微分方程引论

偏微分方程

作者：涂嘉乐 PB23151786

时间：2024 秋

目录

第一章 前置知识

这些是学习偏微分方程的前置知识，如果不知道，可能对学习偏微分方程造成非常大的阻碍。

1.1 定义与记号

1. 偏导：设 $u = u(x_1, \cdots, x_n)$，则我们记

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \partial_{x_i} u \text{ 或 } u_{x_i}$$

对于二阶偏导（高阶偏导同理），我们记

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_{x_i x_j} u \text{ 或 } u_{x_i x_j}$$

2. 固定正整数 k，我们用符号 $D^k u$ 表示 u 的所有 k 阶偏导数

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}$$

其中 $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中的 k 个可重复的任意数，我们记它的长度为

$$\left|D^k u\right| = \left(\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left|\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

3. 梯度：$k = 1$ 时，我们称 n 维向量

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

为 u 的梯度，也记作 grad u 或 ∇u，并引入 nabla 算子，它是一个 n 维向量，即

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

4. Hessian 矩阵和 Laplace 算子：$k = 2$ 时，我们称 n 阶方阵

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

为 u 的 Hessian 矩阵。通常称符号 $\triangle$ 为 Laplace 算子，它是 Hessian 矩阵的迹，即

$$\triangle u = \operatorname{tr}(D^2 u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

且我们有

$$\begin{aligned} \triangle &= \nabla \cdot \nabla \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \end{aligned}$$

5. 散度（针对向量函数）：设 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$ 是一个向量函数，记 $\boldsymbol{F}$ 的散度为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

于是 $\triangle u$ 是 u 的梯度的散度，即

$$\triangle u = \mathrm{div}\ (\nabla u)$$

6. 旋度（针对三维向量函数）：设三维向量场 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$，记 v 的旋度为

$$\mathrm{curl}\ \boldsymbol{v} = \nabla \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

7. 球与球面：我们用 $B(x,r)$ 表示 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中以 x 为中心，半径为 r 的开球，它的体积为

$$|B(x,r)| = \alpha(n) r^n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^n$$

其中 $\alpha(n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上单位球的体积，$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ 我们用 $\partial B(x,r)$ 表示球 $B(x,r)$ 的边界，即 $n-1$ 维球面，它的面积为

$$|\partial B(x,r)| = n\alpha(n) r^{n-1}$$

8. 外法向与方向导数：设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 为连通区域，则 Ω 的外法向指的是在 $\partial\Omega$ 上一点的单位切向量，且指向 Ω 外侧。设 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 为单位向量，函数 $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则记

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) = v \cdot \nabla u(x_0)$$

称 $\dfrac{\partial u}{\partial v}(x_0)$ 为 u 在 x_0 点沿 v 方向的方向导数

例题 1.1 设 $u(x) = |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$，求 $\triangle u$

解 因为

$$u_{x_i} = 2x_i, \quad u_{x_i x_i} = 2$$

所以

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 2n$$

例题 1.2 设 $u(x) = e^{-\alpha|x|^2}$，求 $\triangle u$

解 因为

$$u_{x_i} = -2\alpha x_i e^{-\alpha|x|^2} \quad u_{x_i x_i} = \left(4\alpha^2 x_i^2 - 2\alpha\right) e^{-\alpha|x|^2}$$

所以

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \left(4\alpha^2|x|^2 - 2n\alpha\right) e^{-\alpha|x|^2}$$

例题 1.3 设 $u(x) = \dfrac{1}{|x|}$，求 $\triangle u$

解 因为

$$u_{x_i} = -\frac{x_i}{|x|^3}, \quad u_{x_i x_i} = \frac{3x_i^2 - |x|^2}{|x|^5}$$

所以

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \frac{3-n}{|x|^3}$$

1.2 重要结论

定理 1.1 (Gauss-Green 定理)

假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界开集，且 $\partial\Omega \in C^1$，如果 $u \in C^1(\overline{\Omega})$，且设 $\boldsymbol{n} = (n^1, n^2, \cdots, n^n)$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，则

$$\int_\Omega u_{x_i} \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u n^i \mathrm{d}S \tag{1.1}$$

若 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$，则

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u} \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{1.2}$$

注 设 $\tilde{\boldsymbol{u}} = (0, \cdots, 0, u, 0 \cdots, 0)$，其中第 i 个分量为 $u = u(x_1, \cdots, x_n)$，则对 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 使用 (2) 即可得到 (1)；在 (1) 中，令 $u = u_i$，则从 1 到 n 求和即可得到 (2)

推论 1.1 (分部积分公式)

假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界开集，设 $\boldsymbol{n} = (n^1, n^2, \cdots, n^n)$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，设 $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$，则

$$\int_\Omega u_{x_i} v \mathrm{d}x = -\int_\Omega u v_{x_i} \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u v n^i \mathrm{d}S \tag{1.3}$$

证明 只需将 (1.1) 中的 u 替换成 uv 即可得到分部积分公式 □

推论 1.2 (Green 公式)

假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界开集，设 $\boldsymbol{n} = (n^1, n^2, \cdots, n^n)$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，设 $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$，则

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \triangle u \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \\ \displaystyle\int_\Omega (\nabla v) \cdot (\nabla u) \mathrm{d}x = -\int_\Omega u \triangle v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \\ \displaystyle\int_\Omega u \triangle v - v \triangle u \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \end{cases} \tag{1.4}$$

证明 对于第一个式子，因为 $\triangle u = \operatorname{div}(\nabla u)$，所以由 (1.2) 得

$$\int_\Omega \triangle u \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S$$

对于第二个式子，我们在 (1.3) 中，取 $v = v_{x_i}$，则

$$\int_\Omega u_{x_i} v_{x_i} \mathrm{d}x = -\int_\Omega u v_{x_i x_i} \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u v_{v_i} n^i \mathrm{d}S$$

对 i 从 1 到 n 求和即得

$$\int_\Omega (\nabla v) \cdot (\nabla u) \mathrm{d}S = -\int_\Omega u \triangle v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S$$

对于第三个式子，因为在第二个式子中 u, v 地位等价，所以

$$-\int_\Omega u \triangle v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = -\int_\Omega v \triangle u \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S$$

移项即得证 □

定理 1.2 (极坐标公式)

设 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续可积，则

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B(x_0, r)} f \mathrm{d}S \right) \mathrm{d}r \tag{1.5}$$

其中 x_0 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意一点。特别地，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\int_{B(x_0,r)} f\mathrm{d}x\right) = \int_{\partial B(x_0,r)} f\mathrm{d}S \tag{1.6}$$

推论 1.3 (球坐标下的 Laplace 算子)

在 n 维球坐标系下的 Laplace 算子为

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial u^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\triangle_{S^{n-1}}u \tag{1.7}$$

其中 $\triangle_{S^{n-1}}$ 是 $n-1$ 维球面上的 Laplace-Beltrami 算子，我们也可以写为

$$\triangle u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\triangle_{S^{n-1}}u$$

注 $\mathbb{R}^2$ 中极坐标变换的 Laplace 算子为

$$\triangle u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$\mathbb{R}^3$ 中球坐标变换的 Laplace 算子为

$$\triangle u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

定理 1.3 (Gronwall 不等式)

积分形式：设 η 为非负函数，且在 $[a,b]$ 上连续，且满足

$$\eta'(t) \le \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \tag{1.8}$$

其中 $\phi(t),\psi(t)$ 为 $[a,b]$ 上的非负可积函数，则

$$\eta(t) \le e^{\int_a^b \phi(s)\mathrm{d}s}\left[\eta(a) + \int_a^t \psi(s)\mathrm{d}s\right] \tag{1.9}$$

对 $\forall t \in [a,b]$ 均成立

微分形式：设 $f(x),g(x) \in C([a,b])$，$g(x) \ge 0$，C 为常数，若

$$f(x) \le C + \int_a^x f(s)g(s)\mathrm{d}s \tag{1.10}$$

则

$$f(x) \le Ce^{\int_a^x g(s)\mathrm{d}s} \tag{1.11}$$

Nabla 算子 ∇ 的运算规则：

- $\nabla(\psi\varphi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi$

第二章 波动方程

定义 2.1 (波动方程)

称形如

$$u_{tt} - \Delta u = f(x,t) \tag{2.1}$$

的方程为波动方程，其中 $u = u(x,t), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0$，为了求解波动方程 (2.4)，我们还需提供适当的附加条件，即初值条件和边值条件

初值条件：给出弹性体各点在初始时刻 $t = 0$ 时的位移和速度，即

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $\varphi(x), \psi(x)$ 为已知函数

边值条件：给出弹性体边界点在时间 $t > 0$ 时的状态，如位移或受力情况，通常有以下三类

1. Dirichlet 边值（第一类边值）：已知边界点的位移变化

$$u(x,t) = g(x,t), \quad \forall x \in \partial\Omega, t \geq 0 \tag{2.3}$$

2. Neumann 边值（第二类边值）：已知边界点的受力情况

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,t) = g(x,t), \quad \forall x \in \partial\Omega, t \geq 0 \tag{2.4}$$

   其中 $\boldsymbol{n}$ 为边界的外法向

3. Robin 边值（第三类边值）：已知边界点的位移与所受外力的线性组合

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x,t) + \alpha(x,t)u(x,t) = g(x,t), \quad \forall x \in \partial\Omega, t \geq 0 \tag{2.5}$$

♣

性质（波动方程的不变性）对方程 $u_{tt} - \Delta u = 0$ 的解作以下变换后，仍为波动方程的解：

1. 时间平移（能量守恒）：$u(x,t) \longmapsto u(x, t+t_0), \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$
2. 空间平移（动量守恒）：$u(x,t) \longmapsto u(x+x_0, t), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^m$
3. 伸缩（Vitral 恒等式）：$u(x,t) \longmapsto u\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda}\right) \quad \forall \lambda > 0$
4. 洛伦兹变换（角动量守恒）：$u(x,t) \longmapsto u\left(x - x_v - \frac{x_v - xt}{\sqrt{1-|v|^2}}, \frac{t - vx}{\sqrt{1-|v|^2}}\right), \quad x_v = (x \cdot \frac{v}{|v|}) \cdot \frac{v}{|v|}, v \in \mathbb{R}^n, |v| < 1$

2.1 特征线法

考虑一阶偏微分方程

$$\begin{cases} u_t + a(x,t)u_x + b(x,t)u = f(x,t) \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases} \tag{2.6}$$

我们将用特征线法解上述一阶偏微分方程

定理 2.1 (特征线法)

Step 1：令 $x = x(t)$，先解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = a(x(t),t) \\ x(0) = c \end{cases} \tag{2.7}$$

再令 $U(t)=u(x(t),t)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}&=u_x(x(t),t)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+u_t(x(t),t)\\&=u_x(x(t),t)\cdot a(x(t),t)+u_t(x(t),t)\end{aligned}$$

所以 $U(t)$ 满足一阶线性方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}=-b(x(t),t)U(t)+f(x(t),t)\\U(0)=\phi(c)\end{cases}\tag{2.8}$$

对 $U(t)$ 进行求解即可

例题 2.1 设 a 为常数，求解方程

$$\begin{cases}u_t-au_x=f(x,t)\\u(x,0)=\phi(x)\end{cases}$$

解 特征线为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-a\\x(0)=c\end{cases}$$

解得 $x(t)=c-at$，接下来定义 $U(t)=u(c-at,t)$，则 U 满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-au_x(c-at,t)+u_t(c-at,t)=f(c-at,t)\\U(0)=\phi(c)\end{cases}$$

从 0 到 t 积分得

$$U(t)=\phi(c)+\int_0^t f(c-as,s)\mathrm{d}s$$

将 c 用 $x+at$ 代入得

$$u(x,t)=\phi(x+at)+\int_0^t f(x+a(t-s),s)\mathrm{d}s$$

例题 2.2 求解方程

$$\begin{cases}u_t+(x+t)u_x+u=x\\u(x,0)=x\end{cases}$$

解 特征线为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(t)+t\\x(0)=c\end{cases}$$

解得 $x(t)=Ce^t+e^t-t-1$，接下来定义 $U(t)=u(ce^t+e^t-t-1,t)$，则 U 满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-U(t)+ce^t+e^t-t-1\\U(0)=c\end{cases}$$

解得

$$U(t)=-t+\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})+\frac{c}{2}(e^t-e^{-t})=u(ce^t+e^t-t-1,t)$$

将 c 用 $xe^{-t}-1+te^{-t}+e^{-t}$ 代入得

$$u(x,t)=-\frac{1}{2}(x-t+1)e^{-t}+\frac{1}{2}(x+t+1)e^{-2t}$$

2.2 初值问题

先讨论初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x,t), & \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.9}$$

我们将方程 (2.9) 分解为如下三个方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_1 - \Delta u_1 = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u_1(x,0) = \varphi(x) \\ \partial_t u_1(x,0) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_2 - \Delta u_2 = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u_2(x,0) = 0 \\ \partial_t u_2(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_3 - \Delta u_3 = f(x,t), & \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u_3(x,0) = 0 \\ \partial_t u_3(x,0) = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

考虑方程 (2.10)(2.11)(2.12)，若 u_1, u_2, u_3 分别是这三个方程的解，则 $u = u_1 + u_2 + u_3$ 是方程 (2.9) 的解，因此我们只需要解上面三个方程即可

事实上，我们只需要求解初值问题 (2.11)，对于其它两个初值问题 (2.10)(2.12)，它的解可以由 (2.11) 的解表示出来

定理 2.2

设 $u_2 = M_\psi(x,t)$ 是初值问题 (2.11) 的解，则初值问题 (2.10)(2.12) 的解 u_1, u_3 可以表示为

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t) \tag{2.13}$$

$$u_3 = \int_0^t M_{f_\tau}(x, t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.14}$$

♡

注 M_ψ 表示的是以 ψ 为初速度的初值问题 (2.11) 的解，同理 M_φ, M_{f_τ} 表示的是以 $\varphi, f_\tau = f(x,\tau)$ 为初速度的初值问题 (2.11) 的解

证明 令 $\tilde{u}(x,t) = M_\varphi(x,t)$，则 $\tilde{u}$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \Delta \tilde{u} = 0 \\ \tilde{u}(x,0) = 0 \\ \tilde{u}_t(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.15}$$

对方程两边同时求关于 t 的偏导数，令 $v = \tilde{u}_t$，所以

$$v_t(x,0) = \tilde{u}_{tt}(x,0) = \Delta \tilde{u}(x,0) = 0$$

则 v 满足

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) \\ v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

即 $\partial_t M_\varphi(x,t)$ 是方程 (2.10) 的解

另一方面，令 $\tilde{u}(x,t) = M_{f_\tau}(x,t)$，则

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \triangle\tilde{u} = 0 \\ \tilde{u}(x,0) = 0 \\ \tilde{u}_t(x,0) = f(x,\tau) \end{cases} \tag{2.16}$$

所以若 $u_3(x,t) = \int_0^t M_{f_\tau}(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau$，则

$$\partial_t u_3 = M_{f_\tau}(x,0) + \int_0^t \tilde{u}_t(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \tilde{u}_t(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\partial_t^2 u_3 = \tilde{u}_t(x,0) + \int_0^t \tilde{u}_{tt}(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau = f(x,t) + \int_0^t \triangle\tilde{u}(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\triangle u_3 = \int_0^t \triangle\tilde{u}(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

这就说明了 u_3 满足方程 (2.12) □

注 在证明 u_1 是方程 (2.10) 的解的过程中，我们利用了 $\triangle\tilde{u}(x,0) = \triangle 0 = 0$，因为拉普拉斯算符是对 x 求偏导数，t 和 x 是相互独立的变量，我们可以直接把取 $t=0$ 之后的结果 $\tilde{u}(x,0)=0$ 代入，再作用拉普拉斯与先作用拉普拉斯，再取 $t=0$ 效果相同

但是，如果对同一个变量求偏导，我们应先求偏导再取值，比如 $\partial_t u(x,0) = \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}$，但不等于 $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}$

2.2.1 一维初值问题

首先考虑空间维数 $n=1$ 时的波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.17}$$

根据定理 2.2，关键是求解

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.18}$$

注意到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

所以我们可以令 $v(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x}$，则 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} v_t + v_x = 0 \\ v(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.19}$$

