第九周作业答案

罗曾宇

题目 1. 平面电磁波垂直射到金属表面上，试证明透入金属内部的电磁波能量全部变为焦耳热.

解答. 只有折射波会透入金属内部，所以这里我们只需考虑折射波的能量，设金属表面为 $z=0$ 的平面，则折射波的波矢 $\boldsymbol{k}''=(\beta+i\alpha)\boldsymbol{e_z}$，折射波电场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E_0}e^{i(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}=\boldsymbol{E_0}e^{-\alpha z}e^{i(\beta z-\omega t)},$$

折射波的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu}=\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{E},$$

透入金属内的平均能流密度为

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{S}}&=\frac{1}{2}Re(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})\\&=\frac{1}{2\omega\mu}Re[(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k}''-(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{E}^*)\boldsymbol{E}]\\&=\frac{\beta E_0^2}{2\omega\mu}e^{-2\alpha z}\boldsymbol{e_z},\end{aligned}$$

注意波矢方向和电场方向垂直. 为什么要考虑平均？因为一般来说电磁波的频率都比较高，长波的发送和接收并不简单，因为天线长度和波长相关，电磁场变化很快，观测的或者说实验测得的都是平均效应.

在金属表面即 $z=0$ 处，单位时间从单位面积流进的平均能量为

$$\overline{S}|_{z=0}=\frac{\beta E_0^2}{2\omega\mu},$$

金属内部由于电流热效应引起的损耗功率密度为

$$\overline{p}=\frac{1}{2}Re(\boldsymbol{J}^*\cdot\boldsymbol{E})=\frac{\sigma}{2}Re(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E})=\frac{\sigma}{2}E_0^2e^{-2\alpha z},$$

焦耳功率密度为 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}$，忘记了的同学可复习第一章.

但是注意，能流密度是面密度，功率密度是体密度，这里需要对功率密度积下分 (实际上也就是对全体积积分，类似高斯定理)，以单位面积为截面积，高 $z\to\infty$ 的导体柱内，平均损耗的功率为

$$\int_0^\infty\overline{p}\mathrm{d}z=\frac{\sigma E_0^2}{4\alpha},$$

而

$$\frac{\dfrac{\beta E_0^2}{2\omega\mu}}{\dfrac{\sigma E_0^2}{4\alpha}}=\frac{2\alpha\beta}{\sigma\omega\mu}=1.$$

所以从表面进入金属内的电磁能量，全部被电流热效应损耗.

题目 2. 已知海水的 $\mu_r=1$，$\sigma=1S\cdot m^{-1}$，试计算频率 ν 为 $50,10^6$ 和 10^9Hz 的三种电磁波在海水中的透入深度.

解答. 透入深度

$$\delta=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2\epsilon}{\mu}}(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}+1)^{\dfrac{1}{2}},$$

海水的 ϵ_r 数量级为 10^1，对于频率为 $50Hz$ 的电磁波，代入题设数据得

$$\delta=71.18m,$$

对于频率为 10^6Hz 的电磁波，代入题设数据得

$$\delta=0.50m,$$

对于频率为 $10^{12}Hz$ 的电磁波，代入题设数据得

$$\delta=0.017m.$$

题目 3. 平面电磁波由真空倾斜入射到导电介质表面上，入射角为 θ_1. 求导电介质中电磁波的相速度和衰减长度. 若导电介质为金属，结果如何？

解答. 设导电介质表面为 $z=0$ 的平面，入射面为 xz 平面，入射波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的 x 分量 $k_x = k\sin\theta_1$，透射波矢量为

$$\boldsymbol{k}'' = \boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\alpha}, k_x'' = \beta_x + i\alpha_x, k_z'' = \beta_z + i\alpha_z,$$

而 $k_x'' = k_x$(这一点是由电场的旋度为零这条边界条件保证的)，因此

$$\beta_x = k\sin\theta_1 = \frac{\omega}{c}\sin\theta_1, \alpha_x = 0,$$

于是由 $\boldsymbol{k}'' = \boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\alpha}, k'' = \omega\sqrt{\mu\epsilon'}, \epsilon' = \epsilon + i\dfrac{\sigma}{\omega}$, 有

$$\beta_x^2 + \beta_z^2 - \alpha_z^2 = \omega^2\mu\epsilon, \alpha_z\beta_z = \omega\mu\sigma,$$

将 β_x 的值代入可得

$$\beta_z^2 = \frac{1}{2}(\mu\epsilon\omega^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1) + \frac{1}{2}[(\mu\epsilon\omega^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)^2 + (\mu\sigma\omega)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha^2 = \alpha_z^2 = -\frac{1}{2}(\mu\epsilon\omega^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1) + \frac{1}{2}[(\mu\epsilon\omega^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)^2 + (\mu\sigma\omega)^2]^{\frac{1}{2}},$$

电磁波在导电介质中的相速度和透入深度分别为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\beta_x^2 + \beta_z^2}}, \delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_z},$$

若导电介质为金属，即 $\dfrac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ 时，有

$$\beta_x \ll \beta_z, \beta_z = \alpha_z = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}},$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta_z} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}, \delta = \frac{1}{\alpha_z} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}.$$