PEARSON

时代教育·国外高校优秀教材精选

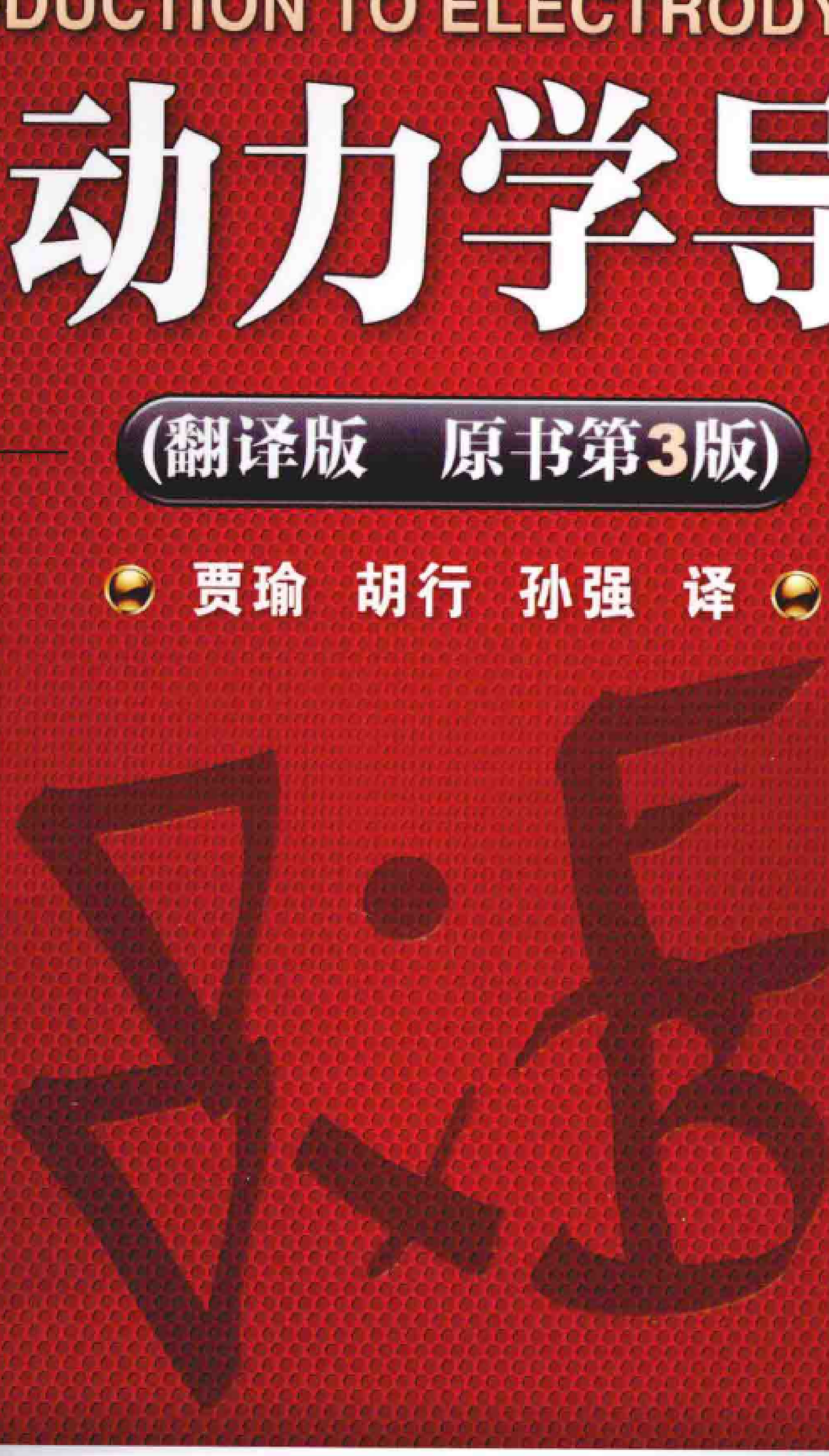
(美) 大卫 J. 格里菲斯(David J. GRIFFITHS)

INTRODUCTION TO ELECTRODYNAMICS

电动力学导论

(翻译版　原书第3版)

贾瑜　胡行　孙强　译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

For sale and distribution in the People's Republic of China exclusively (except Taiwan, Hong Kong SAR and Macau SAR).
仅限于中华人民共和国境内（不包括中国香港、澳门特别行政区和中国台湾地区）销售发行。

地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037
电话服务
社服务中心：010-88361066
销售一部：010-68326294
销售二部：010-88379649
读者购书热线：010-88379203
网络服务
教材网：http://www.cmpedu.com
机工官网：http://www.cmpbook.com
机工官博：http://weibo.com/cmp1952
封面无防伪标均为盗版

PEARSON

www.pearson.com

上架指导 物理

ISBN 978-7-111-44404-6

策划编辑◎李永联 / 封面设计◎马精明

PEARSON

ISBN 978-7-111-44404-6

9 787111 444046 >

定价：43.50元

时代教育·国外高校优秀教材精选

INTRODUCTION TO ELECTRODYNAMICS

电动力学导论

（翻译版　原书第3版）

（美）　大卫　J.　格里菲斯（David J. Griffiths）　著
贾瑜　胡行　孙强　译

机械工业出版社

本书译自美国著名物理教育家 David J. Griffiths 教授所著的《Introduction to Electrodynamics》(第 3 版)，是“时代教育 · 国外高校优秀教材精选”系列之一，其内容包含了我国大学本科电动力学的主要内容，也涵盖了部分电磁学的内容。本书以其丰富的内容、清晰的物理概念和新颖的叙述风格得到广泛好评，在世界范围内，被许多大学选为本科生电动力学课程的教材。

本书以清晰易懂的方式介绍经典电动力学的基本理论，主要包括电磁现象的普遍规律、静电场和静磁场、电磁波的传播和辐射、狭义相对论等。作者运用大量生动的实例讲述经典电动力学的基本概念、原理及解决问题的方法，将一些普通物理学中的电磁学知识作为起点，由浅入深地介绍电动力学，使本书易读、易懂。另外，书中配有大量习题，以帮助读者理解课程内容，掌握解决实际问题的方法，扩大知识面。

本书可作为高等学校物理专业以及其他相关专业电动力学的基础教材，也可供有关专业教师、科研人员和工程技术人员参考。

Authorized translation from the English language edition, entitled INTRODUCTION TO ELECTRODYNAMICS, Third Edition, 0-13-805326-X by David J. Griffiths, published by Pearson Education, Inc, publishing as Addison-Wesley, Copyright © 1999. 1989. 1981 by Prentice-Hall, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

CHINESE SIMPLIFIED language edition published by PEARSON EDUCATION ASIA LTD., and CHINA RENMIN UNIVERSITY PRESS Copyright © 2014.

本书中文简体字版由培生教育出版公司授权机械工业出版社合作出版，未经出版者书面许可，不得以任何形式复制或抄袭本书的任何部分。

本书封面贴有 Pearson Education(培生教育出版集团)激光防伪标签。无标签者不得销售。

北京市版权局著作权合同登记：图字：01-2011-1509 号

图书在版编目(CIP)数据

电动力学导论：第 3 版/(美)格里菲斯(Griffiths, D. J.)著；贾瑜，胡行，孙强译. —北京：机械工业出版社，2013.12

(时代教育：国外高校优秀教材精选)

书名原文：Introduction to electrodynamics third edition

ISBN 978-7-111-44404-6

Ⅰ.①电… Ⅱ.①格…②贾…③胡…④孙… Ⅲ.①电动力学-高等学校-教材 Ⅳ.①0442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 246212 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：李永联 责任编辑：李永联 熊海丽

版式设计：常天培 责任校对：姜艳丽

封面设计：马精明 责任印制：乔 宇

北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2014 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm · 23.5 印张 · 642 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-44404-6

定价：43.50 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销售一部：(010)68326294

销售二部：(010)88379649

读者购书热线：(010)88379203

网络服务

教材网：http://www.cmpedu.com

机工官网：http://www.cmpbook.com

机工官博：http://weibo.com/cmp1952

封面无防伪标均为盗版

译 者 序

本书译自美国大卫 J. 格里菲斯(David J. Griffiths)教授所著的《电动力学导论》第 3 版。格里菲斯教授是享誉世界的著名物理学家和物理教育学家，他善于以风趣而睿智的风格结合实际问题讲述知识要点，曾编写了多部世界公认的优秀本科生教材。他所撰写的教材被许多美国著名高校以及其他国家的高校所使用。格里菲斯教授所著《电动力学导论》以清晰易懂的方式介绍了经典电动力学的基本理论，其中包含我国大学本科物理专业电动力学的基本内容，非常适合作为我国大学物理及相关专业的电动力学课程的教本。《电动力学导论》的英文版已在我国发行，深受广大读者的欢迎，许多读者希望见到本书的中译本。应读者的要求，机械工业出版社出版了本书的中译本。

电动力学是介绍电磁场基本规律的理论课程，它不仅是大学物理专业及相关专业的核心课程和进一步学习更高等的基础课与各类专业课的基础课程，也是现代科技必不可缺的基础知识之一，在通信、微电子、超导、电工等许多领域有具体、实际的应用。因此，适当引进国外适合我国本科教学的著名教材对促进我国本科教学的现代化十分必要。

格里菲斯教授所著的《电动力学导论》风格和特点十分鲜明：

(1)立足于“电磁理论的入门水平”，不仅包含了大学物理“电动力学”的主要内容，而且融合了我国大学物理专业“电磁学”的部分内容，使读者对电磁场理论的发展由来有更清晰的把握。作者强调对实验基础和基本概念的理解，采用对话式的语言，叙述简明，文笔流畅，避免了把物理概念湮灭在复杂的数学公式之中，因此十分有利于初学者。

(2)不仅仅局限于知识的讲授，而是让读者真正从具体问题中体会到电动力学的精髓，掌握物理概念。比如作者对电磁力不做功、电磁场动量等的解释，通过大量例题对泊松方程、镜像法求解方法的讲述等都独具特色，能够引导学生迅速地“入门上手”。

(3)作者配置了大量有启发性的习题来训练学生，这不仅可以培养学生独立思考和独立解决问题的能力，更好地掌握基本物理概念，而且把一些电动力学的内容在习题中得以体现，使得本书主线更加清晰，前、后内容的连接更加密切。此外，作者在练习题的选择上特别下工夫。习题分为基本和提高两个层次，可供不同目的和基础的学生选择，有利于学生的学习。

尽管我国已经有不少优秀的电动力学课程教材，也有一些翻译的国外教材，但是译者认为，格里菲斯教授《电动力学导论》的翻译出版还是十分有益和必要的，它可以开阔读者的眼界，从风格各异的教材中取长补短，深化我们对电动力学课程学习及教学的改进。

本书的第 1 ~ 3 章由胡行翻译，第 4 ~ 8 章由贾瑜翻译，第 9 ~ 12 章由孙强翻译。书中对我国读者熟悉的外国人名将直接给出中译名，对某些不常见的外国人名将采取音译并给出英文名。原著者给出了很多有教益的脚注，为了使读者能够方便地查阅脚注所给出的参考文献，脚注中的人名、杂志名和出版社名将不再翻译，直接给出英文名。由于时间紧迫，加之译者水平有限，不妥或错误之处，敬请广大读者批评指正，以便再版时修正。

本书从翻译策划到最后完稿，机械工业出版社给予了很大的帮助和支持。在翻译过程中还得到了郑州大学物理工程学院霍裕平院士、美国橡树岭国家实验室张振宇教授、武汉大学物理与技术学院刘觉平教授等的关心和指导。郑州大学李玉晓教授、李新建教授等给予了很多帮助。在此，对他们表示感谢！

译者

于郑州大学

作　者　序

这是一本关于电与磁的教科书，适合于大学三年级或四年级的本科生。它可以在两个学期内轻松讲完，甚至还可有剩余时间讲授一些其他专题(如 AC 电路、数值方法、等离子体物理、传输线、天线理论等)。若为一学期的课程，可仅讲前七章的内容。与量子力学和热物理等不同，对如何讲授电动力学，见解相当一致；如应当包含什么内容，甚至连讲解的次序，都没有什么分歧，教科书的区别仅在于各自的风格。与大多数人相比，我的写法更加自由一些；我认为这可使难点更加有趣和容易接受。

我对本书第 3 版做了大量小的改动，以使内容更清晰和优美。对某些符号也做了改动，以避免不一致或不明确。比如直角坐标系的单位矢量 $\hat{i}$，$\hat{j}$，$\hat{k}$ 已由 $\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$ 取代，这样，所有的矢量都以粗体字母表示，所有的单位矢量都是在相应的矢量之上加^表示。(这也腾出 $\boldsymbol{k}$ 用来表示电磁波的传播矢量。)我总是被用相同的字母 r 表示球坐标(到原点的距离)和柱坐标(到 z 轴的距离)所烦扰。对后者的一个通常的变更是用 ρ，但是在电动力学中它有更重要的任务，在详尽搜索后我决定用还空闲着的 s；我希望这个不正统的用法不会引起混淆。

某些读者希望我放弃斜体字母 $\boldsymbol{\mathscr{r}}$(从源点 $\boldsymbol{r}'$到场点 $\boldsymbol{r}$ 的矢量)，而用更明显的 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$。但是这将使很多方程变得很繁琐，特别是涉及单位矢量 $\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$ 时。我从自己的教学经验知道，粗心的学生试图把 $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ 当作 $\boldsymbol{r}$——这显然会使积分容易！我已在第 1 章中插入了一段文字来解释这个符号，我希望这会有帮助。如果你是学生，请记住：$\boldsymbol{\mathscr{r}}\equiv\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，它与 $\boldsymbol{r}$ 不一样。如果您是老师，请提醒您的学生对 $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ 给予充分的关注。我认为它是一个好符号，但是必须要细心对待。

结构上的主要改变是我把第 7 章中的守恒定律和势移出，另辟两个短小的新章节(第 8 章，第 10 章)。这将更适合一学期的课程讲授，而且使第 7 章的主题更集中。

我增加了一些例题和习题(也删除了少数效果不佳的题)以及更多的可查参考文献(特别是 American Journal of Physics 杂志上的)。当然，我知道大多数读者没有时间或者不喜欢去查阅这些文献，但是我还是认为这是值得的。要强调的是，尽管电动力学历史悠久，它仍然是一个非常有活力的学科，有趣的新发现层出不穷。我希望也许有些问题可以激发你的好奇心，促使你查阅文献——其中一些确实是珍宝。

如同先前的版本，我区分了两类不同的习题。其中一些具有教学的目的，在学习完相关章节后应立即演做；这些习题放在章节中适当的位置。(有少数情况，习题的解在课文后面会用到；这些习题的左边用(·)标志。)较长的习题，或者那些有更一般性质的习题将放在每一章的后面。当我授课时，我会布置它们中的一些，少数也会在课堂上讲演。极不寻常有挑战性的习题用(!)标记。许多读者曾要求在书后附上习题解答，遗憾的是，也有许多人强烈反对。我取折中方案，对有些习题，适当地提供答案。完整的习题解答可向出版商索要(仅对教师)。

从与许多同事的讨论中我受益匪浅——这里我无法一一列出他们的名字。但是我想要感谢对本书特别是第 3 版作出了贡献的人，他们是：Burton Brody (Bard)，Steven Grimes(Ohio)，Mark Heald(Swarthmore)，Jim McTavish(Liverpool)，Matthew Moelter(Puget Sound)，Paul Nachman(New Mexico State)，Gigi Quartapelle(Milan)，Carl A. Rotter(West Virginia)，Daniel Schroeder(Weber State)，Juri Silmberg(Ryerson Polytechnic)，Walther N. Spjeldvik(Weber State)，Larry Tankersley(Naval Academy)，Dudley Towne(Amherst)。事实上，我对电动力学每部分内容的了解(当然也包括如何讲授电动力学)应感恩于 Edward Purcell。

David J. Griffiths

关 于 本 书

电动力学是什么？它如何融入物理的一般框架中？

力学的四个范畴

在下表中，我给出了力学的四大领域：

经典力学 （牛顿）	量子力学 （玻尔、海森伯、薛定谔等）
狭义相对论 （爱因斯坦）	量子场理论 （狄拉克、泡利、费曼、史温格等）

20 世纪初人们发现，牛顿力学并不完善——在“日常生活”中它是正确的，但是对高速运动（接近光速）的物体，它是不正确的，必须用狭义相对论（由爱因斯坦在 1905 年建立）；对于非常小的物体（接近原子尺寸），牛顿力学由于另外的原因也失效，而由量子力学（由玻尔、薛定谔、海森伯及许多其他人在 20 世纪初发展起来）取代；对于非常快又非常小的物体（在现代粒子物理中非常普遍），需要发展相对论与量子力学结合的力学：这个相对论量子力学称为量子场理论——它在 20 世纪 30 年代和 40 年代开始建立，但是即便是现在也不能认为它是一个完全令人满意的理论。在本书中，除了最后一章，我们完全是在经典力学的范畴，尽管电动力学可优美简洁地扩展到其他三个范畴。（事实上，电动力学自动与相对论相容，历史上，这是相对论发展的主要动力。）

四种类型的力

力学告诉我们当一个体系受到力时它如何表现。已知自然中仅有四种基本力（到目前为止），我把它们按强度的顺序列出：

1. 强相互作用
2. 电磁相互作用
3. 弱相互作用
4. 引力相互作用

这种列法的简洁性可能会使你们吃惊。摩擦力在哪？保持你不从地板掉下去的“支撑力”在哪？把分子结合在一起的化学力在哪？两个相互碰撞的台球的碰撞力又是什么？答案是，所有这些力都是电磁的。的确，说我们是生活在一个电磁的世界里一点儿也不夸张——除了引力，我们在每天生活中遇到的每一个力其起源都是电磁的。

在原子核中把质子、中子结合在一起的强力，作用距离非常之短，尽管它们要比电磁力强百倍以上，但我们却不会“感受”到它们。与辐射衰变有关的弱力，不仅作用距离短，也比电磁力弱得多。至于引力，更是极其微弱（与其他力相比），所以除非质量巨大（比如地球和太阳），否则我们也很难注意到它。两个电子间的静电排斥力是其之间相互引力的 10^{42} 倍，如果原子是靠引力（替代电磁力）保持在一起的，那么一个氢原子将会比已知宇宙还大。