由特征线法，考虑

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 \\ x(0) = c \end{cases} \tag{2.20}$$

解得 $x(t)=t+c$，再令 $U(t)=v(t+c,t)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=v_t+v_x=0\\U(0)=\psi(c)\end{cases}\tag{2.21}$$

所以在特征线上，$U(t)$ 恒为常数，即 $U(t)=U(0)=\psi(c)$，消去 c 可得

$$v(x,t)=\psi(x-t)\tag{2.22}$$

再解关于 u 的方程

$$\begin{cases}u_t-u_x=\psi(x-t)\\u(x,0)=0\end{cases}\tag{2.23}$$

由特征线法，考虑

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-1\\x(0)=c\end{cases}\tag{2.24}$$

解得 $x=-t+c$，再令 $U(t)=u(-t+c,t)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\psi(c-2t)\\U(0)=0\end{cases}\tag{2.25}$$

解得

$$U(t)=\int_0^t\psi(c-2s)\mathrm{d}s$$

将 $c=x+t$ 代入，则

$$u(x,t)=\int_0^t\psi(x+t-2s)\mathrm{d}s$$

再作换元 $y=x+t-2s$，则方程 (2.18) 的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(y)\mathrm{d}y\tag{2.26}$$

再根据定理 2.2 方程

$$\begin{cases}u_t^2-u_x^2=0\\u(x,0)=\varphi(x)\\u_t(x,0)=0\end{cases}\tag{2.27}$$

的解为

$$\begin{aligned}u_1(x,t)&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\varphi(y)\mathrm{d}y\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right]\end{aligned}\tag{2.28}$$

方程

$$\begin{cases}u_t^2-u_x^2=f(x,t)\\u(x,0)=0\\u_t(x,0)=0\end{cases}\tag{2.29}$$

的解为

$$u_3(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}f(y,\tau)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t\tag{2.30}$$

将上述三个解加起来，我们就得到了一维初值问题 (2.17) 的解的表达式，也称为 D'Alembert 公式

推论 2.1 (D'Alembert 公式)

一维初值问题 (2.17) 的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(y)\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_{x-(t-\tau)}^{x+t-\tau}f(y,\tau)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\tau \tag{2.31}$$

若 $\varphi\in C^2(\mathbb{R}),\psi\in C^1(\mathbb{R}),f\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$，则由表达式 (2.31) 给出的函数 $u\in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$，且为一维初值问题 (2.17) 的解

若 $f\equiv 0$，我们令

$$\begin{cases}F(x)=\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x)+\displaystyle\int_0^x\psi(y)\mathrm{d}y\right]\\ G(x)=\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x)-\displaystyle\int_0^x\psi(y)\mathrm{d}y\right]\end{cases} \tag{2.32}$$

由 D'Alembert 公式

$$u(x,t)=F(x+t)+G(x-t) \tag{2.33}$$

即当 $f\equiv 0$ 时，波动方程的解 $u(x,t)$ 可以分解为一个左行波 $F(x+t)$ 和一个右行波 $G(x-t)$ 的叠加

推论 2.2

若 φ,ψ 以及 f 是 x 的偶（或奇，或周期为 l）的函数，则由表达式 (4.20) 给出的解 u 必是 x 的偶（或奇，或周期为 l）的函数

2.2.2 一维半无界问题

本节我们求解一维半无界问题

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=f(x,t), & x>0,t\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=\varphi(x)\\ u_t(x,0)=\psi(x)\\ u(0,t)=g(t)\end{cases} \tag{2.34}$$

我们分情况讨论

1. 齐次边值情形：$g(t)\equiv 0$

   将初值 $\varphi(x),\psi(x)$ 与非齐次项 $f(x,t)$ 作奇延拓得到 $\mathbb{R}$ 中的奇函数，即令

$$\bar{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases}\qquad \bar{\psi}(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geq 0\\ -\psi(-x), & x<0\end{cases}\qquad \bar{f}(x,t)=\begin{cases}f(x,t), & x\geq 0\\ -f(-x,t), & x<0\end{cases}$$

定义 2.2 (相容性条件)

由于波动方程的古典解要求它在整个定解区域均是二阶连续可微的，所以我们需要对角点 $(0,0)$ 提必要的相容性条件

$$\begin{cases}\varphi(0)=0\\ \psi(0)=0\\ f(0,0)+\varphi''(0)=0\end{cases} \tag{2.35}$$

若 φ,ψ,f 满足相容性条件 (2.35)，令 $\bar{u}(x,t)$ 是

$$\begin{cases} \bar{u}_t^2 - \bar{u}_x^2 = \bar{f}(x,t), & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ \bar{u}(x,0) = \bar{\varphi}(x) \\ \bar{u}_t(x,0) = \bar{\psi}(x) \end{cases} \tag{2.36}$$

的解，由推论 2.2 知，$\bar{u}(x,t)$ 是奇函数，故 $\bar{u}(0,t) \equiv 0$，满足 $g(t) \equiv 0$，由 D'Alembert 公式

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\bar{\varphi}(x+t) + \bar{\varphi}(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \bar{\psi}(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \bar{f}(y,\tau)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\tau$$

接下来只考虑 $t \geq 0$ 时（注意 $\tau \in [0,t]$）

Case 1：$x \geq t$ 时，

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(y,\tau)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\tau \tag{2.37}$$

Case 2：$0 \leq x \leq t$ 时，此时 $x-t, x-(t-\tau)$ 均变号，所以

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) - \varphi(t-x)\right] + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} \psi(y)\mathrm{d}y \\ & + \frac{1}{2}\left[\int_{t-x}^{t}\left(\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(y,\tau)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\tau + \int_0^{t-x}\left(\int_{(t-\tau)-x}^{x+(t-\tau)} f(y,\tau)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\tau\right] \end{aligned} \tag{2.38}$$

定理 2.3

若半无界问题 (2.34) 满足 $\varphi(x) \in C^2([0,+\infty)), \psi(x) \in C([0,+\infty))$ 以及非齐次项 $f(x,t) \in C^1([0,+\infty) \times [0,+\infty))$ 满足相容性条件

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad f(0,0) + \varphi'(0) = 0 \tag{2.39}$$

且边值 $g(t) \equiv 0$，则由公式 (2.37)(2.38) 给出的解 $u \in C^2([0,+\infty) \times [0,+\infty))$，且是半无界问题 (2.34) 的解

2. 非齐次边值情形：$g(t) \not\equiv 0$

考虑将边值化为零，作函数替换 $v(x,t) = u(x,t) - g(t)$，则

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = f(x,t) - g'(t) \\ v(x,0) = \varphi(x) - g(0) \\ v_t(x,0) = \psi(x) - g'(0) \\ v(0,t) = 0 \end{cases} \tag{2.40}$$

为满足相容性条件，我们对 φ,ψ,f 做如下要求

$$\begin{cases} \varphi(0) = g(0) \\ \psi(0) = g'(0) \\ f(0,0) + \varphi''(0) = g''(0) \end{cases} \tag{2.41}$$

根据 (2.37)(2.38) 求出 $v(x,t)$，即可得到 $g(t)$

定理 2.4

若半无界问题 (2.34) 满足 $\varphi(x) \in C^2([0,+\infty)), \psi(x) \in C([0,+\infty))$，非齐次项 $f(x,t) \in C^1([0,+\infty) \times [0,+\infty))$ 和边值 $g(t) \in C^3([0,+\infty))$ 满足相容性条件

$$\varphi(0) = g(0), \quad \psi(0) = g'(0), \quad f(0,0) + \varphi'(0) = g''(0) \tag{2.42}$$

且边值 $g(t) \equiv 0$，半无界问题有解 $u \in C^2([0,+\infty) \times [0,+\infty))$

2.2.3 高维初值问题

2.2.3.1 三维初值问题

首先考虑维数 $n=3$ 的情形

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle_{\mathbb{R}^3} u = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.43}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$，由定理 2.2，我们只需要求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle_{\mathbb{R}^3} u = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.44}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$，下面采用**球平均法**进行求解，因为三维球面上的 Laplace 算符可以表示为

$$\triangle u = \partial_r^2 u + \frac{2}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2}\triangle_{S^2} u \tag{2.45}$$

代入方程得

$$\partial_t^2 u - \partial_r^2 u - \frac{2}{r}\partial_r u - \frac{1}{r^2}\triangle_{S^2} u = 0 \tag{2.46}$$

因为（我也不知道为什么）

$$\int_{S^2} \triangle_{S^2} u \mathrm{d}S(\omega) = 0$$

所以，在单位球面 S^2 上积分得

$$\partial_t^2 \int_{S^2} u \mathrm{d}S(\omega) - \left(\partial_r^2 \int_{S^2} u \mathrm{d}S(\omega) + \frac{2}{r}\partial_r \int_{S^2} u \mathrm{d}S(\omega)\right) = 0 \tag{2.47}$$

在单位球面 S^2 上取平均，令

$$\bar{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} u(r\omega,t)\mathrm{d}S(\omega) \tag{2.48}$$

则我们有

$$\partial_t^2 \bar{u} - \left(\partial_r^2 \bar{u} + \frac{2}{r}\partial_r \bar{u}\right) = 0 \tag{2.49}$$

令 $\bar{u}(r,t) = r^k v(r,t)$（或可设 $v(r,t) = \bar{u}(r^k,t)$），代入方程则有

$$\partial_t^2 v - \left[k(k+1)\frac{v}{r^2} + 2(k+1)\frac{\partial_r v}{r} + \partial_r^2 v\right] = 0 \tag{2.50}$$

取 $k=-1$，即 $v(r,t) = r\bar{u}(r,t)$，则

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \partial_r^2 v = 0 \\ v(r,0) = r\bar{u}(r,0) = 0 \\ \partial_t v(r,0) = \dfrac{r}{4\pi}\displaystyle\int_{S^2} \psi(r\omega)\mathrm{d}S(\omega) = r\bar{\psi}(r) \end{cases} \tag{2.51}$$

再对 (2.51) 作偶延拓，可以解得

$$r\bar{u}(r,t) = v(r,t) = \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} s\bar{\psi}(s)\mathrm{d}s \tag{2.52}$$

所以我们就解出了 $\bar{u}$，但是如何解出 u？

Step 1：因为

$$\partial_r(r\bar{u})|_{r=0} = \bar{u} + r\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}|_{r=0} = \bar{u}(0,t), \quad \bar{u}(0,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} u(0,t)\mathrm{d}S(\omega) = u(0,t)$$

所以（$\bar{\psi}$ 为偶函数）

$$\begin{aligned}u(0,t) &= \partial_r(r\bar{u})|_{r=0}\\ &= \frac{1}{2}\left[(r+t)\bar{\psi}(r+t)-(r-t)\bar{\psi}(r-t)\right]\Big|_{r=0}\\ &= t\bar{\psi}(t)\end{aligned}$$

Step 2：对 $\forall x_0\in\mathbb{R}^3$，设 $\tilde{u}(x,t)=u(x+x_0,t)$，则 $\tilde{u}$ 满足

$$\begin{cases}\partial_t^2\tilde{u}-\Delta_{\mathbb{R}^3}\tilde{u}=0\\ \tilde{u}(x,0)=0\\ \partial_t\tilde{u}(x,0)=\psi(x+x_0)\end{cases}\tag{2.53}$$

所以，由第一步知

$$\begin{aligned}u(x_0,t) &= \tilde{u}(0,t)\\ &= t\bar{\tilde{\psi}}(t)\\ &= t\cdot\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\tilde{\psi}(t\omega)\mathrm{d}S(\omega)\\ &= \frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1}\psi(x_0+t\omega)\mathrm{d}S(\omega),\quad \text{设} y=x_0+t\omega\\ &= \frac{1}{4\pi t}\int_{|y-x_0|=t}\psi(y)\mathrm{d}S(y)\end{aligned}$$

对 $\forall x_0\in\mathbb{R}^3$ 均成立，所以方程 (2.44) 的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi t}\int_{|y-x|=t}\psi(y)\mathrm{d}S(y)\tag{2.54}$$

再由定理 2.2，当 $f\equiv 0$ 时，方程 (2.43) 的解为

$$u(x,t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{|y-x|=t}\varphi(y)\mathrm{d}S(y)\right)+\frac{1}{4\pi t}\int_{|y-x|=t}\psi(y)\mathrm{d}S(y)\tag{2.55}$$

我们称 (2.55) 为 Kirchhoff 公式，若 $f\not\equiv 0$ 时，方程 (2.43) 的解为

$$u(x,t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{|y-x|=t}\varphi(y)\mathrm{d}S(y)\right)+\frac{1}{4\pi t}\int_{|y-x|=t}\psi(y)\mathrm{d}S(y)+\int_0^t\left(\frac{1}{4\pi(t-\tau)}\int_{|y-x|=|t-\tau|}f(y,\tau)\mathrm{d}S(y)\right)\mathrm{d}\tau\tag{2.56}$$

2.2.3.2 二维初值问题

$n=2$ 时，方程为

$$\begin{cases}u_{tt}-\Delta_{\mathbb{R}^2}u=f(x,t)\\ u(x,0)=\varphi(x)\\ u_t(x,0)=\psi(x)\end{cases}\tag{2.57}$$

采用**升维法**，令 $\tilde{u}(\tilde{x},t)=u(x_1,x_2,t)$，其中 $\tilde{x}=(x_1,x_2,x_3)$，则 $\tilde{\varphi}(\tilde{x})=\varphi(x),\tilde{\psi}(x)=\psi(x),\tilde{f}(\tilde{x},t)=f(x,t)$，则

$$\begin{cases}\tilde{u}_{tt}-\Delta_{\mathbb{R}^3}\tilde{u}=\tilde{f}(\tilde{x},t)\\ \tilde{u}(\tilde{x},0)=\tilde{\varphi}(\tilde{x})\\ \tilde{u}_t(\tilde{x},0)=\tilde{\psi}(\tilde{x})\end{cases}\tag{2.58}$$

我们先解 $\tilde{f}\equiv 0,\tilde{\varphi}\equiv 0$ 的方程，由 Kirchhoff 公式得

$$\tilde{u}(\tilde{x},t)=\frac{1}{4\pi t}\int_{|y-\tilde{x}|=t}\tilde{\psi}(\tilde{y})\mathrm{d}S(\tilde{y})\tag{2.59}$$

由于 $\tilde{u}(\tilde{x},t)$ 与 x_3 无关，不妨设 $x_3=0$，再令 $x_1=x_2=0$，则

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= \tilde{u}(0,t) \\
&= \frac{1}{4\pi t}\int_{|\tilde{y}|=t}\psi(y)\mathrm{d}S(\tilde{y}) \quad \text{在上半球积分} \\
&= \frac{2}{4\pi t}\int_{y_3=\sqrt{1-(y_1^2+y_2^2)}}\psi(y_1,y_2)\mathrm{d}S(\tilde{y}) \\
&= \frac{1}{2\pi t}\int_{y_1^2+y_2^2\le t^2}\psi(y_1,y_2)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{y_1^2+y_2^2\le t^2}\frac{\psi(y_1,y_2)}{\sqrt{t^2-(y_1^2+y_2^2)}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2
\end{aligned}
$$

对 $\forall x_0\in\mathbb{R}^2$，设 $v(x,t)=u(x+x_0,t)$，则 v 满足

$$
\begin{cases}
v_{tt}-\triangle_{\mathbb{R}^3}v=0 \\
v(x,0)=0 \\
v_t(x,0)=\psi(x+x_0)
\end{cases}
\tag{2.60}
$$

于是，同上推理可得

$$
\begin{aligned}
v(0,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|y|\le t}\frac{\psi(x_0+y)}{\sqrt{t^2-(y_1^2+y_2^2)}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \quad \text{设} s=x_0+y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|s-x_0|\le t}\frac{\psi(s)}{\sqrt{t^2-|s-x_0|^2}}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|y-x_0|\le t}\frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2-|y-x_0|^2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2
\end{aligned}
$$

由 x_0 的任意性知

$$
u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|\le t}\frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \tag{2.61}
$$

再由定理 2.2，当 $f\equiv 0$ 时，方程 (2.57) 的解为

$$
u(x,t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|\le t}\frac{\varphi(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right)+\frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|\le t}\frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \tag{2.62}
$$

