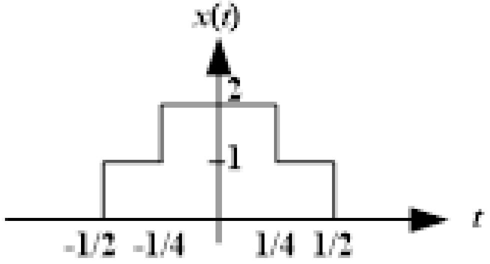
习题课

2020.6.4

傅里叶变换

1. 已知$x(t)$ 波形如下图1所示，求其傅里叶变换的像函数。（6分）



解： $x(t)=u(t+0.5)+u(t+0.25)-u(t-0.25)-u(t-0.5)$

由 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|<\tau/2 \\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases} \Leftrightarrow \tau \mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$ 计算过程P161例5.6

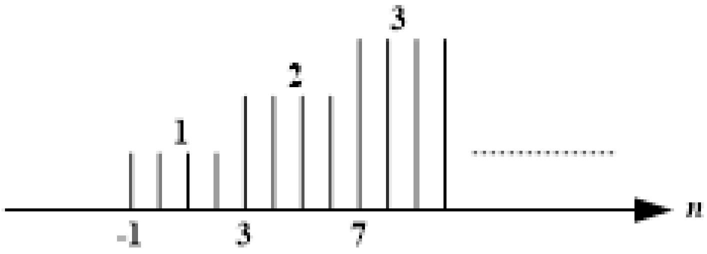
$u(t+0.25)-u(t-0.25) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} sa(\dfrac{\omega}{4})$

$u(t+0.5)-u(t-0.5) \Leftrightarrow sa(\dfrac{\omega}{2})$

$\mathrm{F}\{x(t)\}=\dfrac{1}{2} sa(\dfrac{\omega}{4})+sa(\dfrac{\omega}{2})$

2. 已知**x[n]**序列波形如图2所示，从**-1**点开始延续到无穷大的有规律数列，写出其闭合解析表达式，并求其**Z**变换。（6分）

Z变换



解：$x[n]=\sum_{k=0}^{\infty} u[n+1-4k]$

由 $u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, |z|>1$

和时移性质 $f[n-n_0] \Rightarrow F(z)z^{-n_0}$

$$Z\{x[n]\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{1-4k}}{1-z^{-1}}=\frac{z}{(1-z^{-1})(1-z^{-4})}$$

3. 因果连续时间信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换的像函数为 $\boldsymbol{X(s)=(2s-3)\big/(s^2+5s+6)}$，试求信号 $x(t)$ 的初值 $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t)$ 和终值 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$。

终值定理和初值定理

$$\lim_{t\to 0^+} x(t)=\lim_{s\to\infty} sx(s)=\frac{s(2s-3)}{s^2+5s+6}=2$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} sx(s)=\frac{s(2s-3)}{s^2+5s+6}=0$$

4.计算一个有限长时间序列 $x[n]=e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\sin(\frac{4\pi}{N}n)$，$0\le n\le N-1$ 的 N 点 DFT

离散傅里叶变换

$$x[n]=e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{j}{2}e^{-j\frac{4\pi}{N}n}-\frac{j}{2}e^{j\frac{4\pi}{N}n}$$

$$X_k=DFT\{x[n]\}=\sum_{k=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2k\pi}{N}n}\qquad x[n]=IDFT\{X_k\}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{j\frac{2k\pi}{N}n}$$

由IDFT的公式可以得到，$X_1=N, X_{N-2}=\frac{jN}{2}, X_2=-\frac{jN}{2}$

5. 求 $\dfrac{e^{s}}{s(1+e^{-s})}$，$\mathrm{Re}\{s\}>0$ 的拉普拉斯反变换。

$$\frac{e^{s}}{s(1+e^{-s})}=\frac{e^{s}}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(e)^{-ks}=\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}e^{(1-k)s}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}\}=u(t)$$

$$f(t-t_0)\Rightarrow F(s)e^{-st_0}$$

$$L^{-1}\{X(s)\}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}u(t+1-k)$$

6.已知 $x(t)=\begin{cases}1/t, t\neq 0\\ 0, t=0\end{cases}$，求 $y(t)=x(t)*x(t)$，其中 * 表示卷积运算。

$X(\omega)=F\{x(t)\}=-j\pi Sgn(\omega)$ 计算过程P175例5.12

$$Y(\omega)=-\pi^{2}$$

$$y(t)=-\pi^{2}\delta(t)$$

拉普拉斯变换

卷积性质

7 已知 $y[n]-\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{3}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]-3x[n-2]$表示的因果 LTI 系统，请写出系统函数，概画出该系统的幅频响应。

系统函数

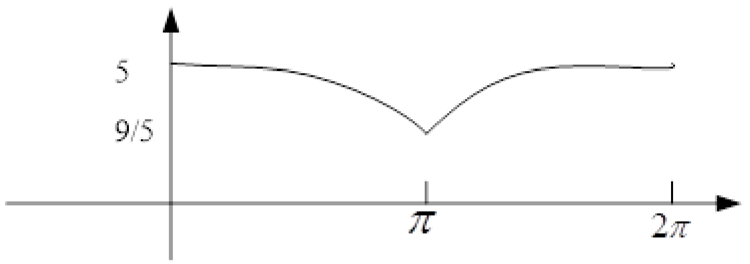
$$H(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}-3z^{-2}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{3}z^{-2}}=\frac{(1-2z^{-1})(1+\frac{3}{2}z^{-1})}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})}$$

$$=\frac{(1-2z^{-1})(1+\frac{3}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{2}{3}z^{-1})}\bullet\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}\bullet\frac{(1+\frac{2}{3}z^{-1})}{(1-\frac{2}{3}z^{-1})}$$

第一项是一个全通系统，具体用 z=1，也就是$\Omega=0$时带入，可得幅频响应为 3

第二项是一个高通系统，在$\Omega=0$，可得幅频响应为 1/3，在$\Omega=\pi$，可得幅频响应为 3

第三项是一个低通系统，在$\Omega=0$，可得幅频响应为 5，在$\Omega=\pi$，可得幅频率响应为 1/5



8、如果*表示卷积，@表示相关，对于任意的满足模可积的两个函数 $x(t)$，$y(t)$，证明

$[x(t)*y(t)]@[x(t)*y(t)]$ 与 $[x(t)@x(t)]*[y(t)@y(t)]$ 相等

卷积性质

证：对左边求傅里叶变换，得：

$$
\begin{aligned}
&F\{[x(t)*y(t)]@[x(t)*y(t)]\} \\
&= F\{[x(t)*y(t)]\} \bullet F\{[x(t)*y(t)]\}^* \\
&= X(\omega)Y(\omega)X^*(\omega)Y^*(\omega) \\
&= |X(\omega)|^2 |Y(\omega)|^2
\end{aligned}
$$

