$$\frac{\Gamma_{EM}}{dt}\neq 0,$$

所以

$$\frac{\Gamma_1}{dt}+\frac{\Gamma_2}{dt}\neq 0,$$

即两个孤立电流元之间的相互作用力不满足牛顿第三定律.

那么，又有一个问题呼之欲出，既然两个电流元之间的作用力并非等值反向，为何在积分之后，也就是得到两个电流圈后，作用力又满足等值反向了？

不妨令 $d\boldsymbol{F}_{12}+d\boldsymbol{F}_{21}=0$，即

$$d\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{r}_{12}\cdot d\boldsymbol{l}_2)+d\boldsymbol{l}_2(\boldsymbol{r}_{21}\cdot d\boldsymbol{l}_1)=\boldsymbol{r}_{12}\times(d\boldsymbol{l}_1\times d\boldsymbol{l}_2)=0,$$

这里仅考虑两线圈共面的情况，所以要求

$$d\boldsymbol{l}_1\parallel d\boldsymbol{l}_2,$$

对于两个给定的线圈，某个 $d\boldsymbol{l}_1$ 总可以“找到”和它平行的 $d\boldsymbol{l}_2$，使得两个电流元之间的牛顿第三定律成立，从而在积分之后，使得整体，也就是两个电流圈之间的牛顿第三定律成立.

题目 4. 计算同轴导线内的动量流密度 (郭书 43 面).

解答. 由题可知，

$$E=\frac{\tau}{2\pi\epsilon r}\hat{\boldsymbol{r}},B=\frac{\mu I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\theta}},$$

同轴导线内的动量流密度为

$$\overleftrightarrow{T} = -\epsilon\boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} + \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2)\overleftrightarrow{I},$$

代入得

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{8\pi^2 r^2}\begin{pmatrix} -\dfrac{\tau^2}{\epsilon} + \mu I^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu I^2 + \dfrac{\tau^2}{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\tau^2}{\epsilon} + \mu I^2 \end{pmatrix}$$

动量流密度张量的形式与弹性力学中的应力张量十分相似，可以类比称为麦克斯韦应力张量，可以用它来计算电磁场中物体的受力.

题目 5. 平行板电容器内有两层介质，它们的厚度分别为 l_1 和 l_2，电容率为 ϵ_1 和 ϵ_2，今在两板接上电动势为 ε 的电池，求

(1) 电容器两板上的自由电荷面密度 ω_f；

(2) 介质分界面上的自由电荷面密度 ω_f.

若介质是漏电的，电导率分别为 σ_1 和 σ_2，当电流达到恒定时，上述两问题的结果如何？

解答. 设两层介质的电场强度分别为 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$，有

$$E_1 l_1 + E_2 l_2 = \varepsilon,$$

介质绝缘情况下，两介质分界面处不会有自由电荷累积，电位移连续，

$$D_2 - D_1 = 0,$$

且 $D_1 = \epsilon_1 E_1$，$D_2 = \epsilon_2 E_2$，上下导体极板中电场为零，联立上述式子得

$$\omega_{f_{\text{上}}} = \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_{\text{上极板}}) = D_1 = \frac{\varepsilon}{\dfrac{l_1}{\epsilon_1} + \dfrac{l_1}{\epsilon_1}},$$

$$\omega_{f_{\text{中}}} = \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = 0,$$

$$\omega_{f_{\text{下}}} = \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_{\text{下极板}} - \boldsymbol{D}_2) = -D_2 = -\frac{\varepsilon}{\dfrac{l_1}{\epsilon_1} + \dfrac{l_1}{\epsilon_1}},$$

若介质漏电，两介质分界面处会有自由电荷累积，此时电位移不连续，但当电流恒定后，分界面处的电流密度是连续的 $(\nabla' \cdot \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0)$，即

$$J_2 - J_1 = 0,$$

由欧姆定律 $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$，有 $J_1 = \sigma_1 E_1$，$J_2 = \sigma_2 E_2$，联立上述式子得

$$\omega_{f_{\text{上}}} = \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_{\text{上极板}}) = D_1 = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 \varepsilon}{\sigma_2 l_1 + \sigma_1 l_2},$$

$$\omega_{f_{\text{中}}} = \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \frac{\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2}{\sigma_2 l_1 + \sigma_1 l_2} \varepsilon,$$

$$\omega_{f_{\text{下}}} = \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_{\text{下极板}} - \boldsymbol{D}_2) = -D_2 = -\frac{\epsilon_2 \sigma_1 \varepsilon}{\sigma_2 l_1 + \sigma_1 l_2},$$

题目 6. 证明

(1) 当两种绝缘物质的分界面上不带面自由电荷时，电场线的曲折满足

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

其中 ϵ_1 和 ϵ_2 分别为两种介质的介电常数，θ_1 和 θ_2 分别为界面两侧电场线与法线的夹角.

(2) 当两种导电介质内流有恒定电流时，分界面上电场线曲折满足

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

其中 σ_1 和 σ_2 分别为两种介质的电导率.