我们称 (2.62) 为 Poisson 公式，若 $f\not\equiv 0$，则方程 (2.57) 的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|\le t}\frac{\varphi(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right) \\
&\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|\le t}\frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2+\frac{1}{2\pi}\int_0^t\left(\int_{|y-x|\le t-\tau}\frac{f(y,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-|y-x|^2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

2.2.4 特征锥

接下来考虑 $f\equiv 0$ 的情形

定义 2.3 (特征锥)

在上半空间 $\mathbb{R}_+^{n+1}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+(n\ge 1)$ 中的锥

$$
C(x_0,t_0)=\{(x,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}\big||x-x_0|\le t_0-t\} \tag{2.64}
$$

称为以 (x_0,t_0) 为顶点的特征锥，并记

$$
D_{(x_0,t_0)}=\{x\in\mathbb{R}^n\big||x-x_0|\le t_0\} \tag{2.65}
$$

♣

由 Kirchhoff 公式、poisson 公式，$u(x_0,t_0)$ 的值只依赖于区域 $D_{(x_0,t_0)}$ 上的初值，而不依赖于 $D_{(x_0,t_0)}$ 外的初值，因此我们称 $D_{(x_0,t_0)}$ 为点 (x_0,t_0) 对初值的**依赖区域**

另一方面，记

$$J_{x_0}=\{(x,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}\big||x-x_0|\leq t\}\tag{2.66}$$

因为区域 J_{x_0} 上的点的值 $u(x,t)$ 与 x_0 处的初值 $\varphi(x_0),\psi(x_0)$ 有关，即受到初值 $\varphi(x_0),\psi(x_0)$ 的影响，而 J_{x_0} 外的点的值 $u(x,t)$ 与 x_0 处的初值 $\varphi(x_0),\psi(x_0)$ 无关，因此我们称 J_{x_0} 为点 x_0 的**影响区域**

对于一个区域 $D\subset\mathbb{R}^n$，称

$$J_D=\bigcup_{x_0\in D}J_{x_0}\tag{2.67}$$

为 D 的影响区域

仔细观察 Kierhhoff 公式和 Poisson 公式可知，当 $n=3$ 时，$u(x_0,t_0)$ 实际上只依赖于依赖区域 $D_{(x_0,t_0)}$ 的边界

$$\partial D_{(x_0,t_0)}=\{x\in\mathbb{R}^3\big||x-x_0|=t_0\}$$

上的初值 φ,ψ，而当 $n=2$ 时，$u(x_0,t_0)$ 依赖于整个依赖区域 $D_{(x_0,t_0)}$ 上的初值 φ,ψ，这个差别在物理上会产生截然不同的效应，详见课本 P171

2.3 初边值问题

定义 2.4 (Sturm-Liouville 问题)

常微分方程齐次边值问题

$$\begin{cases}X'+\lambda X=0, & x\in(0,l)\\-\alpha_1X'(0)+\beta_1X(0)=0\\-\alpha_2X'(l)+\beta_2X(l)=0\end{cases}\tag{2.68}$$

其中 $\alpha_i,\beta_i\geq0,\alpha_i+\beta_i\geq0,i=1,2$ 称为 Stuem-Liouville 问题或特征值问题，使得此问题有非零解的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 称为此问题的特征值，相应的非零解称为对应于这个特征值的特征函数 ♣

对于 Sturm-Liouville 问题 (2.68)，我们有以下结论：

- 所有特征值都是非负实数，特别地，当 $\beta_1+\beta_2>0$ 时，所有特征值都是正数
- 不同特征值对应的特征函数必正交，即不同特征值 λ,μ 对应的特征函数 $X_\lambda(x),X_\mu(x)$ 满足
$$\int_0^l X_\lambda(x)X_\mu(x)\mathrm{d}x=0$$
- 所有特征值组成一个单调递增、以无穷远点为聚点的序列
$$0\leq\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots,\quad\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$$
- 任意函数 $f(x)\in L^2((0,l))$ 可以按特征函数系展开为
$$f(x)=\sum_{i=1}^n C_nX_n(x)$$
其中
$$C_n=\frac{\int_0^l f(x)X_n(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l X_n^2(x)\mathrm{d}x}$$
这里的无穷级数收敛指的是
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^l\left|f(x)-\sum_{i=1}^N C_nX_n(x)\right|^2\mathrm{d}x=0$$

考虑混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,+\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l] \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,l] \\ u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t) \end{cases} \tag{2.69}$$

我们将利用**分离变量法**来求解上述混合问题

1. $f \equiv 0, g_1(t) \equiv 0, g_2(t) \equiv 0$

考虑混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,+\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l] \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,l] \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \end{cases} \tag{2.70}$$

Step 1：设 $u(x,t) = T(t)X(x)$，则

$$\begin{cases} T''(t)X(x) - T(t)X''(x) = 0 \\ T(t)X(0) = 0, \quad T(t)X(l) = 0 \end{cases} \tag{2.71}$$

对 (2.71) 的第一式分离变量得

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

上式左端为 t 的函数，右端为 x 的函数，它们相等，因此只能是常数，设为 $-\lambda$，因此我们得到了关于 x 的 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \quad X(l) = 0 \end{cases} \tag{2.72}$$

Case 1：$\lambda < 0$，则 $X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$，代入边值条件解得 $c_1 = c_2 = 0$，只有零解，舍去

Case 2：$\lambda = 0$，则 $X(x) = c_1 x + c_2$，代入边值条件得 $c_1 = c_2 = 0$，只有零解，舍去

Case 3：$\lambda > 0$，则 $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$，代入边值条件得

$$\begin{cases} X(0) = c_1 = 0 \\ X(l) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \end{cases}$$

若 $c_2 \neq 0$，则 $\sqrt{\lambda_n}l = n\pi$，故 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \cdots$，且特征值 λ_n 对应的特征函数为

$$X_n = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Step 2：Sturm-Liouville 边值问题中的特殊函数系 $\{X_n(x)\}$ 构成了 $L^2((0,l))$ 上的一组完备正交基，所以我们设

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) \tag{2.73}$$

且对于每个 $X_n(x)$，我们有 $X_n'(x) + \lambda_n X(x) = 0$，代入 (2.70) 可得

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} X_n(x)\left[T_n''(t) + \lambda_n T_n(t)\right] = 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = \varphi(x), \quad \sum_{i=1}^{\infty} T_n'(0)X_n(x) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.74}$$

将 (2.74) 三式同时与 $X_n(x)$ 作内积得 ($\forall m \neq n, < X_n(x), X_m(x) >= 0$)

$$\begin{cases} \left[T_n''(t) + \lambda_n T_n(t)\right] \cdot < X_n(x), X_n(x) >= 0 \\ T_n(0) \cdot < X_n(x), X_n(x) >=< \varphi(x), X_n(x) >, \quad T_n'(0) \cdot < X_n(x), X_n(x) >=< \psi(x), X_n(x) > \end{cases} \tag{2.75}$$

记

$$\begin{cases} \varphi_n = \dfrac{< \varphi(x), X_n(x) >}{< X_n(x), X_n(x) >} = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x \\ \psi_n = \dfrac{< \psi(x), X_n(x) >}{< X_n(x), X_n(x) >} = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x \end{cases} \tag{2.76}$$

则 $T_n(t)$ 满足方程

$$\begin{cases} T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = 0 \\ T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n \end{cases} \tag{2.77}$$

因此解得

$$T_n(t) = \varphi_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi}\psi_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right)$$

所以

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\varphi_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi}\psi_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{2.78}$$

2. $f(x,t) \not\equiv 0, g_1(t) \equiv 0, g_2(t) \equiv 0$

考虑混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,+\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l] \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,l] \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \end{cases} \tag{2.79}$$

先令 $f \equiv 0$，解出特征函数系 $\{X_n(x)\}$，我们先前已经解过了，设解

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) \tag{2.80}$$

代入方程可得（$X_n''(x) = -\lambda_n X_n(x)$）

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} X_n(x)\left[T_n''(t) + \lambda_n T_n(t)\right] = f(x,t) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = \varphi(x), \quad \sum_{i=1}^{\infty} T_n'(0)X_n(x) = \psi(x) \end{cases} \tag{2.81}$$

将 (2.81) 三式同时与 X_n 作内积得

$$\begin{cases} \left[T_n''(t) + \lambda_n T_n(t)\right] \cdot < X_n(x), X_n(x) >=< f(x,t), X_n(x) > \\ T_n(0) \cdot < X_n(x), X_n(x) >=< \varphi(x), X_n(x) >, \quad T_n'(0) \cdot < X_n(x), X_n(x) >=< \psi(x), X_n(x) > \end{cases} \tag{2.82}$$

记

$$\begin{cases} f_n(t) = \dfrac{< f(x,t), X_n(x) >}{< X_n(x), X_n(x) >} = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)\mathrm{d}x \\ \varphi_n = \dfrac{< \varphi(x), X_n(x) >}{< X_n(x), X_n(x) >} = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x \\ \psi_n = \dfrac{< \psi(x), X_n(x) >}{< X_n(x), X_n(x) >} = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x \end{cases} \tag{2.83}$$

则 $T_n(t)$ 满足方程

$$\begin{cases} T_n''(t) + \lambda_n T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n \end{cases} \tag{2.84}$$

可解得

$$T_n(t) = \varphi_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi}\psi_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau$$

所以

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\left\{\varphi_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi}\psi_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi}{l}(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{2.85}$$

3. $f(x,t), g_1(t), g_2(t)$ 都不恒为零，此时需优先将边值化为零，令

$$v(x,t) = u(x,t) - \left[\frac{l-x}{l}g_1(t) + \frac{x}{l}g_2(t)\right] \tag{2.86}$$

则

$$\begin{cases} v(0,t) = u(0,t) - g_1(t) = 0 \\ v(l,t) = u(l,t) - g_2(t) = 0 \\ v_{tt} - v_{xx} = f(x,t) - \left[\frac{l-x}{l}g_1'(t) + \frac{x}{l}g_2'(t)\right] \triangleq \tilde{f}(x,t) \end{cases} \tag{2.87}$$

于是就化简成了 2 的情形，同理求解即可

注 初边值问题解题步骤：先将边值化为零，再分离变量求（齐次方程的）特征函数系即可

2.4 能量估计

考虑波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x,t), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.88}$$

方程两边同时乘 $\partial_t u$ 得

$$\partial_t u\left(\partial_t^2 u - \Delta u\right) = \partial_t u \cdot f(x,t) \tag{2.89}$$

注意到

$$\frac{1}{2}\partial_t\left(\partial_t u\right)^2 = \partial_t u \cdot \partial_t^2 u$$

$$\partial_t u \cdot \partial_{x_i}^2 u = \partial_{x_i}\left(\partial_t u \cdot \partial_{x_i} u\right) - \partial_{x_i} u \cdot \partial_{x_i,t} u = \partial_{x_i}(\partial_t u \cdot \partial_{x_i} u) - \frac{1}{2}\partial_t\left(\partial_{x_i} u\right)^2$$

从 1 到 n 求和即有

$$\partial_t u \cdot \Delta u = \operatorname{div}\left(\partial_t u \cdot \nabla u\right) - \frac{1}{2}\partial_t |\nabla u|^2$$

因此 (2.89) 可化简为

$$\frac{1}{2}\partial_t\left(\partial_t u\right)^2 - \operatorname{div}\ \left(\partial_t u \nabla u\right) + \frac{1}{2}\partial_t |\nabla u|^2 = \partial_t u \cdot f(x,t) \tag{2.90}$$

定义 2.5 (能量密度)

我们定义**能量密度**如下

$$e(t) = \frac{1}{2}\left(\partial_t u\right)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \tag{2.91}$$

♣

1. 考虑

$$\begin{cases}\partial_t^2 u - \triangle u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & \partial_t u(x,0) = \psi(x)\end{cases} \tag{2.92}$$

则将 $f \equiv 0$ 代入 (2.90) 得

$$\partial_t e(t) = \mathrm{div}\ (\partial_t u \nabla u) \tag{2.93}$$

我们称式 (2.93) 为**能量守恒的微分形式**

我们事先假设 u 的任意导数在空间无穷远处趋于零，对 (2.93) 在 $\mathbb{R}^n$ 上积分有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t e(t) \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{div}\ (\partial_t u \nabla u) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial\mathbb{R}^n} \partial_t u \nabla u \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S(x) \\ &= \int_{\partial\mathbb{R}^n} \partial_t u \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S(x) \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.94}$$

即有

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} e(t) \mathrm{d}x = 0 \tag{2.95}$$

我们称式 (2.95) 为**能量守恒的积分形式**，记 $E(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e(t)\mathrm{d}x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = 0$，即 $E(t) = E(0)$

2. 考虑（Ω 为有界区域）

$$\begin{cases}\partial_t^2 u - \triangle u = 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = \varphi(x), & \partial_t u(x,0) = \psi(x) \\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0\end{cases} \tag{2.96}$$

重复 (2.93)(2.94) 的过程，我们可得

$$\partial_t e(t) = \mathrm{div}\ (\partial_t u \nabla u) \tag{2.97}$$

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} e(t) \mathrm{d}x = 0 \tag{2.98}$$

令 $E(t) = \displaystyle\int_\Omega e(t)\mathrm{d}x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = 0$，即 $E(t) = E(0)$，则

$$E(t) = \int_\Omega \frac{1}{2}\left[\psi^2(x) + |\nabla\varphi(x)|^2\right] \mathrm{d}x, \quad \forall t \geq 0 \tag{2.99}$$

3. 考虑

$$\begin{cases}\partial_t^2 u - \triangle u = f(x,t), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & \partial_t u(x,0) = \psi(x) \\ u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0\end{cases} \tag{2.100}$$

同上，对第一式两边同时作用 $\partial_t u$ 得

$$\partial_t \left[\frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right] = \mathrm{div}\ \ (\partial_t u \nabla u) + \partial_t u \cdot f(x,t) \tag{2.101}$$

在 Ω 上积分得

$$\partial_t \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right] \mathrm{d}x = \int_\Omega \partial_t u \cdot f(x,t) \mathrm{d}x \tag{2.102}$$

对 RHS 使用均值不等式

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_t u \cdot f(x,t)\mathrm{d}x &\le \frac{1}{2}\int_\Omega (\partial_t u)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega (\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) \le E(t) + \frac{1}{2}\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.103}$$

使用 Gronwall 不等式得

$$\begin{aligned}E(t) &\le e^t\left[E(0) + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-s}\int_\Omega f^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right] \\ &\le e^T\left[E(0) + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |f(x,s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right] \\ &= \frac{e^T}{2}\left[\int_\Omega \left[\psi^2(x) + |\nabla\varphi(x)|^2\right]\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega |f(x,s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right]\end{aligned} \tag{2.104}$$

再令 $E_0(t) = \int_\Omega |u(x,t)|^2\mathrm{d}x$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_0(t) = 2\int_\Omega u(x,t)u_t(x,t)\mathrm{d}x \tag{2.105}$$

再对 RHS 使用均值不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_0(t) \le \int_\Omega |u(x,t)|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |u_t(x,t)|^2\mathrm{d}x \le \int_\Omega |u(x,t)|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_0(t) \le E_0(t) + 2E(t) \le E_0(t) + C_1(T)\left[E(0) + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |f(x,s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right] \tag{2.106}$$

同上使用 Gronwall 不等式得

$$E_0(t) \le C(T)\left[E_0(0) + E(0) + \int_0^T\int_\Omega |f(x,s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right] \tag{2.107}$$

其中 $C(T)$ 是一个只与 T 有关的常数

推论 2.3

方程 (2.100) 的古典解是唯一的

证明 设 $u_1(x,t), u_2(x,t)$ 是 (2.100) 的两个解，令 $x(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$，则

$$\begin{cases}\partial_t^2 v - \Delta v = 0 \\ v(x,0) = 0, \partial_t v(x,0) = 0 \\ v(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0\end{cases} \tag{2.108}$$

设 $E(t) = \int_\Omega \frac{1}{2}\left[|\partial_t v|^2 + |\nabla v|^2\right]\mathrm{d}x$，则 $E(0) = 0$，由能量估计 (2.104) 可知

$$E(t) \equiv 0$$

即 $\partial_t v \equiv 0, \nabla v \equiv 0, \forall (x,t)$，故 v 在 Ω 上是常数，再由 E_0 的能量估计 (2.107) 可知

$$E_0(t) \equiv 0$$

即 $v(x,t) \equiv 0, \forall x \in \Omega, 0 \le t \le T$，由 t 的任意性知，$u_1(x,t) = u_2(x,t)$ □