电磁力不仅是每天生活中的统治力，也是目前了解的最透彻的力。当然，我们也有引力的经典理论（牛顿的万有引力定律）和相对论理论（爱因斯坦的广义相对论），但是还没有关于引力的完全令人满意的量子理论（虽然有许多人正在探讨它）。现今，已有关于弱相互作用的非常成功（有点繁杂）的理论，它对强相互作用也是引人注目的候选者（称为色动力学）。这些理论的建立都受到电动力学的启发，而且目前也没人能断言实验已决定性地证实了这些理论。所以，电动力学，一个优美、完整且成功的理论，就成为了物理学家的一个范例，一个其他理论想尽力模仿的

理想模型。

经典电动力学的规律是由富兰克林、库仑、安培、法拉第以及其他一些人一点点发现和建立起来的，麦克斯韦则完成了最后的工作，并把它表述成现今这样紧凑、优美、协调的形式。这个理论现在已有百年的历史。

物理理论的统一

早期的电学和磁学是完全分离的。电学研究的是玻璃棒、猫皮、验电球、电池、电流、电解和电灯；而磁学研究的是磁棒、铁填充物、指南针和地磁极。但是在 1820 年奥斯特注意到，电流可以使一个磁针偏转。很快，安培正确地推测出所有的磁现象都归因于电荷的运动。随后，在 1831 年，法拉第发现了运动的磁体可产生电流。在麦克斯韦和洛伦兹对理论进行最后完善时，电学和磁学已经完全交织在一起，不能再把它们认为是分割的事物，而是同一个事物：电磁学的两个不同方面。

法拉第已经猜测到光在本质上是电的。麦克斯韦的理论为这个假设提供了坚实的论证，很快，光学——有关透镜、面镜、棱镜、干涉和衍射的研究——也并入电磁学。赫兹在 1888 年展示了决定性的实验，证实了麦克斯韦的理论，他指出："光和电之间的联系现在建立起来了……每一次闪电，每一次发光，我们看到的都是电过程……因此，电的统治扩展到整个自然，它甚至最终影响到我们自身：我们发现我们具有……一个电的器官——眼睛。"在 1990 年，物理的三大分支，电、磁、光并入了一个单一的统一理论（很快证实可见光仅是包括微波、红外、紫外、X 射线、γ 射线等电磁辐射谱中很小的一部分波段）。

爱因斯坦渴望进一步的统一理论，希望能像一个世纪前统一电和磁那样来统一引力和电磁。他的统一场理论不是特别成功，但是近年来却激发起一个分层次统一方案的宏伟目标，它开始于 1960 年格拉肖、温伯格和萨拉姆的弱电统一理论，1980 年的超弦理论（按其提议者，这个理论要把所有四种力纳入一个单一的"所有事情的理论"之中）是其高潮。在这个分层方案的每一步，都有数学上的困难以及理论猜想与实验验证之间的裂缝。然而，毫无疑问，由电动力学所激发起的统一各种力的愿景已成为物理发展中的主旋律。

电动力学的场形式

电动力学理论希望解决的基本问题是：我在某处举着一些电荷（也许来回摇动它们）——那么对其他地方上的一些电荷，会发生什么？经典解采取场理论的形式：我们说在一个电荷周围的空间充满了电磁场（电荷的电磁"气味"）。在这个场中，另一个电荷，受到一个力；场把一个电荷的影响传递给另一个电荷——场是相互作用的媒介。

当一个电荷加速运动时，部分场从它自身"分离"，也就是说，以光速传播，携带有能量、动量和角动量，我们称之为电磁辐射。它的存在使我们（如果不是强迫的话）把场自身看做是独立存在的实体，像原子和棒球一样"真实"。相应地，我们的兴趣从电荷之间的力转移到了场理论本身，但是，产生电磁场需要电荷，探测电磁场也需要电荷，所以我们最好从回顾电荷的基本性质开始。

电荷

1. 电荷有两种类型，我们称之为"正"和"负"，因为它们的作用相互抵消（如果在某点处同时存在 $+q$ 和 $-q$，电学上这与没有电荷存在完全一样）。这也许太平凡，但是我鼓励你们考虑其他的可能性：如果有 8 种或 10 种不同种类的电荷，又会如何？（事实上，在色动力学中，与电荷类似的量有三种，每一种分别又有正、负之分。）或者，若两类电荷不倾向于相互抵消，又会如何？极不寻常的事实是，在块材物体中，正电荷与负电荷以极高的精度在数量上一样多，所以物体几乎是完全电中性的。如果不是这样，我们将会遇到巨大的力：如果正、负电荷仅有 $1/10^{10}$ 没有相互抵消，那么一个土豆将会剧烈地爆炸。

2. 电荷守恒：电荷不能被产生也不能被消灭——一旦存在将永远存在(一个正电荷可以“湮灭”一个等量的负电荷，但是一个正电荷不能简单地由其自身而消失——某些东西必须弥补这个电荷的消失)。所以宇宙中的总电荷是不随时间改变的，这称为全电荷守恒。实际上，我们可以表述得更强烈一些：全电荷守恒允许一个电荷在纽约消失而同时在旧金山出现(这不会影响总电荷)，但我们知道这是不会发生的。如果这个电荷从纽约跑到旧金山，则它必须沿着某条连续的路径，这称为局域电荷守恒。后面我们将会看到如何给出一个精确的数学上的表示式去表达局域电荷守恒——称它为连续性方程。

3. 电荷的量子化。尽管在经典电动力学中没有任何限制去要求电荷是量子化的，但事实上电荷仅以分立的量出现——电荷的基本单位乘以一个整数。如果我们让质子的电荷量为 $+e$，则电子的电荷量为 $-e$，中子的为零，π 介子的为 $+e$，0，$-e$，碳原子核的为 $+6e$，等等(绝不会为 $7.392e$，或 $\frac{1}{2}e$)。[⊖]这个电荷的基本单位非常之小，所以对实际的情况，可以完全忽略电荷的量子化。水，确实也由分立量(分子)组成，但是，如果我们处理大量的水就可以把它作为连续的流体。事实上这非常接近麦克斯韦本人的观点，他不知道电子和质子——他不得不把电荷看做是一种可任意分割和涂抹的“胶体”。

以上是电荷的基本性质。在我们讨论电荷之间的力之前，一些数学工具是必要的，将在第 1 章中介绍。

单位制

电动力学的研究被使用不同的单位制所困扰，有时这阻碍了物理学家之间的交流。这个问题在力学中更严重，有些人仍然在使用磅和英尺；在力学中，除了单位制的不同，至少所有的方程看起来形式还是一样的。牛顿第二定律仍是 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$，而不管单位是英尺—磅—秒，还是千克—米—秒，或者任何其他单位制。但是在电动力学中情况就不是如此了，库仑定律可能的形式为

$$\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\text{(高斯制)},\text{或者}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\text{(国际单位制)},\text{或者}\frac{1}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\text{(HL 制)}$$

最常用的两个单位制是高斯制(cgs)和国际单位制(mks)。基本粒子工作者喜欢第三种单位制：Heaviside-Lorentz(HL)制。尽管高斯制具有简洁的理论优点，但大多数本科生教师更喜欢国际单位制(SI)，因为它容纳了熟悉的生活单位(伏特、安培、瓦特)。因此，本书将使用国际单位制。附录 C 提供了把主要结果转化为高斯制的表格。

⊖ 实际上，质子和中子是由三个夸克组成的复合体，夸克带有分数电荷($\pm\frac{2}{3}e$ 和 $\pm\frac{1}{3}e$)。不过在自然界不存在自由夸克，而且在任何方面这也不会改变电荷的量子化，它只不过减小了电荷的基本单位。

目　　录

译者序
作者序
关于本书
第 1 章　矢量分析 …… 1
1.1　矢量代数 …… 1
1.1.1　矢量操作 …… 1
1.1.2　矢量代数：分量形式 …… 3
1.1.3　三重积 …… 5
1.1.4　位置、位移与间隔矢量 …… 6
1.1.5　矢量变换 …… 7
1.2　微分运算 …… 8
1.2.1　普通导数 …… 8
1.2.2　梯度 …… 8
1.2.3　∇算子 …… 11
1.2.4　散度 …… 11
1.2.5　旋度 …… 13
1.2.6　积规则 …… 14
1.2.7　二阶微分 …… 15
1.3　积分运算 …… 17
1.3.1　线、面和体积分 …… 17
1.3.2　微积分的基本定理 …… 19
1.3.3　有关梯度的基本定理 …… 20
1.3.4　有关散度的基本定理 …… 21
1.3.5　有关旋度的基本定理 …… 23
1.3.6　分部积分 …… 24
1.4　曲线坐标系 …… 25
1.4.1　球坐标系 …… 25
1.4.2　柱坐标系 …… 29
1.5　狄拉克 δ 函数 …… 30
1.5.1　$\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$ 的散度 …… 30
1.5.2　一维狄拉克 δ 函数 …… 30
1.5.3　三维 δ 函数 …… 33
1.6　矢量场理论 …… 35
1.6.1　亥姆霍兹定理 …… 35
1.6.2　势函数 …… 35
第 2 章　静电学 …… 39
2.1　电场 …… 39

2.1.1　引言 …… 39
2.1.2　库仑定律 …… 39
2.1.3　电场 …… 40
2.1.4　连续分布电荷 …… 41
2.2　静电场的散度和旋度 …… 43
2.2.1　电场线、电场强度通量和高斯定理 …… 43
2.2.2　$\boldsymbol{E}$ 的散度 …… 46
2.2.3　高斯定理的应用 …… 47
2.2.4　$\boldsymbol{E}$ 的旋度 …… 50
2.3　电势 …… 51
2.3.1　电势的概念 …… 51
2.3.2　有关势的评注 …… 52
2.3.3　泊松方程和拉普拉斯方程 …… 54
2.3.4　局域电荷分布的电势 …… 55
2.3.5　总结　静电场的边界条件 …… 57
2.4　静电场的能量与做功 …… 59
2.4.1　移动电荷所需做的功 …… 59
2.4.2　点电荷分布的能量 …… 59
2.4.3　连续电荷分布的能量 …… 61
2.4.4　有关静电场能量的评注 …… 62
2.5　导体 …… 63
2.5.1　基本性质 …… 63
2.5.2　诱导电荷 …… 64
2.5.3　表面电荷和导体受到的力 …… 66
2.5.4　电容 …… 67
第 3 章　特殊技术 …… 72
3.1　拉普拉斯方程 …… 72
3.1.1　引言 …… 72
3.1.2　一维拉普拉斯方程 …… 72
3.1.3　二维拉普拉斯方程 …… 73
3.1.4　三维拉普拉斯方程 …… 74
3.1.5　边界条件和唯一性定理 …… 75
3.1.6　导体和第二唯一性定理 …… 76
3.2　镜像法 …… 78
3.2.1　典型镜像问题 …… 78
3.2.2　诱导表面电荷 …… 79
3.2.3　力和能量 …… 80
3.2.4　其他镜像问题 …… 80
3.3　分离变量法 …… 82
3.3.1　直角坐标 …… 82
3.3.2　球坐标 …… 88
3.4　多极展开 …… 93

3.4.1 远距离处的近似电势 …… 93
3.4.2 单极项和偶极项 …… 95
3.4.3 多极展开中的坐标原点 …… 97
3.4.4 偶极子的电场 …… 98
第4章 物质中的电场 …… 103
4.1 极化 …… 103
4.1.1 电介质 …… 103
4.1.2 诱导偶极子 …… 103
4.1.3 极化分子的排列 …… 105
4.1.4 极化强度 …… 106
4.2 极化物体的电场 …… 107
4.2.1 束缚电荷 …… 107
4.2.2 束缚电荷的物理解释 …… 109
4.2.3 电介质内部的电场 …… 111
4.3 电位移矢量 …… 112
4.3.1 有电介质时的高斯定理 …… 112
4.3.2 易误解的类似性 …… 114
4.3.3 边界条件 …… 114
4.4 线性电介质 …… 115
4.4.1 电极化率、介电常数和相对介电常数 …… 115
4.4.2 线性电介质的边界值问题 …… 119
4.4.3 介电系统的能量 …… 122
4.4.4 作用在电介质上的力 …… 124
第5章 静磁学 …… 129
5.1 洛伦兹力定律 …… 129
5.1.1 磁场 …… 129
5.1.2 磁力 …… 130
5.1.3 电流 …… 133
5.2 毕奥-萨伐尔定律 …… 137
5.2.1 稳恒电流 …… 137
5.2.2 稳恒电流的磁场 …… 137
5.3 ***B*** 的散度与旋度 …… 140
5.3.1 直线电流 …… 140
5.3.2 ***B*** 的散度与旋度 …… 141
5.3.3 安培定理的应用 …… 143
5.3.4 静磁学与静电学的比较 …… 147
5.4 磁矢势 …… 149
5.4.1 矢势 …… 149
5.4.2 总结 静磁学的边界条件 …… 153
5.4.3 矢势的多极展开 …… 154
第6章 物质中的磁场 …… 163
6.1 磁化 …… 163

6.1.1　抗磁体、顺磁体和铁磁体 …… 163
6.1.2　作用在磁偶极子上的力和力矩 …… 163
6.1.3　磁场对原子轨道的效应 …… 166
6.1.4　磁化强度 …… 167
6.2　磁化物体的磁场 …… 168
6.2.1　束缚电流 …… 168
6.2.2　束缚电流的物理解释 …… 170
6.2.3　介质内的磁场 …… 171
6.3　辅助场 $\boldsymbol{H}$ …… 171
6.3.1　磁介质中的安培定理 …… 171
6.3.2　易误解的类似性 …… 174
6.3.3　边界条件 …… 175
6.4　线性与非线性介质 …… 175
6.4.1　磁化率与磁导率 …… 175
6.4.2　铁磁性 …… 177
第7章　电动力学 …… 182
7.1　电动势 …… 182
7.1.1　欧姆定律 …… 182
7.1.2　电动势 …… 186
7.1.3　动生电动势 …… 188
7.2　电磁感应 …… 192
7.2.1　法拉第定律 …… 192
7.2.2　感应电场 …… 194
7.2.3　电感 …… 198
7.2.4　磁场的能量 …… 201
7.3　麦克斯韦方程组 …… 204
7.3.1　麦克斯韦之前的电动力学 …… 204
7.3.2　麦克斯韦如何修改安培定理 …… 205
7.3.3　麦克斯韦方程组 …… 207
7.3.4　磁荷 …… 208
7.3.5　介质中的麦克斯韦方程组 …… 209
7.3.6　边界条件 …… 210
第8章　守恒定律 …… 219
8.1　电荷和能量 …… 219
8.1.1　连续性方程 …… 219
8.1.2　坡印廷定理 …… 219
8.2　动量 …… 222
8.2.1　电动力学中的牛顿第三定律 …… 222
8.2.2　麦克斯韦应力张量 …… 223
8.2.3　动量守恒 …… 226
8.2.4　角动量 …… 228
第9章　电磁波 …… 232

9.1 一维波 …… 232
9.1.1 波方程 …… 232
9.1.2 正弦波 …… 234
9.1.3 边界条件：反射与透射 …… 235
9.1.4 偏振 …… 238
9.2 真空中的电磁波 …… 239
9.2.1 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的波方程 …… 239
9.2.2 单色平面波 …… 240
9.2.3 电磁波的能量与动量 …… 242
9.3 物质中的电磁波 …… 244
9.3.1 在线性介质中的传播 …… 244
9.3.2 垂直入射时的反射与透射 …… 245
9.3.3 倾斜入射时的反射与透射 …… 247
9.4 吸收与色散 …… 251
9.4.1 导体中的电磁波 …… 251
9.4.2 导体表面的反射 …… 253
9.4.3 介电常数对频率的依赖 …… 255
9.5 波导 …… 259
9.5.1 波导 …… 259
9.5.2 矩形波导中的 TE 波 …… 261
9.5.3 共轴传输线 …… 263
第 10 章 势和场 …… 266
10.1 势表述 …… 266
10.1.1 标势与矢势 …… 266
10.1.2 规范变换 …… 268
10.1.3 库仑规范与洛伦兹*规范 …… 269
10.2 连续分布 …… 270
10.2.1 推迟势 …… 270
10.2.2 杰斐缅柯方程 …… 273
10.3 点电荷 …… 274
10.3.1 李纳-维谢尔势 …… 274
10.3.2 运动点电荷的场 …… 278
第 11 章 辐射 …… 283
11.1 偶极辐射 …… 283
11.1.1 辐射的定义 …… 283
11.1.2 电偶极子辐射 …… 283
11.1.3 磁偶极子辐射 …… 287
11.1.4 任意源的辐射 …… 289
11.2 点电荷 …… 293
11.2.1 点电荷的辐射功率 …… 293
11.2.2 辐射反作用 …… 296
11.2.3 辐射反作用的物理基础 …… 299

第 12 章　电动力学与相对论 …… 305
12.1　狭义相对论 …… 305
12.1.1　爱因斯坦的假设 …… 305
12.1.2　相对论的几何 …… 309
12.1.3　洛伦兹变换 …… 315
12.1.4　时空结构 …… 319
12.2　相对论力学 …… 324
12.2.1　固有时间和固有速度 …… 324
12.2.2　相对论能量和动量 …… 326
12.2.3　相对论运动学 …… 327
12.2.4　相对论动力学 …… 330
12.3　相对论电动力学 …… 334
12.3.1　相对论中的磁现象 …… 334
12.3.2　场如何变换 …… 336
12.3.3　场张量 …… 341
12.3.4　张量形式的电动力学 …… 343
12.3.5　相对论势 …… 346
附录 …… 350
附录 A　曲线坐标系中的矢量分析 …… 350
附录 A.1　引言 …… 350
附录 A.2　术语 …… 350
附录 A.3　梯度 …… 350
附录 A.4　散度 …… 351
附录 A.5　旋度 …… 353
附录 A.6　拉普拉斯算子 …… 354
附录 B　亥姆霍兹定理 …… 355
附录 C　单位制 …… 357