同理，对右边：

$$F\{[x(t)@x(t)]*[y(t)@y(t)]\} = |X(\omega)|^2 |Y(\omega)|^2$$

由于傅里叶变化的一一对应的特性，显然左边=右边。得证。

一、1. 信号 $x(t)$ 的傅里叶频谱为 $X(j\omega)$，那么信号 $x(t)$ 的偶分量 $x_e(t)$、奇分量 $x_o(t)$ 各自的频谱与 $X(j\omega)$ 有什么关系？

解：x(t)的频谱X(jω)=R (jω)+jI(jω)，则x(t)偶分量的频谱为X(jω)的实部R (jω)， x(t)奇分量的频谱为X(jω)的虚部jI (jω)

奇偶虚实性

2. 信号 $x(t)$ 为实的因果信号且在 $t=0$ 时不包含 $\delta(t)$ 及其导数项，它的傅里叶频谱按实部虚部表示为 $X(j\omega)=R(j\omega)+jI(j\omega)$，请问 $R(j\omega)$、$I(j\omega)$ 各自有何特性？ $R(j\omega)$ 与 $I(j\omega)$ 有何联系？

解：R (jω)具有偶对称性，I(jω)具有奇对称性；

奇偶虚实性，希尔伯特变换

该信号的傅里叶频谱具有实部或虚部自满性，即R (jω)与I (jω)可以表示成连续希尔伯特变换关系：

$$R(j\omega)=I(j\omega)*\frac{1}{\pi\omega}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I(j\sigma)}{\omega-\sigma}d\sigma,\mathrm{I}(j\omega)=-R(j\omega)*\frac{1}{\pi\omega}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(j\sigma)}{\omega-\sigma}d\sigma$$

3、微分方程 $y'(t)+2y(t)=x(t)$ 描述一个起始松弛的连续时间系统，试求当输入信号 $x(t)=\cos(2t)$，$-\infty<t<\infty$ 时系统的输出 $y(t)$。

解：根据微分方程得到系统函数 $H(s)=\dfrac{1}{s+2}$

LTI系统对复指数输入的响应

利用欧拉公式 $x(t)=\cos(2t)=0.5(e^{j2t}+e^{-j2t})$

因为 $e^{s_0 t}\xrightarrow{H(s)}H(s_0)e^{s_0 t}$

所以 $y(t)=0.5[H(j2)e^{j2t}+H(-j2)e^{-j2t}]$

$$=0.5[\frac{1}{2+j2}e^{j2t}+\frac{1}{2-j2}e^{-j2t}]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(2t-\frac{\pi}{4})$$

4、信号 $x(t)$ 的傅里叶频谱函数为 $X(j\omega)=-j\,\mathrm{sgn}(\omega)=\begin{cases}-j, & \omega>0\\ j, & \omega<0\end{cases}$，试求 $x(t)$。

解：（6.10.2节）利用傅里叶变换的对称性质，或者直接根据表6.3得到

$$x(t)=\frac{1}{\pi t}$$

傅里叶变换的对称性质

根据例题5.12，

$$F(\omega)=\mathcal{F}\{\mathrm{sgn}(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{0}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\frac{2}{j\omega}$$

对称性质，

$$f(t)\xrightarrow{CFT}F(\omega),F(t)\xrightarrow{CFT}2\pi f(-\omega)$$

所以，$\dfrac{2}{jt}\xrightarrow{CFT}2\pi\,\mathrm{sgn}(-\omega)=-2\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$

5. 利用傅里叶变换求$\int_0^\infty \cos(\omega t)d\omega$的积分值。

傅里叶反变换

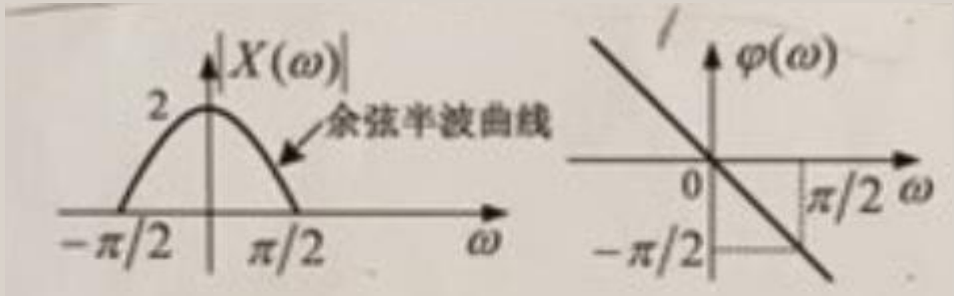
解：$\delta(t) \xrightarrow{CFT} 1$

$$\therefore \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\cos\omega t + j\sin\omega t] d\omega$$ （傅里叶反变换公式）

考虑到cos为偶函数，sin为奇函数，所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t d\omega=0, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t d\omega = \delta(t) \Rightarrow \int_0^{\infty} \cos\omega t d\omega = \pi\delta(t)$$

6. 试画出信号$x(t) = \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t} + \frac{\sin(\pi t/2 - \pi)}{\pi t - 2\pi}$的幅度频谱曲线$|X(\omega)|$和相位频谱曲线$\varphi(\omega)$，并求出对这个信号进行采样的奈奎斯特间隔$T_s$。



解：记 $x_0(t) = \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t} \xrightarrow{CFT} X_0(\omega) = u(\omega + \pi/2) - u(\omega - \pi/2)$

则有 $x(t) = x_0(t) + x_0(t-2) \xrightarrow{CFT} X(\omega) = X_0(\omega) + X_0(\omega)\mathrm{e}^{-j2\omega} = [u(\omega+\pi/2) - u(\omega-\pi/2)](1+\mathrm{e}^{-j2\omega})$

$$= [u(\omega+\pi/2) - u(\omega-\pi/2)](\mathrm{e}^{j\omega} + \mathrm{e}^{-j\omega})\mathrm{e}^{-j\omega}$$

$$= 2\cos\omega\,\mathrm{e}^{-j\omega}[u(\omega+\pi/2) - u(\omega-\pi/2)]$$

时移性质、采样定理

所以，$|X(\omega)| = 2\cos\omega[u(\omega+\pi/2) - u(\omega-\pi/2)], \varphi(\omega) = e^{-j\omega}$

非零频谱范围为$[-\pi/2, \pi/2]$，所以奈奎斯特间隔$T_s = \pi/\omega_M = \pi\big/_{\pi/2} = 2$

7. 求频率响应为 $H(\omega)=\omega^2/(5-\omega^2+2j\omega)$ 的连续时间因果 LTI 系统的单位阶跃响应 $s(t)$。

解： $H(s)=-s^2/\left(s^2+2s+5\right)$

$$S(s)=\frac{H(s)}{s}=\frac{-s}{s^2+2s+5}=\frac{-(s+1)+1}{(s+1)^2+2^2}$$

由 $\cos\omega_0 tu(t)\xrightarrow{LT}\frac{s}{s^2+\omega_0^2},\sin\omega_0 tu(t)\xrightarrow{LT}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