注 若初值相差不多，即对于 u_1, u_2，有

$$\begin{cases}\int_{\Omega} |\nabla\varphi_1(x) - \nabla\varphi_2(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \delta \\ \int_{\Omega} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \delta \\ \int_0^T |f_1(x,t) - f_2(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t < \delta\end{cases} \tag{2.109}$$

则 u_1, u_2 的能量 $E_1(t), E_2(t)$ 也相差不多

2.4.1 用能量解释有限传播速度

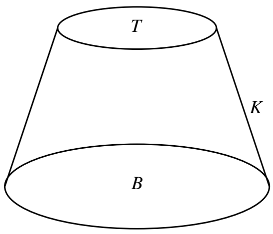
考虑方程

$$\begin{cases}\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \partial_t u(x,0) = \psi(x)\end{cases} \tag{2.110}$$

方程两边同时作用 $\partial_t u$，则有

$$\partial_t \left[\frac{1}{2}(\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2\right] = \mathrm{div}\ (\partial_t u \nabla u) \tag{2.111}$$

在锥台 $|x - x_0| \le R - t$ 上积分（R 为常数，且 $R > T$）



记椎台顶部为 T，底部为 B，侧边为

$$K = \{(t,x) \big| |x - x_0| = R - t, \quad 0 < t < T\}, \quad \boldsymbol{n}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1, \frac{x - x_0}{|x - x_0|}\right)$$

则我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\text{圆台}} \partial_t e(t) - \mathrm{div}\ (\partial_t u \nabla u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_{\text{圆台}} \mathrm{div}\ _{t,x}\,(e(t), -\partial_t u \nabla u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_{S+T+K} (e(t), -\partial_t \nabla u) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\ &= -\int_B e(0)\mathrm{d}x + \int_T e(T)\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_K \left[e(t) - \partial_t u \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot \nabla u\right] \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{2.112}$$

继续处理侧面的积分，对被积函数配方得

$$\begin{aligned} e(t) - \partial_t u \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot \nabla u &= \frac{1}{2}\left[(\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 - 2\partial_t u \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot \nabla u\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\partial_t u - \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot \nabla u\right)^2 + |\nabla u|^2 - \left|\frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot \nabla u\right|^2\right] \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

再结合 (2.112) 知

$$\int_B e(0)\mathrm{d}x = \int_T e(T)\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_K \left[e(t) - \partial_t u \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot \nabla u\right] \mathrm{d}S \tag{2.113}$$

记侧面的积分为 $\mathrm{Flux}[0,T]$，则

$$\int_B e(0)\mathrm{d}x = \int_T e(T)\mathrm{d}x + \mathrm{Flux}[0,T] \tag{2.114}$$

这表明波在传播的过程中，从下底面流入的能量等于从顶部和侧边流出的能量，若下底面的能量是零，则上底面的能量也是零，即上底面是下底面的决定区域

第三章 位势方程

本章考虑位势方程（Poisson 方程）（注意！课本上是 $-\Delta u = f(x)$，与老师上课讲的差一个符号，这也导致后面的 Green 函数差一个负号，实际上，$-\Delta u$ 是正算子，但是我不知道为什么）

$$\Delta u = f(x) \tag{3.1}$$

其中 $u = u(x), x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$，其中 $f(x)$ 是一个已知函数，若 $f(x) \equiv 0$，则 (2.1) 简化为 Laplace 方程

$$\Delta u = 0 \tag{3.2}$$

为了求解 Poisson 方程 (2.1)，我们还需提供适当的边值条件，对于 Poisson 方程来说，我们通常考虑以下三种边值条件

定义 3.1 (三种边值条件)

1. 第一边值条件（Dirichlet 边值）：已知函数 u 在区域 Ω 边界 $\partial\Omega$ 上的值，即
$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \tag{3.3}$$
2. 第二边值条件（Neumann 边值）：已知函数 u 在区域 Ω 边界 $\partial\Omega$ 上的法向导数，即
$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g(x), \quad x \in \partial\Omega \tag{3.4}$$
3. 第三边值条件（Robin 边值）：已知函数 u 和其在区域边界 $\partial\Omega$ 上的法向导数的一个线性组合，即
$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \alpha(x)u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \tag{3.5}$$

♣

3.1 调和函数

定义 3.2 (调和函数)

若函数 $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 具有二阶连续偏导数，且满足 Laplace 方程

$$\Delta u = 0 \tag{3.6}$$

则称 u 是 Ω 上的调和函数

♣

调和函数具有如下不变性

性质 假设 $u(x)$ 是一个 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数，则

1. $u(\lambda x)$ 也是一个调和函数，其中 λ 为任一实数
2. $u(x + x_0)$ 也是一个调和函数，其中 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 固定
3. $u(Ox)$ 也是一个调和函数，其中 $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个正交变换

定义 3.3 (平均值性质)

设 $u \in C(\overline{\Omega})$，则

1. 称 u 满足平均值性质，若 $\forall B(x, r) \subset \Omega$，满足
$$u(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} u(y) \mathrm{d}y \tag{3.7}$$
2. 称 u 满足第二平均值性质，若 $\forall B(x, r) \subset \Omega$，满足
$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \mathrm{d}S(y) \tag{3.8}$$

♣

Claim：平均值性质与第二平均值性质等价（只证 $n=3$ 时，其余情况类似）

证明 (1) $\Rightarrow$ (2)：由 (2.7) 知，$u(x)\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=\int_{B(x,r)}u(y)\mathrm{d}y$，两边同时对 r 求导得

$$u(x)\cdot 4\pi r^2=\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)$$

整理即得

$$u(x)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)$$

(2) $\Rightarrow$ (1)：因为 $\int_{B(x,r)}u(y)\mathrm{d}y=\int_0^r\left(\int_{\partial B(x,\rho)}u(y)\mathrm{d}S(y)\right)\mathrm{d}\rho$，将 (2.8) 代入得

$$\int_{B(x,r)}u(y)\mathrm{d}y=\int_0^r 4\pi\rho^2u(x)\mathrm{d}\rho=\frac{4}{3}\pi r^3u(x)$$

整理即得

$$u(x)=\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}u(y)\mathrm{d}y$$

□

定理 3.1 (调和函数具有平均值性质)

若 $u\in C^2(\Omega)$ 是 Ω 上的调和函数，则对于任意闭球 $B(x,r)\subset\Omega$，有

$$u(x)=\frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)\tag{3.9}$$

证明 在球面上的外法向即为半径方向的单位向量，即 $\boldsymbol{n}=\frac{y-x}{|y-x|},\forall y\in\partial B(x,r)$，所以由 $\Delta u=0$ 得

$$\begin{aligned}0&=\int_{B(x,r)}\Delta u(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{B(x,r)}\operatorname{div}\left(\nabla u(y)\right)\mathrm{d}y\\&=\int_{\partial B(x,r)}\nabla u(y)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S(y)\\&=\int_{\partial B(x,r)}\nabla u(y)\cdot\frac{y-x}{|y-x|}\mathrm{d}S(y)\end{aligned}$$

其中 $\partial B(x,r)$ 可以写为 $|y-x|=r$，作变量替换 $y-x=r\omega$，转化为半径为 1 的单位球，则 $\mathrm{d}S(y)=r^2\mathrm{d}S(\omega)$，因此

$$\begin{aligned}0&=\int_{|\omega|=1}\nabla u(x+r\omega)\cdot\omega\cdot r^2\mathrm{d}S(\omega)\\&=r^2\int_{|\omega|=1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(u(x+r\omega)\right)\mathrm{d}S(\omega)\\&=r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\int_{|\omega|=1}u(x+r\omega)\mathrm{d}S(\omega)\right]\end{aligned}$$

由导数等于零知，中括号内与 r 无关，因此取 $r=0$，则有

$$\int_{|\omega|=1}u(x+r\omega)\mathrm{d}S(\omega)=\int_{|\omega|=1}u(x)\mathrm{d}S(\omega)=4\pi u(x)$$

即

$$\begin{aligned}u(x)&=\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}u(x+r\omega)\mathrm{d}S(\omega)\\&=\frac{1}{4\pi}\int_{B(x,r)}u(y)\cdot\frac{1}{r^2}\mathrm{d}S(y)\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)\end{aligned}$$

因此调和函数具有平均值性质 □

定理 3.2 (平均值性质推调和函数)

假设 $u \in C^2(\Omega)$ 满足对任意的 $B(x,r) \subset \Omega$，有

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \mathrm{d}S(y) \tag{3.10}$$

则 u 是 Ω 上的调和函数

证明 首先注意到一个事实：若对 $\forall B(x,r) \subset \Omega$，有 $\displaystyle\int_{B(x,r)} f(y)\mathrm{d}y = 0$，则 $f \equiv 0, \quad \forall x \in \Omega$，回到定理的证明，与前面定理 3.1 的证明类似，$\displaystyle\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\mathrm{d}y = r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \int_{|\omega|=1} u(x+r\omega)\mathrm{d}S(\omega)$，再由平均值性质

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} u(y)\mathrm{d}S(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u(x+r\omega)\mathrm{d}S(\omega) \end{aligned}$$

所以我们有

$$\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\mathrm{d}y = r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(4\pi u(x)\Big) = 0 \tag{3.11}$$

Claim：$\Delta u(x) \equiv 0, \forall x \in \Omega$

否则，不妨设 $\exists x_0 \in \Omega, \text{s.t. } \Delta u(x_0) > C > 0$，由于 $u \in C^2(\Omega)$，故存在 $r_0 > 0, \text{s.t. } \Delta u(x) \geq \dfrac{C}{2}, \forall x \in B(x_0, r_0)$，因此

$$\int_{B(x_0,r_0)} |\Delta u(y)|\mathrm{d}y \geq \frac{C}{2}|B(x_0,r_0)| > 0$$

这与 (3.11) 矛盾！因此 Δu 是 Ω 上的调和函数 □

实际上，对于定理 3.2 中的光滑性结论 $u \in C^2(\Omega)$ 可以减弱为 $u \in C(\Omega)$，即若 u 连续且满足平均值性质，则 u 是光滑的，进一步 u 是调和的

定理 3.3

假设 $u \in C(\Omega)$ 满足平均值性质，即对于 $\forall B(x,r) \subset \Omega$，有

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \mathrm{d}S(y) \tag{3.12}$$

则 u 在 Ω 上是光滑的，即 $u \in C^\infty(\Omega)$，且 u 在 Ω 上调和

证明 只需证明 u 在 Ω 上是光滑的，则 $u \in C^2(\Omega)$，再由定理 3.2 知 u 调和。为证明 u 是光滑的，我们只需找到一个性质很好的函数 φ_ε 与 u 做卷积，则 $u = u * \varphi_\varepsilon \in C^\infty$

令 $\varphi \in C_0^\infty(B(0,1))$，且满足

1. φ 是径向函数，即 $\varphi(x) = \varphi(|x|)$
2. φ 有紧致支集 $\operatorname{supp} \varphi = \{x | \varphi(x) \neq 0\}$，且 $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0,1)$，即在 $B(0,1)$ 外 $\varphi \equiv 0$
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{B(0,1)} \varphi(y)\mathrm{d}y = 1$

因此我们有

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B(0,r)} \varphi(x)\mathrm{d}S(x) \right) \mathrm{d}r$$

设 $x = \omega r$，则 $\mathrm{d}S(x) = r^{n-1}\mathrm{d}S(\omega)$，所以

$$1 = \int_0^{+\infty} \left(\int_{|\omega|=1} \varphi(r) \cdot r^{n-1} \mathrm{d}S(\omega) \right) \mathrm{d}r = \omega_n \int_0^{+\infty} \varphi(r) \cdot r^{n-1}\mathrm{d}r$$

其中 ω_n 表示 n 维单位球面面积，由于 $r > 1$ 时，$\varphi(r) = 0$，所以积分上限也可以改写为 1，即我们有

$$1 = \omega_n \int_0^1 \varphi(r) r^{n-1}\mathrm{d}r$$

再设 $\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$，则 $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon\subset B(0,\varepsilon)$，且

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\int_{B(0,\varepsilon)}\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}x=\int_{B(0,1)}\varphi(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\mathrm{d}y=1$$

对 $\forall x\in\Omega$，我们取 $\varepsilon<\frac{1}{4}\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$，其中 $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)=\inf\limits_{y\in\partial\Omega}|x-y|$，则 $B(x,\varepsilon)\subset\Omega$，则

$$\begin{aligned}
u*\varphi_\varepsilon(x)&=\int_\Omega u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\\
&=\int_\Omega u(y)\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}y\\
&=\int_{\Omega\cap B(x,\varepsilon)}u(y)\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}y\\
&=\int_{B(x,\varepsilon)}u(y)\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

因为对于 $\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$，根据 φ 的定义，只有当 $\left|\frac{x-y}{\varepsilon}\right|<1$ 时，即 $y\in B(x,\varepsilon)$ 时，φ 才非零，再根据 ε 的选取，所以上述积分区域变为 $B(x,\varepsilon)$，我们再换元，令 $\frac{y-x}{\varepsilon}=z$，则积分区域 $B(x,\varepsilon)$ 化为 $B(0,1)$

$$\begin{aligned}
u*\varphi_\varepsilon(x)&=\int_{B(0,1)}\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(z)u(x+\varepsilon z)\varepsilon^n\mathrm{d}z\\
&=\int_{|z|<1}\varphi(z)u(x+\varepsilon z)\mathrm{d}z\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(z)u(x+\varepsilon z)\mathrm{d}z\\
&=\int_0^{+\infty}\left(\int_{|z|=r}\varphi(z)u(x+\varepsilon z)\mathrm{d}S(z)\right)\mathrm{d}r\\
&=\int_0^{+\infty}\left(\int_{|\omega|=1}u(x+\varepsilon r\omega)\mathrm{d}S(\omega)\right)\varphi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

再由平均值性质，$u(x)=\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(x,\varepsilon)}u(y)\mathrm{d}S(y)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|\omega|=1}u(x+\varepsilon r\omega)\mathrm{d}S(\omega)$，所以

$$\begin{aligned}
u*\varphi_\varepsilon(x)&=\int_0^{+\infty}\omega_n u(x)\varphi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r\\
&=\omega_n u(x)\int_0^{+\infty}\varphi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r\\
&=u(x)
\end{aligned}$$

所以只要 $u(x)$ 满足平均值性质，那么 $u(x)$ 是光滑的，再由定理 2.3 知，$u(x)$ 是调和的 □

注 若一个函数 u 是调和函数，那么它满足平均值性质，那么它一定光滑（无穷阶可微）

定理 3.4 (Harnack 不等式)

对于 Ω 上的任何连通紧子集 V，存在一个仅与距离函数

$$\operatorname{dist}(V,\partial\Omega)=\min_{\substack{x\in V\\ y\in\partial\Omega}}|x-y|$$

和维数 n 有关的正常数 C，使得

$$\sup_V u\le C\inf_V u \tag{3.13}$$

其中 u 是 Ω 上的任意**非负**调和函数，特别地，对 $\forall x,y\in V$，我们有

$$\frac{1}{C}u(y)\le u(x)\le Cu(y) \tag{3.14}$$

♡

证明 要证 $\sup\limits_V u\le C\inf\limits_V u$，只需证 $\forall x,y\in V,u(x)\le Cu(y)$ 即可

Step 1:我们取 $r < \frac{1}{4}\text{dist}(V, \partial\Omega)$,先假设 $|x-y| = r$,所以 $B(x,r) \subset B(y,2r) \subset \Omega$,注意到 $|B(y,2r)| = 2^n|B(x,r)|$,由平均值性质

$$u(y) = \frac{1}{|B(y,2r)|}\int_{B(y,2r)} u(z)\mathrm{d}z \geq \frac{1}{2^n}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} u(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2^n}u(x)$$

Step 2：因为 V 是连通紧集，且

$$\bigcup_{x\in V} B(x,r)$$

为 V 的一个开覆盖，所以它存在有限子覆盖，即

$$V \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r)$$

由 V 连通知，我们可以选取 $B(x_i,r) \cap B(x_{i+1},r) \neq \varnothing$，所以 $\forall x, y \in V$，我们有

