

解取 $\Omega_1: z=0, x^2+y^2 \leq R^2$,方向向下. V 为由和所围成的立体区域,则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (x+1) dydz + (y+2) dzdx + (z+3) dxdy = \iint_{\Omega+\Omega_1} (x+1) dydz + (y+2) dzdx + (z+3) dxdy \\ & - \iint_{\Omega_1} (x+1) dydz + (y+2) dzdx + (z+3) dxdy \\ & = \iiint_V 3dxdydz + \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (0+3) dxdy = 2\pi R^3 + 3\pi R^2. \end{aligned}$$

- (5) 计算 $\oint_L ydx + zdy + xdz$,其中 L 是 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 与 $x + z = 0$ 的交线,从 z 轴正向往负向看 L 为逆时针方向.

解 L 是一个圆,将 L 视为平面 $x + z = 0$ 上的曲线,取该平面与 z 轴同侧的法向量.

$$\begin{aligned} \oint_L ydx + zdy + xdz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = - \iint_{\Sigma} dydz + dzdx + dxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} (-z'_x - z'_y + 1) dxdy = -2 \iint_{D_{xy}} dxdy = -9\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

显然最后一步的 D_{xy} 是椭圆: $2x^2 + y^2 = 9$.

- (6) 设 $f(x)$ 可微且具有连续导数, $F(x) = \int_0^x \left[\int_0^t uf(u^2 + t^2) du \right] dt$,求 $F''(x)$.

解 显然 $F'(x) = \int_0^x uf(u^2 + x^2) du$,从而

$$\begin{aligned} F''(x) &= xf(2x^2) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} (uf(u^2 + x^2)) du = xf(2x^2) + \int_0^x 2xuf'(u^2 + x^2) du \\ &= xf(2x^2) + x \int_0^x f'(u^2 + x^2) d(u^2 + x^2) \\ &= xf(2x^2) + x \int_{x^2}^{2x^2} f'(t) dt = 2xf(2x^2) - xf(x^2). \end{aligned}$$

- (7) 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

解 令 $t = x^4$,则

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}-1}}{1+t} dt = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

二、(12分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi-1)x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(\pi-x), & 1 < x \leq \pi. \end{cases}$ 试将函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上展开

成正弦级数并指出其收敛性, 并由此证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{(\pi-1)^2}{6}$.

解 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin nx, |x| \leq \pi.$ (6分)

由Parseval等式,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{(\pi-1)^2}{6}.$$

(6分)

三、(8分) 证明向量场 $v = \left(x^2, yz, \frac{y^2}{2}\right)$ 是全空间的有势场, 并求其势函数.

解 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = y = \frac{\partial R}{\partial y},$$

所以 v 是保守场.

(4分)

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} x^2 dx + yz dy + \frac{y^2}{2} dz = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2 z}{2} + C.$$

(4分)

四、(12分) 设广义积分为 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx, (p > 0)$. 请分别指出并证明该广义积分绝对收敛和条件收敛时参数 p 的取值范围.

解 1. 当 $p > 1$ 时,

由于 $\left| \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right| \leq \frac{3e}{x^p}$, 由比较判别法知, 此时广义积分绝对收敛. (6分)

2. 当 $0 \leq p \leq 1$ 时,

(1) 对任意 $A > 1$, $\left| \int_1^A e^{\sin x} \cos x dx \right| = \left| e^{\sin x} \Big|_1^A \right| = |e^{\sin A} - e^{\sin 1}| < 2e$, 有界.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x^p}$ 单调递减趋于 0. 由Dirichlet判别法可知 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} dx$ 收敛.

熟知 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调有界, 由Abel判别法知, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx$ 收敛.

(2) $\left| \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right| > \frac{2 \cos^2 x}{ex^p} = \frac{1}{ex^p} + \frac{\cos 2x}{ex^p}$. 此时, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 发散; 而由Dirichlet判别法知, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p} dx$ 收敛. 所以当 $0 \leq p \leq 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \left| \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right| dx$ 发散.

所以, 当 $0 \leq p \leq 1$ 时, 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \cos x}{x^p} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx$ 条件收敛. (6分)

五、(10分) 计算 $I = \oint_L \frac{(x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2+4y^2}$, 其中 L 为单位圆 $x^2+y^2=1$, 取逆时针方向.

