2021-2022数学分析B2期中解答

一、(每小题8分，共24分)

1.求函数$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$在点$(0,0)$的4阶Taylor展开式.

解： 利用一元函数的Taylor公式

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}t^2+o(t^2)$$

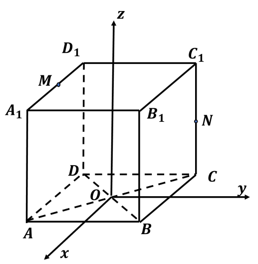
$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2+R_4$$

2.设函数$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 曲面$2z=x^2+y^2$在点$M(1,1,1)$处的单位外法向量为$\vec{n}$, 求$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_M$.

解： 记$F(x,y,z)=x^2+y^2-2z$, $(F'_x,F'_y,F'_z)=(2x,2y,-2)$, $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_M=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\Big|_M\cdot\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)=\frac{1}{3}.$$

3.在边长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，N是CC_1的中点，O是正方形$ABCD$的中心， M 是A_1D_1 的中点，求点M 到平面OB_1N的距离.



解： 如图建立坐标系, 则下列点的坐标：

$$B_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),O(0,0,0),N(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),M(0,-\frac{1}{2},1)$$

过O,B_1,N三点的平面方程是

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{2}{4}z=0$$

即 $x+3y-2z=0$. 点M到平面的距离 $d=\dfrac{|3(-\frac{1}{2})-2|}{\sqrt{1+9+4}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

二、(10分)设$y=\varphi(x)$是方程$\sin y+e^x-xy-1=0$在$(0,0)$点某邻域内确定的隐函数，求$\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$.

解： 方程两边对x求导得 $\cos y y'(x)+e^x-y-xy'(x)=0$,

所以 $y'(x)=\dfrac{y-e^x}{\cos y-x}$. ...... (3分)

$\varphi'(0)=-1$ ......(5分)

$y''(x)=\dfrac{(y'(x)-e^x)(\cos y-x)-(y-e^x)(-\sin y y'(x)-1)}{(\cos y-x)^2}$ ...... (8分)

所以$\varphi''(0)=-3$ ...... (10分)

三、(12分) 求函数$f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在闭区域
$D=\{(x,y)\big|x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 6\}$上的最大值与最小值.

解： 先求驻点，

$$\begin{cases} f'_x=2xy(4-x-y)-x^2y=xy(8-3x-2y)=0 \\ f'_y=x^2(4-x-y)-x^2y=x^2(4-x-2y)=0 \end{cases}$$

解得驻点$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ . ... (6 分)

在边界点有$f(0,y)=0,\ f(x,0)=0$，
在直线$x+y=6$上 $z=f(x,6-x)=-12x^2+2x^3$, 考虑在边界上的最值，

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=-24x+6x^2=0$$

解得$x=0,x=4$,$f(0,6)=f(6,0)=0,f(4,2)=-64$
所以在边界$x+y=6$上，最大值是0，最小值是-64
综上所述，在区域D上，最大值是4,最小值是-64. ...... (12分)

四、(12分)给定正整数n，设函数$f(x,y)=\begin{cases} (x+y)^n\ln(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$
讨论n为何值时，$f(x,y)$在点$(0,0)$处:(1)连续; (2)可微.
解： (2) 令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$

$$\left|(x+y)^n\ln(x^2+y^2)\right|=|2r^n(\cos\theta+\sin\theta)^n\ln r|<2^{n+1}r^n|\ln r|$$

$\lim\limits_{r\to 0^+}2^nr^n\ln r=0=f(0,0)$对任意正整数$n$成立, 所以 对任意正整数$n$， $f(x,y)$在$(0,0)$连续。 ...... (4分)

$$(2)\ \left|\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|2r^{n-1}(\cos\theta+\sin\theta)^n\ln r\right|\leqslant 2^{n+1}r^{n-1}|\ln r|$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=0$ 对$n>1$ 成立，
$n\geqslant 2$时 $f(x,y)-f(0,0)=0\cdot x+0\cdot y+o(\sqrt{x^2+y^2})$, $f(x,y)$在$(0,0)$可微. ...... (9分)
$n=1$时， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln x^2=-\infty$, 偏导数不存在，所以不可微....... (12分)

五、(每小题8分，共24分)

1. 计算$\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi,a>0)$及 $y=0$围成

的闭区域.

解：设参数方程确定了函数$y=y(x),0\leqslant x\leqslant 2\pi a$

$$\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}y^2\mathrm{d}y \qquad ......(4\text{ 分})$$
$$=\int_0^{2\pi a}y^3(x)\frac{1}{3}y\mathrm{d}x \xlongequal{x=a(t-\sin t)} \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}a^3(1-\cos t)^3\mathrm{d}a(t-\sin t)$$
$$=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\mathrm{d}t=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(2\sin^2\frac{t}{2})^4\mathrm{d}t \qquad ......(6\text{分})$$
$$=\frac{64a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 u\mathrm{d}u=\frac{35}{12}\pi a^4 \qquad ......(8\text{ 分})$$

2. 计算$\iint\limits_\Sigma |xyz|\mathrm{d}S$, Σ为锥面 $x^2+y^2=z^2$位于平面$z=0,z=1$ 之间的部分.