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{nN}}u(y)$$

所以 $\sup_V u \leq 2^{nN} \inf_V u$ □

定理 3.5 (梯度估计)

假设 $u \in C(\overline{B(x_0,R)})$ 是调和的，则

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{R}\cdot \max_{B(x_0,R)} u \tag{3.15}$$

证明 由 u 调和 $\Rightarrow u$ 满足平均值性质 $\Rightarrow u$ 是光滑的，于是

$$\triangle(u_{x_j}) = \sum_{i=1}^{n}\left(u_{x_j}\right)_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i x_j} = (\Delta u)_{x_j} = 0$$

因此 u_{x_i} 也是调和的，再由平均值性质，以及公式 (1.1) 得（记 $\partial B(x_0,r)$ 上的单位外法向量的第 i 元为 ν^i）

$$\begin{aligned} u_{x_i}(x_0) &= \frac{1}{|B(x_0,R)|}\int_{B(x_0,R)} u_{x_i}(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{|B(x_0,R)|}\int_{\partial B(x_0,R)} u(y)\cdot \nu^i \mathrm{d}S(y) \end{aligned}$$

因为 $|\nu^i| \leq 1$，所以

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x_0)| &\leq \frac{1}{|B(x_0,R)|}\int_{\partial B(x_0,R)} |u|\mathrm{d}S(y) \\ &= \frac{1}{|B(x_0,R)|}\cdot \max_{B(x_0,R)} u \int_{\partial B(x_0,R)} \mathrm{d}S(y) \\ &= \frac{|\partial B(x_0,R)|}{|B(x_0,R)|}\max_{B(x_0,R)} u \\ &= \frac{n}{R}\cdot \max_{B(x_0,R)} u \end{aligned}$$

所以（记 $\partial B(x_0,R)$ 的单位外法向量为 $\nu = (\nu^1,\cdots,\nu^n)$，则 $|\nu| = 1$）

$$
\begin{aligned}
|\nabla u(x_0)| &= \left|\left(u_{x_1}(x_0), \cdots, u_{x_n}(x_0)\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{|B(x_0,R)|}\int_{\partial B(x_0,R)} u(y)\cdot\nu^1 \mathrm{d}S(y), \cdots, \frac{1}{|B(x_0,R)|}\int_{\partial B(x_0,R)} u(y)\cdot\nu^n \mathrm{d}S(y)\right)\right| \\
&= \frac{1}{|B(x_0,R)|}\left|\int_{\partial B(x_0,R)} u(y)\cdot\left(\nu^1,\cdots,\nu^n\right)\mathrm{d}S(y)\right| \\
&\le \frac{1}{|B(x_0,R)|}\int_{\partial B(x_0,R)} \max_{B(x_0,R)} u\cdot\left(\nu^1,\cdots,\nu^n\right)\mathrm{d}S(y) \\
&\le \frac{1}{|B(x_0,R)|}\cdot\max_{B(x_0,R)} u\cdot\left|\left(\int_{\partial B(x_0,R)} \nu^1\mathrm{d}S(y),\cdots,\int_{\partial B(x_0,R)}\nu^n\mathrm{d}S(y)\right)\right| \\
&= \frac{|\partial B(x_0,R)|}{|B(x_0,R)|}\cdot\max_{B(x_0,R)} u \\
&= \frac{n}{R}\cdot\max_{B(x_0,R)} u
\end{aligned}
$$

□

定理 3.6 (Liouville 定理)

假设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界调和函数，则 u 是常数

证明 由 u 有界知，$\exists M>0,\text{s.t. } |u(x)|\le M, \forall x\in\mathbb{R}^n$，且对 $\forall R>0, x_0\in\mathbb{R}^n$，$u$ 在 $\overline{B(x_0,R)}$ 上调和，由梯度估计知

$$|\nabla u(x_0)| \le \frac{nM}{R}, \quad \forall x_0\in\mathbb{R}^n$$

令 $R\to+\infty$，则 $|\nabla u(x_0)|=0, \forall x_0\in\mathbb{R}^n$，即 u 是常数 □

3.2 基本解与 Green 函数

3.2.1 基本解

定义 3.4 (Dirac 函数)

若 $\Delta u=\delta$，则称 u 为基本解，其中

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0\\ 0, & x\ne 0\end{cases} \tag{3.16}$$

其中 $\delta(x)$ 是广义函数，满足 $<\delta, f>= f(0), u*\delta=u$

因此，若 $\Delta\Gamma=\delta$，则

$$f=f*\delta=f*(\Delta\Gamma)=\Delta(f*\Gamma)$$

令 $u=f*\Gamma$，则 $\Delta u=f, \forall x\in\mathbb{R}^n$，因此我们只需求解 Γ 即可

Claim：若 f 是径向函数，则 $\Delta u=f$ 的解也是径向的

证明 只需证明对任意的旋转 $O: x\longrightarrow Ox$，有 $u(Ox)=u(x)$ 即可，因为

$$\Delta u(Ox)=(\Delta u)(Ox)=f(Ox)=f(x)$$

由解的唯一性知，$u(Ox)=u(x)$，故 u 是径向的 □

因此，由 $\delta(x)$ 的定义知，它是径向的，所以 Γ 也是径向函数，故 $\Gamma(x)=\Gamma(|x|)$，对 $\Delta\Gamma=\delta$ 作极坐标变换有（$r>0$ 时，$\delta=0$）

$$\partial_r^2\Gamma+\frac{n-1}{r}\partial_r\Gamma=0, \quad r>0$$

再令 $v=\partial_r\Gamma$，则

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}+\frac{n-1}{r}v=0$$

解得 $v(r)=\dfrac{C_1}{r^{n-1}}$，进一步解得

$$\Gamma(r)=\begin{cases}C_1\ln r+C_2, & n=2\\ \dfrac{C_1}{r^{n-2}}+C_2, & n\geq 3\end{cases} \tag{3.17}$$

根据 δ 的定义对 $\Gamma(r)$ 进行标准化，则我们得到基本解如下

定义 3.5 (Laplace 方程的基本解)

对 $x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0$，称函数

$$\Gamma(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & n=2\\ -\dfrac{1}{\omega(n)}\cdot\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n\geq 3\end{cases} \tag{3.18}$$

为 Laplace 方程的基本解，其中 ω_n 表示单位球面的面积，当 $n=3$ 时

$$\Gamma(x)=-\frac{1}{4\pi|r|}$$

♣

3.2.2 Green 函数

接下来我们考虑满足 Dirichlet 边值条件的位势方程

$$\begin{cases}\Delta u=f, & x\in\Omega\\ u=\varphi, & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{3.19}$$

引理 3.1 (第二 Green 公式)

若 $u,v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$，则

$$\int_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S(x) \tag{3.20}$$

♡

我们已经在第一章中证过了，此处不再赘述

命题 3.1 (三维下 $\Delta u=0$ 在 Ω 上的解)

若 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 满足 $\Delta u=0,\forall x\in\Omega$，则 $\forall x_0\in\Omega$ 有

$$u(x_0)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left[-u\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{|x-x_0|}\right)+\frac{1}{|x-x_0|}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S(x) \tag{3.21}$$

♠

证明 根据 Laplace 方程的平移不变性，不妨设 $x_0=0$，因此记 $\tilde{\Omega}=\{x-x_0|x\in\Omega\}$，我们只需证

$$u(0)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\tilde{\Omega}}\left[-u\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{|x|}\right)+\frac{1}{|x|}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S(x) \tag{3.22}$$

为方便表示，我们仍记 $\tilde{\Omega}$ 为 Ω，因为 $|x|^{-1}$ 的奇性，我们需要挖去一个小球，令 $\Omega_\varepsilon=\Omega\backslash\overline{B(0,\varepsilon)}$，记 $v(x)=-\dfrac{1}{4\pi|x|}$，则当 $n=3$ 时，v 是调和的，对 u,v 应用第二 Green 公式得，由于 $B(0,\varepsilon)$ 的外法向指向球心，即 $\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}=-\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}$

$$\begin{aligned}0&=\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S(x)\\&=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S(x)+\int_{|x|=\varepsilon}\left(u\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{4\pi|x|}\right)-\frac{1}{4\pi|x|}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{r}}\right)\mathrm{d}S(x)\end{aligned}$$

将上式第二个积分进行处理，因为

$$\begin{aligned}\int_{|x|=\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{4\pi|x|}\right)\mathrm{d}S(x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{|x|=\varepsilon} u\cdot\frac{x}{|x|}\cdot\frac{-x}{|x|^3}\mathrm{d}S(x)\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{|x|=\varepsilon} u\cdot\frac{1}{|x|^2}\mathrm{d}S(x)\\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x|=\varepsilon} u(x)\mathrm{d}S(x)\end{aligned}$$

设 $M=\sup\limits_{x\in B(0,\varepsilon)} u(x)$，则

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x|=\varepsilon} u(x)\mathrm{d}S(x) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x|=\varepsilon}\big[u(0)-u(x)\big]\mathrm{d}S(x)-\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x|=\varepsilon} u(0)\mathrm{d}S(x)\\ &\le \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x|=\varepsilon} M|x-0|\mathrm{d}S(x)-u(0)\\ &= \varepsilon M-u(0)\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$，则第二个积分的第一项趋于 $-u(0)$

设 $M'=\max\limits_{|x|=\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}}$，则

$$\begin{aligned}\left|\int_{|x|=\varepsilon} -\frac{1}{4\pi|x|}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}}\mathrm{d}S(x)\right| &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}}\right|\mathrm{d}S(x)\\ &\le M\varepsilon\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$，则第二个积分的第二项趋于零，所以 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$u(0)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left[-u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{|x|}\right)+\frac{1}{|x|}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S(x)$$

□

推论 3.1

若 $\Delta u=f$，则同上处理可得

$$u(x_0)=-\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{1}{|x-x_0|}f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left[-u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{|x-x_0|}\right)+\frac{1}{|x-x_0|}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S(x) \tag{3.23}$$

♡

另一方面，若存在 $g(x)$ 在 Ω 上调和，且 $g(x)=\dfrac{1}{4\pi|x-x_0|},\forall x\in\partial\Omega$，则对 u,g 在 Ω 上应用第二 Green 公式得

$$-\int_\Omega g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left[u\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}-\frac{1}{4\pi|x-x_0|}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S(x) \tag{3.24}$$

将 (3.23) 与 (3.24) 相加得

$$u(x_0)=\int_\Omega f(y)g(y)\mathrm{d}y+\int_\Omega -\frac{1}{4\pi|y-x_0|}f(y)\mathrm{d}y+\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(g(y)-\frac{1}{4\pi|y-x_0|}\right)\mathrm{d}S(y) \tag{3.25}$$

由 x_0 的任意性，用 x 代替 x_0，且注意到 $u(x)=\varphi(x),\forall x\in\partial\Omega$，则 (3.25) 可以重写为

$$u(x)=\int_\Omega f(y)\left(g(y)-\frac{1}{4\pi|y-x|}\right)\mathrm{d}y+\int_{\partial\Omega}\varphi(y)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(g(y)-\frac{1}{4\pi|y-x|}\right)\mathrm{d}S(y) \tag{3.26}$$

定义 3.6 (Green 函数)

$n=3$ 时，我们定义函数

$$G(x,y)=-\frac{1}{4\pi|y-x|}+g^x(y) \tag{3.27}$$

为 Ω 上的函数，其中 $x\in\Omega$，且 $g^x(y)$ 满足 $g^x(y)=\dfrac{1}{4\pi|y-x|},\forall y\in\partial\Omega$

♣

Green 函数有如下性质

性质

1. $G(x,y) = -\dfrac{1}{4\pi|y-x|} + g^x(y)$ 在 $\Omega\backslash\{x\}$ 上调和
2. $G(x,y) = 0, \forall y \in \partial\Omega$
3. $G(x,y) + \dfrac{1}{4\pi|y-x|}$ 在 Ω 上二阶连续可微且调和，也就是说存在调和函数 $\omega(x,y) \in C^2(\Omega)$，使得

$$G(x,y) = \omega(x,y) - \frac{1}{4\pi|y-x|}$$

因此，我们有

定理 3.7 (（位势方程解的表达式）)

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 是 Dirichlet 问题 (3.19) 的解，则

$$u(x) = \int_\Omega f(y)G(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}G(x,y)\mathrm{d}S(y) \tag{3.28}$$

♡

接下来我们给出 $n=2,3$ 时的 Green 函数

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|y-x| + g^x(y), & n=2 \\ -\dfrac{1}{4\pi|y-x|} + g^x(y), & n=3 \end{cases} \tag{3.29}$$

因此，解位势方程就转化为求解 Green 函数中的 $g^x(y)$，其中 $g^x(y)$ 满足

$$\begin{cases} \triangle g^x(y) = 0 \\ g^x(y) = -\Gamma(y-x), & y \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.30}$$

其中当 $n=2$ 时，$\Gamma(x) = \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|$；当 $n=3$ 时，$\Gamma(x) = -\dfrac{1}{4\pi|x|}$

定理 3.8 (Green 函数的对称性)

对所有的 $x,y \in \Omega, x \neq y$，有

$$G(x,y) = G(y,x) \tag{3.31}$$

♡

证明 令 $u(y) = G(a,y), v(y) = G(b,y), a,b \in \Omega$，则要证 $G(a,b) = G(b,a)$，只需证 $u(b) = v(a)$，因为

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \forall y \neq a, & u|_{\partial\Omega} = 0, & u + \dfrac{1}{4\pi|y-a|} \text{ 调和} \\ \Delta v = 0, \forall y \neq b, & v|_{\partial\Omega} = 0, & v + \dfrac{1}{4\pi|y-b|} \text{ 调和} \end{cases}$$

令 $\Omega_\varepsilon = \Omega\backslash\left(\overline{B(a,\varepsilon)} \cap \overline{B(b,\varepsilon)}\right)$，在 Ω_ε 上对 $u(y), v(y)$ 应用第二 Green 公式，有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S(y) \\ &= \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S(y) + \int_{|y-a|=\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S(y) + \int_{|y-b|=\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S(y) \end{aligned}$$

由边界条件，接下来对上式第二部分进行处理

$$\begin{aligned} \int_{|y-a|=\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S(y) &= \int_{|y-a|=\varepsilon}\left[\left(u + \frac{1}{4\pi|y-a|}\right)\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(u + \frac{1}{4\pi|y-a|}\right)\right]\mathrm{d}S(y) \\ &\quad - \int_{|y-a|=\varepsilon}\frac{1}{4\pi|y-a|}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S(y) + \int_{|y-a|=\varepsilon} v\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{4\pi|y-a|}\right)\mathrm{d}S(y) \\ &= A + B + C \end{aligned}$$

对于 A，使用第二 Green 公式可得 $A = 0$

对于 B，因为在 $\partial B(a,\varepsilon)$ 的外法向指向圆心，与负号刚好抵消，所以

$$B=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{|y-a|=\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S(y)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{B(a,\varepsilon)}\triangle v(y)\mathrm{d}y=0$$

对于 C，因为 $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\dfrac{1}{4\pi|y-a|}\right)=-\dfrac{y-a}{|y-a|}\cdot\nabla\left(\dfrac{1}{4\pi|y-a|}\right)=-\dfrac{y-a}{|y-a|}\cdot-\dfrac{y-a}{4\pi|y-a|^3}=\dfrac{1}{4\pi|y-a|^2}$，所以

$$C=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|y-a|=\varepsilon}v(y)\mathrm{d}S(y)\xrightarrow{\varepsilon\to0}v(a)$$

所以 $\varepsilon\to0$ 时，

$$\int_{|y-a|=\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S(y)\to v(a)$$

同理当 $\varepsilon\to0$ 时，有

$$\int_{|y-b|=\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S(y)\to -u(b)$$

因此令 $\varepsilon\to0$，我们有 $v(a)=u(b)$ □

通常来说，对于一些具有对称性的区域，我们可以用对称性对 Green 函数进行求解

1. Ω 为半空间 $\mathbb{R}^3_+=\{(x,y,z)|z>0\}$

   因为 $g^x(y)$ 满足

$$\begin{cases}\triangle g^x(y)=0\\ g^x(y)=\dfrac{1}{4\pi|y-x|}, & y\in\partial\Omega\end{cases}\tag{3.32}$$