第1章　矢量分析

1.1　矢量代数

1.1.1　矢量操作

如果你向北走 4mile[⊖]，然后再向东走 3mile(见图 1.1)，你总共将走了 7mile，但是你距出发点仅有 5mile，而不是 7mile。我们需要有计算这样显然不遵从普通加法的量的方法。显然，它们不遵从普通加法的理由是，**位移**(从一点到另一点的直线距离)除了大小(长度)外还有方向，当结合两个位移时它们的方向和大小都必须考虑在内。像位移这样的物理量称为**矢量**，如速度、加速度、力和动量等都是矢量。仅有大小而没有方向的量称为**标量**，如质量、电荷、密度和温度等都是标量。我们将用粗体字母(***A***、***B*** 等)表示矢量，而用普通字母表示标量。一个矢量 ***A*** 的大小用 $|\boldsymbol{A}|$ 表示，称为矢量的模，或者简单地用 A 表示。在画图时，矢量用一个箭矢表示，箭矢的长度正比于矢量的大小。$(-\boldsymbol{A})$是一个与 ***A*** 大小相同，方向相反的矢量(见图 1.2)。注意，矢量虽有大小和方向，但没有定位：一个从华盛顿向北 4mile 的位移和一个从巴尔的摩向北 4mile 的位移由同样的矢量表示(当然，我们忽略了地球的曲率)。因此，在画图时，你可以移动一个矢量，只要不改变它的方向和长度。

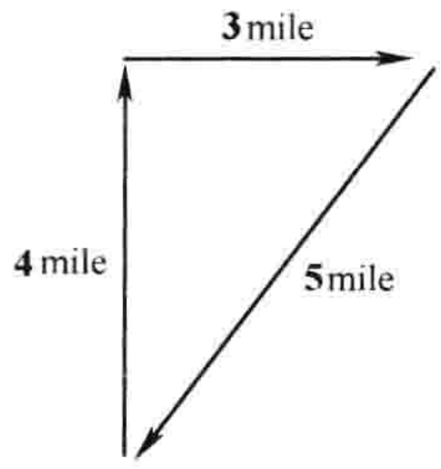


图　1.1

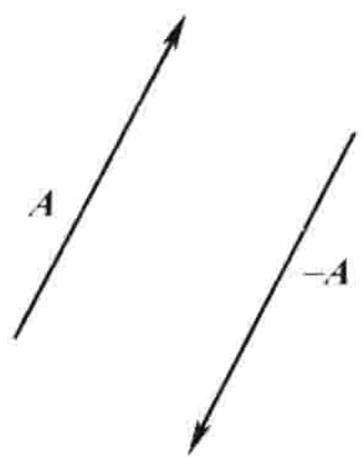


图　1.2

我们定义四种矢量操作：加法和三种乘法。

(i) 两矢量相加。把 ***B*** 的尾与 ***A*** 的头放在一起；两者相加 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是一个从 ***A*** 的尾到 ***B*** 的头的矢量(见图 1.3)。(这个规则是两个位移结合的推广)加法满足交换律：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$

先向东 3mile 然后再向北 4mile 与先向北 4mile 然后再向东 3mile 最后到达的位置是一样的。加法也满足结合律：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

减去一个矢量等于加上它的相反矢量(见图 1.4)：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

⊖　英里(mile)是非法定计量单位；1mile = 1609.344m。——译者注

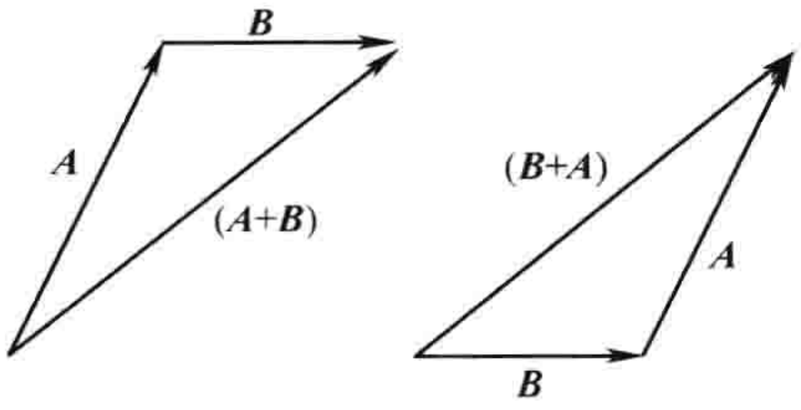


图 1.3

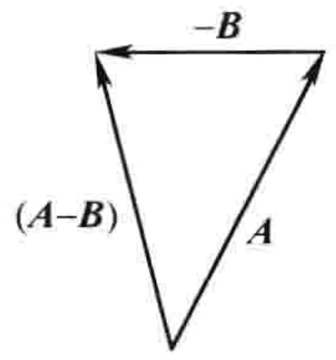


图 1.4

(ii) 标量与矢量相乘。一个正值标量 a 与矢量相乘，是把矢量的模与 a 相乘，但是方向不变(见图 1.5)(如果 a 是负的，矢量的方向逆转)。标量与矢量相乘满足分配率：

$$a(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=a\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{B}$$

(iii) 两个矢量的点积。两个矢量点积的定义为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\equiv AB\cos\theta \tag{1.1}$$

式中，θ 是两个矢量的尾部放在一起时它们之间的夹角(见图 1.6)。注意，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 是一个标量(所以又称为标量积)。点积满足交换率

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

和分配率

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.2}$$

几何上，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 是 A 乘以 $\boldsymbol{B}$ 沿 $\boldsymbol{A}$ 方向的投影(或 B 乘以 $\boldsymbol{A}$ 沿 $\boldsymbol{B}$ 方向的投影)。如果两矢量是平行的，则有 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB$。特别是，对任何矢量 $\boldsymbol{A}$ 都有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A^2 \tag{1.3}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是垂直的，则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$。

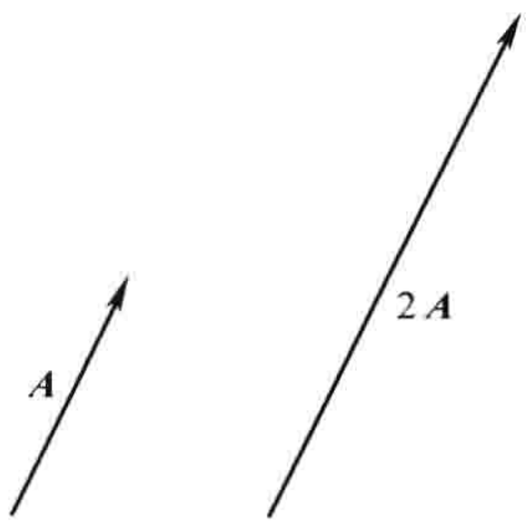


图 1.5

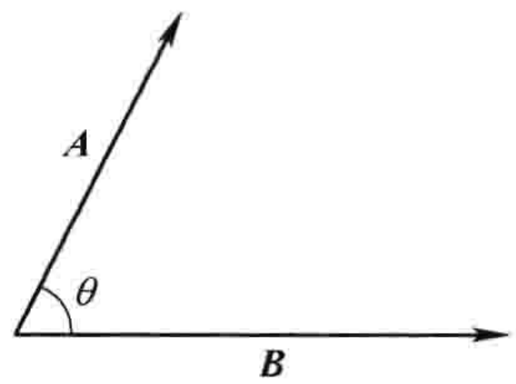


图 1.6

例题 1.1

设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$(见图 1.7)，计算 $\boldsymbol{C}$ 与它自己的点积。

解：

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}$$

或

$$C^2=A^2+B^2-2AB\cos\theta$$

这正是余弦定理。

(iv) 两个矢量的叉积。两个矢量叉积的定义为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\equiv AB\sin\theta\hat{\boldsymbol{n}} \tag{1.4}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是一个垂直于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 组成的平面的**单位矢量**(长度为 1 的矢量)。[我们将用一个帽标(^)表示单位矢量。]当然，垂直任何平面都有两个方向："指进"和"指出"。我们用右手定则来消除这个不确定：让你的四指指向第一个矢量的方向，然后(沿小角度)弯向第二个矢量的方向，这时大拇指所指方向就是 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的方向。(在图 1.8 中，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 指向纸面内，$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 指出纸面外。)注意，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 本身是一个矢量(所以又称为矢量积)。叉积满足分配率：

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{1.5}$$

但是不满足交换率。事实上有

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) \tag{1.6}$$

几何上，$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$ 是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 生成的平行四边形的面积(见图 1.8)。如果两个矢量平行，它们的叉积为零。特别地，对任何矢量 $\boldsymbol{A}$ 都有

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$$

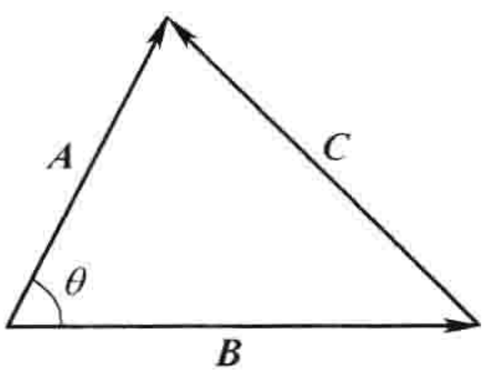


图　1.7

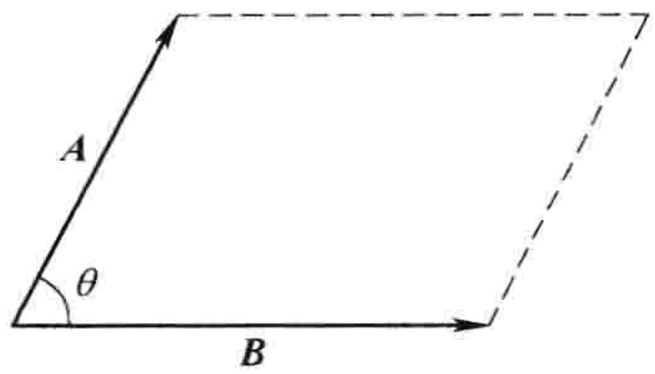


图　1.8

习题 1.1　利用式(1.1)和式(1.4)及适当的作图，证明点积和叉积满足分配率，

a) 当三个矢量在同一个平面内。

b) 一般情况。

习题 1.2　叉积满足结合率吗？即

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}\overset{?}{=}\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$$

如果满足，请证明它，如果不满足，给出一个反例。

1.1.2　矢量代数：分量形式

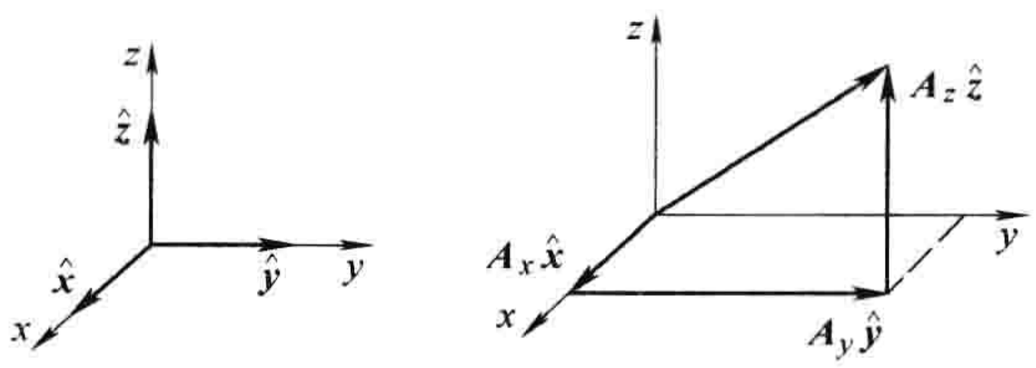
在上一节我们以一种"抽象"的形式定义了四种矢量操作(加法、标乘、点积和叉积)，即没有选用任何坐标系。实际中，若选用直角坐标系 x，y，z，用矢量的分量来计算会更方便一些。设 $\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$ 为分别平行于 x，y，z 坐标轴的单位矢量(见图 1.9a)。一个任意矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以用这三个基矢量表示为(见图 1.9b)：

$$\boldsymbol{A}=A_x\hat{\boldsymbol{x}}+A_y\hat{\boldsymbol{y}}+A_z\hat{\boldsymbol{z}}$$

A_x，A_y，A_z 称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的分量；几何上，它们是 $\boldsymbol{A}$ 沿三个坐标轴的投影。我们可以重新把四种矢量操作中的每一个表示为分量形式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&=(A_x\hat{\boldsymbol{x}}+A_y\hat{\boldsymbol{y}}+A_z\hat{\boldsymbol{z}})+(B_x\hat{\boldsymbol{x}}+B_y\hat{\boldsymbol{y}}+B_z\hat{\boldsymbol{z}})\\&=(A_x+B_x)\hat{\boldsymbol{x}}+(A_y+B_y)\hat{\boldsymbol{y}}+(A_z+B_z)\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned} \tag{1.7}$$

(i) 规则：矢量相加，把对应分量相加。



a) b)

图 1.9

$$a\boldsymbol{A} = (aA_x)\hat{\boldsymbol{x}} + (aA_y)\hat{\boldsymbol{y}} + (aA_z)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.8}$$

(ii) 规则：矢量与标量相乘，把每一个分量与标量相乘。

由于 $\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$ 是相互垂直的单位矢量，所以

$$\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} = 1;\ \hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} = 0 \tag{1.9}$$

这样有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}})\cdot(B_x\hat{\boldsymbol{x}} + B_y\hat{\boldsymbol{y}} + B_z\hat{\boldsymbol{z}})\\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\end{aligned} \tag{1.10}$$

(iii) 规则：计算点积时，把对应分量两两相乘后再相加在一起。

特别有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

所以

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.11}$$

(这是勾股定理在三维情况下的推广。)注意，$\boldsymbol{A}$ 与任何单位矢量的点积是 $\boldsymbol{A}$ 沿这个单位矢量的投影(所以 $\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} = A_x$，$\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{y}} = A_y$，$\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} = A_z$)。

类似地，有[⊖]

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{z}} = 0\\ &\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{y}} = -\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{z}}\\ &\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{z}} = -\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{x}}\\ &\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{x}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{y}}\end{aligned} \tag{1.12}$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}})\times(B_x\hat{\boldsymbol{x}} + B_y\hat{\boldsymbol{y}} + B_z\hat{\boldsymbol{z}})\\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\boldsymbol{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\boldsymbol{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned} \tag{1.13}$$

这个有点繁杂的公式可以用行列式表示得更简洁：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1.14}$$

⊖ 这对右手系成立(x 轴从纸面指出，y 轴向右，z 轴向上，或者是由它们任意转动形成的坐标系)。对左手系(z 轴向下)，所给式子将反号，例如 $\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{y}} = -\hat{\boldsymbol{z}}$ 等，我们将仅用右手系。

(iv) 规则：在计算叉积时，构造一个行列式，第一行是 $\hat{x}$，$\hat{y}$，$\hat{z}$，第二行是 A 的分量，第三行是 B 的分量。

例题 1.2

求出一立方体两面对角线之间的夹角。

解：设立方体边长为 1，如图 1.10 所示，把一个角放在坐标原点。面对角线 A，B 可表示为

$$A = 1\hat{x} + 0\hat{y} + 1\hat{z};\quad B = 0\hat{x} + 1\hat{y} + 1\hat{z}$$

一方面，以分量形式：

$$A \cdot B = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

另一方面，以“抽象”形式：

$$A \cdot B = AB\cos\theta = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\theta = 2\cos\theta$$

所以

$$\cos\theta = 1/2，\text{或者 } \theta = 60°$$

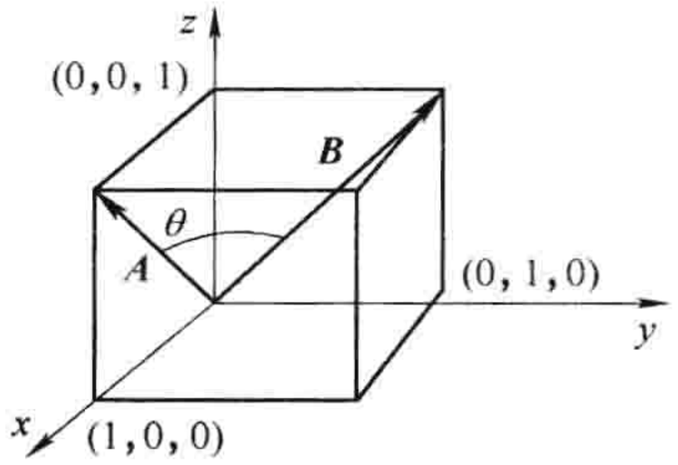


图　1.10

当然，你也可以在顶面上画出连接 A，B 头部的另一条面对角线，形成一个等边三角形，更容易得到结果。但是，如果所给几何体不是如此简单，用比较分量与抽象形式得到夹角的方法更为简洁。

习题 1.3　求出立方体体对角线之间的夹角。

习题 1.4　利用叉积求出垂直于如图 1.11 所示平面的单位矢量 n 的分量。

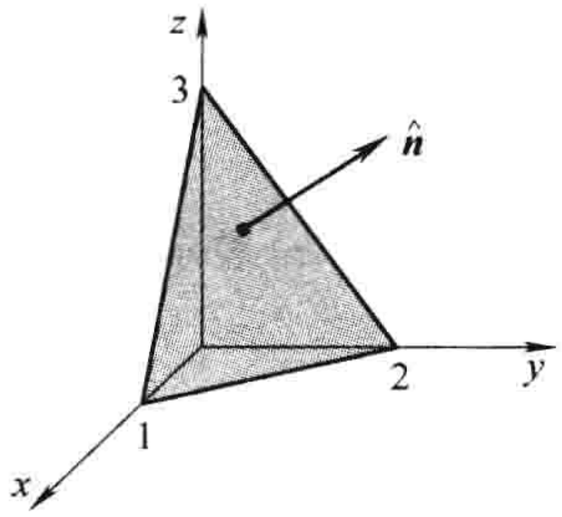


图　1.11

1.1.3　三重积

由于两个矢量的叉积自身是一个矢量，它可以通过点积或叉积与第三个矢量形成三重积。

(i) 标量三重积：$A \cdot (B \times C)$。几何上，$|A \cdot (B \times C)|$ 是由 A，B 和 C 生成的平行六面体的体积，因为 $|B \times C|$ 是平行六面体基底的面积，$|A\cos\theta|$ 是它的高(见图 1.12)。显然有

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \qquad (1.15)$$

因为它们都对应着同一个平行六面体。注意式(1.15)是按“字母”顺序轮换的——考虑到式(1.6)，不按“字母”顺序的三重积为

$$A \cdot (C \times B) = B \cdot (A \times C) = C \cdot (B \times A)$$

与式(1.15)有相反的符号。以分量的形式表示为

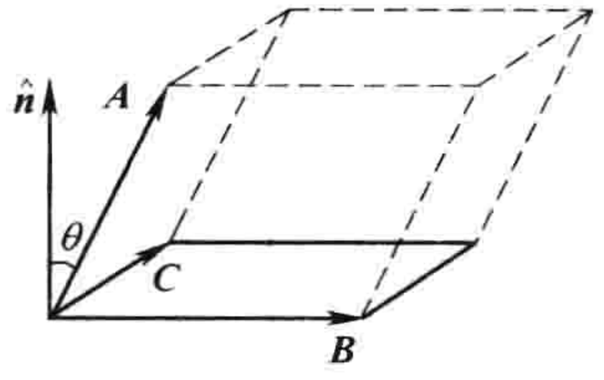


图　1.12

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix} \tag{1.16}$$

注意，点积和叉积是可交换的：

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$$

这可直接由式(1.15)得出，但是括弧的位置非常关键：$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 是一个无意义的表示——你无法让一个标量和一个矢量形成叉积。

(ii) 矢量三重积： $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。矢量三重积可由所谓的 $\boldsymbol{BAC}-\boldsymbol{CAB}$ 规则化简：

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.17}$$

注意

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})$$

是另一个完全不同的矢量。顺便提及，更高次的矢量积都可以用类似的方法，即反复应用式(1.17)化简，所以没有必要给出含有两个以上叉积的表示式。例如，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})&=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\\ \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}))&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}))-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\end{aligned} \tag{1.18}$$

习题 1.5 把式(1.17)两边以分量形式写出来证明 $\boldsymbol{BAC}-\boldsymbol{CAB}$ 规则。

习题 1.6 证明：

$$[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]+[\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})]+[\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})]=0。$$

在什么条件下有 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$?