解令 $P = \frac{x-y}{x^2+4y^2}$, $Q = \frac{x+y}{x^2+4y^2}$. 则当 $x^2+y^2 \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4y^2 - x^2 - 8xy}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

(4分)

作 L 所围区域内部的椭圆 $L_1: x^2+4y^2=\varepsilon^2$ ($\varepsilon > 0$ 充分小, 顺时针方向), 记 L 和 L_1 所围成的区域为 D , 由 Green 公式得

$$\oint_{L+L_1} \frac{(x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2+4y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

(3分)

又因为

$$\begin{aligned} \oint_{L_1} \frac{(x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2+4y^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{L_1} (x-y)dx + (x+4y)dy \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{x^2+4y^2 \leq \varepsilon^2} \left[\frac{\partial(x+4y)}{\partial x} - \frac{\partial(x-y)}{\partial y} \right] dx dy \\ &= -\frac{2}{\varepsilon^2} \iint_{x^2+4y^2 \leq \varepsilon^2} dx dy = -\pi, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \oint_L \frac{(x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2+4y^2} = \left(\oint_{L+L_1} - \oint_{L_1} \right) \frac{(x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2+4y^2} = \pi. \quad (3分)$$

六、(8分) 设 $P(x, y, z)$ 和 $R(x, y, z)$ 在三维空间上有连续偏导数, 记上半球面 $S: z = z_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}$, 且方向向上. 若对任意点 (x_0, y_0, z_0) 和 $r > 0$, 第二型曲面积分 $\iint_S P dy dz + R dx dy = 0$. 求证: $\frac{\partial P}{\partial x} \equiv 0$.

证 记 $S_1 = \{(x, y, z_0) | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2\}$, 取下侧, 则 $S + S_1$ 构成一封闭曲面的外侧. 由题设条件 $\iint_S P dy dz + R dx dy = 0$, 有

$$\oiint_{S+S_1} P dy dz + R dx dy = \iint_{S_1} P dy dz + R dx dy.$$

又记 $S + S_1$ 所包围的空间区域为 Ω , 利用 Gauss 公式得

$$\oiint_{S+S_1} P dy dz + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

(3分)

而 $\iint_{S_1} P dy dz + R dx dy = - \iint_D R(x, y, z_0) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2\}$ 是 S_1 在 xOy 平

面上的投影,所以

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = - \iint_D R(x, y, z_0) dx dy.$$

(2分)

对上式两边分别利用三重积分与二重积分的中值定理,存在点 $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$ 及 $(x', y') \in D$,使得

$$\frac{2\pi r^3}{3} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Big|_{(\xi, \eta, \zeta)} = -\pi r^2 R(x', y', z_0),$$

即

$$\frac{2r}{3} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Big|_{(\xi, \eta, \zeta)} = -R(x', y', z_0). \quad (*)$$

令 $r \rightarrow 0^+$,则 $(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$, $(x', y') \rightarrow (x_0, y_0)$,故由上式可得 $R(x_0, y_0, z_0) = 0$.由于点 (x_0, y_0, z_0) 的任意性,所以 $R(x, y, z) \equiv 0$,从而有 $\frac{\partial R}{\partial z} \equiv 0$,代入(*)式,得

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(\xi, \eta, \zeta)} = 0.$$

令 $(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$,得 $\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = 0$.由于点 (x_0, y_0, z_0) 的任意性,因此 $\frac{\partial P}{\partial x} \equiv 0$. (3分)

七、(8分) 设 $\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2} dx$, 其中 $t > 0$.

(1) (3分) 求证: 对于任何 $T > 0$, 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2} dx$ 在 $(0, T]$ 上一致收敛.

(2) (5分) 求证: 对任何 $t > 0$, 有 $\varphi(t) = \varphi\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{\pi}{2} \ln t$.

证 (1) 易知: 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) < \sqrt{x}$. 所以

$$0 \leq \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2} < \sqrt{T} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}, \quad x \in [0, T].$$

由 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ 收敛, 可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2} dx$ 在 $(0, T]$ 上一致收敛. (3分)

(2)

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{t}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{x}{t})}{1+x^2} dx \stackrel{x=\frac{1}{u}}{=} \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1+\frac{1}{tu})}{1+\frac{1}{u^2}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+tu) - \ln(tu)}{1+u^2} du \\ &= \varphi(t) - \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+u^2} du - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du \\ &= \varphi(t) - \frac{\pi}{2} \ln t - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du. \end{aligned}$$

因为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln x}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx,$$

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du = 0$. 故

$$\varphi\left(\frac{1}{t}\right) = \varphi(t) - \frac{\pi}{2} \ln t.$$

(5分)