解答. 绝缘介质分界面上自由电荷面密度 $\sigma_f = 0$，故法向边值关系为

$$D_{2n} = D_{1n},$$

且

$$E_{2t} = E_{1t},$$

若两种介质都是线性均匀的，即 $\boldsymbol{D}_1 = \epsilon_1 \boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{D}_2 = \epsilon_2 \boldsymbol{E}_2$，上述两式便为

$$\epsilon_2 E_2 \cos\theta_2 = \epsilon_1 E_1 \cos\theta_1,\quad E_2 \sin\theta_2 = E_1 \sin\theta_1,$$

于是得

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}.$$

当电流恒定时，边值关系为

$$J_{2n} = J_{1n},$$

且

$$E_{2t} = E_{1t}$$

若两种介质都是线性均匀的，即 $\boldsymbol{J}_1 = \sigma_1 \boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{J}_2 = \sigma_2 \boldsymbol{E}_2$,，上述两式便为

$$\sigma_2 E_2 \cos\theta_2 = \sigma_1 E_1 \cos\theta_1,\quad E_2 \sin\theta_2 = E_1 \sin\theta_1,$$

于是得

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

题目 7. 内外半径分别为 a 和 b 的无限长圆柱形电容器，单位长度电荷为 λ_f，板间填充电导率为 σ 的非磁性物质.

(1) 证明在介质中任何一点传导电流与位移电流严格抵消，因此内部无磁场.

(2) 求 λ_f 随时间的衰减规律.

(3) 求与轴相距为 r 的地方的能量耗散功率密度.

(4) 求长度为 l 的一段介质总的能量耗散功率，并证明它等于这段的静电能减少率.

解答. (1) 按题意电容器外部无电场. 若内部介质线性均匀，便有 $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$. 以圆柱中心轴为 z 轴，由对称性，由高斯定理可知

$$D\cdot 2\pi rh=\lambda_f h,$$

即 $\boldsymbol{D}=\dfrac{\lambda_f}{2\pi r}\boldsymbol{e_r}$，$\boldsymbol{E}=\dfrac{\boldsymbol{D}}{\epsilon}=\dfrac{\lambda_f}{2\pi\epsilon r}\boldsymbol{e_r}$，所以介质内传导电流密度和位移电流密度分别为

$$\boldsymbol{J}_f=\sigma\boldsymbol{E}=\frac{\sigma\lambda_f}{2\pi\epsilon r}\boldsymbol{e_r}，\ \boldsymbol{J}_D=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\lambda_f}{\partial t}\boldsymbol{e_r},$$

由高斯定理微分形式以及电流连续性方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{\lambda_f}{2\pi}\nabla\cdot(\frac{\boldsymbol{e_r}}{r})=\rho_f,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_f+\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=\frac{\sigma}{\epsilon}\frac{\lambda_f}{2\pi}\nabla\cdot(\frac{\boldsymbol{e_r}}{r})+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\lambda_f}{\partial t}\nabla\cdot(\frac{\boldsymbol{e_r}}{r})=0,$$

即 $\dfrac{\sigma}{\epsilon}\lambda_f+\dfrac{\partial\lambda_f}{\partial t}=0$，所以

$$\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_D=\boldsymbol{J}_f+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=0,$$

因为介质是非磁性的，即 $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$，故任何一点任意时刻磁场的旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\nabla\times\boldsymbol{H}=\mu_0(\boldsymbol{J}_f+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t})=0,$$

证得在介质中任何一点传导电流与位移电流严格抵消，所以内部无磁场.

(2) 由 $\dfrac{\sigma}{\epsilon}\lambda_f+\dfrac{\partial\lambda_f}{\partial t}=0$ 可得，任意时刻 t 电极上的电荷密度

$$\lambda_f(t)=\lambda_f(0)e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t},$$

其中 $\lambda_f(0)$ 是 $t=0$ 时电极的自由电荷密度. 可见由于介质漏电，电极的电荷随时间按指数规律衰减.

(3) 介质中电流热效应引起的能量耗散功率密度为

$$p=\boldsymbol{J}_f\cdot\boldsymbol{E}=\sigma E^2=\sigma(\frac{\lambda_f}{2\pi\epsilon r})^2.$$

(4) 长度为 l 的一段介质耗散的功率为

$$\int_a^b pdV = \int_a^b \sigma(\frac{\lambda_f}{2\pi\epsilon r})^2 2\pi r dr l = \frac{\sigma l \lambda_f^2}{2\pi\epsilon^2} ln(\frac{b}{a}),$$

介质中电场能量密度及其时变率为

$$\omega = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}，\ \frac{\partial\omega}{\partial t} = -\sigma(\frac{\lambda_f}{2\pi\epsilon r})^2,$$

长度为 l 的一段介质内场能量减少率为

$$-\int_V \frac{\partial\omega}{\partial t} dV = \frac{\sigma l \lambda_f^2}{2\pi\epsilon^2} ln(\frac{b}{a}),$$

这表明电流热效应耗散的能量全部由电场能转化.