得到 $s(t)=0.5e^{-t}\sin 2tu(t)-e^{-t}\cos 2tu(t)$

单位阶跃响应

8、已知 $X(z)$ 为序列 $x[n]$ 的 Z 变换，$X(z)=Z\{x[n]\}$。试求以下序列的 Z 变换，要求用 $X(z)$ 表达：1） $x[-n]$；2） $x^*[n]$。

解：$Z\left\{x[-n]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[-n]z^{-n}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m](z^{-1})^{-m}=X(z^{-1})$

$$Z\left\{x^*[n]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*[n]z^{-n}=\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n](z^*)^{-n}\}^*=X^*(z^*)$$

Z变换的对称性质

9、已知序列 $x[n]=r^n\sin(\omega_0 n)u[n]$，$-\infty<n<+\infty$。求 $x[n]$ 的 Z 变换 $X(z)$

P236例6.11

解：$x[n]=\frac{1}{2j}(re^{j\omega_0})^n u[n]-\frac{1}{2j}(re^{-j\omega_0})^n u[n]$

根据 $a^n u[n]\xrightarrow{Z}\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a|$

Z变换

$$X(z)=\frac{1}{2j}\frac{1}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}-\frac{1}{2j}\frac{1}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}},|z|>r$$

$$=\frac{r(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-2r(\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

高斯函数的傅里叶变换，相关定理，能量谱密度

10、试求信号 $x(t)=e^{-\pi t^2}$ 的自相关函数 $R_x(t)$、信号 $x(t)$ 的能量 E_x 及其能量谱密度函数 $\psi_x(\omega)$。可能利用的数学式：$\int_0^\infty e^{-(t/\tau)^2}dt=\sqrt{\pi}\tau/2$

解：$R_x(t)=x(t)*x^*(-t)=e^{-\pi t^2}*e^{-\pi t^2}$

利用高斯变换对 $e^{-(t/\tau)^2}\xrightarrow{CFT}\sqrt{\pi}\tau e^{-(\omega\tau/2)^2}\xrightarrow{\tau=1/\sqrt{\pi}}e^{-\pi t^2}\xrightarrow{CFT}e^{-\omega^2/4\pi}$

$$R_x(t)=e^{-\pi t^2}*e^{-\pi t^2}\xrightarrow{CFT}e^{-\omega^2/4\pi}\times e^{-\omega^2/4\pi}=e^{-\omega^2/2\pi}=e^{-(\omega/2)^2(\sqrt{2}/\sqrt{\pi})^2}$$

取 $\tau=\sqrt{2}/\sqrt{\pi}$，得到 $R_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(\sqrt{\pi}t/\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{2}t^2}$

能量 $E_x=R_x(0)=1/\sqrt{2}$

能量谱密度

$$\Psi_x(\omega)=|X(\omega)|^2=[e^{-\omega^2/4\pi}]^2=e^{-\omega^2/2\pi}$$

1. 求信号 $x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-3t+1}\delta(t)$ 通过微分器的输出信号 $y(t)$。

解：$x(t)=e^{-2t}u(t)+e\delta(t)$

$$y(t)=x'(t)=-2e^{-2t}u(t)+\delta(t)+e\delta'(t)$$

冲激函数的筛分性质

2. 对于长度为 N 的有限长序列 $x[n]$, $n=0,1,2,\cdots,N-1$，试问对 $x[n]$ 进行 N 点 DFT 运算所得到的序列 $X(k)$ 与 $x[n]$ 的傅里叶频谱 $X(e^{j\Omega})$ 有何关系？对该序列 $x[n]$ 以周期 N 左右无限延拓构成周期序列 $\tilde{x}[n]$，试问 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶级数系数 F_k 与 $X(k)$ 有何关系？

解：第五章，**DFT**与**DFS**和**DTFT**的关系

$$X(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=k\frac{2\pi}{N}}=X[k]$$

$$X[k]=NF_k r_N[k]$$

3. 试求图 1.3 所示的半波正弦脉冲信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换和傅里叶变换。

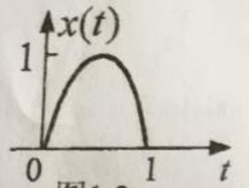


图1.3

解： $x(t)=\sin\pi t[u(t)-u(t-1)]$

$=\sin\pi t u(t)*[\delta(t)+\delta(t-1)]$

$$X(s)=\frac{\pi(1+e^{-s})}{s^2+\pi^2}$$

$$X(j\omega)=\frac{\pi(1+e^{-j\omega})}{-\omega^2+\pi^2}$$

4. 对信号 $x(t)=[\sin(5\pi t)/(\pi t)]^2$ 进行采样的奈奎斯特频率 ω_s 和奈奎斯特间隔 T_s 分别是多少？

解： $X(j\omega)$ 带限于 $\omega_M=10\pi$

所以奈奎斯特频率 $\omega_S=2\omega_M=20\pi$

奈奎斯特间隔 $T_S=\dfrac{2\pi}{\omega_S}=\dfrac{1}{10}$

5. 试求升余弦脉冲信号 $x(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\tau}[1+\cos(\frac{\pi}{\tau}t)], & |t|<\tau \\ 0, & |t|>\tau\end{cases}$ 的频谱。

解：$\begin{cases}\frac{1}{2\tau}, |t|<\tau \\ 0, |t|>\tau\end{cases} \xrightarrow{\text{CFT}} Sa(\omega\tau)$

$$\frac{1}{2\tau}[1+\cos(\frac{\pi t}{\tau})]=\frac{1}{2\tau}[1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi t}{\tau}}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi t}{\tau}}]$$

$$f(t)\xrightarrow{\text{CFT}} F(\omega)=Sa(\omega\tau)+\frac{1}{2}Sa[(\omega-\frac{\pi}{\tau})\tau]\frac{1}{2}Sa[(\omega+\frac{\pi}{\tau})\tau]$$

$$=\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\omega\tau-\pi)}{\omega\tau-\pi}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\omega\tau+\pi)}{\omega\tau+\pi}$$

$$=-\frac{\pi^2\sin\omega\tau}{\omega\tau(\omega^2\tau^2-\pi^2)}$$

$$=\frac{Sa(\omega\tau)}{1-(\frac{\omega\tau}{\pi})^2}$$

6. 对于系统函数为 $H(s)=\frac{s+2}{s^2+7s+12}$，$-4<\mathrm{Re}\{s\}<-3$ 的某一个连续时间 LTI 系统，求它的单位冲激响应 $h(t)$。

解：$H(s)=\frac{s+2}{s^2+7s+12}=\frac{s+2}{(s+4)(s+3)}=\frac{-1}{s+3}+\frac{2}{s+4}$

$$h(t)=2e^{-4t}u(t)-e^{-3t}u(-t)$$

7. 试分别求如下拉普拉斯变换和 Z 变换的反变换 $f(t)$ 和 $f[n]$，

$F(s)=\ln(1+as^{-1})$，$a>0$，$\mathrm{Re}\{s\}>0$ 和 $F(z)=\ln(1+az^{-1})$，$|z|>|a|$