1.1.4 位置、位移与间隔矢量

三维中的一个点可由它的直角坐标$(x,\ y,\ z)$表示。从坐标原点指向这个点的矢量称为**位置矢量**(见图 1.13)：

$$\boldsymbol{r}\equiv x\,\hat{\boldsymbol{x}}+y\,\hat{\boldsymbol{y}}+z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.19}$$

以后我们总用 $\boldsymbol{r}$ 表示位置矢量。它的大小

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1.20}$$

是到原点的距离，

$$\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{x\,\hat{\boldsymbol{x}}+y\,\hat{\boldsymbol{y}}+z\,\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1.21}$$

是沿径向向外的单位矢量。从$(x,\ y,\ z)$到$(x+\mathrm{d}x,\ y+\mathrm{d}y,\ z+\mathrm{d}z)$的**无限小位移矢量**是

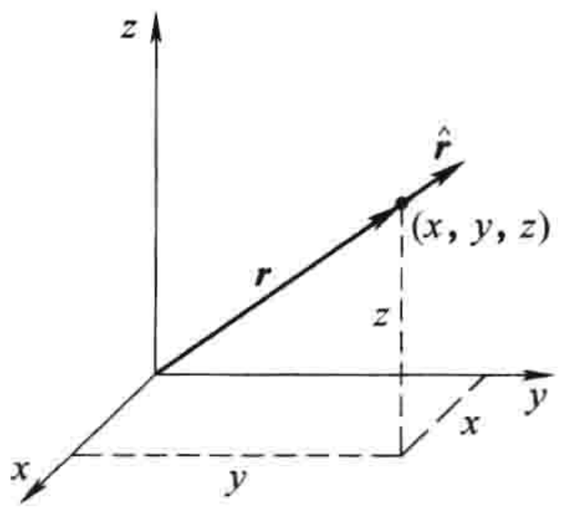


图 1.13

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\,\hat{\boldsymbol{x}}+\mathrm{d}y\,\hat{\boldsymbol{y}}+\mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.22}$$

(我们可以称它为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，因为这正是它的含义，不过为无限小位移保留一个特别字符还是有用的。)

在电动力学中我们会经常遇到涉及两点的问题——典型的有，一个源点，$\boldsymbol{r}'$，即电荷所处的位置，及场点，$\boldsymbol{r}$，这是我们要计算电场和磁场的地方(见图 1.14)。很值得在一开始就引入一个表示从源点到场点的**间隔矢量**，我们用斜体字母 $\mathcal{r}$ 表示，即

$$\mathcal{r}\equiv\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}' \tag{1.23}$$

它的大小是

$$\mathcal{r}\equiv|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\,| \tag{1.24}$$

沿 $\boldsymbol{r}$ 到 $\boldsymbol{r}'$ 的单位矢量是

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} = \frac{\boldsymbol{\imath}}{\imath} = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{1.25}$$

在直角坐标系中，

$$\boldsymbol{\imath} = (x - x')\hat{\boldsymbol{x}} + (y - y')\hat{\boldsymbol{y}} + (z - z')\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.26}$$

$$\imath = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \tag{1.27}$$

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} = \frac{(x - x')\hat{\boldsymbol{x}} + (y - y')\hat{\boldsymbol{y}} + (z - z')\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \tag{1.28}$$

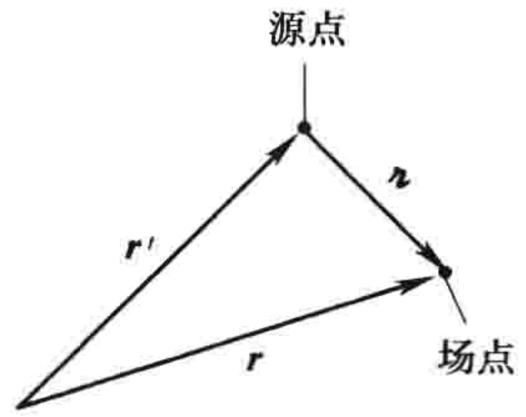


图　1.14

（由此你可以体会到使用这个简短标记的好处）。

习题 1.7　求出从源点(2，8，7)到场点(4，6，8)的间隔矢量 $\boldsymbol{\imath}$，给出它的大小 $\imath$，构造单位矢量 $\hat{\boldsymbol{\imath}}$。

1.1.5　矢量变换

定义一个矢量是一个具有方向和大小的量并不是完全令人满意的：方向的确切含义是什么？[⊖]这听起来有点玄学的味道，但是我们很快会遇到一类很像矢量的微商，我们想确定它们究竟是不是矢量。你可能会说，只要具有三个分量，并且在做加法时适当地合并，就是一个矢量。那么好吧，想一想如下问题：假设我们有一桶水果，里面有 N_x 个梨，N_y 个苹果，N_z 个香蕉。$\boldsymbol{N} = N_x\hat{\boldsymbol{x}} + N_y\hat{\boldsymbol{y}} + N_z\hat{\boldsymbol{z}}$ 是一个矢量吗？它有三个分量，当你与装有 M_x 个梨、M_y 个苹果、M_z 个香蕉的另一桶水果相加，结果是 $(N_x + M_x)$ 个梨，$(N_y + M_y)$ 个苹果，$(N_z + M_z)$ 个香蕉，这同矢量相加确实很像。但是在物理的意义上它显然不是矢量，因为它根本没有方向。错误出在什么地方呢？

答案是，当你变换坐标系时，$\boldsymbol{N}$ 不能够正确地像一个矢量那样变换。当然，我们用来描述位置的坐标系是完全任意的，但是，当从一个坐标系变换到另一个坐标系时，矢量的分量有着特定的变换规律。假设 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 系是相对于 (x, y, z) 系绕共同轴 $x = \bar{x}$ 一个角度 ϕ 得到的，由图 1.15 得

$$A_y = A\cos\theta,\quad A_z = A\sin\theta$$

而

$$\begin{aligned}
\bar{A}_y &= A\cos\bar{\theta} = A\cos(\theta - \phi) = A(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) \\
&= \cos\phi A_y + \sin\phi A_z \\
\bar{A}_z &= A\sin\bar{\theta} = A\sin(\theta - \phi) = A(\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi) \\
&= -\sin\phi A_y + \cos\phi A_z
\end{aligned}$$

我们可以用矩阵形式表示这些结果：

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_y \\ \bar{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

更一般地，对三维空间绕一个任意轴的转动，变换规律为

⊖　这一节可以跳过而不影响课文的连贯性。

$$\begin{pmatrix}\bar{A}_x\\ \bar{A}_y\\ \bar{A}_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{xx} & R_{xy} & R_{xz}\\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz}\\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix} \tag{1.30}$$

或者，更紧凑地，

$$\bar{A}_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}A_j \tag{1.31}$$

这里指标 1 对应 x，2 对应 y，3 对应 z。当给定转动轴后，$\boldsymbol{R}$ 的矩阵元可由上面确定绕 x 转动的几何方法确定。

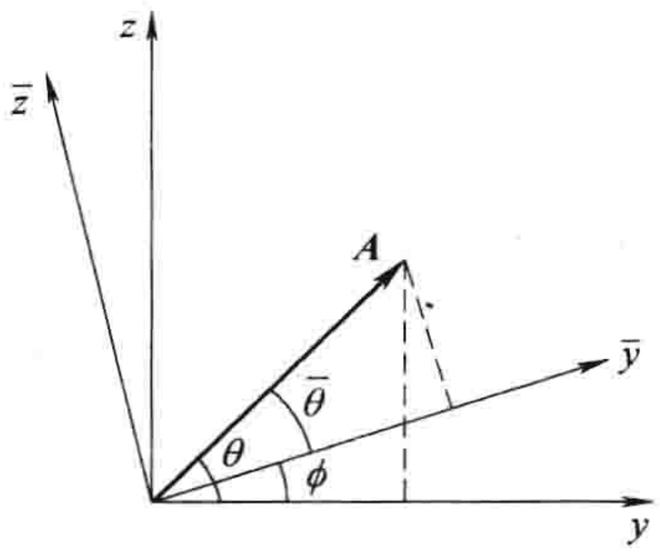


图 1.15

现在，$\boldsymbol{N}$ 的分量是按这种方式变换的吗？当然不是——它与你选用什么坐标系表示空间位置无关，无论用什么坐标系，桶里的苹果数目是不变的。你不能由选择不同的坐标轴把梨变为香蕉，但是你可以把 A_x 转换为 $\bar{A}_y$。实质上，一个矢量是，当变换坐标系时它的三个分量与位移矢量具有同样的变换方式。位移矢量是所有矢量的样本。

顺便指出，一个(二阶)张量是一个具有 9 个分量 T_{xx}，T_{xy}，T_{xz}，T_{yx}，…，T_{zz} 的量，它的变换有两个 R 因子：

$$\begin{aligned}\bar{T}_{xx} = {} & R_{xx}(R_{xx}T_{xx}+R_{xy}T_{xy}+R_{xz}T_{xz})\\ & +R_{xy}(R_{xx}T_{yx}+R_{xy}T_{yy}+R_{xz}T_{yz})\\ & +R_{xz}(R_{xx}T_{zx}+R_{xy}T_{zy}+R_{xz}T_{zz})\cdots\end{aligned}$$

或者，更紧凑地，

$$\bar{T}_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} R_{ik}R_{jl}T_{kl} \tag{1.32}$$

更一般地，一个 n 阶张量有 n 个指标和 3^n 个分量，变换有 n 个 R 因子。以这种分法，矢量是 1 阶张量，标量是 0 阶张量。

习题 1.8

(a) 证明点积在二维转动矩阵变换[式(1.29)]下是不变的(即证明 $\bar{A}_y\bar{B}_y+\bar{A}_z\bar{B}_z=A_yB_y+A_zB_z$)。

(b) 为使矢量 $\boldsymbol{A}$ 的长度在变换下保持不变(对所有矢量 $\boldsymbol{A}$)，三维转动矩阵元(R_{ij})[式(1.30)]必须受到什么限制？

习题 1.9 求出绕通过原点和点(1，1，1)的轴转动 120°的变换矩阵 $\boldsymbol{R}$。假设你从点(1，1，1)向原点看，转动是顺时针的。

习题 1.10

(a) 在坐标变换($\bar{x}=x$，$\bar{y}=y-a$，$\bar{z}=z$)下(见图 1.16a)，矢量的分量是如何变换的？

(b) 在坐标逆变换($\bar{x}=-x$，$\bar{y}=-y$，$\bar{z}=-z$)下(见图 1.16b)，矢量的分量是如何变换的？

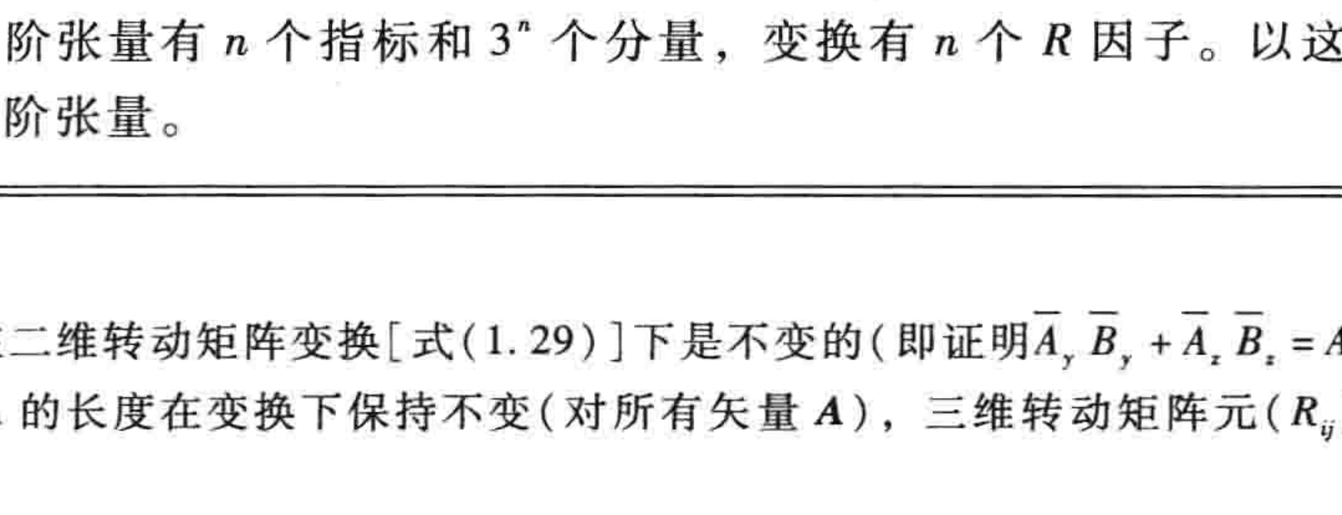


图 1.16

(c) 在坐标逆变换下，两个矢量的叉积是如何变换的？(由于这个“反常”行为，两个矢量叉积所形成

的矢量称为赝矢量)两个赝矢量的叉积是一个矢量，还是一个赝矢量？给出力学中的两个赝矢量。

(d) 在坐标逆变换下标量三重积如何？(这样的标量称为赝标量。)

1.2　微分运算

1.2.1　普通导数

问题：假定我们有一个单变量函数 $f(x)$，它的导数 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 可以为我们做什么？答案：它告诉我们，当我们使自变量 x 有一个很小的改变 $\mathrm{d}x$ 时，$f(x)$ 的变化有多快：

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x \tag{1.33}$$

换种说法：如果我们使 x 变化 $\mathrm{d}x$，则 f 的变化为 $\mathrm{d}f$；导数是比例因子。例如，在图 1.17a 中，函数随 x 的变化很缓慢，相应的导数较小。在图 1.17b 中，f 随 x 的增加很快，相应的导数较大。

几何解释：导数 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 是 f 对 x 图形的斜率。

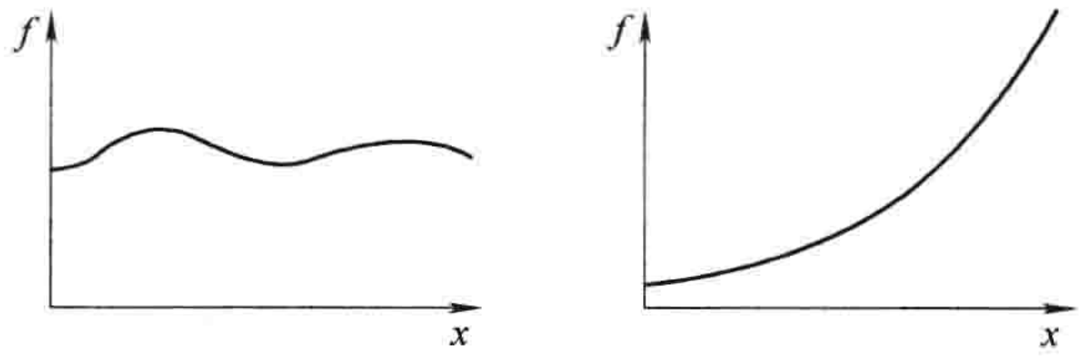


图　1.17

1.2.2　梯度

假定现在我们有一个三变量函数——比如，一个屋子里的温度 $T(x, y, z)$。(以一个屋角为原点建立坐标系，则对屋内任何一点 (x, y, z)，T 给出此点的温度。)我们想把单变量函数“导数”的概念推广到 T 这类三变量函数。

如果我们移动一个小距离，导数应该告诉我们函数变化得有多快。但是现在情况变得更复杂了，因为这依赖于我们移动的方向：如果我们竖直向上走，温度也许会增加很快，但是，如果我们水平移动，温度可能没有什么变化。事实上，“温度 T 变化有多快”的答案有无限多个，对每个我们想探查的方向都有一个答案。

幸运的是，问题并不像它看起来那样糟糕。一个偏导数的定理指出

$$\mathrm{d}T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\mathrm{d}z \tag{1.34}$$

这个定理说明，当我们使所有三个变量分别改变无限小量 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ 时 T 是如何变化的。注意，我们并不需要无限多个导数——三个分别沿坐标方向的偏导数就足够了。

式(1.34)可写为点积的形式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}T &= \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)\cdot(\mathrm{d}x\,\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\,\hat{\boldsymbol{y}} + \mathrm{d}z\,\hat{\boldsymbol{z}}) \\ &= (\nabla T)\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{l})\end{aligned} \tag{1.35}$$