   即 $G(x,y)$ 在 Ω 边界“电势”为零。此时 $\partial\Omega$ 为 $z=0$，对于 $\forall x\in\Omega$，将它视为一个位于 $x=(x,y,z)$ 处的点电荷，由电磁学的知识，要使得 $z=0$ 平面上电势为零，我们需要在与该点电荷关于 $z=0$ 对称的地方放一个相同的点电荷，即 $x^\star=(x,y,-z)$，所以

$$\begin{aligned}G(x,y)&=-\frac{1}{4\pi|y-x|}+\frac{1}{4\pi|y-x^\star|}\\&=\Gamma(y-x)-\Gamma(y-x^\star)\end{aligned}$$

2. Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的球 $B(0,R)$

定义 3.7 (对偶点)

对于 $x\in R^3\backslash\{0\}$，我们定义 x 关于球面 $\partial B(0,R)$ 的对偶点为

$$x^\star=\frac{R^2}{|x|^2}x\tag{3.33}$$

则对 $\forall y\in\partial B(0,R)$（此时 $|y|=R$），我们有

$$\begin{aligned}|x|^2|y-x^\star|^2&=|x|^2\cdot\left(|y|^2-2y\cdot\frac{R^2}{|x|^2}x+\frac{R^4}{|x|^2}\right)\\&=R^2\left(|x|^2-2y\cdot x+|y|^2\right)\\&=R^2|x-y|^2\end{aligned}$$

即 $|y-x^\star|=\dfrac{R}{|x|}\cdot|y-x|$ ♣

我们考虑 $G(x,y)=-\dfrac{1}{4\pi|y-x|}+\dfrac{R}{|x|}\cdot\dfrac{1}{4\pi|y-x^\star|}$ 在 $\partial B(0,R)$ 的取值

$$
\begin{aligned}
G(x,y) &= -\frac{1}{4\pi|y-x|} + \frac{R}{|x|}\cdot\frac{1}{4\pi|y-x^\star|} \\
&= -\frac{1}{4\pi|y-x|} + \frac{R}{|x|}\cdot\frac{1}{4\pi\frac{R}{|x|}\cdot|y-x|} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以 $B(0,R)$ 上的 Green 函数即为

$$
G(x,y) = -\frac{1}{4\pi|y-x|} + \frac{R}{|x|}\cdot\frac{1}{4\pi|y-x^\star|} \tag{3.34}
$$

接下来计算 ∇G

$$
\begin{aligned}
\nabla G(y) &= \frac{y-x}{4\pi|y-x|^3} - \frac{R}{|x|}\cdot\frac{y-x^\star}{|y-x^\star|^3} \\
&= \frac{y-x}{4\pi|y-x|^3} - \frac{R}{|x|}\cdot\frac{y-\frac{R^2}{|x|^2}x}{4\pi\frac{R^3}{|x|^3}|y-x|^3} \\
&= \frac{R^2-|x|^2}{4\pi R^2}\frac{y}{|y-x|^3}
\end{aligned}
$$

所以在 $\partial B(0,R)$ 上有

$$
\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} = \triangle G(y)\cdot\frac{y}{|y|} = \frac{R^2-|x|^2}{4\pi R^2}\frac{y}{|y-x|^3}\cdot\frac{y}{R} = \frac{R^2-|x|^2}{4\pi R|y-x|^3}
$$

因为 $u(x)$ 满足

$$
\begin{cases}
\triangle u = f, & x\in\Omega \\
u = \varphi, & x\in\partial\Omega \\
u(x) = \int_\Omega f(y)G(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega}\varphi(y)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}G(x,y)\mathrm{d}S(y)
\end{cases} \tag{3.35}
$$

所以在 $B(0,R)$ 上 Passion 方程的解为

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int_{B(0,R)} f(y)G(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega}\varphi(y)\frac{R^2-|x|^2}{4\pi R|y-x|^3} \\
&= \int_{B(0,R)} f(y)G(x,y)\mathrm{d}y + \frac{R^2-|x|^2}{4\pi R}\int_{|y|=R}\frac{\varphi(y)}{|y-x|^3}\mathrm{d}S(y)
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

特别地，若 $f(y)=0$，即 $\triangle u = 0$，u 调和，则我们得到方程

$$
\begin{cases}
\triangle u = 0, & x\in B(0,R) \\
u = \varphi, & x\in\partial B(0,R)
\end{cases} \tag{3.37}
$$

的解，称为 Poisson 公式

定义 3.8 (Poisson 公式)

称方程 (3.37) 的解为 Poisson 公式，具体如下

$$
u(x) = \frac{R^2-|x|^2}{4\pi R}\int_{|y|=R}\frac{\varphi(y)}{|y-x|^3}\mathrm{d}S(y) \tag{3.38}
$$

♣

利用 Poisson 公式，我们可以得到一些更精确的结果

定理 3.9 (Harnark 不等式)

设 u 在 $B(x_0,R)$ 调和，且 $u\geq 0$，则

$$
\frac{R}{R+r}\cdot\frac{R-r}{R+r}u(x_0) \leq u(x) \leq \frac{R}{R-r}\cdot\frac{R+r}{R-r}u(x_0) \tag{3.39}
$$

其中 $r = |x-x_0| < R$

♡

证明 由平移不变性知，不妨设 $x_0=0$，因此只需证对 $B(0,R)$ 内的 $\forall x$，有

$$\frac{R}{R+|x|}\cdot\frac{R-|x|}{R+|x|}u(0)\le u(x)\le\frac{R}{R-|x|}\cdot\frac{R+|x|}{R-|x|}u(0)$$

再由 Poisson 公式

$$u(x)=\frac{R^2-|x|^2}{4\pi R}\int_{|y|=R}\frac{\varphi(y)}{|y-x|^3}\mathrm{d}S(y)$$

由绝对值不等式 $R-|x|\le|y-x|\le R+|x|$ 以及平均值性质知

$$\begin{aligned}u(x)&\le\frac{R^2-|x|^2}{4\pi R\,(R-|x|)^3}\int_{|y|=R}u(y)\mathrm{d}S(y)\\&=\frac{R+|x|}{4\pi R\,(R-|x|)^2}\cdot 4\pi R^2u(0)\\&=\frac{R(R+|x|)}{(R-|x|)^2}u(0)\end{aligned}$$

□

定理 3.10 (Liouville 定理 *)

设 $u\in\mathbb{R}^n$ 是有上界（或有下界）的调和函数，则 u 是一个常数

证明 设 $u(x)\le M,\forall x\in\mathbb{R}^n$，令 $v(x)=M-u(x)$，则 $v(x)\ge 0$，且 v 在 $\mathbb{R}^n$ 上调和，由 Harnack 不等式

$$\frac{R(R-r)}{(R+r)^2}v(x_0)\le v(x)\le\frac{R(R+r)}{(R-r)^2}v(x_0),\quad\forall x_0\in\mathbb{R}^n,R>r=|x-x_0|$$

令 $R\to+\infty$，则有

$$v(x_0)\le v(x)\le v(x_0)$$

即 $v(x)\equiv v(x_0),\forall x_0\in\mathbb{R}^n$ □

3.3 极值原理与最大模估计

3.3.1 极值原理

本节我们考虑比位势方程更一般的方程

$$\mathscr{L}u=-\Delta u+c(x)u=f(x),\quad\forall x\in\Omega\tag{3.40}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界开集，且 $c(x)\ge 0,\forall x\in\Omega$

定理 3.11 (弱极值原理)

假设 $c(x)\ge 0,f(x)<0$，若 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ 满足方程 (3.40)，则 $u(x)$ 不能在 Ω 上达到它在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值，即 $u(x)$ 只能在 $\partial\Omega$ 上达到它的非负最大值

证明 反证，假设 $u(x)$ 在 $x_0\in\Omega$ 上达到它在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值，则

$$\Delta u(x_0)\le 0,\quad\nabla u(x_0)=0,\quad u(x_0)\ge 0$$

所以

$$\mathscr{L}u(x_0)=-\Delta u(x_0)+c(x_0)u(x_0)=f(x_0)\ge 0$$

这与定理的假设 $f(x_0)<0$ 矛盾！因此 $u(x)$ 不能在 Ω 内达到它的非负最大值 □

定理 3.12

假设 $c(x) \ge 0, f(x) \le 0$，如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 满足方程 (3.40)，且在 $\overline{\Omega}$ 上存在正的最大值，则 $u(x)$ 必在 $\partial\Omega$ 上达到它在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值，且

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \le \max_{x\in\partial\Omega} u^+(x) \tag{3.41}$$

其中 $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$

证明 不妨设 $0 \in \Omega$，记 d 为 Ω 的直径，对于 $\forall\varepsilon > 0$，为了使用弱极值原理，我们构造辅助函数

$$v(x) = |x|^2 - d^2, w(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$$

则 $v(x) \le 0$，且 $\mathscr{L}v = -\Delta v + c(x)v \le -\Delta v = -2n < 0$，于是

$$\mathscr{L}w(x) = \mathscr{L}u + \varepsilon\mathscr{L}v \le f(x) - 2n\varepsilon < 0$$

由弱极值原理（定理 3.11），$w(x)$ 的非负最大值只能在 $\partial\Omega$ 上达到，因此

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} w(x) \le \max_{x\in\partial\Omega} w^+(x)$$

由 $w(x)$ 的定义，我们有

$$\begin{cases} \max\limits_{\overline{\Omega}} w(x) = \max\limits_{\overline{\Omega}} \left[u(x) + \varepsilon\left(|x|^2 - d^2\right)\right] \ge \max\limits_{\overline{\Omega}} u(x) - \varepsilon d^2 \\ \max\limits_{\partial\Omega} w^+(x) \le \max\limits_{\partial\Omega} u^+(x) \end{cases}$$

所以

$$\max_{\overline{\Omega}} u(x) - \varepsilon d^2 \le \max_{\partial\Omega} u^+(x)$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，则 (3.41) 得证 □

下面我们证明 Hopf 引理，此引理非常深刻，在证明强极值原理中很有用

引理 3.2 (Hopf 引理)

假设 B_R 是 $\mathbb{R}^n (n \ge 2)$ 上的一个以 R 为半径的球，在 B_R 上 $c(x) \ge 0$ 有界，如果 $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B}_R)$ 满足

1. $\mathscr{L}u = -\Delta u + c(x)u \le 0, \quad \forall x \in B_R$
2. 存在 $x_0 \in \partial B_R$ 使得 $u(x)$ 在 x_0 点达到 $\overline{B}_R$ 上的严格非负最大值，即 $u(x_0) = \max\limits_{\overline{B}_R} u(x) \ge 0$，且对 $\forall x \in B_R$，满足 $u(x) < u(x_0)$，则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} > 0 \tag{3.42}$$

其中 ν 与 ∂B_R 在 x_0 点的单位外法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$

证明 根据题目条件，$\nabla u(x_0) \ge 0$（在边界处取得最大值时，梯度不仅可能为零，还可能大于零），则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} = \nabla u(x_0) \cdot \nu \ge 0$$

接下来证明它严格大于零，构造辅助函数

$$w(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)$$

其中 $\varepsilon > 0, v(x)$ 待定，假如辅助函数 $w(x)$ 满足

1. $\mathscr{L}w = \mathscr{L}u + \varepsilon\mathscr{L}v \le 0$
2. $\exists x_0 \in \partial B_R$，使得 $w(x_0)$ 达到 $\overline{B}_R$ 上的严格非负最大值

那么

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} + \varepsilon\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} \ge 0$$

于是只要 $\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} < 0$，就有 $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} \geq -\varepsilon \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} > 0$

取 $v(x) = e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha R^2}$，其中 $\alpha > 0$ 待定，则当 $|x| = R$ 时，$v(x) = 0$，且

$$v_{x_i} = -2\alpha x_i e^{-\alpha|x|^2}, \nabla v = -2\alpha x e^{-\alpha|x|^2}$$

因此

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{x}{|x|} \cdot -2\alpha x e^{-\alpha|x|^2} = -2\alpha|x|e^{-\alpha|x|^2}$$

又因为

$$v_{x_i x_i} = (-2\alpha + 4\alpha^2 x_i^2)e^{-\alpha|x|^2}$$

所以

$$\Delta v = (-2\alpha n + 4\alpha^2|x|^2)e^{-\alpha|x|^2}$$

接下来计算 $\mathscr{L}v$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}v &= -\Delta v + c(x)v \\ &= \left[-4\alpha^2|x|^2 + 2\alpha n + c(x)\right] e^{-\alpha|x|^2} - c(x)e^{-\alpha R^2} \\ &\leq \left[-4\alpha^2|x|^2 + 2\alpha n + C\right] e^{-\alpha|x|^2}\end{aligned}$$

当 $x \neq 0$ 时，只需取 α 充分大，就有 $\mathscr{L}v \leq 0$，设球心为原点，取 $\Omega = B(0,R) \backslash \overline{B\left(0, \frac{R}{2}\right)}$，则在 Ω 中有

$$\mathscr{L}v \leq \left(-\alpha^2 R^2 + 2\alpha n + C\right) e^{-\alpha|x|^2}$$

取 α 充分大，则 $\mathscr{L}v < 0$，故 $\mathscr{L}w = \mathscr{L}u + \varepsilon\mathscr{L}v < 0$，由弱极值原理

$$\max_{\overline{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w^+$$

而 $\partial\Omega$ 由半径为 $\frac{R}{2}, R$ 的两个球壳组成，当 $|x| = \frac{R}{2}$ 时

$$\begin{aligned}w(x) &= u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \\ &\leq \max_{|x|=\frac{R}{2}} u(x) - u(x_0) + \varepsilon\end{aligned}$$

因为 $\max_{|x|=\frac{R}{2}} u(x) - u(x_0)$ 是一个负数，取 ε 充分小，就有 $|x| = \frac{R}{2}$ 时，$w(x) < 0$

另一方面，当 $|x| = R$ 时，$w(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) = u(x) - u(x_0) \leq 0$，故由 $w(x_0) = 0$ 知，x_0 是 w 在 Ω 上的最大值点，所以

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} \geq 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} \geq -\varepsilon\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{x=x_0} > 0$$

□

定理 3.13 (强极值原理)

假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界连通开集，$c(x) \geq 0$ 且有界，如果 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 在 Ω 上满足 $\mathscr{L}u \leq 0$，且 u 在 Ω 内达到其在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值，则 u 在 $\overline{\Omega}$ 上是常数

证明 记

$$M = \max_{\overline{\Omega}} u \geq 0$$

令 $O = \{x \in \Omega | u(x) = M\} \subset \Omega$，要证 $O = \Omega$，由 Ω 连通知，只需证 O 非空且关于 Ω 既开又闭

由于 $\exists x_0 \in \Omega, \text{s.t. } u(x_0) = M$，故 $x_0 \in O$，因此 O 非空，且若 $\exists\{x_n\} \subset \Omega$，且 $x_n \to \tilde{x}$，则

$$u(\tilde{x}) = \lim_{n\to+\infty} u(x_n) = M$$

故由连续性知 O 是闭集，下证明 O 相对于 Ω 是开的，若 $O \neq \Omega$，则 $\Omega \backslash \overline{O}$ 为非空开集（已证 O 为闭集），由 Ω 是开集知，对于 $\forall x_0 \in O \subset \Omega, \exists r > 0$，使得 $B(x_0, 2r) \subset \Omega$，若 x_0 不是 O 的内点，则 $\exists \tilde{x} \in \Omega \backslash \overline{O}$, s.t. $|x_0 - \tilde{x}| < r$

记 $d = \operatorname{dist}(\tilde{x}, \partial O)$，则 $\exists y_0 \in \partial O$, s.t. ∂O 与 $\partial B(\tilde{x}, d)$ 在 y_0 处相切，于是

$$u(y_0) = M > u(y), \quad \forall y \in B(\tilde{x}, d) \subset O^c \cap \Omega$$

由 Hopf 引理知，至少存在一个方向 ν，使得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=y_0} > 0$$

但由 y_0 是 u 的最大值点知，$\nabla u(y_0) = 0$，这与 $\nu \cdot \nabla u(y_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{x=y_0} > 0$ 矛盾！