解：$\frac{dF(s)}{s}=\frac{-a/s^2}{1+as^{-1}}=\frac{-a}{s^2+as}=\frac{-1}{s}+\frac{1}{s+a}\Rightarrow e^{-at}u(t)-u(t)$

$$F(s)\Rightarrow\frac{1}{t}(e^{-at}-1)u(t)$$

$$F(z)=\ln(1+az^{-1})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^nz^{-n}}{n}\Rightarrow f[n]=\frac{-(-a)^n}{n}u[n-1]$$

计算过程P207例5.22

8. 已知 $H(z)$ 为一个稳定的因果系统的系统函数，$h[n]$ 为其单位冲激响应。试证明 $\lim\limits_{n\to\infty} h[n]=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)H(z)$，给出推导过程。

证明过程P292 Z变换终值定理

解：$$(z-1)F(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}(f[n+1]-f[n])z^{-n}=f[0]z+\sum_{n=0}^{\infty}(f[n+1]-f[n])z^{-n}$$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)=f[0]+\sum_{n=0}^{\infty}f[n+1]-f[n]=\lim_{n\to\infty}f[n]$$

9. 微分方程 $y'(t)+3y(t)=2x(t)$ 描述一个起始松弛的连续时间系统，试求当输入信号 $x(t)=e^{2t}$，$-\infty<t<\infty$ 时系统的输出 $y(t)$。

解：$$H(s)=\frac{2}{s+3}$$

$$y(t)=H(2)e^{2t}=\frac{2}{5}e^{2t}$$

10. 已知系统的频率响应 $H(j\omega)=\dfrac{\omega e^{-j(\omega-3\pi/2)}}{10-\omega^2+6j\omega}$，求它的单位冲激响应 $h(t)$。

解：$$H(j\omega)=\frac{\omega e^{-j(\omega-3\pi/2)}}{-\omega^2+6j\omega+10}=\frac{1}{(j\omega+3)^2+1}\frac{j\omega}{j}e^{-j(\omega-3\pi/2)}$$

$$\frac{d\frac{1}{j}e^{-3t}\sin tu(t)}{dt}=\frac{1}{j}[-3e^{-3t}\sin tu(t)+e^{-3t}\cos tu(t)]$$

$$h(t)=-3e^{-3(t-1)}\sin(t-1)u(t-1)+e^{-3(t-1)}\cos(t-1)u(t-1)$$

3. 已知信号 $x(t)$ 的傅里叶频谱 $X(j\omega)$ 如图 1.3 所示，试求 $x(t)$。

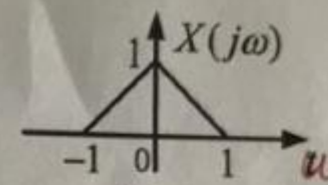


图1.3

解： $X'(j\omega)=u(\omega+1)-2u(\omega)+u(\omega-1)\xrightarrow{CFT^{-1}}-jtx(t)$

$$X''(j\omega)=\delta(\omega+1)-2\delta(\omega)+\delta(\omega-1)\xrightarrow{CFT^{-1}}-t^2x(t)$$

由于 $e^{j\omega_0 t}\xrightarrow{CFT}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$$\delta(\omega+1)-2\delta(\omega)+\delta(\omega-1)\xrightarrow{CFT^{-1}}\frac{1}{2\pi}(e^{-jt}-2+e^{jt})=\frac{\cos t-1}{\pi}$$

$$x(t)=\frac{1-\cos t}{\pi t^2}$$

4. 差分方程**y[n]-0.5y[n-1]=x[n]**描述一个起始松弛的离散时间系统，试求当输入信号 $x[n]=1+(-1)^n,-\infty<n<\infty$ 时系统的输出**y[n]**。

解：频率响应 $H(e^{j\Omega})=1/(1-0.5e^{-j\Omega})$

$$e^{j\Omega_0 n}\xrightarrow{H(e^{j\Omega})}H(e^{j\Omega_0})e^{j\Omega_0 n}$$

$$x[n]=1+(-1)^n=e^{j0n}+e^{j\pi n}$$

$$y[n]=H(e^{j0})e^{j0n}+H(e^{j\pi})e^{j\pi n}$$

$$=\frac{1}{1-0.5}\bullet 1+\frac{1}{1-0.5e^{-j\pi}}\bullet(-1)^n=2+\frac{2}{3}(-1)^n$$

6、某一个实的连续时间因果稳定系统具有最小相移，其频率响应 $H(\omega)$ 满足关系 $|H(\omega)|^2=\dfrac{\omega^2+9}{\omega^4+5\omega^2+4}$，试求系统函数 $H(s)$，并概画出零极点图和收敛域。

解：由于实系统的频谱响应满足共轭对称性，即 $H^*(\omega)=H(-\omega)$，则

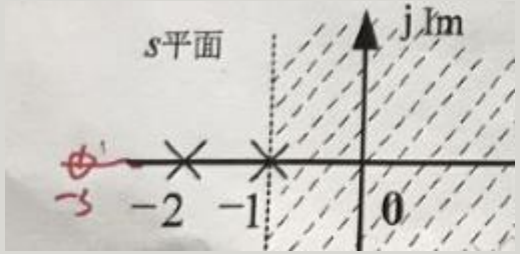
$$|H(\omega)|^2=H(\omega)H^*(\omega)=H(\omega)H(-\omega)$$

由于系统稳定，$H(\omega)=H(s)|_{s=j\omega}$，得到 $|H(s)|^2=H(s)H(-s)$

所以 $|H(s)|^2=\dfrac{9-s^2}{4-5s^2+s^4}=\dfrac{(3-s)(3+s)}{(s+2)(s-2)(s+1)(s-1)}=\dfrac{3+s}{(s+2)(s+1)}\bullet\dfrac{3-s}{(-s+2)(-s+1)}$

得到 $H(s)=\dfrac{3+s}{(s+2)(s+1)}$

系统因果，所以收敛域 $\mathrm{Re}\{s\}>-1$



7. 已知 $x(t)=\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$, $y(t)=\left[\dfrac{\sin(\pi t/2)}{\pi t}\right]^2$，求 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互相关函数 $R_{xy}(t)$。

解：由于**y(t)**是实偶函数，所以 $R_{xy}(t)=x(t)*y^*(-t)=x(t)*y(t)$

$$F\left\{R_{xy}(t)\right\}=X(j\omega)Y(j\omega)$$

$$x(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}\xrightarrow{CFT}X(j\omega)=\begin{cases}1,-\pi<\omega<\pi\\0,else\end{cases}$$

$$y_0(t)=\frac{\sin\pi t/2}{\pi t}\xrightarrow{CFT}Y_0(j\omega)=\begin{cases}1,-\pi/2<\omega<\pi/2\\0,else\end{cases}$$

$$y(t)=y_0(t)\times y_0(t)\xrightarrow{CFT}Y(j\omega)=Y_0(j\omega)Y_0(j\omega)/2\pi$$

$$Y(j\omega)=\begin{cases}(\omega+\pi)/2\pi,-\pi<\omega<0\\-(\omega-\pi)/2\pi,0<\omega<\pi\\0,else\end{cases}$$

$$X(j\omega)Y(j\omega)\text{=}Y(j\omega)$$

$$R_{xy}(t)\text{=}F\left\{Y(j\omega)\right\}=y(t)=y_0(t)=\left[\frac{\sin\pi t/2}{\pi t}\right]^2$$