式中，

$$\nabla T \equiv \frac{\partial T}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.36}$$

是 T 的梯度。∇T 是一个具有三个分量的矢量，它是单变量函数导数的推广。式(1.35)是式(1.33)在三维情况下的推广。

梯度的几何解释：同任何矢量一样，梯度有大小和方向。为看出它的几何意义，我们把点积式(1.35)重新写为抽象形式

$$dT = \nabla T \cdot d\boldsymbol{l} = |\nabla T||d\boldsymbol{l}| \cos\theta \tag{1.37}$$

式中，θ 是∇T 与 $d\boldsymbol{l}$ 之间的夹角。现在我们固定 $|d\boldsymbol{l}|$ 的大小来考察 dT 随方向的变化(变化 θ)，显然 T 的最大变化发生在 $\theta = 0(\cos\theta = 1)$ 处。这表明，在固定 $|d\boldsymbol{l}|$ 时，当我们沿∇T 方向移动时 dT 最大，也就是说，

梯度∇T 所指方向是函数 T 有最大增加的方向。

进一步有

$|\nabla T|$ 给出沿这个最大增加方向的斜率(增加速率)。

假设你站在一个山坡上四处遥望，发现了最陡的地方，这就是梯度的方向。现在测量沿这个方向的斜率，这就是梯度的大小。(这里我们讨论的函数是山的高度，自变量是位置——比如说纬度和经度。这个函数仅依赖两个变量，而不是三个，梯度的几何意义用这种二维图示更容易理解。)注意，由式(1.37)知，最大减小的方向与最大增加的方向相反，而当 $\theta = 90°$时，斜率为零(梯度垂直于等值线)。你可以想象存在不具有这些性质的表面，但是它们一定有折点，对应着不可微分的函数。

梯度为零意味着什么？如果在点(x, y, z) $\nabla T = 0$，则对此点很小的位移有 $dT = 0$。故它是函数 $T(x, y, z)$的稳定点。它可以是极大点(山顶)，也可以是极小点(山谷)，或鞍点(对某个方向是最大点，对另外的方向是最小点)，或“肩点”(上升或下降中的平坦处)。这同单变量函数的情况类似，导数为零处标志极大、极小或平直。特别是，如果你想求出三变量函数的极值点，则令它的梯度为零。

例题 1.3

求出 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$(位置矢量的大小)的梯度。

解：

$$\begin{aligned}\nabla r &= \frac{\partial r}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= \frac{x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \hat{\boldsymbol{r}}\end{aligned}$$

这有意义吗？当然有，它表明距原点的距离在径向方向增加得最快，在这个方向的增加速率是 1，正如我们预期的那样。

习题 1.11 求出下列函数的梯度：

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$。

(b) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$。

(c) $f(x, y, z) = e^x \sin(y)\ln(z)$。

习题 1.12 某座山各处的高度(以英尺[⊖]计量)由函数

⊖ 1ft = 0.3048m。——译者注

$$h(x,\ y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12)$$

给出，式中 x 是距南哈德利以东的距离，y 是距它以北的距离(以 mile 为单位)。

(a) 山顶处以何处?

(b) 山的高度是多少?

(c) 在距南哈德利东 1mile，北 1mile 的点的斜率是多少(以英尺/英里表示)? 在哪一点，什么方向的斜率最大?

· 习题 1.13　设 $\boldsymbol{\mathcal{r}}$ 是从固定点 (x', y', z') 到点 (x, y, z) 的间隔矢量，$\mathcal{r}$ 是它的长度。证明:

(a) $\boldsymbol{\nabla}(\mathcal{r}^2) = 2\boldsymbol{\mathcal{r}}$。

(b) $\boldsymbol{\nabla}(1/\mathcal{r}) = -\dfrac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{r}}}}{\mathcal{r}^2}$。

(c) $\boldsymbol{\nabla}(\mathcal{r}^n)$ 的一般表示是什么?

! 习题 1.14　设 f 仅是两个变量 (y, z) 的函数。证明在转动变换式(1.29)下梯度 $\boldsymbol{\nabla} f = (\partial f/\partial y)\hat{\boldsymbol{y}} + (\partial f/\partial z)\hat{\boldsymbol{z}}$ 的变换满足矢量变换规律。[提示:$(\partial f/\partial \bar{y}) = (\partial f/\partial y)(\partial y/\partial \bar{y}) + (\partial f/\partial z)(\partial z/\partial \bar{y})$，对 $\partial f/\partial \bar{z}$ 有类似公式。我们知道 $\bar{y} = y\cos\phi + z\sin\phi$，$\bar{z} = -y\sin\phi + z\cos\phi$;由此求出 y，z(作为 $\bar{y}$，$\bar{z}$ 的函数)，计算出 $\partial y/\partial \bar{y}$，$\partial z/\partial \bar{y}$ 等。]

1.2.3　∇算子

梯度的形式看起来像一个矢量，好像是∇与一个标量 T“相乘”:

$$\boldsymbol{\nabla} T = \left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)T \tag{1.38}$$

(现在我们把单位矢量写在求导号的左边，省得在右边时有人会误认为是 $\partial\hat{\boldsymbol{x}}/\partial x$ 等，实际上，由于 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 等是常矢量，$\partial\hat{\boldsymbol{x}}/\partial x = 0, \cdots$)式(1.38)中圆括号中的量称为“德尔(del)”:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}} \tag{1.39}$$

当然，∇并不是通常意义下的矢量。的确，除非我们把它作用在一个函数上，否则它没有特定的含义。另外，它也不是与 T“相乘”，而是求导数的一种表示。为了更精确起见，我们称∇是对 T 作用的一个矢量算子，而不是与 T 相乘的一个矢量。

尽管有了这样的限定，∇实际上在很多方面都像一个矢量;如果我们把“相乘”变成“作用”，几乎所有适用于矢量的规则也都适用于∇。所以务必要认真对待∇的矢量特征:它是符号简化的奇迹，如果你读过麦克斯韦没有使用∇写作的关于电磁学的原始著作，你就会深感它的好处。

一个普通矢量有三种乘法:

1. 与一个标量 a 相乘:$\boldsymbol{A}a$;

2. 通过点积与另一个矢量 $\boldsymbol{B}$ 相乘:$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$;

3. 通过叉积与另一个矢量 $\boldsymbol{B}$ 相乘:$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$。

相应地，∇也有三种作用方式:

1. 作用在一个标量函数 T 上:$\boldsymbol{\nabla}T$(梯度);

2. 通过点积形式作用在一个矢量函数 $\boldsymbol{v}$ 上:$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$(散度);

3. 通过叉积形式作用在一个矢量函数 $\boldsymbol{v}$ 上:$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$(旋度)。

我们已经讨论了梯度。在下面我们考察另外两种矢量导数:散度和旋度。

1.2.4　散度

由∇的定义我们可构造散度:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}}\right) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1.40}$$

显然，一个矢量函数$\boldsymbol{v}$的散度$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$是一个标量(一个标量函数的散度是无意义的)。

几何解释：散度这个名字是精心选择的，因为$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$是矢量场$\boldsymbol{v}$在所给点散出的量度。例如，图1.18a所给矢量函数有较大的(正值)散度(如果箭头内指，它将有较大的负值散度)，图1.18b所给函数的散度为零，图1.18c所给函数有正的散度(注意$\boldsymbol{v}$是一个函数——在空间每一点都安置着一个不同的矢量。当然，在图中，我们仅能在几个代表点画出矢量)。假设我们站在一个池塘边上，往水面上撒一些木屑或松木针。如果在一点它们扩散，这一点的散度为正，如果它们聚集，这一点的散度为负。[这个模型中矢量函数$\boldsymbol{v}$是水的速度——这是一个二维模型，但是它可以帮助我们感受散度的含义。具有正值散度的点称为源点(流出)，具有负值散度的点称为渊点(流入)。]

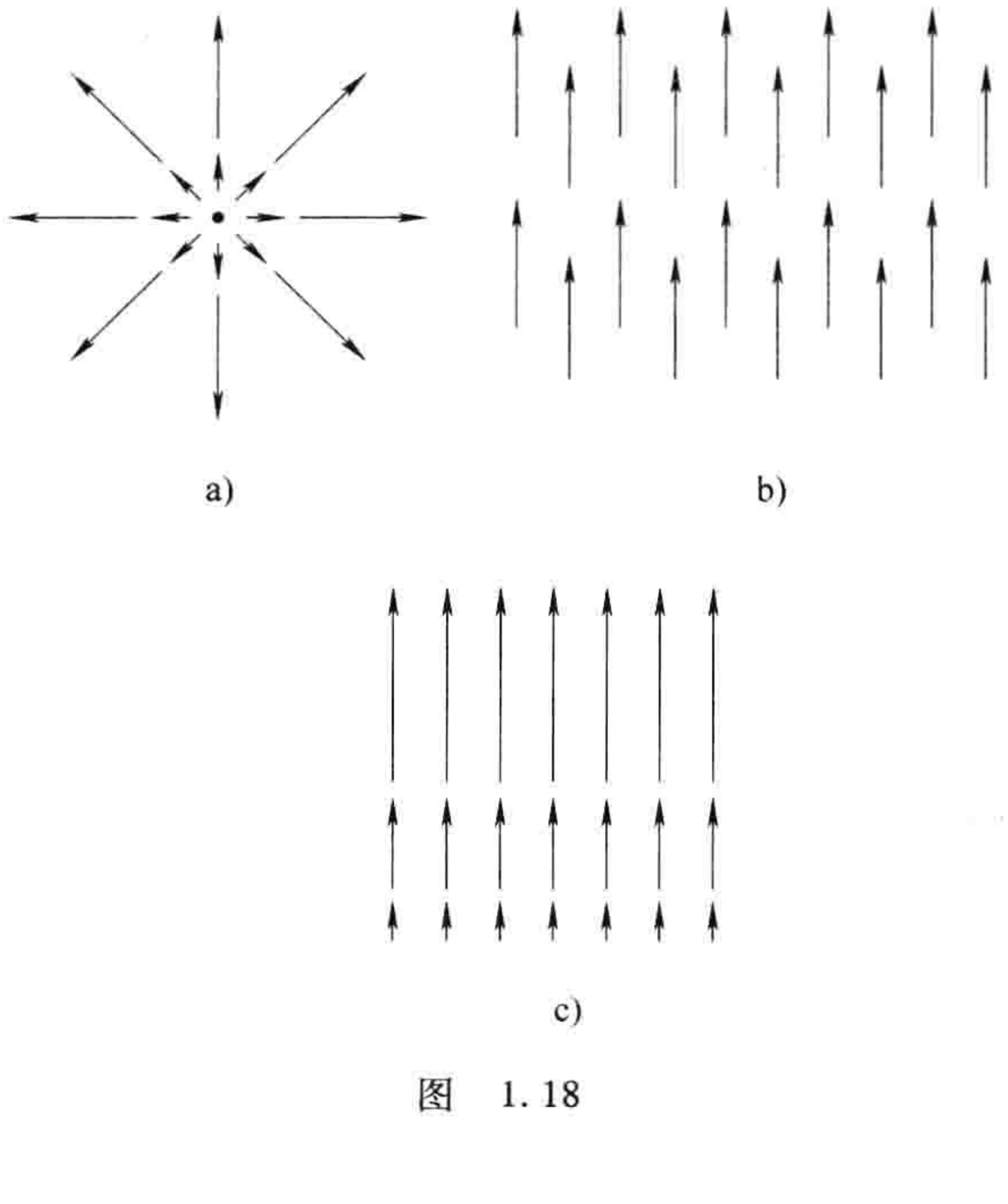


图 1.18

例题 1.4

设图1.18中的矢量函数为$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$，$\boldsymbol{v}_b = \hat{\boldsymbol{z}}$，$\boldsymbol{v}_c = z\hat{\boldsymbol{z}}$。计算它们的散度。

解：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_a = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

如预期的那样，这个函数有正的散度。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_b = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0 + 0 + 0 = 0$$

正如预期的那样。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_c = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 0 + 0 + 1 = 1$$

习题 1.15 计算下列矢量函数的散度：

(a) $\boldsymbol{v}_a = x^2\hat{\boldsymbol{x}} + 2xz^2\hat{\boldsymbol{y}} - 2xz\hat{\boldsymbol{z}}$。

(b) $\boldsymbol{v}_b = xy\hat{\boldsymbol{x}} + 2yz\hat{\boldsymbol{y}} + 3xz\hat{\boldsymbol{z}}$。

(c) $\boldsymbol{v}_c = y^2\hat{\boldsymbol{x}} + (2xy + z^2)\hat{\boldsymbol{y}} + 2yz\hat{\boldsymbol{z}}$。

· 习题 1.16 画出矢量函数

$$\boldsymbol{v} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

的草图，并计算出它的散度。结果可能会使你惊讶……你可以解释它吗？

！**习题 1.17**　对二维情况，证明在转动变换下散度的变换满足标量的变换规律。[提示：利用式(1.29)求出$\bar{v}_y$，$\bar{v}_z$，利用习题 1.14 的方法计算出散度。你的目标是证明$\partial\bar{v}_y/\partial\bar{y} + \partial\bar{v}_z/\partial\bar{z} = \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z$。]

1.2.5　旋度

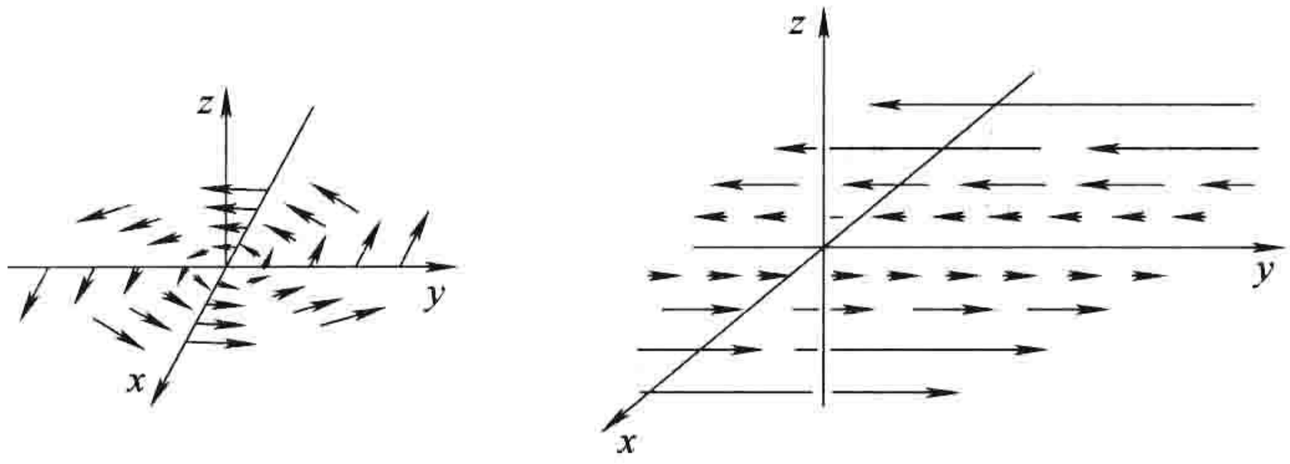
由∇的定义我们可构造旋度：

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{1.41}$$

$$= \hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

注意，一个矢量的旋度同任何叉积一样，仍然是一个矢量(标量的旋度没有意义)。

几何解释：旋度的名字也是精心选择的，因为$\nabla \times \boldsymbol{v}$是矢量场在所考虑点涡旋状态的量度。这样，图 1.18 所给的三个函数旋度都为零(你可以很容易验证这个)，而图 1.19 所给函数旋度不为零，由右手规则，旋度的方向为 z 轴方向。再次假设你站在一个池塘边，把一个小桨轮(一个软木塞沿径向插几个牙签就行)放在水面，如果它开始打转，此处的旋度就不为零。一个漩涡是有较大旋度的区域。



a)　　b)

图　1.19

例题 1.5

设图 1.19a 中所画的矢量函数为$\boldsymbol{v}_a = -y\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}}$，图 1.19b 中所画的矢量函数为$\boldsymbol{v}_b = x\hat{\boldsymbol{y}}$。计算它们的旋度。

解：

$$\nabla \times \boldsymbol{v}_a = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{\boldsymbol{z}}$$

和

$$\nabla \times \boldsymbol{v}_b = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{z}}$$

如预期的那样，旋度的方向为 $+z$ 方向(顺便指出，你可以从图中看出这两个函数的散度都为零：这两个函数没有“散出”，仅有“打漩”)。

习题 1.18 计算习题 1.15 中矢量函数的旋度。

习题 1.19 构造一个在任何点散度和旋度都为零的矢量函数。(当然，一个常矢量满足这些要求，不过请给出一个更有趣的矢量函数。)

1.2.6 积规则

普通导数的运算可由一些一般规则帮助进行，比如两个函数之和的求导规则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

函数与常数 k 乘积的求导规则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(kf)=k\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

两个函数乘积的求导规则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)=f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}+g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

以及一个函数除以一个函数的求导规则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}-g\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}{g^2}$$

对矢量导数也有类似的公式：

$$\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g,\ \nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$$
$$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

以及

$$\nabla(kf)=k\nabla f,\ \nabla\cdot(k\boldsymbol{A})=k(\nabla\cdot\boldsymbol{A}),\ \nabla\times(k\boldsymbol{A})=k(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

你们自己可以验证这些公式。不过，积规则就没有那么简单了。由两个矢量或标量去构造一个标量的方法有两种：

fg(两个标量函数的乘积)，

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$(两个矢量函数的点积)，

同样，有两种方法来构造一个矢量：

$f\boldsymbol{A}$(标量乘以矢量)，

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$(两个矢量的叉积)。

相应地，有六个积规则，对梯度有两个：

(i) $$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$$

(ii) $$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

对散度有两个：

(iii) $$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})=f(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\cdot(\nabla f)$$

(iv) $$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

对旋度有两个：

(v) $$\nabla\times(f\boldsymbol{A})=f(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\times(\nabla f)$$

(vi) $$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$$

我们将会经常使用这些公式，所以我把它们附在书后以便参考。这些公式的证明很容易从普通导数的积规则得出。例如，

$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}A_x + f\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}A_y + f\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}A_z + f\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$= (\nabla f) \cdot \boldsymbol{A} + f(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$$

