

随机过程例题选讲

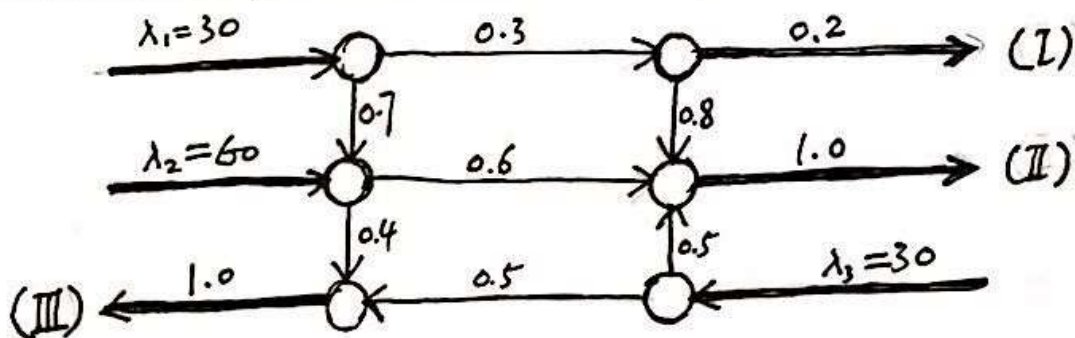
1. 设 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 为两个独立的 Poisson 过程, 强度分别为 λ_1 与 λ_2 .

(1) 证明 $N_1(t) + N_2(t)$ 为强度是 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的 Poisson 过程, 并从直观上解释此结果;

(2) 试求在 $N_1(t)$ 的任一相邻事件发出的时间间隔内, $N_2(t)$ 恰好发出 k 个事件的概率 $P_k = ?$ ($k \geq 0$)

2. 设 $N(t)$ 为到时刻 t 为止某类事件发生的个数(次数), 且 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为强度 λ 的 Poisson 过程. 若每一事件独立地以概率 p 被观察到, 以概率 $1-p$ 不被观察到. 我们以 $N_1(t)$ 表示被观察到的事件数, $N_2(t)$ 表示未被观察到的事件数, 则 $N_1(t) + N_2(t) = N(t)$. 问 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 分别是什么过程? $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 是否独立? 为什么? 试将此结论加以推广.

3. 考虑下图的交通网络: 流入的是三个相互独立且具有图示强度的 Poisson 过程(泊松流), 而且各处每辆车亦相互独立地按图示概率选择行驶方向. 试确定三个出口处的交通流的具体特征(什么流? 强度多少?)



4. (习题 2.12).

5. 设移民到某地区定居的居民户数 $N(t)$ 是一个 Poisson 过程, 平均每周有 2 户定居(即 $\lambda = 2$). 如果每户的人口数为 i.i.d 的 r.v. $\{Y_i, i \geq 1\}$, 且 Y_i 的分布律为:

$(1, 2, 3, 4)$
 $(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, 记 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$.

(1) 试求 5 周内移民到该地区人口数的期望与方差

(2) 试求 $X(t)$ 的矩母函数.

6. $2N$ 个球 (N 黑, N 白) 分装在甲、乙两个袋子里, 每袋各装 N 个球. 每次从二袋中各随机取出一球, 相互交换后再放回袋中. 现以 X_n 表第 n 次交换后甲袋中的黑球数, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一 M.C.

(1) 试求该 M.C. 的转移概率矩阵 P ;

(2) 证明该 M.C. 为不可约遍历链;

(3) 试求该 M.C. 的极限分布 $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)}$, ($\forall i, j \in S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$)

7. 袋中有 N 个球, 球为白色或黑色的, 每次从袋中随机抽取一球, 然后放回一个不同颜色的球. 若袋中有 k 个白球, 则称系统处于状态 k . 试用 M.C. 描述这个模型, 且

(1) 求该 M.C. 的转移概率矩阵 P , 并讨论其状态分类;

(2) 该 M.C. 是否存在平稳分布? 有则求之;

(3) 极限 $\lim_{ij} P_{ij}^{(n)}$ 是否存在 ($\forall i, j \in S$)? 为什么?

8. 可用一个 5 状态 M.C. $\{X_n, n \geq 0\}$ 来描述水库的供水情况, 按其水位的高低分为: "1" — 危险水平, "2" — 缺水, "3" — 刚好够, "4" — 较好, "5" — 充裕. 假定由以往数据可求得状态转移规律为:

试求出危险水平的平均的时间间隔.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

9. (习题 3.16).

10. (赌徒输光问题) 二人进行赌博, 其中甲有 a 元, 乙有 b 元, 每局输赢 1 元, 一直赌到其中一人输光为止. 设每局甲赢的概率为 p , 乙赢的概率为 $q = 1 - p$. 记 X_n 为第 n 局结束时甲的全部赌资, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为 M.C. 试求甲输光的概率 (约定 $X_0 = a$).

11. 设 $X(t) = A \cos(\omega t + \theta)$, 其中 A 与 θ 独立, $A \sim U(1, 1)$, $P\{\theta = -\frac{\pi}{4}\} = P\{\theta = \frac{\pi}{4}\} = \frac{1}{2}$, $\omega \in \mathbb{R}$

(1) 证明 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 为 (宽) 平稳过程;

(2) 该过程是否具有均值遍历性? 为什么?

12. 设 $X(t) = \cos(\xi t + \eta)$, 其中 ξ 与 η 独立, $\eta \sim U(0, 2\pi)$, $\xi \sim f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, ($x \in \mathbb{R}$)

(1) 证明 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 为平稳; (2) 试求其 $S(\omega)$; (3) 其均值遍历性是否成立? 为什么?

13. 对于下列函数 $S_i(\omega)$, ($\omega \in \mathbb{R}$): $S_1(\omega) = (\omega^2 + 9) / (\omega^2 + 4)(\omega + 1)^2$, $S_2(\omega) = (\omega^2 + 1) / (\omega^4 + 5\omega^2 + 6)$,

$S_3(\omega) = (\omega^2 + 4) / (\omega^4 - 4\omega^2 + 3)$, $S_4(\omega) = e^{-i\omega^2} / (\omega^2 + 2)$ 与 $S_5(\omega) = b^2$, ($a \leq |\omega| \leq 2a$) 问其中有哪些

些为平稳过程的谱密度函数? 并进一步求其相应的协方差函数.