§10.3 三重积分

10.3.1 三重积分的概念

设 $V=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的三维闭区间. 分别作 $I_i=[a_i,b_i]$ $(i=1,2,3)$ 上的分割:

$$T_1:\ a_1=x_0<x_1<\cdots<x_n=b_1;$$

$$T_2:\ a_2=y_0<y_1<\cdots<y_m=b_2;$$

$$T_3:\ a_3=z_0<z_1<\cdots<z_l=b_3.$$

三族平行平面 $x=x_i$, $(i=0,1,\cdots,n)$, $y=y_j$, $(j=0,1,\cdots,m)$ $z=z_k$ $(k=0,1,\cdots,l)$ 把 V 分成 $n\times m\times l$ 个子区间:

$$V_{ijk}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k]$$

$$(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,l.)$$

这些子区间组成 V 的一个分割 $T=T_1\times T_1\times T_3$. 对于在 V 上定义的函数

$f(x,y,z)$, 在每个 V_{ijk} 中取一点 ξ_{ijk}, 作和式 (Riemann 和)

$$S(f,T) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(\xi_{ijk})\sigma(V_{ijk}), \tag{10.1}$$

其中 $\sigma(V_{ijk})$ 是 V_{ijk} 的体积. 记 $\|T\| = \max_{i,j,k}\{\mathrm{diam}(V_{ijk})\}$, 这里 $\mathrm{diam}(V_{ijk})$ 是 V_{ijk} 的对角线长度, 称 $\|T\|$ 为分割 T 的宽度. 称 ξ_{ijk} 为值点.

定义 1 设 $f(x,y,z)$ 是定义在 V 上的函数. 如果存在数 A, 使得对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|T\| < \delta$ 时, 不论值点 ξ_{ijk} 在 V_{ijk} 中如何选, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(\xi_{ijk})\sigma(V_{ijk}) - A\right| < \varepsilon,$$

则称函数 f 在区间 V 上可积, 并将 A 写作

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \quad \text{或} \quad \int_V f d\sigma,$$

称为 f 在区间 V 上的三重积分.

定义 2 设 $V \subset \mathbb{R}^3$ 是一个集合. 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在有限个或一列三维区间 $\{I_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ 使得

$$V \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(I_n) \leqslant \varepsilon,$$

(这里 $\sigma(I_n)$ 表示 I_n 的体积), 那么称 V 为 (三维) 零测度集, 简称零测集. 若上面的 I_n 只需要有限个, 则 V 称为零体积集.

定理 1 (1) 至多可数集是零测集, 至多可数个零测集的并集还是零测集;
(2) 有限个零体积集的并集还是零体积集;
(3) B 是零体积集等价于 $\overline{B}$ 是零体积集;
(4) 设 $B \subset \mathbb{R}^3$ 是有界闭集. 则 B 是零测集等价于 B 是零体积集;
(5) $\mathbb{R}^3$ 中光滑曲面片是零体积集.

定理 2 (Lebesgue **定理**) 设 $f(x, y, z)$ 是三维闭区间 $I \subset \mathbb{R}^3$ 上的有界函数, 那么 f 在 I 上可积的充分必要条件是: f 的间断点全体是一个零测集.

设 $f(x,y,z)$ 是定义在有界集 $V\subset\mathbb{R}^3$ 上的函数. 按下面的方式将它延拓到 $\mathbb{R}^3$ 的函数: 令

$$f_V(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z)\in V;\\ 0, & (x,y,z)\notin V,\end{cases}$$

定义 3 设 $f(x,y,z)$ 是定义在有界集 $V\subset\mathbb{R}^3$ 上的函数. I 是一个三维区间, 且 $V\subset I$. 若 $f_V(x,y,z)$ 在 I 上可积, 则称 f 在 V 上可积. 积分值就是 $f_V(x,y,z)$ 在 I 上的积分值, 记为

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz \quad 或 \quad \int_V f\,d\sigma.$$

三重积分的几何意义不直观. 可以考虑物理意义: 设空间中一个物体占有区域 $V\subset\mathbb{R}^3$, 物体的密度函数是 $\rho(x,y,z)$, 因而体积微元 $d\sigma$ 的质量是 $\rho(x,y,z)d\sigma$. 于是物理总质量就是积分 $\int_V \rho d\sigma$.