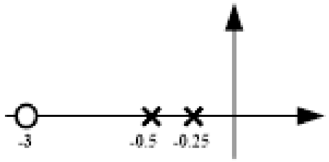
二、由差分方程 $y[n]+0.75y[n-1]+0.125y[n-2]=x[n]+3x[n-1]$ 表示的因果系统。（共 14 分）

P372例8.13

(1) 求系统函数 $H(z)$，画出 $H(z)$ 在 z 平面上零极点分布和收敛域；（5 分）

(2) 已知其附加条件为 $y[0]=1, y[-1]=-6$，当输入 $x[n]=(0.5)^n u[n]$ 时，求系统的零状态响应 $\boldsymbol{y_{zs}[n]}$ 和零输入响应 $\boldsymbol{y_{zi}[n]}$。（10 分）

解：（1）$H(z)=\dfrac{1+3z^{-1}}{1+0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}=\dfrac{1+3z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})(1+0.25z^{-1})}, |z|>0.5$



（2）对方程的两边分别取单边Z变换，并用单边Z变换的时移性质，则有：

零状态、零输入

$$Y_u(z)+\frac{3}{4}(Y_u(z)z^{-1}+y[-1])+\frac{1}{8}(Y_u(z)z^{-2}+y[-1]z^{-1}+y[-2])=X_u(z)+3X_u(z)z^{-1}$$

整理后得到：

$$Y_u(z)=\frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}X_u(z)-\frac{\frac{3}{4}y[-1]+\frac{1}{8}y[-2]+\frac{1}{8}y[-1]z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

上式的第二项需知道**y[-1]**和**y[-2]**，而本题已知的是**y[0]**和**y[-1]**，为求得**y[-2]**，可以用前推方程求得

$$y[-2]=8(x[0]+3x[-1]-y[0]-(3/4)y[-1])=36$$

又因为 $X_u(z)=Z_u\ x[n]\ =\dfrac{1}{1-(1/2)z^{-1}}$

零状态响应：$Y_{\mathrm{uzs}}(z)=\dfrac{1+3z^{-1}}{1+(3/4)z^{-1}+(1/8)z^{-2}}\cdot\dfrac{1}{1-(1/2)z^{-1}}=\dfrac{1+3z^{-1}}{[1+(1/2)z^{-1}][1+(1/4)z^{-1}][1-(1/2)z^{-1}]}$

$$=\frac{7/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{5}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{11/3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

零输入响应：$Y_{\mathrm{uzi}}(z)=\dfrac{-(3/4)(-6)+(1/8)\cdot 36+(1/8)(-6)}{1+(3/4)z^{-1}+(1/8)z^{-2}}=\dfrac{(3/4)z^{-1}}{[1+(1/2)z^{-1}][1+(1/4)z^{-1}]}$

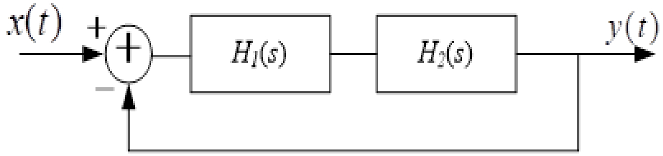
$$=\frac{3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}-\frac{3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

分别求单边拉氏反变换，得到

零状态响应：$y_{\mathrm{zs}}[n]=\dfrac{7}{3}(\dfrac{1}{2})^{n}u[n]-5(-\dfrac{1}{2})^{n}u[n]+\dfrac{11}{3}(-\dfrac{1}{4})^{n}u[n]$

零输入响应：$y_{\mathrm{zi}}[n]=3(-\dfrac{1}{4})^{n}-3(-\dfrac{1}{2})^{n},n\geq 0$

三、某 LTI 系统的系统结构如图 3 所示，其中 $H_2(s)=\dfrac{k}{s-1}$，子系统 $H_1(s)$ 满足条件：



当子系统 $H_1(s)$ 的输入是 $x_1(t)=2e^{-3t}u(t)$ 时，对应 $H_1(s)$ 的子系统输出为 $y_1(t)$；而在输入为 $x_2(t)=\dfrac{dx_1(t)}{dt}$ 时，对应 $H_1(s)$ 的子系统输出为 $-3y_1(t)+e^{-2t}u(t)$；求：（共 12 分）

(1) 子系统 $H_1(s)$ 和对应的单位冲激响应函数 $h_1(t)$（5 分）

(2) 整个系统的 $H(s)$（5 分）

(3) 若要使系统 $H(s)$ 稳定，k 的取值范围（2 分）

解：（1）
$$H_1(s)\frac{2}{s+3}=Y_1(s)$$
$$H_1(s)\frac{2s}{s+3}=-3Y_1(s)+\frac{1}{s+2}$$
$$H_1(s)=\frac{1/3}{s+2}$$
$$h_1(t)=\frac{1}{3}e^{-2t}u(t)$$

（2）
$$\tilde{H}(s)=\frac{H_1(s)H_2(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}=\frac{\dfrac{k/3}{(s+2)(s-1)}}{1+\dfrac{k/3}{(s+2)(s-1)}}=\frac{k/3}{s^2+s-2+k/3}$$

（3）系统稳定，所有极点都位于左半平面
$$-2+k/3>0$$
$$k>6$$

系统结构，系统性质

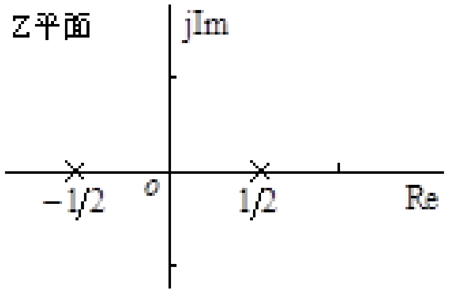
四、已知实的离散时间因果 LTI 系统的零、极点如图 5 所示，且它在输入为 $x[n]=\cos(\pi n)$ 时的输出为 $y[n]=(-1)^n$.{提示：在有限 z 平面上没有零点}（共 15 分）

(1) 写出它的系统函数 $H(z)$ 和收敛域。(6 分)

(2) 写出系统的差分方程表示。(2 分)

(3) 对于差分方程描述的系统，用并联型和级联型结构实现结构，要求延时单元不多于 2 个。(4 分)

(4) 求其单位冲激响应。(3 分)



