中国科学技术大学2019－2020学年第二学期
数学分析B2(8/9)

姓名：_____ 学号：_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

2020 年 3 月 23 日

一(15分)、求直线L_1: $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$ 绕直线L_2：$x=-y=\dfrac{z-1}{2}$旋转所得的旋转曲面的方程。

二(15分)、设函数$f(x,y)=\begin{cases} (a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$

试问：(1). 当a,b为何值时，函数$f(x,y)$在原点处连续？(2). 当a,b为何值时，函数$f(x,y)$在原点处可微？

三(10分)、试函数$z=z(x,y)$ 具有2阶连续偏导数，变换$\begin{cases} u=x+a\sqrt{y} \\ v=x+2\sqrt{y} \end{cases}$ 把方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，试确定$a$的值。

四(20分)、设函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 试求：

(1). 使方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}|_{(0,0)}\neq 0$的最大值$\alpha$ (记为α_0)，其中$\vec{e}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\alpha\in[0,2\pi)$;

(2). 过点$M(2,-1,3)$,与直线$L_1: x-1=-y=z+2$相交，且与平面$\Pi_1: 3x-2y+z+5=0$的夹角为α_0的直线L的方程。

五(20分)、设椭球面$\Sigma: x^2+3y^2+z^2=1$, Π为Σ在第一象限内的切平面，试求：

(1). 使Π与三个坐标平面所围成的四面体的体积最小的切点坐标；

(2). 使Π与三个坐标平面截出的三角形的面积最小的切点坐标。

六(10分)、设函数$f(x,y,z)$在球体$\Omega: x^2+y^2+z^2\leq 9$上有连续偏导数，且满足$|\mathrm{grad} f|\leq 1$和$f(0,0,0)=1$. 试证：$|f(x,y,z)|\leq 4$，$(x,y,z)\in\Omega$。

七(10分)、设函数$f(x,y)$连续偏导数，且$f(0,1)=f(1,0)$. 试证：在单位圆$x^2+y^2=1$至少存在两个不同的点满足方程$y\dfrac{\partial f}{\partial x}=x\dfrac{\partial f}{\partial y}$.