定义 4 (**有界集的体积**) 设 $V \subset \mathbb{R}^3$ 是有界集. 若取值为 1 的常值函数在 V 上可积, 则称 V 是一个有体积的集, 其体积定义为 $\sigma(V) = \int_V 1\, d\sigma$.

定理 3 设 $V \subset \mathbb{R}^3$ 是有界集. 则 V 是零体积集当且仅当 V 有体积且体积为零, 即 $\sigma(V) = \displaystyle\int_V 1\, d\sigma = 0$.

定理 4 设 $V \subset \mathbb{R}^3$ 是有界集. 则 V 有体积当且仅当 ∂V 是零体积集.

定理 5 设 $V \subset \mathbb{R}^3$ 是有体积的集. 则 f 在 V 上可积且积分等于 A 的充分必要条件是: 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, 若将 V 分割为有限个互不重叠的有体积的小块 $V_1, \cdots, V_n$, 记 λ_i 为 V_i 的直径. 只要分割的宽度 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i$ 满足 $\lambda < \delta$, 那么对 $\forall\, p_i \in V_i$, 都有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\sigma(V_i) - A \right| < \varepsilon.$$

10.3.2 三重积分的累次积分

定理 6 设 $f(x,y,z)$ 在 $V=I_1\times I_2\times I_3$ $(I_i=[a_i,b_i],\ i=1,2,3)$ 上可积.

1° 如果对每个 $(y,z)\in I_2\times I_3$, $f(x,y,z)$ 是 I_1 上关于 x 的可积函数, 则积分 $\varphi(y,z)=\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)dx$ 定义了关于变量 (y,z) 在 $I_2\times I_3$ 上的可积函数, 并有

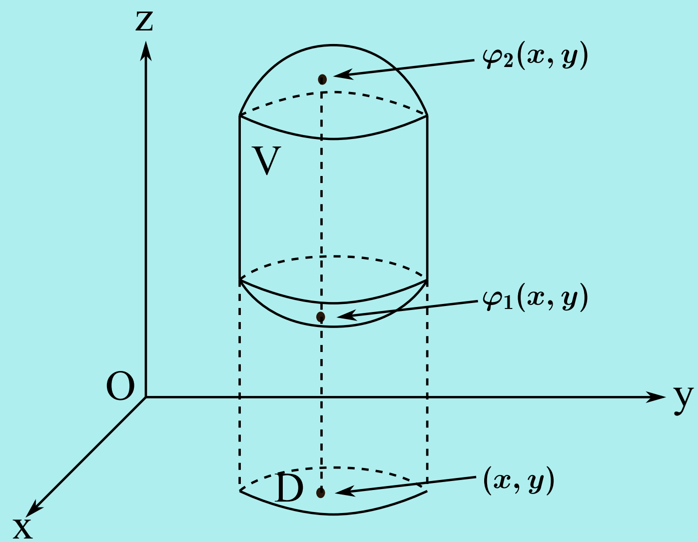
$$\iint\limits_{I_2\times I_3}\varphi(y,z)dydz=\iint\limits_{I_2\times I_3}dydz\int_{a_1}^{b_1}f(x,y,z)dx=\iiint\limits_{V}f(x,y,z)dxdydz.$$

2° 同理, 如果对每个 $x\in[a_1,b_1]$, $f(x,y,z)$ 是 $I_2\times I_3$ 上关于 (y,z) 的可积函数, 则 $\psi(x)=\iint\limits_{I_2\times I_3} f(x,y,z)dy$ 是关于 x 在 $[a_1,b_1]$ 上的可积函数, 并有

$$\int_{a_1}^{b_1}\psi(x)dx=\int_{a_1}^{b_1}dx\iint\limits_{I_2\times I_3}f(x,y,z)dydz=\iiint\limits_{V}f(x,y,z)dxdydz.$$