解：（1）根据零极点图得到 $H(z)=H_0\dfrac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})},|z|>0.5$

输入 $x[n]=\cos(\pi n)=(-1)^n$，则 $y[n]=H(-1)(-1)^n$，所以 $H(-1)=1$

$$H_0\frac{(-1)^{-2}}{(1+0.5(-1)^{-1})(1-0.5(-1)^{-1})}=1\Rightarrow H_0=\frac{3}{4}$$

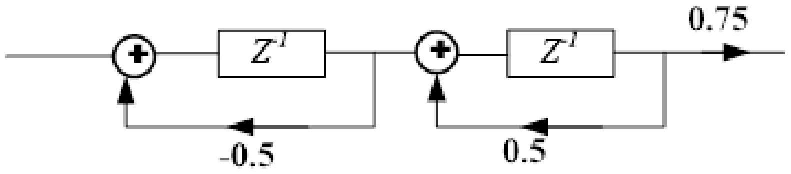
$$H(z)=\frac{3}{4}\frac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

（2）$H(z)=\dfrac{3}{4}\dfrac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})}=\dfrac{3}{4}\dfrac{z^{-2}}{1-0.25z^{-2}}$

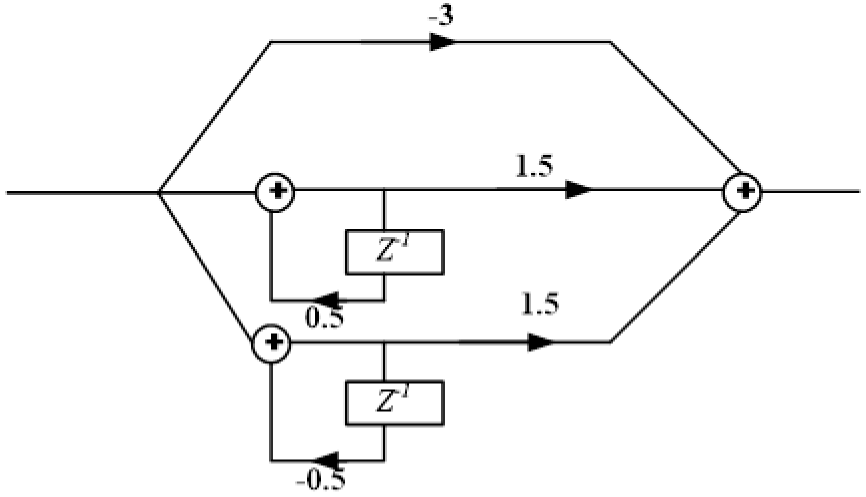
$$y[n]-0.25y[n-2]=3/4x[n-2]$$

系统函数，系统结构

（3）级联型 $H(z)=\frac{3}{4}\frac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})}=\frac{3}{4}\frac{z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})}\bullet\frac{z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})}$



并联型 $H(z)=\frac{3}{4}\frac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})}=\frac{3}{2}\frac{1}{1+0.5z^{-1}}+\frac{3}{2}\frac{1}{1-0.5z^{-1}}-3$



（4）$H(z)=\frac{3}{4}\frac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})}=\frac{3}{2}\frac{1}{1+0.5z^{-1}}+\frac{3}{2}\frac{1}{1-0.5z^{-1}}-3$

$$h[n]=-3\delta[n]+1.5(\frac{1}{2})^{n}u[n]+1.5(-\frac{1}{2})^{n}u[n]$$

二、信号 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^{|k|}e^{jk(2\pi/T)t}$，$0<\alpha<1$ 通过频率响应 $H(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$ 的 LTI 系统。试确定 W 值取多大时，才能确保系统输出信号 $y(t)$ 的平均功率至少是输入信号 $x(t)$ 平均功率的80%。（10 分）

帕什瓦尔定理

$x(t)$ 的 DFS 为 $a_k=\alpha^{|k|}$，

则 $x(t)$ 的功率 $P_x=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^{2|k|}=2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k}-1$

$=\frac{2}{1-\alpha^2}-1=\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$，$0<\alpha<1$

$x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$

$x(t)$ 通过带宽为 $(-W,W)$ 的理想低通滤波器，则能通过的最大谐波频率为 $N<W/(\frac{2\pi}{T})$，

输出 $Y(j\omega)=\sum_{k=-N}^{N}2\pi a_k\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$

对应 $y(t)$ 的功率 $P_y=\sum_{k=-N}^{N}|a_k|^2=\sum_{k=-N}^{N}\alpha^{2|k|}=2\sum_{k=0}^{N}\alpha^{2k}-1$

$=2\frac{1-\alpha^{2(N+1)}}{1-\alpha^2}-1=\frac{1+\alpha^2-2\alpha^{2(N+1)}}{1-\alpha^2}$

$\therefore \frac{P_y}{P_x}=\frac{1+\alpha^2-2\alpha^{2(N+1)}}{1+\alpha^2}\geq 0.8$

$N\geq\frac{\log(1+\alpha^2)-2\log\alpha-1}{2\log\alpha}$

取 N_0 为满足条件的最小整数，则 $W>2\pi N_0/T$

三、已知 $x[n]$ 是周期为 4 的周期序列，对序列 $x[n]$ 在 $0\le n\le 7$ 做 8 点 DFT 运算，得到 DFT 系数为：$X(0)=X(2)=X(4)=X(6)=1$，$X(1)=X(3)=X(5)=X(7)=0$。试求：（共 15 分）

1. 周期序列 $x[n]$，并概画出它的序列图形；（5 分）

2. 该周期序列 $x[n]$ 通过单位冲激响应为 $h[n]=(-1)^n\dfrac{\sin^2(\pi n/2)}{\pi^2 n^2}$ 的数字滤波器后的输出 $y[n]$，并概画出它的序列图形。（10 分）

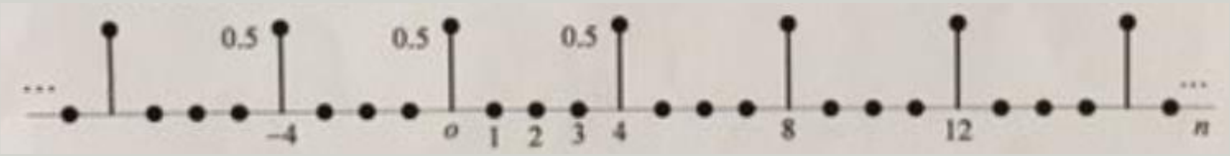
解:（1）首先通过IDFT求解**x[n]**，$x[n]=IDFT\{X[k]\}=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{j\frac{2k\pi}{N}n}$

$$x[n]=IDFT\{X[k]\}=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}X_k e^{j\frac{2k\pi}{8}n}=\frac{1}{8}[1+e^{j\pi n/2}+(-1)^n+e^{-j\pi n/2}]$$

$$=\frac{1}{8}[1+(-1)^n+2\cos\frac{\pi n}{2}]$$

计算得到，$x[n]=\begin{cases}0.5,\text{n=0,4}\\ 0,\text{n}\ne 0,4\end{cases},0\le n\le 7$