从而 x_0 是 O 的内点，故 O 相对于 Ω 是开的 □

3.3.2 最大模估计

定理 3.14

假设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = g, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解，记 $G = \max\limits_{\partial\Omega} |g(x)|, F = \sup\limits_{\Omega} |f(x)|, C = C(d, n)$，其中 C 是一个只依赖于维数 n 和 Ω 的直径 $d = \sup\limits_{x,y\in\Omega} |x - y|$ 的常数，则

$$\max_{\Omega} |u(x)| \leq G + CF$$

♡

证明 不妨假设 $0 \in \Omega$，令 $w(x) = u(x) - z(x)$，其中

$$z(x) = \frac{F}{2n}(d^2 - |x|^2) + G$$

所以

$$\begin{aligned} \mathscr{L}w &= \mathscr{L}u - \mathscr{L}z \\ &= -\Delta u + \Delta z \\ &= f(x) - F \leq 0 \end{aligned}$$

且 $w|_{\partial\Omega} \leq g - G \leq 0$，由极值原理 3.12，在 Ω 上有 $w(x) \leq 0$，即

$$u(x) \leq z(x) \leq G + \frac{F}{2n} d^2, \forall x \in \overline{\Omega}$$

同理，将 u 换为 $-u$，我们也可以得到

$$u(x) \geq -G - \frac{d^2}{2n} F, \forall x \in \overline{\Omega}$$

两边同时取上确界，即

$$\max_{\Omega} |u(x)| \leq G + \frac{d^2}{2n} F = G + CF$$

□

定理 3.15 (解的唯一性与稳定性)

假设 $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta u_1(x) = f_1(x), & x \in \Omega \\ u_1(x) = g_1(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta u_2(x) = f_2(x), & x \in \Omega \\ u_2(x) = g_2(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.43}$$

则我们有

$$\max_{\Omega}|u_1(x)-u_2(x)| \le \max_{\partial\Omega}|g_1(x)-g_2(x)| + C\max_{\Omega}|f_1(x)-f_2(x)|$$

证明 令 $v(x)=u_1(x)-u_2(x)$，则

$$\begin{cases} -\Delta v = f_1(x)-f_2(x), & x\in\Omega \\ v(x)=g_1(x)-g_2(x), & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

由最大模估计

$$\max_{\Omega}|u_1(x)-u_2(x)| \le \max_{\partial\Omega}|g_1(x)-g_2(x)| + C\max_{\Omega}|f_1(x)-f_2(x)|$$

□

注 若 $g_1(x)\equiv g_2(x), f_1(x)\equiv f_2(x)$，则 $u_1(x)\equiv u_2(x)$

定理 3.16

考虑

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x\in\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \alpha(x)u = g(x), & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{3.44}$$

假设 $c(x)\ge 0, \alpha(x)\ge\alpha_0>0$，如果 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 是方程 (3.44) 的解，则

$$\max_{\Omega}|u(x)| \le C(F+G) \tag{3.45}$$

其中 $G=\max\limits_{\partial\Omega}|g(x)|, F=\sup\limits_{\Omega}|f(x)|$，$C$ 是依赖于维数 n，α_0 和 Ω 的直径 d 的常数

证明 不妨设 $0\in\Omega$，令 $w(x)=u(x)-z(x)$，则我们希望

$$\begin{cases} -\Delta w + c(x)w = (-\Delta u + c(x)u) - (-\Delta z + c(x)z) \le f(x) - F \le 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}} + \alpha(x)w(x) = \left[\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \alpha(x)u(x)\right] - \left[\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{n}} + \alpha(x)z(x)\right] \le g(x) - G \le 0 \end{cases}$$

那么第一式满足极值原理的条件，由极值原理，w 在 $\overline{\Omega}$ 上的非负最大值在边界取到，设在 $x_0\in\partial\Omega$ 上取到正的最大值，则

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}(x_0)\ge 0$$

由假设，$w(x_0)>0$，则由边界条件

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}(x_0) = -\alpha(x_0)w(x_0) \le -\alpha_0 w(x_0) < 0$$

与我们希望的第二式矛盾！因此 $w(x_0)\le 0$，则 x_0 为最大值点，所以 $w(x)\le 0, \forall x\in\overline{\Omega}$

我们令 $z(x)=\dfrac{F}{2n}\left(d^2-|x|^2\right)+\dfrac{Fd}{n\alpha_0}+\dfrac{G}{\alpha_0}$，则

$$\begin{cases} -\Delta z + c(x)z \ge F \\ \dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{n}} + \alpha(x)z \ge G \end{cases} \tag{3.46}$$

即我们找到了这样的 $w(x)=u(x)-z(x)$，由上分析可得 $w(x)\le 0, \forall x\in\overline{\Omega}$，即

$$u(x)\le z(x)\le \frac{F}{2n}d^2+\frac{Fd}{n\alpha_0}+\frac{G}{\alpha_0} \xlongequal{\triangle} C(F+G)$$

对 $-u$ 重复以上过程，则我们有 $-u\le C(F+G)$，即

$$\max_{\Omega}|u(x)|\le C(F+G)$$

□

第四章 热传导方程

考虑方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(x,t), & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $u(x,t)$ 表示温度，$f(x,t)$ 表示热源，同样地，我们有三种不同的边值条件

注 若 Ω 是区间 $[0,l]$、圆盘等，我们可以用分离变量法求解

定义 4.1 (热传导方程的边值条件)

考虑物体边界 $\partial\Omega$ 在时间 $t>0$ 的温度分布或者受周围介质的影响情况，通常分为以下三类

1. 已知边界 $\partial\Omega$ 的温度分布

$$u(x,t) = g(x,t), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0 \tag{4.2}$$

当 g 为常数时，表示物体的边界保持**恒温**

2. 已知通过物体的边界 $\partial\Omega$ 流入或流出物体 Ω 的热量

$$k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g(x,t), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0 \tag{4.3}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，当 $g \geq 0$ 时表示热量流入，当 $g \leq 0$ 时表示热量流出，特别地，若 $g \equiv 0$，表示物体**绝热**

3. 已知通过物体的边界 $\partial\Omega$ 与周围介质的热交换强度

$$k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \alpha_0(x,t)\left[g_0(x,t) - u(x,t)\right] \tag{4.4}$$

或者

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \alpha(x,t)u(x,t) = g(x,t), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0 \tag{4.5}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，g_0 表示周围介质的温度，$\alpha_0 > 0$ 表示热交换系数，$\alpha = \dfrac{\alpha_0}{k}, g = \dfrac{g_0}{k}$

♣

4.1 初值问题

考虑

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{4.6}$$

我们采用 Fourier 变换法进行求解

4.1.1 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 变换

定义 4.2 (Fourier 变换与 Fourier 逆变换)

记 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty | <x>^n \cdot |D^\alpha f(x)| < +\infty, \forall \alpha, n\}$ 为 Schwartz 空间，$<x>= \sqrt{(1+|x|^2)}$，对函数 $f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 定义 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} \mathrm{d}x \tag{4.7}$$

记为 $(f(x))^\wedge = \hat{f}(\xi)$，再定义 Fourier 逆变换

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} \mathrm{d}\xi \tag{4.8}$$

记为 $(f(\xi))^\vee = \check{f}(x)$，若 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，则

$$\check{\hat{f}} = f \tag{4.9}$$

在 Schwatz 空间上的 Fourier 变换有很多良好的性质，接下来我们逐一介绍

性质 设 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，我们有如下性质

1. 线性性：设 $f_1, f_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，$a_1, a_2 \in \mathbb{C}$，则

$$[a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)]^\wedge = a_1 \hat{f}_1(\xi) + a_2 \hat{f}_2(\xi) \tag{4.10}$$

2. 平移性质：设平移变换 $\tau_{x_0} f(x) = f(x - x_0)$，则

$$\widehat{\tau_{x_0} f}(\xi) = e^{-2\pi i x_0 \cdot \xi} \hat{f}(\xi) \tag{4.11}$$

3. 伸缩性质：设伸缩变换 $S_\lambda f(x) = f(\lambda x)$，则

$$\widehat{S_\lambda f}(\xi) = \frac{1}{\lambda^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \tag{4.12}$$

4. 微商性质 1：设 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 为多重指标，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$，并约定

$$D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

则我们有

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \tag{4.13}$$

5. 微商性质 2：

$$\widehat{(-2\pi i x)^\alpha f}(\xi) = D_\xi^\alpha \hat{f}(\xi) \tag{4.14}$$

6. 卷积性质：若 $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，$f$ 与 g 的卷积为 $f * g = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \mathrm{d}y$，则

$$\begin{cases} \widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \\ \widehat{fg}(\xi) = \hat{f}(\xi) * \hat{g}(\xi) \end{cases} \tag{4.15}$$

例题 4.1 求 $\triangle u(x)$ 的 Fourier 变换 $\widehat{\triangle u}(\xi)$

解

$$\begin{aligned} \widehat{\triangle u}(\xi) &= \left[\left(\partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2\right) u\right]^\wedge (\xi) \\ &= \left[(2\pi i \xi_1)^2 + \cdots + (2\pi i \xi_n)^2\right] \hat{u}(\xi) \\ &= -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi) \end{aligned}$$

例题 4.2 求函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

的 Fourier 变换

解

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(1+2\pi i \xi)x} \mathrm{d}x \\ &= -\left.\frac{e^{-(1+2\pi i \xi)x}}{1 + 2\pi i \xi}\right|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1 + 2\pi i \xi} \end{aligned}$$

例题 4.3 求 $f(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$ 的 Fourier 变换，进一步求 $f(x) = e^{-|x|^2}, x \in \mathbb{R}^n$ 的 Fourier 变换

解 因为 $f(x)$ 作 Fourier 变换后成为 ξ 的函数，我们可以设

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\cdot e^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x=F(\xi)$$

则对 ξ 求导得

$$\begin{aligned}F'(\xi)&=\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}(-2\pi ix)e^{-2\pi ix\xi}\mathrm{d}x\\&=\pi i\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}e^{-x^2}\\&=\pi i\cdot e^{-x^2}e^{-2\pi i\xi x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\pi i\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\mathrm{d}e^{-2\pi i\xi x}\\&=-2\pi^2\xi\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\cdot e^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

且当 $\xi=0$ 时，我们有 $F(0)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$，所以 $F(\xi)$ 满足

$$\begin{cases}F'(\xi)=-2\pi^2\xi F(\xi)\\F(0)=\sqrt{\pi}\end{cases}$$

这是一个 ODE，我们可以解得

$$F(\xi)=\sqrt{\pi}e^{-\pi^2|\xi|^2}\Longrightarrow\hat{f}(\xi)=\sqrt{\pi}e^{-\pi^2|\xi|^2}$$

进一步，若 $x\in\mathbb{R}^n$，则 $|x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$，所以

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi)&=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|x|^2}e^{-2\pi ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}e^{-2\pi i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}\mathrm{d}x\\&=\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-x_1^2}e^{-2\pi ix_1\xi_1}\mathrm{d}x\right)\cdots\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-x_n^2}e^{-2\pi ix_n\xi_n}\mathrm{d}x\right)\\&=\prod_{j=1}^n\sqrt{\pi}e^{-\pi^2|\xi_j|^2}\\&=\pi^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-\pi^2|\xi|^2}\end{aligned}$$

4.1.2 初值问题的求解

接下来我们使用 Fourier 变换法求解初值问题

$$\begin{cases}u_t-\Delta u=f(x,t),\quad x\in\mathbb{R}^n\\u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}\tag{4.16}$$

首先对 u_t 进行处理

$$\begin{aligned}\widehat{u_t}(\xi,t)&=\int_{\mathbb{R}^n}u_t(x,t)\cdot e^{-2\pi ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x,t)\cdot e^{-2\pi ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t)\end{aligned}\tag{4.17}$$

1. $f(x,t)\equiv0$，此时方程变为

$$\begin{cases}u_t-\Delta u=0,\quad x\in\mathbb{R}^n\\u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}\tag{4.18}$$

方程两边同时对 x 作 Fourier 变换，则

$$\begin{cases}\partial_t\hat{u}(\xi,t)+4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi,t)=0\\ \hat{u}(\xi,0)=\hat{\varphi}(\xi)\end{cases}\tag{4.19}$$

这是一个 ODE，我们可以解得

$$\hat{u}(\xi,t)=e^{-4\pi^2|\xi|^2t}\hat{\varphi}(\xi)\tag{4.20}$$

我们的目标是 $u(x,t)$，因此我们再作 Fourier 逆变换

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\left(e^{-4\pi^2|\xi|^2t}\hat{\varphi}(\xi)\right)^\vee\\&=\left(e^{-4\pi^2|\xi|^2t}\right)^\vee*\check{\hat{\varphi}}\\&=\left(e^{-4\pi^2|\xi|^2t}\right)^\vee*\varphi\end{aligned}\tag{4.21}$$

利用伸缩性质 (4.12) 以及例题 4.3 得

$$\begin{aligned}\left(e^{-4\pi^2|\xi|^2t}\right)^\vee&=\left(e^{-|2\pi\sqrt{t}\xi|^2}\right)^\vee\\&=\frac{1}{\left(2\pi\sqrt{t}\right)^n}\cdot\pi^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-\pi^2\left|\frac{x}{2\pi\sqrt{t}}\right|^2}\\&=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\end{aligned}\tag{4.22}$$

所以

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\left(\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right)*\varphi\\&=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\varphi(y)\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{4.23}$$

这就是齐次方程 (4.18) 的解，表面上解在 $t=0$ 处有奇性，实则不然，接下来我们对解进行讨论

定义 4.3 (热核)

我们称

$$K(x)=\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4}}\tag{4.24}$$

为热核（Heat Kernal），并记

$$K_t(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{t}\right)^n}K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\tag{4.25}$$

齐次方程 (4.18) 的解可以写为 $u(x,t)=(K_t*\varphi)(x)$

♣

实际上，对于函数族 $\{K_t(x)\}_{t>0}$，我们称之为逼近恒等（Approximation to the identity，在数分 B3 中也称为单位近似），这是因为 $\{K_t(x)\}$ 具有如下性质

性质

(a). $K_t(x)\geq 0,\forall t>0$

(b). $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}K_t(x)=1$

(c). 对 $\forall\delta>0$, $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\int_{|x|\geq\delta}K_t(x)\mathrm{d}x=0$

引理 4.1

若 $\varphi(x)$ 连续有界，则

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \varphi(x)$$

证明 一方面，由 $\varphi(x)$ 的连续性，$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \text{s.t. } \forall|y|<\delta$ 都有

$$|\varphi(x-y)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

另一方面，由逼近恒等的第三条性质，$\forall\varepsilon>0, \exists R$，使得

$$\int_{|z|\geq R} K(z)\mathrm{d}z<\varepsilon$$

于是

$$\begin{aligned}
|u(x,t)-\varphi(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K_t(y)\varphi(x-y)\mathrm{d}y-\varphi(x)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K_t(y)\varphi(x-y)\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^n} K_t(y)\varphi(x)\mathrm{d}y\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K_t(y)\left[\varphi(x-y)-\varphi(y)\right]\mathrm{d}y\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K(z)\left[\varphi(x-\sqrt{t}z)-\varphi(x)\right]\mathrm{d}z\right| \\
&\leq \int_{|z|\geq R} K(z)\left|\varphi(x-\sqrt{t}z)-\varphi(x)\right|\mathrm{d}z+\int_{|z|<R} K(z)\left|\varphi(x-\sqrt{t}z)-\varphi(x)\right|\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

对于上式第一部分，设 $|\varphi(x)|$ 的上界为 M，则

$$\int_{|z|\geq R} K(z)\left|\varphi(x-\sqrt{t}z)-\varphi(x)\right|\mathrm{d}z\leq 2M\int_{|z|\geq R} K(z)\mathrm{d}z<2M\varepsilon$$

对于上式第二部分，取 $t\leq\dfrac{\delta^2}{R^2}$，则

$$\int_{|z|<R} K(z)\left|\varphi(x-\sqrt{t}z)-\varphi(x)\right|\mathrm{d}z\leq\varepsilon\int_{|z|<\mathbb{R}} K(z)\mathrm{d}z<\varepsilon$$