定理 7 (**累次积分, 先一后二**) 设 $V \subset \mathbb{R}^3$ 是有体积的有界集, f 是 V 上连续函数. 设 V 在 xy 平面上的垂直投影为 D, 且当 $(x, y) \in D$ 时, 过这一点且垂直于 xy 平面的直线与 V 交成一个区间 $[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$, 那么有

$$\int_V f d\sigma = \iint_D dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \tag{10.2}$$



证明 因为 f 在 V 上连续, 所以 f 在 V 上可积. 作三维区间 $I = I_1 \times I_2 \times I_3 \supset V$, 其中 I_1, I_2 和 I_3 都是 $\mathbb{R}$ 中的闭区间. 则 f_V 在 I 上可积, 且

$$\int_V f d\sigma = \int_I f_V d\sigma.$$

当 $(x,y) \in D$ 时, 函数 $f(x,y,\cdot)$ 在区间 $[\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)]$ 上连续, 从而是可积的. 因此

$$\int_{I_3} f_V(x,y,z)dz = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

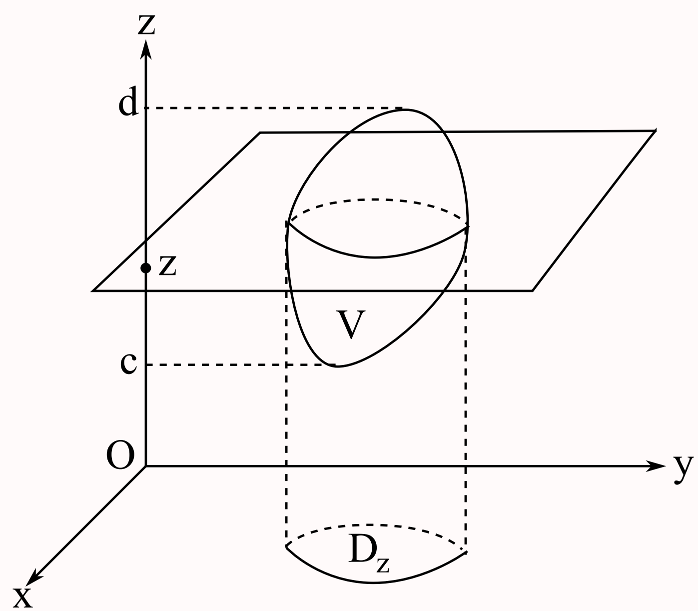
由于当 $(x,y) \notin D$ 时, $f_V(x,y,z) = 0$, 这时 $\int_{I_3} f(x,y,z)dz = 0$. 因此

$$\int_V f d\sigma = \int_I f_V d\sigma = \iint\limits_{I_1 \times I_2} dxdy \int_{I_3} f_V(x,y,z)dz$$

$$= \iint\limits_D dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

定理 8 (**累次积分, 先二后一**) 设 $V \subset \mathbb{R}^3$ 是有体积的有界集, f 是 V 上连续函数. 设 V 在 z 轴上的投影为区间 $[c,d]$ 且当 $z \in [c,d]$ 时, 过这一点且垂直于 z 轴的平面与 V 交成的图形在 xy 平面上的投影为 D_z, 那么有

$$\int_V f d\sigma = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy. \tag{10.3}$$



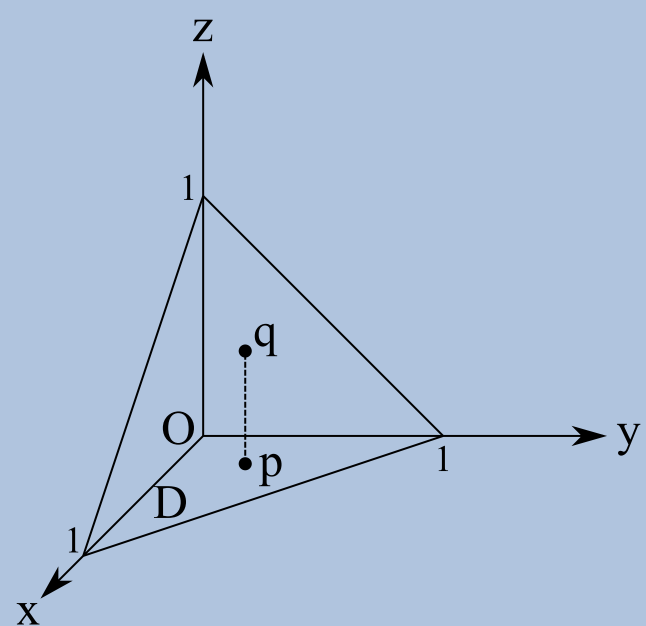
例 1 求 $\displaystyle\iiint_D x^2ye^{xyz}dxdydz$, 其中 $D=[0,1]^3$.

