

2023 ~ 2024 学年数分B1期末考试参考答案

一、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 36 分)

(1) 求不定积分 $\int |x| dx$.

(2) 求不定积分 $\int \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx$.

(3) 求定积分 $\int_{-1}^1 \frac{x^2+x^3}{1+\sqrt{1-x^2}} dx$.

(4) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{4n} \sec^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$.

(5) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$.

(6) 求 $(1+x^2)\ln(1+x^2)$ 的 Maclaurin 级数, 并求其收敛半径.

二、(10 分) 求常微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^x$ 的通解.

三、(12分) 已知曲线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($0 \leq x \leq 1$).

(1) 求曲线的长度;

(2) 求由给定曲线和直线 $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ 围成的平面图形绕X轴旋转一周所得立体的体积.

四、(本题 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$ 的收敛域与和函数.

五、(8分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶导函数连续, $f(0) = f(1) = 0$. 证明:

$$\int_0^1 |f''(x)| dx \geq 4 \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

证明: 设 $|f(x)|$ 的最大值点为 x_0 , 不妨设 $x_0 \neq 0, 1$ (否则 $f(x) \equiv 0$, 结论显然成立).

六、(14分) 设 $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n} (n \geq 1)$.

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$;

(2) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 条件收敛;

(3) 证明当 $p \geq 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^p}$ 收敛, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 和.

七、(10 分)证明: (1) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!}$ 在 $(0, 1]$ 上一致收敛.

$$(2) \int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$