所以 $|u(x,t)-\varphi(x)|\leq(2M+1)\varepsilon\to 0$，as $t\to 0$ □

关于热方程的解，我们还有以下性质

性质

- 对 $\forall t>0, u(x,t)\in C^\infty$
- $\sup\limits_x|u(x,t)|\leq\sup\limits_x|\varphi(x)|$，即相较于 $t=0$ 时刻，最高温不会更高，最低温不会更低
- 若 u 只在求 $B_r(x_0)$ 上为正，$B_r(x_0)$ 外为零，则 $\forall x\in\mathbb{R}^n, t>0$，$u(x,t)>0$，即热方程有无限传播速度
- 热方程沿时间不能反向演化，即已知末态无法反推出初态

2. $f(x,t)\neq 0$，此时方程为

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n \\ u(x,0)=\varphi(x) \end{cases} \tag{4.26}$$

方程两边同时对 x 作 Fourier 变换，则

$$\begin{cases} \partial_t\hat{u}(\xi,t)+4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi,t)=\hat{f}(\xi,t) \\ \hat{u}(\xi,0)=\hat{\varphi}(\xi) \end{cases} \tag{4.27}$$

这是一个 ODE，因此我们可以解得

$$\hat{u}(\xi,t)=e^{-4\pi^2|\xi|^2t}\hat{\varphi}(\xi)+\int_0^t e^{-4\pi^2|\xi|^2(t-s)}\hat{f}(\xi,s)\mathrm{d}s \tag{4.28}$$

再作 Fourier 逆变换可以解得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\varphi(y)\mathrm{d}y + \int_0^t \frac{1}{4\pi|t-s|^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y + \int_0^t \mathrm{d}s\int_{\mathbb{R}^n} K_{t-s}(x-y)f(y,s)\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{4.29}$$

我们称 (4.29) 为**Possion 公式**，$\Gamma(x,t,y,s) = K_{t-s}(x-y)$ 为热方程的**基本解**

4.2 极值原理与最大模估计

4.2.1 能量估计

定理 4.1

考虑方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = f(x,t), \quad x\in\Omega, t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{4.30}$$

我们有能量估计

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega u^2(x,t)\mathrm{d}x \le e^T\left[\int_\Omega \varphi^2(x)\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right] \\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C_T\left[\int_\Omega \varphi^2(x)\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right] \end{cases} \tag{4.31}$$

其中 C_T 只与 T 有关

证明 首先对方程两侧同乘 u，因为

$$u\partial_t u = \partial_t\left(\frac{1}{2}u^2\right), \quad u\triangle u = u\nabla(\nabla u) = \nabla(u\nabla u) - |\nabla u|^2$$

所以我们有

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}u^2\right) - \nabla(u\nabla u) + |\nabla u|^2 = fu \tag{4.32}$$

等式两边在区域 Ω 上积分得

$$\partial_t\int_\Omega \frac{1}{2}u^2\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla(u\nabla u)\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x = \int_\Omega fu\mathrm{d}x$$

因为

$$\int_\Omega \nabla(u\nabla u)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\nabla u\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S(x) = 0$$

所以我们得到

$$\partial_t\int_\Omega \frac{1}{2}u^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x = \int_\Omega fu\mathrm{d}x \tag{4.33}$$

我们先将 $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 项放掉，使用均值不等式可得

$$\partial_t\int_\Omega \frac{1}{2}u^2\mathrm{d}x \le \int_\Omega fu\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_\Omega f^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x$$

两边同时乘以 e^{-t}，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}e^{-t}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\right) \le \frac{e^{-t}}{2}\int_\Omega f^2\mathrm{d}x$$

从 0 到 t 积分可得

$$\frac{1}{2}e^{-t}\int_\Omega u^2(x,t)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi^2(x)\mathrm{d}x \le \int_0^t \frac{e^{-s}}{2}\int_\Omega f^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

移项可得

$$\int_\Omega u^2(x,t)\mathrm{d}x \le e^t\int_\Omega \varphi^2(x)\mathrm{d}x + \int_0^t e^{t-s}\int_\Omega f^2(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

假设 $t\in[0,T]$，将所有的 e^t, e^{t-s} 项均放缩为 e^T，则我们得到第一个能量估计

$$\int_\Omega u^2(x,t)\mathrm{d}x \le e^T\left[\int_\Omega \varphi^2(x)\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right] \tag{4.34}$$

对 (4.33) 两边同时从 0 到 t 积分得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,t)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi^2(x)\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \frac{1}{2}\left[\int_0^t\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^t\int_\Omega f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]$$

将 $\varphi(x)$ 项移到不等号右边，并结合能量估计 (4.34)，选取只与 T 有关的常数 C^T 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,t)\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t &\le \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left\{\int_0^T\left[e^T\left(\int_\Omega \varphi^2(x)\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}t + \int_0^t\int_\Omega f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}\\ &\le C_T\left[\int_\Omega \varphi^2(x)\mathrm{d}x + \int_0^T\int_\Omega f^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

□

4.2.2 极值原理

考虑热传导方程

$$\begin{cases}\partial_t u - \nabla u = 0, & x\in\Omega, t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & \forall x\in\Omega\\ u(x,t)=h(x,t), & \forall x\in\partial\Omega, t>0\end{cases} \tag{4.35}$$

定义 4.4 (抛物边界)

设 $Q_T=\Omega\times(0,T]$，定义抛物边界 $\Gamma=\overline{Q}_T\backslash Q_T$，即为柱体的侧面和下底面（$\Omega$ 为开集）

♣

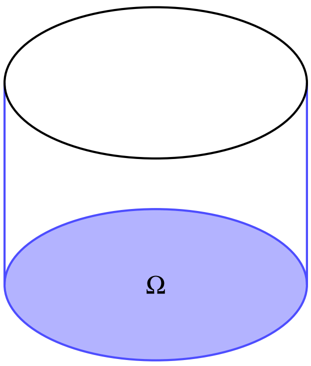


图 4.1: 抛物边界

接下来我们约定记号 $C^{2,1}(\Omega)$ 表示在 Ω 内的所有关于 x 二阶偏导数连续，关于 t 一阶偏导数连续的函数构成的集合

定理 4.2 (极大值原理)

假设 $u\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$，且 u 满足

$$\mathscr{L}u = \partial_t u - \Delta u = f \le 0 \tag{4.36}$$

则 u 在 $\overline{Q}_T$ 上的最大值必在抛物边界 Γ 上取得，即

$$\max_{\overline{Q}_T} u(x,t) = \max_{\Gamma} u(x,t) \tag{4.37}$$

证明 我们令 $M = \max\limits_{\overline{Q}_T} u, m = \max\limits_{\Gamma} u$，要证明 $M = m$，因为 $M \geq m$，所以我们只需证明 $M > m$ 不成立即可

Case 1：$f < 0$

反证法，假设 $M \neq m$，则 $M > m$，即 u 的最大值在柱体内部或顶部取得，设 u 在 $(x^\star, t^\star) \in Q_T$ 达到最大值 M，则

$$\partial_x u(x^\star, t^\star) = 0, \quad \Delta u(x^\star, t^\star) \leq 0, \quad \partial_t u(x^\star, t^\star) \geq 0$$

注意：因为 Q_T 包含 $t = T$，所以只能说 $\partial_t u(x^\star, t^\star) \geq 0$，因为若在顶部取得，则 $\partial_t u(x^\star, t^\star)$ 不仅可能为零，还可能大于零

因此我们有

$$\mathscr{L}u = \partial_t u - \Delta u \geq 0$$

这与 $f < 0$ 矛盾！故假设不成立，$M = m$

Case 2：$f \leq 0$

我们令 $v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t, \varepsilon > 0$，则 $\partial_t v - \Delta v = f - \varepsilon < 0$，则由 Case 1 知

$$\max_{\overline{Q}_T} v(x,t) = \max_{\Gamma} v(x,t)$$

所以

$$\max_{\overline{Q}_T} u(x,t) - \varepsilon T \leq \max_{\overline{Q}_T} v(x,t) = \max_{\Gamma} v(x,t) \leq \max_{\Gamma} u$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性，令 $\varepsilon \to 0^+$，则

$$\max_{\overline{Q}_T} u(x,t) = \max_{\Gamma} u(x,t)$$

□

若 $f \geq 0$，对应的是最小值，因此我们有如下推论

推论 4.1

假设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ 满足方程 $\mathscr{L}u = f \geq 0$，则 $u(x,t)$ 在 $\overline{Q}_T$ 上的最小值必在抛物边界 Γ 上取到，即

$$\min_{\overline{Q}_T} u(x,t) = \min_{\Gamma} u(x,t) \tag{4.38}$$

推论 4.2 (比较定理)

假设 $u, v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ 满足 $\mathscr{L}u \leq \mathscr{L}v$，且 $u|_\Gamma \leq v|_\Gamma$，则在 $\overline{Q}_T$ 上有

$$u(x,t) \leq v(x,t)$$

证明 令 $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$，则

$$\begin{cases} \mathscr{L}w = \mathscr{L}u - \mathscr{L}v \leq 0 \\ w|_\Gamma = u|_P - v|_\Gamma \leq 0 \end{cases}$$

则由极值原理，$\max\limits_{\overline{Q}_T} w(x,t) = \max\limits_{\Gamma} w(x,t) \leq 0$，因此

$$u(x,t) \leq v(x,t), \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}_T$$

□

4.2.3 最大模估计

接下来我们考虑一维情况，考虑方程

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = \partial_t u - \partial_x^2 u = f, \quad x \in [0,l], 0 < t < T \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t) \end{cases} \tag{4.39}$$

定理 4.3

设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ 是方程 (4.39) 的解，则

$$\max_{\overline{Q}_T} |u(x,t)| \le FT + B \tag{4.40}$$

其中

$$F = \max_{\overline{Q}_T} |f|, \quad B = \max\left\{ \max_{x\in[0,l]} |\varphi|, \max_{t\in[0,T]} |g_1(t)|, \max_{t\in[0,T]} |g_2(t)| \right\}$$

证明 令 $v(x,t) = u(x,t) - (Ft + B)$，则

$$\begin{cases} \partial_t v - \triangle v = f - F \le 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) - B \le 0 \\ v(0,t) = g_1(t) - B - Ft \le 0 \\ v(l,t) = g_2(t) - B - Ft \le 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

由极值原理

$$\max_{\overline{Q}_T} v(x,t) = \max_{\Gamma} v(x,t) \le 0$$

所以

$$\max_{\overline{Q}_T} u(x,t) \le \max_{\overline{Q}_T} v(x,t) + (FT + B) \le FT + B$$

类似可证 $\max_{\overline{Q}_T} -u(x,t) \le FT + B$，所以

$$\max_{\overline{Q}_T} |u(x,t)| \le FT + B$$

□

定理 4.4

第三类边值问题

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = f \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = g_1(t), \quad (u_x + hu)(l,t) = g_2(t), \quad h > 0 \text{为常数} \end{cases} \tag{4.42}$$

的古典解唯一

证明 假设有两个解 u_1, u_2，设 $u = u_1 - u_2$，得到关于 u 的方程，要证明唯一，只需证明 u 的方程只有零解，即证明

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad x \in [0,l], t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0, \quad (u_x + hu)(l,t) = 0 \end{cases} \tag{4.43}$$

只有零解

反证，假设 (4.43) 有非零解，则它必然有正的最大值或者负的最小值，我们要说明它即没有正的最大值，也没有负的最小值，这样就导出矛盾。假设 u 有正的最大值，由极值原理，u 的最大值必在抛物边界取到，即在 $t=0, x=0, x=l$ 取得，而 $u(0,t)=0, u(x,0)=0$，因此正的最大值只能在 $x=l$ 上取得，假设 u 在 $(l,\bar{t})$ 上达到正的最大值，则

$$u(l,\bar{t})>0, \quad \partial_x u(l,\bar{t}) \geq 0$$

则

$$\partial_x u(l,t)+hu(l,t)>0$$

这与边值 $(u_x+hu)(l,t)=0$ 矛盾！类似也可证明 u 不能有负的最小值，因此 u 只有零解 □

定理 4.5

第二类边值问题

$$\begin{cases} \partial_t u-\partial_x^2 u=f, & x\in[0,l], t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ u(0,t)=g_1(t), & u_x(l,t)=g_2(t) \end{cases} \tag{4.44}$$

的古典解唯一

♡

证明 同上，只需证明方程

$$\begin{cases} \partial_t u-\partial_x^2 u=0, & x\in[0,l], t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u(0,t)=0, & u_x(l,t)=0 \end{cases} \tag{4.45}$$

只有零解，令 $\tilde{u}(x,t)=u(x,t)\cdot w(x)$，其中 $w(x)>0$，则 $u=\dfrac{\tilde{u}(x,t)}{w(x)}$

$$\partial_t u=\frac{\partial_t\tilde{u}(x,t)}{w(x)}, \quad \partial_x u=\frac{\partial_x\tilde{u}(x,t)}{w(x)}-\frac{w'(x)}{w^2(x)}\tilde{u}(x,t), \quad \partial_x^2 u(x,t)=\frac{\partial_x^2\tilde{u}(x,t)}{w(x)}-\frac{2w'(x)}{w^2(x)}\partial_x\tilde{u}(x,t)+2\frac{(w'(x))^2}{w^3(x)}\tilde{u}(x,t)-\frac{w''(x)}{w^2(x)}\tilde{u}(x,t)$$

代入方程得，$\tilde{u}$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t\tilde{u}-\partial_x^2\tilde{u}+2\dfrac{w'(x)}{w(x)}\tilde{u}_x-\left(\dfrac{2\,(w'(x))^2}{w^2(x)}-\dfrac{w''(x)}{w(x)}\right)\tilde{u}=0 \\ \tilde{u}(x,0)=0 \\ \tilde{u}(0,t)=0, \quad (\tilde{u}_x+\tilde{u})(l,t)=0 \end{cases} \tag{4.46}$$

取 $w(x)=l-x+1$，则 $w'(x)=-1$，$w(x)\geq 1$，代入 (4.46) 得

$$\begin{cases} \partial_t\tilde{u}-\partial_x^2\tilde{u}-\dfrac{2}{l-x+1}\partial_x\tilde{u}-\dfrac{2}{(l-x+1)^2}\tilde{u}=0 \\ \tilde{u}(x,0)=0 \\ \tilde{u}(0,t)=0, \quad (\tilde{u}_x+\tilde{u})(l,t)=0 \end{cases} \tag{4.47}$$

我们令 $v(x,t)=e^{-\lambda t}\tilde{u}$，其中 $\lambda>2$，则 v 满足的方程为

$$\begin{cases} \partial_t v-\partial_x^2 v-\dfrac{2}{l-x+1}\partial_x v+\left[\lambda-\dfrac{2}{(l-x+1)^2}\right]v=0 \\ v(x,0)=0 \\ v(0,t)=0, \quad (v_x+hv)(l,t)=0 \end{cases} \tag{4.48}$$

若 v 不恒为零，则 v 必有正的最大值或负的最小值，先设 v 有正的最大值，设 v 在 $(x^\star,t^\star)\in Q_T$ 达到最大值，则

$$\partial_t v(x^\star,t^\star)\geq 0, \quad \partial_x^2 v(x^\star,t^\star)\leq 0, \quad \partial_x v(x^\star,t^\star)=0, \quad v(x^\star,t^\star)>0$$

因此

$$\left\{\partial_t v - \partial_x^2 v - \frac{2}{l-x+1}\partial_x v + \left[\lambda - \frac{2}{(l-x+1)^2}\right] v\right\}(x^\star, t^\star) > 0$$

这与方程矛盾！因此 v 不能在内部达到正的最大值，则 v 的正的最大值只能在边界取得，而由边值 $v(x,0) = 0, v(0,t) = 0$ 知，最大值只能在 $x = l$ 取得，假设在 $x = l$ 上的一点 $(l, \bar{t})$ 上取得正的最大值，则

$$\partial_x v(l, \bar{t}) \geq 0 \Longrightarrow (v_x + v)(l, t) > 0$$

这与 $(v_x + v)(l, t) = 0$ 矛盾！因此 v 没有正的最大值，同理可证 v 没有负的最小值，即 $v \equiv 0$，而 $\tilde{u}(x,t) = v(x,t)e^{\lambda t}$，故 $\tilde{u} \equiv 0$，因此 $u(x,t) = \dfrac{\tilde{u}(x,t)}{w(x)} \equiv 0$ □