解

$$\begin{aligned}\iiint_D x^2ye^{xyz}dxdydz &= \iint_{[0,1]^2} x^2ydxdy\int_0^1 e^{xyz}dz\\ &= \iint_{[0,1]^2} x(e^{xy}-1)dxdy\\ &= \int_0^1 xdx\int_0^1 e^{xy}dy-\int_0^1 xdx\int_0^1 dy\\ &= \int_0^1 (e^x-1)dx-\frac{1}{2}\\ &= e-\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

例 2 计算 $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 V 是由坐标面 $x=0, y=0, z=0$ 与平面 $x+y+z=1$ 围成的四面体.

解 该四面体在坐标面 Oxy上的投影为 $D: x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1$. 对于 D 中的任意一点 $p=(x,y)$, 作平行于 z 轴的直线, 其穿入 V 内之点的立标是 $z=0$, 穿出 V 外之点的立标是 $z=1-x-y$,



所以

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \iint_D dxdy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$
$$= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dxdy$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{3-x}{4} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).$$

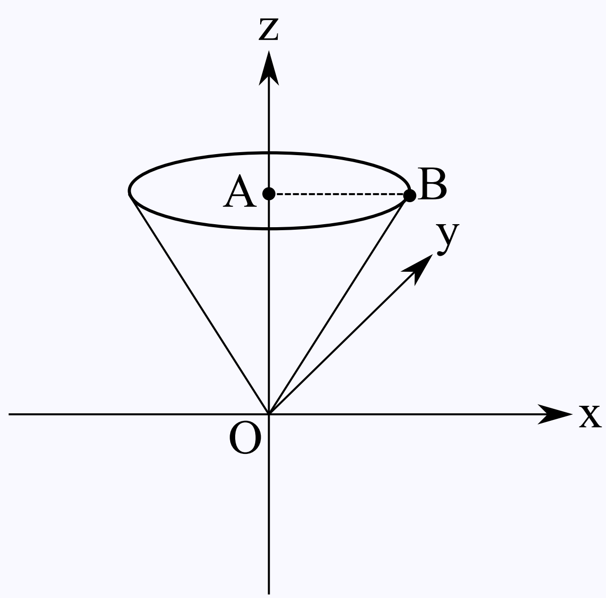
例 3 计算

$$\iiint_V z\,dxdydz,$$

其中 V 是由锥面

$$R^2z^2 = h^2(x^2+y^2)$$

及平面 $z=h$ 围成的锥体.



解 在锥面方程中令 $z=h$ 得知 V 在平面 Oxy 上的投影区域 D 是圆 $x^2+y^2\leqslant R^2$. 过 D 内任意一点 (x,y) 作平行于 z 轴的直线, 其与 V 的表面相交两点的立标各是

$$z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2},\quad z=h,$$

于是求得

$$\begin{aligned}\iiint_V z\,dxdydz &= \iint_D dxdy\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\,dz\\ &=\frac{1}{2}\iint_D\left[h^2-\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right]dxdy\\ &=\frac{h^2}{2R^2}\iint_D\left[R^2-(x^2+y^2)\right]dxdy\\ &=\frac{h^2}{2R^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R(R^2-r^2)r\,dr\\ &=\frac{\pi}{4}R^2h^2.\end{aligned}$$