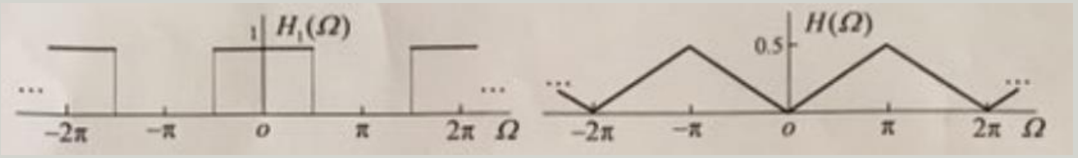
进行周期延拓，得到 $x[n]=\dfrac{1}{2}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta[n-4l]$



（2）$h_1[n]=\dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}\xrightarrow{\text{DTFT}}H_1(\Omega)=\begin{cases}1,|\Omega|<\pi/2\\0,|\Omega|>\pi/2\end{cases}$

$$h[n]=(-1)^n h_1^2[n]=e^{j\pi n}h_1[n]\times h_1[n]\xrightarrow{\text{DTFT}}H(\Omega)$$

根据卷积性质，$H(\Omega)=\dfrac{1}{2\pi}H_1(\Omega)*H_1(\Omega)*\delta(\Omega-\pi)$



根据**DFS**的公式 $X_k=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2k\pi}{N}n}$ 计算得到，

$X_k=\dfrac{1}{8},k=0,\pm1,\cdots$

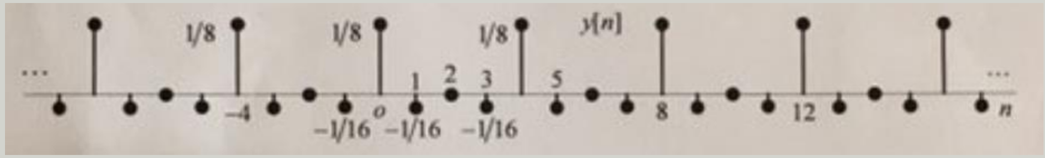
所以，**x[n]**的**DTFT**为 $X(\Omega)=\dfrac{\pi}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\pi/2)$

$$Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega)=\frac{\pi}{16}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[\Omega-(2k-1)\frac{\pi}{2}]+\frac{\pi}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[\Omega-(2k-1)\pi]$$

得到 $Y_0=0,Y_1=1/32$，$Y_2=1/16$，$Y_3=1/32$

$$y[n]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}Y_k e^{j\frac{2k\pi}{4}n}=\frac{1}{16}e^{j\pi n}+\frac{1}{32}[e^{j\pi n/2}+e^{-j\pi n/2}]$$

$$=\frac{1}{16}[(-1)^n+2\cos\frac{\pi n}{2}]$$



四、微分方程 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x''(t)-3x'(t)+2x(t)$ 所描述的因果连续时间系统的起始条件为 $y(0_-)=1,\ y'(0_-)=-1$。（共 15 分）

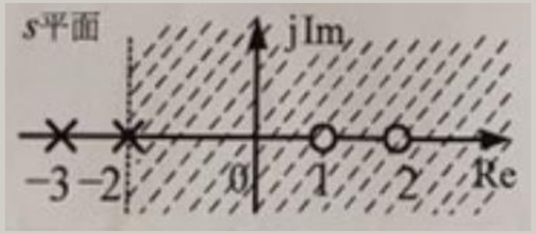
1. 试求该微分方程所描述的 LTI 系统的系统函数 $H(s)$，并画出 $H(s)$ 在 s 平面的零极点分布和收敛域；（5 分）

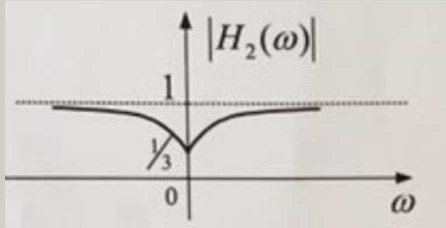
2. 画出该 LTI 系统的幅频响应特性曲线；（2 分）

3. 当输入 $x(t)=e^{-2t}u(t)$ 时，试求系统的零输入响应 $y_{zi}(t),t\geq 0$、零状态响应 $y_{zs}(t),t\geq 0$。（8 分）

解：1. 系统函数 $H(s)=\dfrac{s^2-3s+2}{s^2+5s+6}=\dfrac{(s-1)(s-2)}{(s+2)(s+3)}$

因为系统因果，所以收敛域为 $\mathrm{Re}\{s\}>2$





2. $H(s)=\dfrac{s-2}{s+2}\dfrac{s-1}{s+3}$ 可分为两个一阶系统级联，

其中 $H_1(s)=\dfrac{s-2}{s+2}$，$H_2(s)=\dfrac{s-1}{s+3}$

系统1为全通系统，系统2具有高通特性

3. 两边作单边 Laplace 变换，

$$[s^2Y_u(s)-sy(0_-)-y'(0_-)]+5[sY_u(s)-y(0_-)]+6Y_u(s)$$

$$=[s^2X_u(s)-sx(0_-)-x'(0_-)]-3[sX_u(s)-x(0_-)]+2X_u(s)$$

$\because x(t)=e^{-2t}u(t)$，$\therefore x(0_-)=0,\ x'(0_-)=0$.

所以 $Y_u(s)=\dfrac{s^2-3s+2}{s^2+5s+6}X_u(s)+\dfrac{sy(0_-)+5y(0_-)+y'(0_-)}{s^2+5s+6}$

零输入响应 $Y_{uzi}(s)=\dfrac{s+4}{s^2+5s+6}=\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{-1}{s+3}$

$$y_{zi}(t)=(2e^{-2t}-e^{-3t})u(t)$$

$\because X(s)=\dfrac{1}{s+2}$

$\therefore$ 零状态响应 $Y_{uzs}(s)=\dfrac{s^2-3s+2}{s^2+5s+6}\cdot\dfrac{1}{(s+2)}=\dfrac{-19}{s+2}+\dfrac{12}{(s+2)^2}+\dfrac{20}{s+3}$

$$y_{zs}(t)=(-19e^{-2t}+12te^{-2t}+20e^{-3t})u(t)$$

二、实序列 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\Omega})$，试确定满足下列 4 个条件的序列 $x[n]$：（1）$x[n]$ 在 $n>0$ 时等于 0；（2）在 $n=0$ 时 $x[0]>0$；（3）$\int_0^{2\pi}\left|X(e^{j\Omega})\right|^2 d\Omega=12\pi$；（4）$X(e^{j\Omega})=\mathrm{Re}[X(e^{j\Omega})]+j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\Omega})]$，其中 $\mathrm{Im}[X(e^{j\Omega})]=\sin\Omega-\sin(2\Omega)$。

（10 分）

解：$\mathrm{Im}[X(e^{j\Omega})]=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\sin\Omega n$