也有三个关于矢量或标量除以一个标量的规则：

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{A}}{g}\right) = \frac{g(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla g)}{g^2}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{A}}{g}\right) = \frac{g(\nabla \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} \times (\nabla g)}{g^2}$$

不过，由于这些公式可以由对应的积规则得出，所以它们没被附在书后。

习题 1.20　证明积规则(i)，(iv)和(v)。

习题 1.21

(a) 如果 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是矢量函数，那么$(\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$ 的含义是什么？(即，以 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，∇的直角分量表示出$(\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$ 的直角分量形式。)

(b) 计算$(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla)\hat{\boldsymbol{r}}$，其中 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 是由式(1.21)定义的径向单位矢量。

(c) 对习题 1.15 中的矢量函数，计算$(\boldsymbol{v}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_b$。

习题 1.22　(仅对喜欢做题者)证明积规则(ii)和(vi)。参考习题 1.21$(\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$ 的定义。

习题 1.23　推导矢量或标量除以一个标量的三个规则。

习题 1.24

(a) 对矢量函数

$$\boldsymbol{A} = x\hat{\boldsymbol{x}} + 2y\hat{\boldsymbol{y}} + 3z\hat{\boldsymbol{z}};\quad \boldsymbol{B} = 3y\hat{\boldsymbol{x}} - 2x\hat{\boldsymbol{y}}$$

验证积规则(iv)(分别计算每一项)。

(b) 对积规则(ii)做同样的计算。

(c) 对(vi)做同样的计算。

1.2.7　二阶微分

梯度、散度和旋度仅是我们用∇构造的一次导数；通过作用∇两次我们可以构造 5 个特定的二次导数。梯度∇T 是个矢量，所以我们可以求它的散度和旋度：

(1) 梯度的散度：$\nabla \cdot (\nabla T)$

(2) 梯度的旋度：$\nabla \times (\nabla T)$

散度是一个标量——我们仅能再求它的梯度：

(3) 散度的梯度：$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})$

旋度$\nabla \times \boldsymbol{v}$ 是个矢量，所以我们可以求它的散度和旋度：

(4) 旋度的散度：$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v})$

(5) 旋度的旋度：$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v})$

这给出了所有的可能性，事实上并不是以上所有的 5 个都给出新东西。我们对它们作一下分析：

(1)

$$\nabla\cdot(\nabla T)=\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial T}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial T}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right)$$
$$=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{1.42}$$

这个公式我们简写为$\nabla^2 T$，称为 T 的**拉普拉斯**；我们将在后面详细讨论它。注意，一个标量的拉普拉斯仍然是一个标量。有时我们会用到一个矢量的拉普拉斯，$\nabla^2\boldsymbol{v}$，它是一个矢量，它的直角分量是 v_x 的拉普拉斯：[⊖]

$$\nabla^2\boldsymbol{v}\equiv(\nabla^2 v_x)\hat{\boldsymbol{x}}+(\nabla^2 v_y)\hat{\boldsymbol{y}}+(\nabla^2 v_z)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.43}$$

这是∇^2 含义的一个直接扩展。

(2) 梯度的旋度总是为零：

$$\nabla\times(\nabla T)=0 \tag{1.44}$$

这是一个很重要的结果，我们会经常用到；由∇的定义式(1.39)很容易证明这个结果。请注意，也许你会认为式(1.44)很显然是对的——它不就是$(\nabla\times\nabla)T$ 吗？任何矢量(现在矢量为∇)与自身的叉积不都是零吗？这个说法很有想象力，但不够准确，因为∇是一个算子，它不是按通常的意义来“相乘”的。事实上，式(1.44)的证明的关键是交叉求导的相等性：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{1.45}$$

如果你认为我是过分挑剔，那么对下式验证你的直觉：

$$(\nabla T)\times(\nabla S)$$

它总为零吗？(当然，如果你用一个普通矢量代替两个括号中的∇，它将为零。)

(3) $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$由于某些理由在物理中应用很少，所以除了散度的梯度外也没有特殊的名称。注意，$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$和一个矢量的拉普拉斯不一样：$\nabla^2\boldsymbol{v}=(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\neq\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$。

(4) 旋度的散度同梯度的旋度一样，总是为零：

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})=0 \tag{1.46}$$

你自己可以证明它(利用矢量等式$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$，证明会非常简捷)。

(5) 由∇的定义可以验证

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-\nabla^2\boldsymbol{v} \tag{1.47}$$

所以旋度的旋度没有任何新东西；右边第一项正是(3)所给，第二项是一个矢量的拉普拉斯算子。(事实上，式(1.47)也常用来定义矢量的拉普拉斯算子，它比式(1.43)优越的地方在于，式(1.43)只能用于直角坐标系。)

综上所述，实际上仅有两类二次导数：拉普拉斯(非常重要)和散度的梯度(不常应用)。我们也同样可以讨论三次导数，不过很幸运，实际中二次导数几乎满足了所有的物理应用。

小结一下矢量求导运算：所有求导都是由∇生成的，必须认真对待它的矢量特征。在原则上，即使你仅记住了∇的定义，你也能够构造出所有的矢量求导公式。

习题 1.25 计算下列函数的拉普拉斯：

(a) $T_a=x^2+2xy+3z+4$。

(b) $T_b=\sin x\sin y\sin z$。

(c) $T_c=e^{-5x}\sin 4y\cos 3z$。

⊖ 在曲线坐标系中，单位矢量也是依赖位置的，对它们也必须求导(见 1.4.1 小节)。

(d) $\boldsymbol{v} = x^2\hat{\boldsymbol{x}} + 3xz^2\hat{\boldsymbol{y}} - 2xz\hat{\boldsymbol{z}}$。

习题 1.26　证明旋度的散度总是为零。用习题 1.15 中的函数$\boldsymbol{v}_a$验证。

习题 1.27　证明梯度的旋度总是为零。用习题 1.11 中的函数(b)验证它。

1.3　积分运算

1.3.1　线、面和体积分

在电动力学中我们会遇到几种不同种类的积分,其中比较重要的有线(或路径)积分、面(或通量)积分和体积分。

(a)线积分。线积分由下列形式表示

$$\int_{a\mathcal{P}}^{b} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.48}$$

式中,$\boldsymbol{v}$ 是一个矢量函数,$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是无限小位移矢量[式(1.22)],这个积分是沿着一个指定的路径 $\mathcal{P}$ 从 a 点到 b 点进行的(见图 1.20)。如果所求问题中的路径是闭合的(即 $a = b$),则将在积分号上放一个圆圈表示:

$$\oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.49}$$

在路径上的每一点我们取$\boldsymbol{v}$(在这一点取值)与从该点指向下一点的位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的点积。对物理学家而言,线积分最常见的例子是一个力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功:$W = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$。

一般而言,一个线积分的值依赖于从 a 点到 b 点路径的选择。有一类很重要的矢量函数,它们的线积分是不依赖于路径的,完全由积分的始末点来决定。后面我们将会学习这类特别的矢量(一个具有这种性质的力称为保守力)。

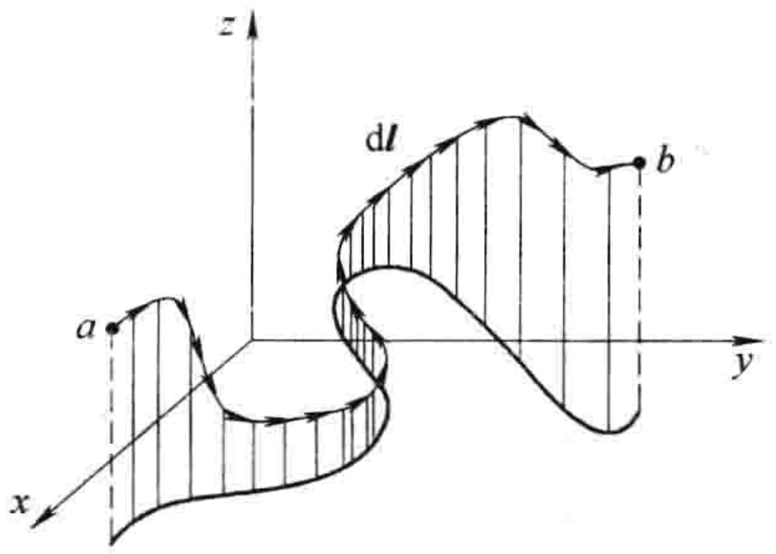


图　1.20

例题 1.6

分别沿着图 1.21 所给的两条路径(1)和(2)从点 $a = (1,1,0)$ 到点 $b = (2,2,0)$ 对函数$\boldsymbol{v} = y^2\hat{\boldsymbol{x}} + 2x(y+1)\hat{\boldsymbol{y}}$计算线积分。从点 a 到点 b 然后再回到点 a 的回路积分 $\oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是什么?

解:如所定义的那样,$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{y}} + \mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{z}}$。路径(1)含有两个部分。沿水平线段有 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$,所以

(i) $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{x}}$,$y = 1$,$\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = y^2\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$,所以 $\int \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_1^2 \mathrm{d}x = 1$。

沿竖直线段 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}z = 0$,所以

(ii) $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{y}}$,$x = 2$,$\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2x(y+1)\mathrm{d}y = 4(y+1)\mathrm{d}y$,所以

$$\int \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 4\int_1^2 (y+1)\mathrm{d}y = 10$$

所以沿路径(1)有

$$\int_a^b \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 1 + 10 = 11$$

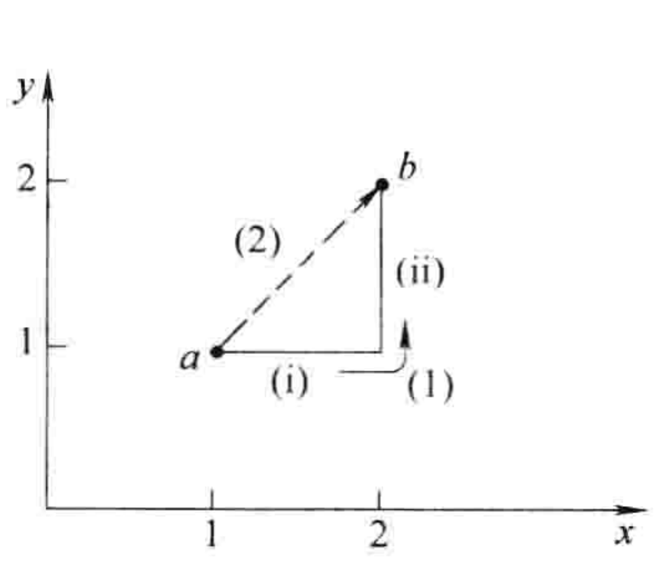


图　1.21

同样,对路径(2)有 $x=y$,$dx=dy$ 及 $dz=0$,所以

$$d\boldsymbol{l}=dx\hat{\boldsymbol{x}}+dy\hat{\boldsymbol{y}},\ \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}=x^2dx+2x(x+1)dx=(3x^2+2x)dx$$

所以

$$\int_a^b \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_1^2(3x^2+2x)dx=(x^3+x^2)\Big|_1^2=10$$

(这里所用的方法是把所有变量都表示为一个变量,由于在路径(2)上 $x=y$,我们可以把 y 都用 x 替代。)

对由路径(1)出发再由路径(2)返回的回路,则有

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}=11-10=1$$

(b)面积分。面积分由下列形式表示

$$\int_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a} \tag{1.50}$$

式中,$\boldsymbol{v}$ 是某个矢量函数;$d\boldsymbol{a}$ 是无限小面元,它的方向垂直于面元(见图 1.22)。当然,对任何面元都有两个(方向相反的)方向垂直它,所以面积分值的正负不很明确。如果面是闭合的,比如一个气球面,我们仍然用积分号上的一个圆圈表示它

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}$$

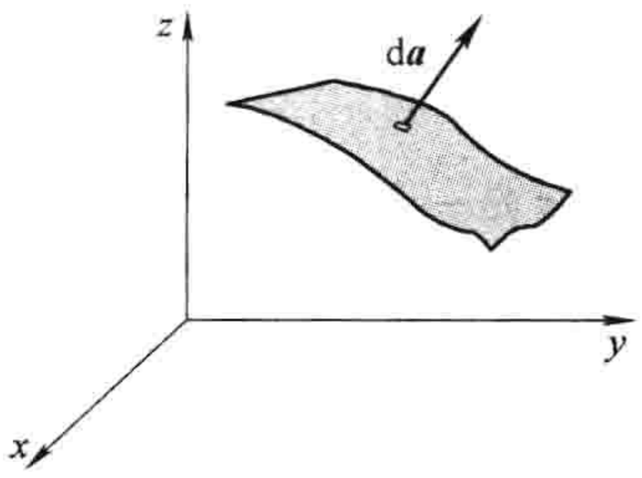


图 1.22

惯例规定,向外指的方向为正,但是对非闭合面,方向是任意的。如果$\boldsymbol{v}$ 表示一个流体的流密度(单位时间流过单位面积的质量),则 $\int \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}$ 表示单位时间通过被积面积的总质量——因此,有另外的名字“通量”。

一般来讲,面积分的值依赖所选择的面积,但是有一类特殊矢量,它们的面积分完全由被积面的边界围线所决定,而不依赖于面积的选择。我们很快将会遇到这类矢量。

例题 1.7

对于图 1.23 所示的立方体(边长为 2)的五个面(底面除外),对函数$\boldsymbol{v}=2xz\hat{\boldsymbol{x}}+(x+2)\hat{\boldsymbol{y}}+y(z^2-3)\hat{\boldsymbol{z}}$ 作面积分,如图中箭头所示,以外指和上指方向为正方向。

解:按图中标记,对每一面分别进行计算:

(i) $x=2$,$d\boldsymbol{a}=dydz\hat{\boldsymbol{x}}$,$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}=2xzdydz=4zdydz$,所以

$$\int \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}=4\int_0^2 dy\int_0^2 dz=16$$

(ii) $x=0$,$d\boldsymbol{a}=-dydz\hat{\boldsymbol{x}}$,$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}=-2xzdydz=0$,所以

$$\int \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}=0$$

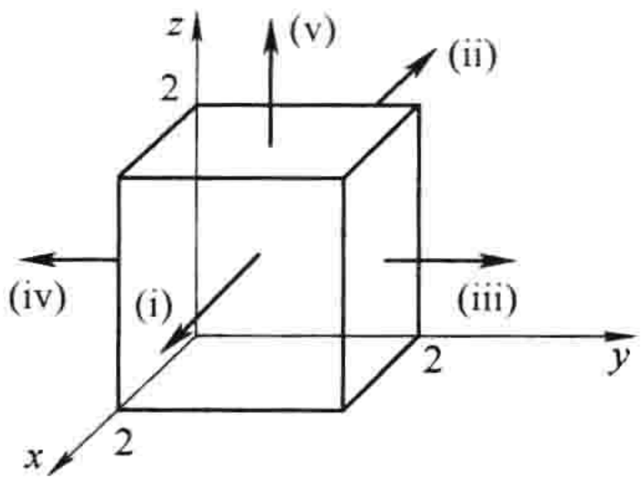


图 1.23

(iii) $y=2$,$d\boldsymbol{a}=dxdz\hat{\boldsymbol{y}}$,$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}=(x+2)dxdz$,所以

$$\int \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}=\int_0^2(x+2)dx\int_0^2 dz=12$$

(iv) $y=0$,$d\boldsymbol{a}=-dxdz\hat{\boldsymbol{y}}$,$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}=-(x+2)dxdz$,所以

$$\int \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}=-\int_0^2(x+2)dx\int_0^2 dz=-12$$

(v) $z=2$,$d\boldsymbol{a}=dxdy\hat{\boldsymbol{z}}$,$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}=y(z^2-3)dxdy=ydxdy$,

$$\int \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^2 y\mathrm{d}y = 4$$

显然总通量为

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 16 + 0 + 12 - 12 + 4 = 20$$

(c)体积分。体积分由下列形式表示

$$\int_V T\mathrm{d}\tau \tag{1.51}$$

式中，T 是一个标量函数，$\mathrm{d}\tau$ 是无限小体元。在直角坐标系中：

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1.52}$$

例如，如果 T 是一个物体的密度(它可以是逐点变化的)，则体积分给出这个物体的总质量。有时我们会遇到矢量函数的体积分：

$$\int \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau = \int (v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\hat{\boldsymbol{z}})\,\mathrm{d}\tau = \hat{\boldsymbol{x}}\int v_x\mathrm{d}\tau + \hat{\boldsymbol{y}}\int v_y\mathrm{d}\tau + \hat{\boldsymbol{z}}\int v_z\mathrm{d}\tau \tag{1.53}$$

因为直角系的单位矢量是常数，它们可以拿到积分号外。

例题 1.8

对于图 1.24 所示的三棱体，对函数 $T = xyz^2$ 进行体积分。

解：你可以任意选择体积分中所含三个积分的次序。假设先积 x：需从 0 积到$(1-y)$；然后积 y(从 0 到 1)；最后积 z(从 0 到 3)；

$$\int T\mathrm{d}\tau = \int_0^3 z^2 \left\{ \int_0^1 y \left[\int_0^{1-y} x\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 z^2\mathrm{d}z \int_0^1 (1-y)^2 y\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}(9)\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{3}{8}$$

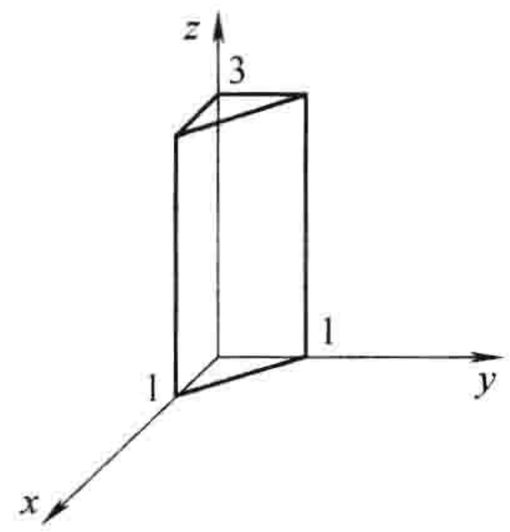


图　1.24

习题 1.28　从原点到点(1,1,1)沿所给三种不同路径对函数 $\boldsymbol{v} = x^2\hat{\boldsymbol{x}} + 2yz\hat{\boldsymbol{y}} + y^2\hat{\boldsymbol{z}}$ 进行线积分：