解：根据对称性，只需计算第一卦限部分曲面上的积分再乘以4. 设$\Sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2}, D:$ $x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 1$ 作极坐标代换， D转化为 $D':\theta\in[0,\frac{\pi}{2}],r\in[0,1]$ ......(2分)
$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ......(4分)

$$\iint\limits_\Sigma |xyz|\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}S=4\sqrt{2}\iint\limits_D xy\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta r\mathrm{d}r=\frac{2\sqrt{2}}{5} \qquad ......(8\text{分})$$

3.计算 $\iiint\limits_V |z|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$V$是曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$ 所围成的闭区域$(a>0)$.

解：积分区域关于三个坐标面对称， 被积函数关于x,y,z都是偶函数，只需计算第一卦限部分的积分， 令$x=r\sin\theta\cos\varphi,y=r\sin\theta\sin\varphi,z=r\cos\theta$
边界曲面化为 $r^4=a^2(r^2\sin^2\theta-r^2\cos^2\theta)=-a^2r^2\cos 2\theta$, 即$r^2=-a^2\cos 2\theta$,,
第一卦限部分 $V':\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}],\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}],r\in[0,a\sqrt{-\cos 2\theta}]$. ......(3分)

$$\iiint\limits_V |z|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}}r\cos\theta r^2\sin\theta\mathrm{d}r \qquad ......(5\text{分})$$
$$=8\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}a^4(-\cos 2\theta)^2\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{12}a^4. \qquad ......(8\text{分})$$

六、(10分)已知曲线 $5x^2-6xy+5y^2-6x+2y-4=0$是椭圆，利用拉格朗日乘数法求该椭圆的面积.

解：设椭圆中心点坐标为(m,n), 令$u=x-m,v=y-n$, 则(u,v)满足的方程应不含一次项,

$$5(u+m)^2-6(u+m)(v+n)+5(v+n)^2-6(u+m)+2(v+n)-4$$
$$=5u^2-6uv+5v^2+(10m-6n-6)u+(10n-6m+2)v+(5m^2-6mn+5n^2-6m+2n-4)=0$$

所以 $\begin{cases} 10m-6n-6=0 \\ 10n-6m+2=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} m=\dfrac{3}{4} \\ n=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

$5m^2-6mn+5n^2-6m+2n-4=-6.$ ......(3分)

考虑椭圆上的点到中心的最大最小值.

$$F(u,v,\lambda)=u^2+v^2+\lambda(5u^2-6uv+5v^2-6)$$

条件驻点满足

$$\begin{cases} F'_u=2(u+5\lambda u-3\lambda v)=0 & (1) \\ F'_v=2(v-3\lambda u+5\lambda v)=0 & (2) \\ F'_\lambda=5u^2-6uv+5v^2-6=0 & (3) \end{cases}$$

已知最大，最小值点不在坐标轴上， $u\neq 0, v\neq 0$, 由(1)(2)两式得

$$\frac{u}{v}=\frac{3\lambda}{1+5\lambda}=\frac{1+5\lambda}{3\lambda}$$

整理得 $16\lambda^2+10\lambda+1=0$, 所以$\lambda_1=-\dfrac{1}{2},\lambda_2=-\dfrac{1}{8}$

$\lambda=-\dfrac{1}{2}$代回（1）式， 得 $u=v$, 代入（3）式得 $5u^2-6u^2+5u^2-6=0,u^2=\dfrac{3}{2}$

$\lambda=-\dfrac{1}{8}$代回（1）式， 得 $u=-v$, 代入（3）式得 $5u^2+6u^2+5u^2-6=0,u^2=\dfrac{3}{8}$......(7分)

从而可得椭圆 长短半轴分别为 $\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 椭圆面积是 $S=\pi\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}\pi.$ ......(10分)

七、(8分)证明：积分方程

$$f(x,y)=1+\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y f(u,v)\mathrm{d}v$$

在$D:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$上至多有一个连续解.

证：（反证法）假设$f(x,y),f_1(x,y)$是积分方程两个不同的连续解.

令$g(x,y)=f(x,y)-f_1(x,y)$ $g(x,y)=\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y f(u,v)\mathrm{d}v-\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y f_1(u,v)\mathrm{d}v=\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y g(u,v)\mathrm{d}v$ ......(3分)

由于$g(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$连续，故有界， 设$|g(x,y)|<M$,由积分方程可得.

$$|g(x,y)|\leqslant\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y M\mathrm{d}v=Mxy$$

由此结论，利用积分不等式又可得

$$|g(x,y)|\leqslant\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y |g(u,v)|\mathrm{d}v\leqslant M\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y uv\mathrm{d}v=M\frac{x^2}{2}\frac{y^2}{2}.$$

归纳可得到

$|g(x,y)|\leqslant\dfrac{Mx^ny^n}{(n!)^2}\leqslant\dfrac{M}{(n!)^2}$ ......(6分)

对任意自然数n成立， 令$n\to\infty$, 可得 $g(x,y)=0.$

所以积分方程只有一个连续解. ......(8分)