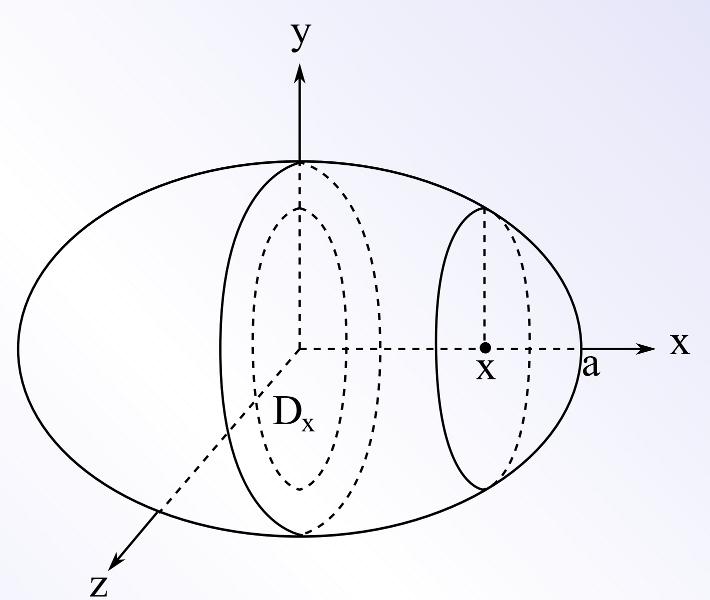
例 4 计算 $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, 其中 V 是椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

解 先计算三重积分 $\iiint_V x^2dxdydz$. 这时被积函数只依赖于 x, 故宜先对 y,z 作二重积分. 由于区域 V 在 x 轴上的投影区间是 $[-a,a]$, 且过该区间的点 x 作垂直于 x 轴的平面去截椭球体 V 时, 截面区域 D_x 是

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1-\frac{x^2}{a^2},$$

这是半轴为 $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ 和 $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ 的椭圆, 所以

$$\begin{aligned}&\iiint_V x^2dxdydz\\&=\int_{-a}^{a}x^2dx\iint_{D_x}dydz\\&=\pi bc\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx\\&=\frac{4}{15}\pi a^3bc\end{aligned}$$



|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

同样算得

$$\iiint\limits_V y^2 dxdydz = \frac{4}{15}\pi ab^3 c, \quad \iiint\limits_V z^2 dxdydz = \frac{4}{15}\pi abc^3.$$

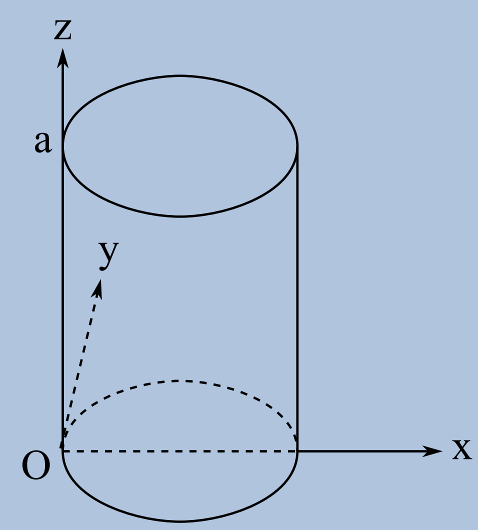
于是所求的三重积分为

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz\\ =& \iiint\limits_V x^2 dxdydz + \iiint\limits_V y^2 dxdydz + \iiint\limits_V z^2 dxdydz\\ =& \frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

例 5 求 $\iiint\limits_{B} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, 其中 B 由柱面 $x^2+y^2=2x$, $z=0$ 和 $z=a(a>0)$, $y=0$ 围成.

解

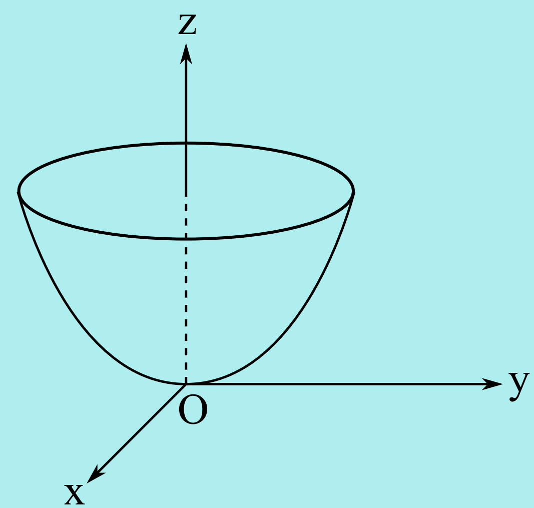
$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{B} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz\\
&=\int_0^a zdz\iint_{x^2+y^2\leqslant 2x}\sqrt{x^2+y^2}dxdy\\
&=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2dr\\
&=\frac{8a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\, d\varphi\\
&=\frac{16}{9}a^2.
\end{aligned}$$



例 6 求 $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{1+x^2+y^2}$. D： $0 \leqslant z \leqslant h, x^2+y^2 \leqslant 4z$.