(a) $(0,0,0)\to(1,0,0)\to(1,1,0)\to(1,1,1)$；

(b) $(0,0,0)\to(0,0,1)\to(0,1,1)\to(1,1,1)$；

(c) $(0,0,0)\to(1,1,1)$；

(d) 先沿(a)路径出发再沿(b)路径返回的闭合路径积分是什么？

习题 1.29　对于例题 1.7 中的函数，对立方体的底面进行面积分，设上指方向为正方向。对这个函数，这个面积分仅依赖于边界围线吗？这个立方体的总通量是什么(包括底面)？[注意：对闭合面外指方向是正方向，所以底面的正方向是下指的。]

习题 1.30　对顶角位于(0,0,0)，(1,0,0)，(0,1,0)，(0,0,1)的正四面体，对函数 $T = z^2$ 计算体积分。

1.3.2　微积分的基本定理

设 $f(x)$ 是一个单变量函数。微积分的基本定理指出：

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = f(b) - f(a) \tag{1.54}$$

这个形式看起来不是很熟悉，我们把它写成另一种形式：

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

式中，$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x = F(x)$。基本定理告诉我们如何去积分 $F(x)$：给出一个函数使它的导数为 F。

几何解释：按照式(1.33)，$\mathrm{d}f = (\mathrm{d}f/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$ 是当 x 改变为 $(x + \mathrm{d}x)$ 时 f 的无限小变化。基本定理式(1.54)是说，如果你把从 a 到 b 的区间(图 1.25)分割成许多小间隔 $\mathrm{d}x$，并把每个间隔内函数的增量 $\mathrm{d}f$ 加在一起，结果(不出所料)就等于 f 总的变化：$f(b) - f(a)$。也就是说，有两种方法决定函数 f 总的变化：或者是把端点值相减，或者是把每一步的微小增量加在一起。无论哪种方法，结果都是一样的。

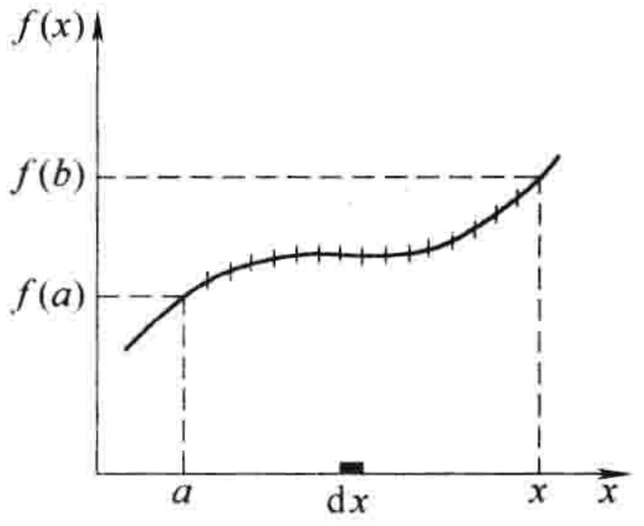


图 1.25

请注意基本定理的要点：对一个函数导数在一个区间的积分是由这个函数在区间端点(边界)的值决定的。在矢量微积分中有三类导数(梯度、散度和旋度)，每一个都有它自己的“基本定理”，但是它们的要点本质上是一样的。这里我们不打算去证明这些定理，而仅是解释它们的含义，力图使它们更容易理解。有关证明在附录 A 中给出。

1.3.3 有关梯度的基本定理

设有一个三变量标量函数 $T(x,y,z)$。从 a 点出发，我们移动一个微小位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$(见图 1.26)。按照式(1.37)，函数 T 的改变量为

$$\mathrm{d}T = (\nabla T)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$$

现在我们再移动一个小的位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$，相应地，$T$ 的增量为 $(\nabla T)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$。用这种方式，一步步最终到达 b 点。在每一步我们计算 T 的梯度与无限小位移的点积，给出函数的增量 $\mathrm{d}T$。显然，沿一条所选路径 P，从 a 点到 b 点，T 总的改变为

$$\boxed{\int_{ap} (\nabla T)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = T(b) - T(a)} \qquad (1.55)$$

这就是关于梯度的基本定理；和“普通”基本定理一样，它指出一个导数(现在是梯度)的积分(现在是线积分)是由函数在边界(a 点和 b 点)的值所决定的。

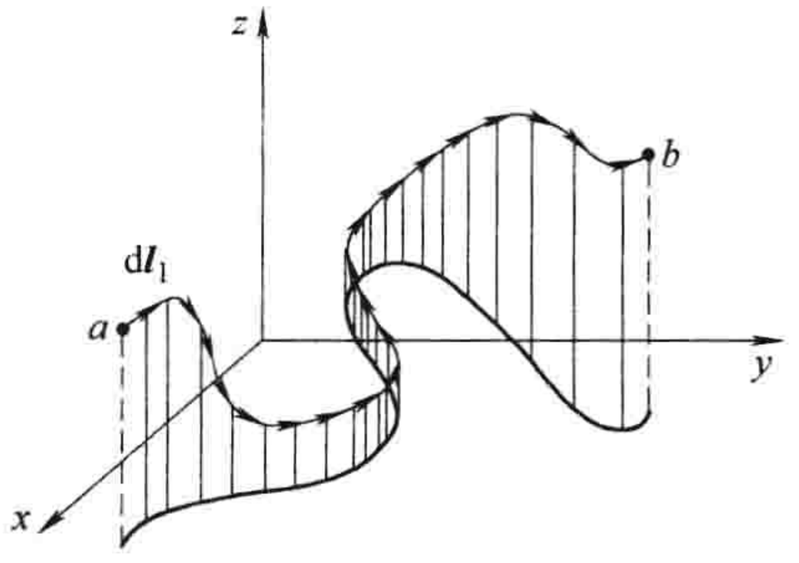


图 1.26

几何解释：假设你想测量埃菲尔铁塔的高度。你可以攀爬塔梯，用一把尺子测量每一阶梯的高度，然后把它们加在一起(这就是式(1.55)的左边)，或者你可以用一个测高仪测量塔顶和塔底的读数，然后把两个读数相减(这就是式(1.55)的右边)；两种方法的结果应该一样(这就是基本定理)。

顺便提及，正如我们在例题 1.6 发现的那样，线积分一般是依赖从 a 点到 b 点的路径的。但是式(1.55)右边仅与端点有关，并不依赖路径。显然，梯度具有独特的性质，它们的线积分是不依赖路径的。

推论 1：$\int_a^b (\nabla T)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 不依赖于从 a 点到 b 点的路径。

推论 2：$\oint (\nabla T)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，因为始末点重合 $b = a$，$T(b) - T(a) = 0$。

例题 1.9

对 $T = xy^2$，a 为原点(0,0,0)，b 为(2,1,0)，验证梯度的基本定理。

解：尽管梯度的线积分是不依赖于路径的，但计算时我们需要选定一条路径。设沿 x 轴出发(步 i)然后向上(步 ii)(见图 1.27)。同以前一样，$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{y}} + \mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{z}}$；$\nabla T = y^2\hat{\boldsymbol{x}} + 2xy\hat{\boldsymbol{y}}$。

(i) $y=0$; $d\boldsymbol{l}=dx\hat{\boldsymbol{x}}$, $\nabla T\cdot d\boldsymbol{l}=y^2dx=0$, 所以

$$\int_i \nabla T\cdot d\boldsymbol{l}=0$$

(ii) $x=2$; $d\boldsymbol{l}=dy\hat{\boldsymbol{y}}$, $\nabla T\cdot d\boldsymbol{l}=2xydy=4ydy$, 所以

$$\int_{ii}\nabla T\cdot d\boldsymbol{l}=\int_0^1 4ydy=2y^2\Big|_0^1=2$$

显然,总的积分是 2。这与基本定理一致吗? 当然一致: $T(b)-T(a)=2-0=2$。

现在,为了使你确信该积分是不依赖路径的,我们沿另一条路径 iii (从 a 点到 b 点的直线)重新计算这个积分:

(iii) $y=\frac{1}{2}x$; $dy=\frac{1}{2}dx$, $\nabla T\cdot d\boldsymbol{l}=y^2dx+2xydy=\frac{3}{4}x^2dx$, 所以

$$\int_{iii}\nabla T\cdot d\boldsymbol{l}=\int_0^2\frac{3}{4}x^2dx=\frac{1}{4}x^3\Big|_0^2=2$$

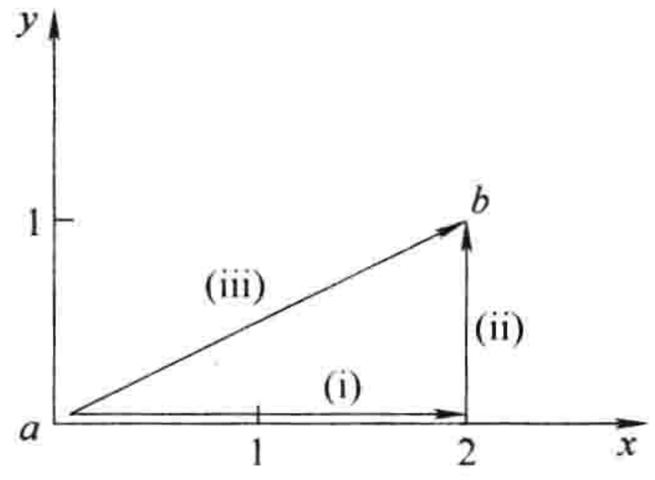


图　1.27

习题 1.31　用 $T=x^2+4xy+2yz^3$, 点 $a=(0,0,0)$, 点 $b=(1,1,1)$, 对图 1.28 所给的三条路径验证梯度的基本定理。

(a) $(0,0,0)\to(1,0,0)\to(1,1,0)\to(1,1,1)$;

(b) $(0,0,0)\to(0,0,1)\to(0,1,1)\to(1,1,1)$;

(c) 抛物线路径 $z=x^2$, $y=x$。

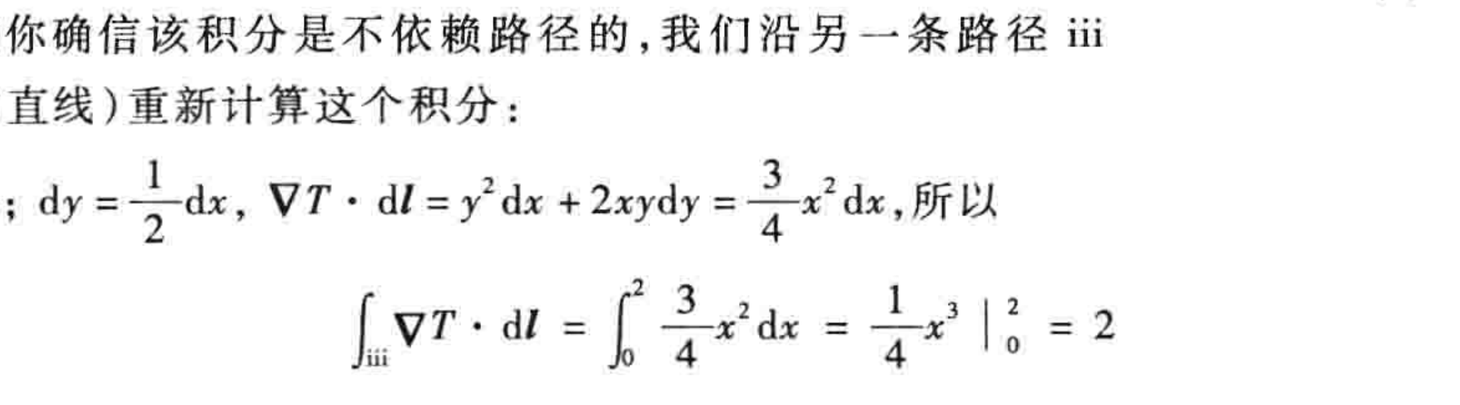


图　1.28

1.3.4　有关散度的基本定理

散度的基本定理指出

$$\boxed{\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{v})d\tau=\oint_S\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{a}}\qquad(1.56)$$

这个定理非常重要,它至少有三个特别的名字:高斯定理、格林定理、散度定理。同其他基本定理类似,它指出,一个函数导数(现在为散度)对一个区间(现在为体积)的积分等于这个函数在区间边界上(现在为包围体积的表面)的值。注意,边界项本身也是一个积分(具体讲,一个面积分)。这是合理的:一条线段的"边界"是两个端点,而一个体积的边界是一个(闭合)面。

几何解释:如果 $\boldsymbol{v}$ 代表一个不可压缩流体的流,则 $\boldsymbol{v}$ 的通量是单位时间流出表面的总的流量(式(1.56)右边)。现在,散度是矢量从某点"散出"的量度——一个具有高散度的地方像一个"水龙头",向外流出液体。如果在一个体积内存在有大量的龙头,那么从这个体积边界流出的总通量就等于这些龙头流出量之和。实际上,我们有两种方法计算总的流出量:(a)把所有龙头的流出量加

在一起;(b)在边界的每一点测量流出量,然后把所有地方的流出量加在一起。这两种方法所得结果是一样的:

$$\int \text{体积内所有龙头的流量} = \oint \text{流出表面的流量}。$$

这在本质上就是散度定理的意义。

例题 1.10

对图 1.29 所示的单位立方体和函数

$$\boldsymbol{v} = y^2\hat{\boldsymbol{x}} + (2xy + z^2)\hat{\boldsymbol{y}} + (2yz)\hat{\boldsymbol{z}}$$

验证散度定理。

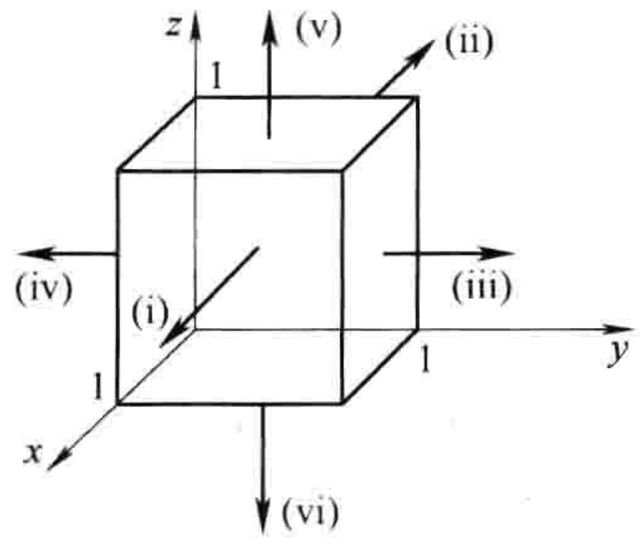


图 1.29

解:对所给函数有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2(x + y)$$

及

$$\int_V 2(x + y)\,d\tau = 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x + y)\,dx dy dz$$

$$\int_0^1 (x + y)\,dx = \frac{1}{2} + y,\ \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right)dy = 1,\ \int_0^1 1\,dz = 1$$

所以散度定理的左边为

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{v}\,d\tau = 2$$

要计算右边的面积分,我们需要分别计算如图 1.29 所示立方体的六个面:

(i) $\int \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_0^1\int_0^1 y^2\,dy dz = \frac{1}{3}$

(ii) $\int \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{a} = -\int_0^1\int_0^1 y^2\,dy dz = -\frac{1}{3}$

(iii) $\int \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_0^1\int_0^1 (2x + z^2)\,dx dz = \frac{4}{3}$

(iv) $\int \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{a} = -\int_0^1\int_0^1 z^2\,dx dz = -\frac{1}{3}$

(v) $\int \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_0^1\int_0^1 2y\,dx dy = 1$

(vi) $\int \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{a} = -\int_0^1\int_0^1 0\,dx dy = 0$

所以,正如预期的那样,总通量为

$$\oint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{a} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 0 = 2$$

习题 1.32 对图 1.30 所示边长为 2 的立方体和函数$\boldsymbol{v} = (xy)\hat{\boldsymbol{x}} + (2yz)\hat{\boldsymbol{y}} + (3xz)\hat{\boldsymbol{z}}$,验证散度定理。

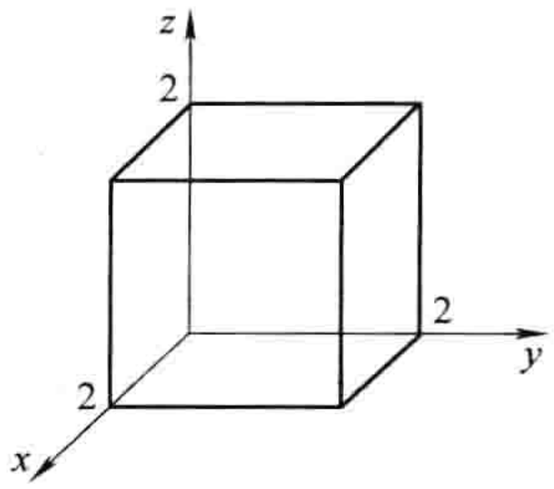


图 1.30

1.3.5　有关旋度的基本定理

旋度的基本定理有一个特殊的名字，即斯托克斯定理，这个定理指出

$$\boxed{\int_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \oint_P \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}} \tag{1.57}$$

同其他基本定理类似，它指出，一个函数导数（现在为旋度）对一个区间（现在为一个面）的积分等于这个函数在区间边界上（现在为面的围线）的值。同散度定理的情况一样，现在边界项本身是一个积分——具体讲是一个围线积分。

几何解释：回顾一下，旋度是矢量$\boldsymbol{v}$“扭曲”的量度；高旋度的区域是一个漩涡——如果你在这里放一个小软木轮，它将打转。现在，对某个面旋度的积分（或者，更精确地说，旋度通过这个面的通量）代表“涡旋的总量”，我们可以沿着面的边界确定这个涡旋，求出沿边界的流是多少（见图 1.31）。你也许会找到斯托克斯定理另外的解释，但它不过是帮助记忆，没有新内容。