$\therefore x[-1]=1, x[-2]=-1$

由条件（3），$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^2=6$

又x[0]>0，所以x[0]=2

$\therefore x[0]=2, x[-1]=1, x[-2]=-1$

三、由差分方程 $y[n]+0.75y[n-1]+0.125y[n-2]=x[n]+3x[n-1]$ 表示的因果系统，已知其附加条件为 $y[0]=1, y[-1]=-6$。（15 分）

1．求系统函数 $H(z)$，画出 $H(z)$ 在 z 平面上零极点分布和收敛域；（5 分）

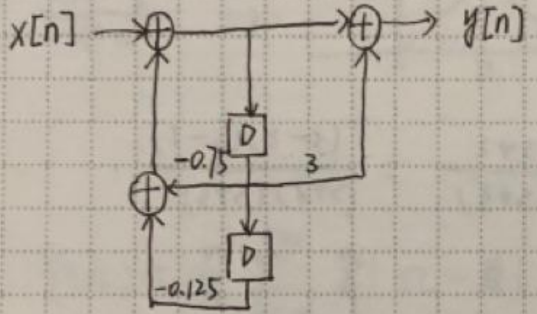
2．试画出用最少数目的三种离散时间基本单元（离散时间数乘器、相加器和单位延时器）实现该系统的规范型实现结构；（4 分）

3．当输入 $x[n]=(0.5)^n u[n]$ 时，求该系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 和零输入响应 $y_{zi}[n]$。（6 分）

计算过程P372例8.14

三. (1) $H(z)=\dfrac{1+3z^{-1}}{1+0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}=\dfrac{1+3z^{-1}}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$ $\quad |z|>\frac{1}{2}$

(2).



P372.
例8.14.

$y(-2)=36$.

(3). $X(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

$$Y(z)=H(z)X(z)-\frac{0.75y(-1)+0.125y(-2)+0.125y(-1)z^{-1}}{1+0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}$$

$$=\frac{11/3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{-5}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{7/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}-\frac{3}{1+0.5z^{-1}}$$

四、某一个稳定的LTI系统，已知其系统函数 $H(z)$ 的零点为 $z_1=-4, z_2=2$，极点为 $p_1=-0.25, p_2=0.5$。而且该系统对于常数序列的放大系数为 -1。试求：（20 分）

1. 该系统所对应的差分方程，给出它由一阶系统级联实现的方框图；（4 分）
2. 概画该系统的幅频响应特性曲线和相频响应特性曲线；（6 分）
3. 当输入 $x[n]=(0.5)^{n-3}u[n]$ 时，已知 $y[0]=-4, y[-1]=8$，求该系统的零输入响应 $y_{zi}[n]$ 和零状态响应 $y_{zs}[n]$。（10 分）

1. 系统函数 $H(z)=A\dfrac{1+4z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\cdot\dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

系统稳定，所以收敛域为 $|z|>\frac{1}{2}$

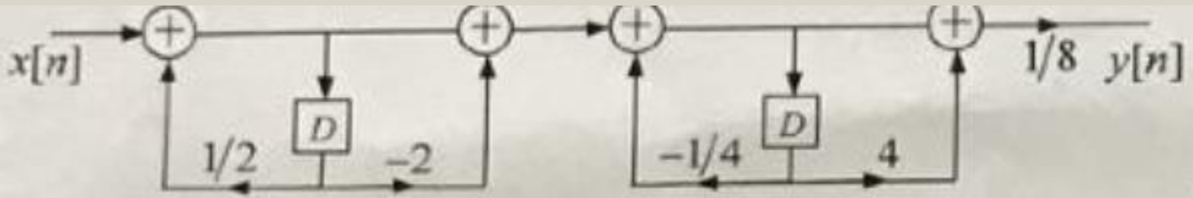
系统对常数序列的放大系数为 -1，将 $z=1$ 代入 $H(z)$，

得到 $A=\frac{1}{8}$

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}-8z^{-2}}{8-2z^{-1}-z^{-2}}$$

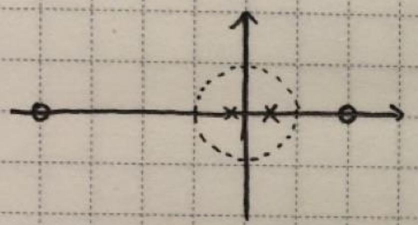
∴差分方程 $8y[n]-2y[n-1]-y[n-2]=x[n]+2x[n-1]-8x[n-2]$

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=\frac{1}{8}x[n]+\frac{1}{4}x[n-1]-x[n-2]$$

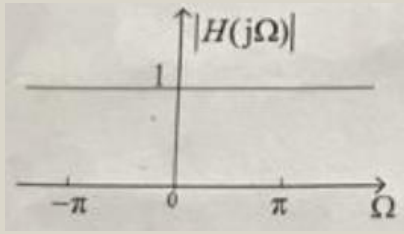


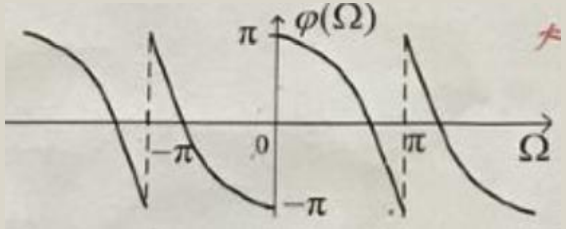
2. 系统的两对零极点 $\{z_1=-4, p_1=-\frac{1}{4}\}$，$\{z_2=2, p_2=\frac{1}{2}\}$ 都是关于原点成反比例对称，所以系统是一个全通系统

利用几何求值法，



Ω	0	π
$\varphi(\Omega)$	π	$-\pi$





3. 对差分方程两边取单边 Z 变换，输入信号是因果信号，则

$$Y_u(z)-\frac{1}{4}\left(Y_u(z)z^{-1}+y[-1]\right)-\frac{1}{8}\left(Y_u(z)z^{-2}+y[-1]z^{-1}+y[-2]\right)$$

$$=\frac{1}{8}X_u(z)+\frac{1}{4}X_u(z)z^{-1}-X_u(z)z^{-2}$$

$$Y_u(z)=\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}z^{-1}-z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}X_u(z)+\frac{\frac{1}{4}y[-1]+\frac{1}{8}y[-2]+\frac{1}{8}y[-1]z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

利用前推求得 $y[-2]=8y[0]-2y[-1]-x[0]+2x[-1]+8x[-2]$

$$=8\times(-4)-2\times 8-8=-56.$$

$$\therefore Y_{uzi}(z)=\frac{-5+z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{-5+z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}=\frac{-2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$Y_{uzs}(z)=\frac{\frac{1}{8}(1+2z^{-1}-8z^{-2})}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}\cdot\frac{8}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{34}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-18}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}+\frac{-15}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\therefore y_{zi}[n]=-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-3\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$y_{zs}[n]=34\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-18(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-15\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

谢谢大家，有问题可以通过QQ联系我！