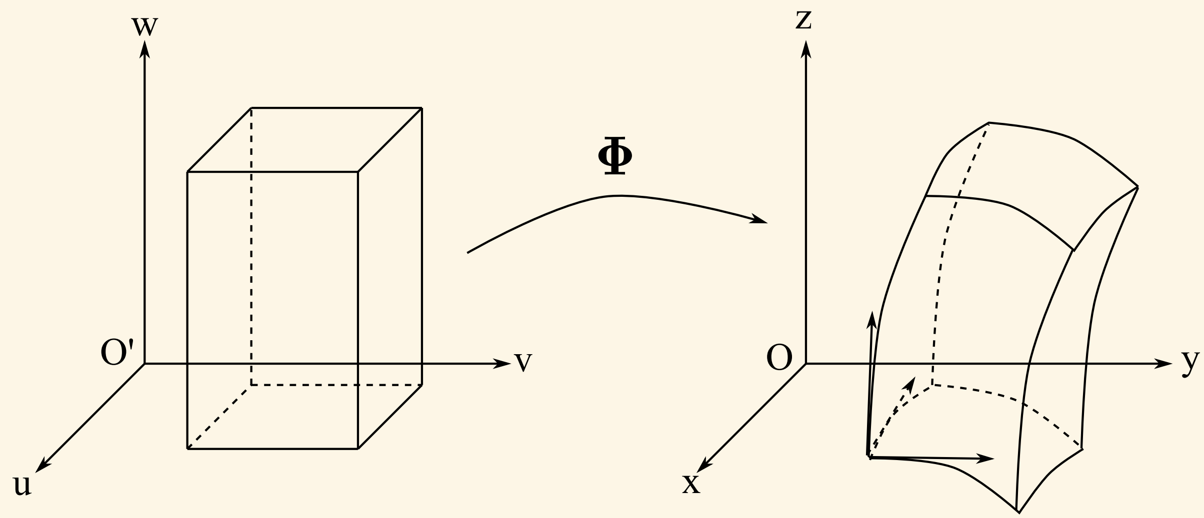
解 因 D_z： $x^2+y^2 \leqslant 4z$, 故

$$\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{1+x^2+y^2}$$
$$= \int_0^h dz \iint_{x^2+y^2 \leqslant 4z} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$$
$$= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{z}} \frac{rdr}{1+r^2}$$
$$= \pi \int_0^h \ln(1+4z)dz$$
$$= \frac{\pi}{4}\Big((1+4h)\ln(1+4h) - 4h\Big).$$



10.3.3 三重积分的换元

设变换 $\boldsymbol{\Phi}$: $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ 把 $O'uvw$ 空间中的区域 V' 映成 $Oxyz$ 空间中的区域 V, 且此变换是正则的, 即 $\boldsymbol{\Phi}$ 是 C^1 的, 其 Jacobi 行列式非零. 用 $O'uvw$ 空间中的平行于坐标平面的一些平面将 V' 分割成许多小块, 典型的小块是以 $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ 为边的立方体. 此立方体经变换 $\boldsymbol{\Phi}$ 被映成 V 中的小块, 它是一个曲边六面体, 其体积近似等于由 $\boldsymbol{\Phi}'_u \Delta u$, $\boldsymbol{\Phi}'_v \Delta v$ 和 $\boldsymbol{\Phi}'_w \Delta w$ 所张成的平行六面体的体积.



于是可得到 V 的体积元素的微元等式

$$dV = dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw.$$

与二元换元公式的证明类似可得如下三重积分换元公式.

定理 9 设变换

$$\Phi:\ x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$$

把 $O'uvw$ 空间中的区域 V' 映成 $Oxyz$ 空间中的区域 V, 且此变换是正则的, 即 Φ 是 C^1 的, 其 Jacobi 行列式 $\det J\Phi = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$. 若函数 $f(x,y,z)$ 在 V 上可积, 则有

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f\circ\Phi(u,v,w)|\det J\Phi|\, dudvdw.$$

一个重要的变换是球坐标变换

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$$

它的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta.$$

所以在球坐标变换下

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$
$$= \iiint\limits_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$

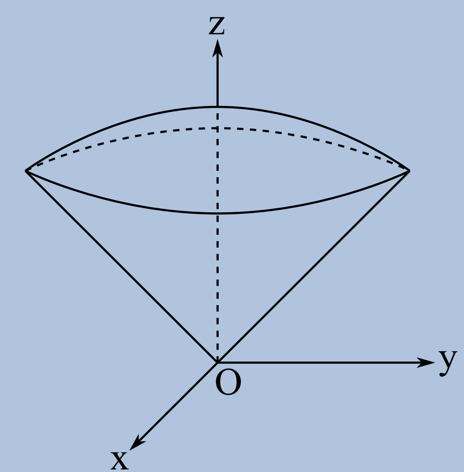
例 7 计算三重积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, 其中 V 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的立体.

解 在球坐标下, $x^2+y^2+z^2=r^2$, 而 V 的边界曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 分别为 $\theta=\frac{\pi}{4}$, $r=R$. 所以积分区域 V 可以表示成

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant R.$$

由此即得所求的三重积分的值为

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz\\ =&\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta\int_0^R r^4dr\\ =&\frac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{2}).\end{aligned}$$



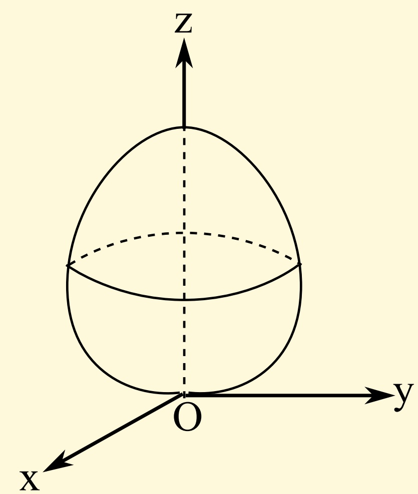
例 8 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\ (a>0)$ 所围成的立体体积.

解 在曲面的方程中因 x 及 y 只出现平方项, 故所围立体 V 关于平面 Ozx 及平面 Oyz 对称; 又因 z 不取负值, 所以这个立体位于平面 Oxy 的上侧, 从而要求的体积是它在第一卦限内之立体 V_1 的四倍, 应用球坐标, 曲面的方程化成 $r=a\sqrt[3]{\cos\theta}$. 而这些坐标在 V_1 中的变化范围是

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant a\sqrt[3]{\cos\theta}.$$

于是求得立体的体积为

$$\iiint\limits_V dxdydz=4\iiint\limits_{V_1}dxdydz$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}}r^2dr$$
$$=\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta=\frac{1}{3}\pi a^3.$$



例 9 计算曲面 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ 所围成的立体 V 的体积.

解 先作变换 $x=au^3, y=bv^3, z=cw^3$, 它将空间 $O'uvw$ 的单位球

$$V':\ \ u^2+v^2+w^2\leqslant 1$$

映成空间 $Oxyz$ 中所给的立体 V. 这时变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=27abcu^2v^2w^2,$$

所以

$$\iiint\limits_{V} dxdydz=27abc\iiint\limits_{V'} u^2v^2w^2dudvdw.$$

对于上式右边的积分, 再利用球坐标变换, 可得

$$\iiint\limits_{V'} u^2v^2w^2 du dv dw$$

$$= \iiint\limits_{V'} r^6 \sin^4\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int_0^{\pi}\sin^5\theta\cos^2\theta d\theta\int_0^1 r^8 dr$$

$$= \frac{4}{945}\pi.$$

从而所求立体的体积为

$$\iiint\limits_{V} dx dy dz = \frac{4}{35}\pi abc.$$