你也许注意到斯托克斯定理表观上的一个不确定：当涉及边界线积分时，我们沿哪个方向呢（顺时针还是逆时针方向）？如果我们走“错”方向，将会产生一个正负号的差错。答案是，沿哪个方向是无关紧要的，只要你保持一致，因为在面积分中也存在一个这样的不确定，面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的指向是什么？对一个闭合面（如散度定理中）$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 方向为外法线方向；但是对一个非闭合面，哪个指向是“外”方向？斯托克斯定理的一致性（对所有类似的公式都是如此）是由右手规则确定；如果你的四指指向被积线的方向，则大拇指所指方向就是 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的方向（见图 1.32）。

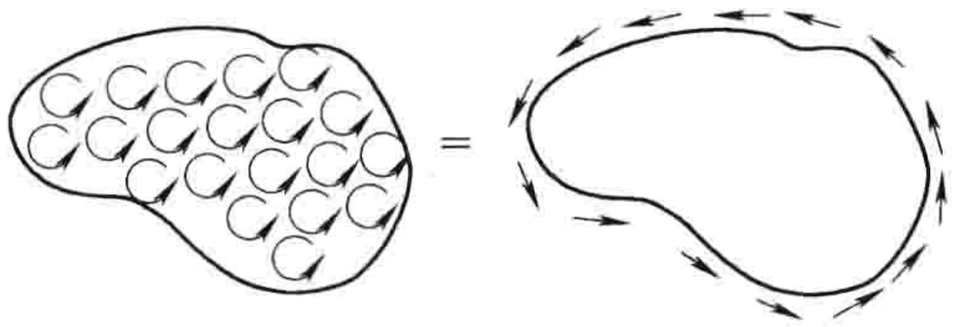


图　1.31

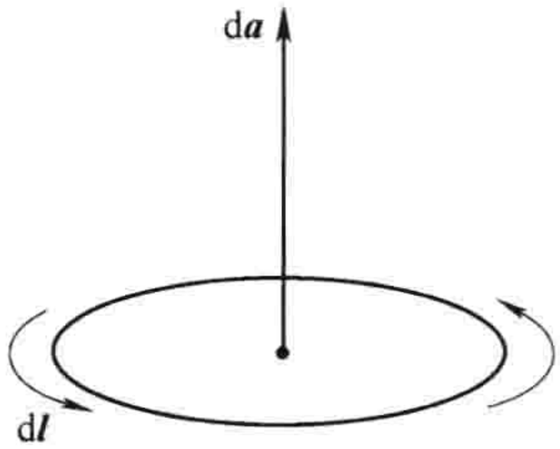


图　71.32

对一个给定的边界线会有许多面（可以是无限多个）以这条线为边界线。把一张纸卷成一个直圆筒，在一端沾上肥皂水形成一个肥皂泡，这个肥皂泡面是以圆筒边为边界的，如果你把这个肥皂泡吹大，它的表面积也增大，但是它的边界仍然是圆筒边。一般来讲，通量积分与被积面有密切关系，但是对旋度不是如此。斯托克斯定理指出，$\int \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 等于$\boldsymbol{v}$绕边界的线积分，而这个线积分与面的选择无关。

推论 1：$\int \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 仅依赖于边界线，而与所选的面无关。

推论 2：$\oint \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0$ 对任何闭合面都成立，因为闭合面的边界线像气球的嘴一样，收缩为一个点，因此式（1.57）右边的线积分为零。

这些推论和梯度定理的类似。我们将会在后面进一步展示它们的相似性。

例题 1.11

设$\boldsymbol{v} = (2xz + 3y^2)\hat{\boldsymbol{y}} + (4yz^2)\hat{\boldsymbol{z}}$，对图 1.33 所示的平方面验证斯托克斯定理。

解：　$\nabla \times \boldsymbol{v} = (4z^2 - 2x)\hat{\boldsymbol{x}} + 2z\hat{\boldsymbol{z}}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{x}}$

(在说 $d\boldsymbol{a}$ 方向是沿 x 轴正方向时,线积分的方向选择为逆时针方向。如果用 $d\boldsymbol{a} = -dydz\hat{\boldsymbol{x}}$,这时必须选择线积分的方向为顺时针方向。)由于对这个面 $x=0$,所以

$$\int \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{a} = \int_0^1 \int_0^1 4z^2 dydz = \frac{4}{3}$$

现在,线积分是什么? 我们把线积分分为如图 4 段分别进行积分:

(i) $x=0, z=0, \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = 3y^2 dy, \int \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^1 3y^2 dy = 1$,

(ii) $x=0, y=1, \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = 4z^2 dz, \int \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^1 4z^2 dz = \frac{4}{3}$,

(iii) $x=0, z=1, \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = 3y^2 dy, \int \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_1^0 3y^2 dy = -1$,

(iv) $x=0, y=0, \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = 0, \int \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_1^0 0 dz = 0$。

所以

$$\oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = 1 + \frac{4}{3} - 1 + 0 = \frac{4}{3}$$

这验证了斯托克斯定理。

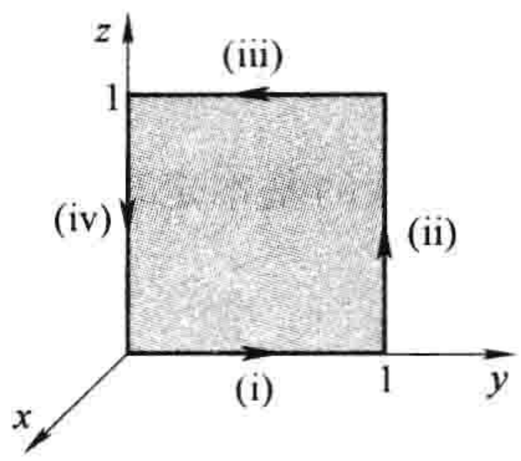


图 1.33

习题 1.33 对函数 $\boldsymbol{v} = (xy)\hat{\boldsymbol{x}} + (2yz)\hat{\boldsymbol{y}} + (3xz)\hat{\boldsymbol{z}}$ 及图 1.34 所给三角形面积验证斯托克斯定理。

习题 1.34 对例题 1.11 中的函数和边界线验证斯托克斯定理,不过现在对图 1.35 所示的 5 个面作积分。立方盒子的后背是敞开的。

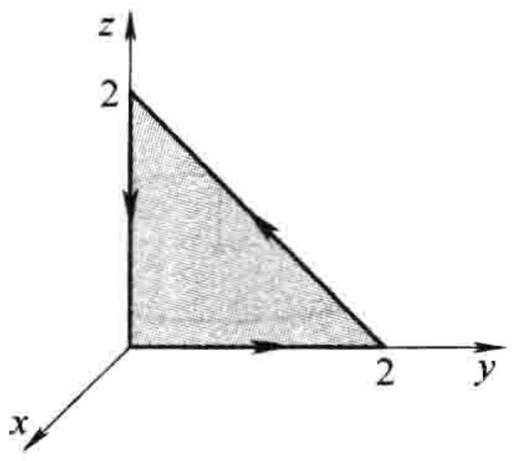


图 1.34

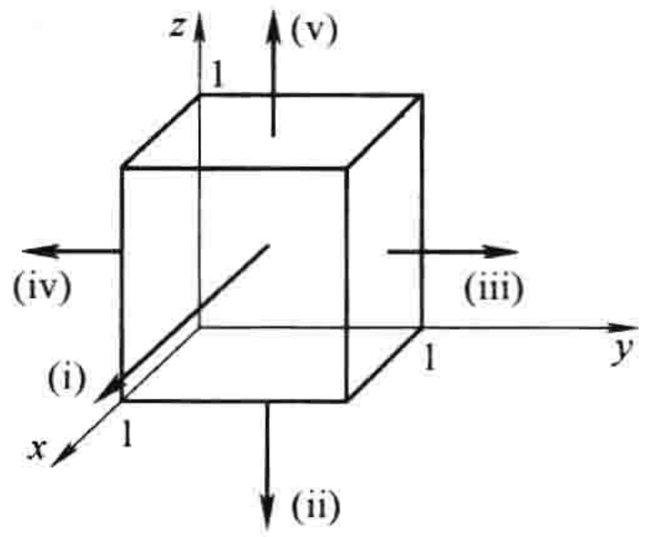


图 1.35

1.3.6 分部积分

分部积分是利用两个函数乘积导数的求导规则

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\left(\frac{dg}{dx}\right) + g\left(\frac{df}{dx}\right)$$

对两边进行积分,并利用积分的基本定理。

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(fg)dx = fg\Big|_a^b = \int_a^b f\left(\frac{dg}{dx}\right)dx + \int_a^b g\left(\frac{df}{dx}\right)dx$$

或者

$$\int_a^b f\left(\frac{dg}{dx}\right)dx = -\int_a^b g\left(\frac{df}{dx}\right)dx + fg\Big|_a^b \tag{1.58}$$

这就是分部积分。它是涉及一个函数 f 和另一个函数 g 导数乘积的积分;分部积分指出,你可以把

对 g 的导数转换为对 f 的导数，代价是一个负号和一个边界项的出现。

例题 1.12

计算积分

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx$$

解：指数函数可以用导数表示为

$$e^{-x}=\frac{d}{dx}(-e^{-x})$$

所以对本题有，$f(x)=x$，$g(x)=-e^{-x}$，$df/dx=1$，所以

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx=\int_0^\infty e^{-x}dx-(xe^{-x})\Big|_0^\infty=(-e^{-x})\Big|_0^\infty=1$$

我们可以借助矢量微积分的积规则和基本定理用同样的方法给出矢量的分部积分。例如，借助散度定理，对一个体积，对

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})=f(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\cdot(\nabla f)$$

进行积分，由

$$\int\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})d\tau=\int f(\nabla\cdot\boldsymbol{A})d\tau+\int\boldsymbol{A}\cdot(\nabla f)d\tau=\oint f\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{a}$$

即

$$\int_V f(\nabla\cdot\boldsymbol{A})d\tau=-\int_V\boldsymbol{A}\cdot(\nabla f)d\tau+\oint_S f\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{a} \tag{1.59}$$

这里被积函数仍然是一个函数(f)和一个函数的导数(现在是矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度)的乘积，分部积分允许我们把对 $\boldsymbol{A}$ 求导转换为对 f 求导(现在为梯度)，代价是一个负号和边界项(现在是一个面积分)的出现。

你可能会问，我们会经常遇到一个函数与另一个函数导数乘积的积分吗？回答是常常遇到，所以分部积分在矢量微积分中是非常有力的工具。

习题 1.35

(a) 证明

$$\int_S f(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{a}=\int_S[\boldsymbol{A}\times(\nabla f)]\cdot d\boldsymbol{a}+\oint_P f\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{1.60}$$

(b) 证明

$$\int_V\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\tau=\int_V\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})d\tau+\oint_S(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{a} \tag{1.61}$$

1.4　曲线坐标系

1.4.1　球坐标系

图 1.36 给出了一个点 P 的球坐标 (r,θ,ϕ) 的定义；r 是到原点的距离(位置矢量的大小)，θ(位置矢量与 z 轴的夹角)称为极角，ϕ(位置矢量在 xy 平面的投影与 x 轴的夹角)称为方位角。由图可以得出 (r,θ,ϕ) 与直角坐标 (x,y,z) 的关系：

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\quad y=r\sin\theta\sin\phi,\quad z=r\cos\theta \tag{1.62}$$

图 1.36 也给出了指向相应坐标增加方向的三个单位矢量 $\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{\phi}}$。它们构成一个正交(相互垂

直)基,任何矢量 $\boldsymbol{A}$ 都能以通常的方式用这三个单位矢量表示:

$$\boldsymbol{A} = A_r\hat{\boldsymbol{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{1.63}$$

式中,A_r, A_θ, A_ϕ 是 $\boldsymbol{A}$ 的径向、极向和方位角分量。用直角系的单位矢量表示,有

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{r}} &= \sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{z}}\\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}\end{aligned}\right\} \tag{1.64}$$

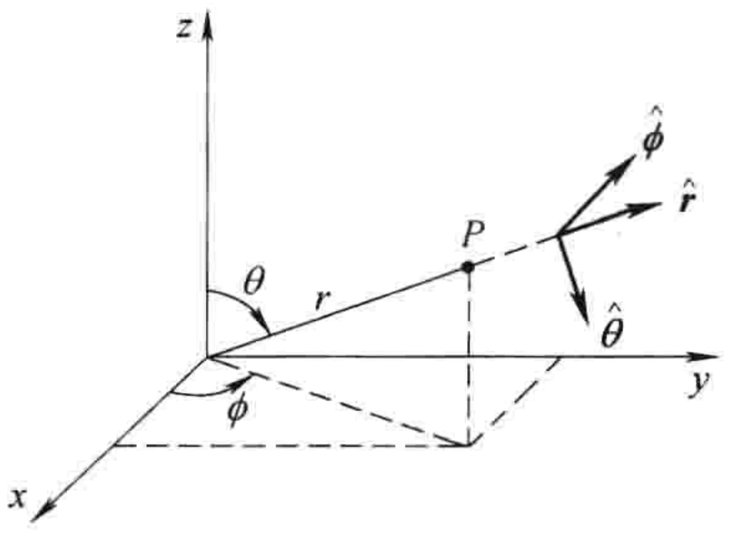


图 1.36

在习题 1.37 中你可以验证这些关系。为了方便参考,我已经把这些公式放在了附录中。

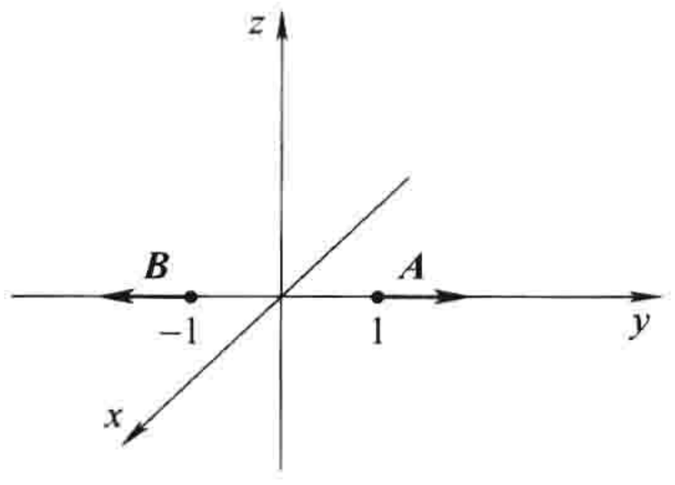
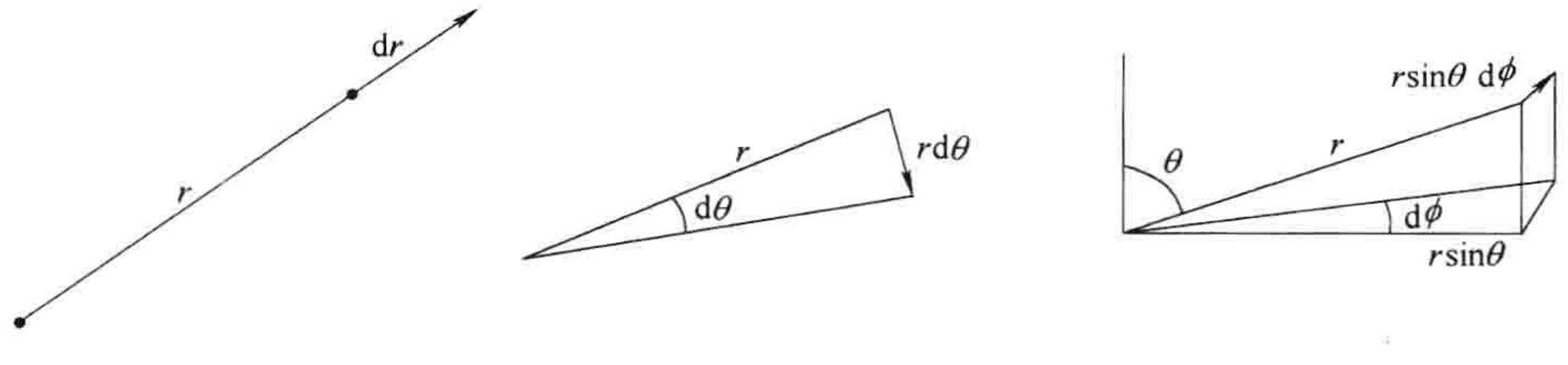


图 1.37

但是我必须提醒你们非常重要的一点:单位矢量 $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ 是与特定的点 P 相对应的,当 P 移动时这些单位矢量也要发生变化。例如,$\hat{\boldsymbol{r}}$ 总是沿径向外指的,但是"径向外指"方向可以是 x,也可以是 y 方向,或者其他方向,这依赖于所考虑的点在何处。在图 1.37 中 $\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{y}}$ 和 $\boldsymbol{B} = -\hat{\boldsymbol{y}}$ 这两个矢量在球坐标系中都可以写作 $\hat{\boldsymbol{r}}$。我们当然可以明确地写出参考点,把单位矢量表示为 $\hat{\boldsymbol{r}}(\theta,\phi)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta,\phi)$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}(\theta,\phi)$,但是这有点麻烦,只要我们注意到了这个问题,我想是不会有任何困难的[⊖]。特别是,不要想当然地把关于不同点的矢量的球坐标分量相加(在图 1.37 中,$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = 0$,而不是 $2\hat{\boldsymbol{r}}$,$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = -1$,而不是 $+1$)。由于在球坐标系中单位矢量自身是位置的函数,要特别注意矢量的微分运算(例如 $\partial\hat{\boldsymbol{r}}/\partial\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}$),并且不要把 $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 拿到积分号外,尽管对直角坐标系,如在式(1.53)时,我们可以这样做。一般来说,如果你对一种运算有疑问,把问题重新表述在直角坐标系中,在直角坐标系中没有这样的问题。

一个在 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 方向的无限小位移简单地表示就是 $\mathrm{d}r$(见图 1.38a),这如在 x 方向的无限小元的长度是 $\mathrm{d}x$ 一样:

$$\mathrm{d}l_r = \mathrm{d}r \tag{1.65}$$



a) b) c)

图 1.38

另一方面,在 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 方向无限小元的长度不是 $\mathrm{d}\theta$(这仅是一个角度,它根本不具有长度的量纲),而是 $r\mathrm{d}\theta$(见图 1.38b):

$$\mathrm{d}l_\theta = r\mathrm{d}\theta \tag{1.66}$$

类似地,在 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 方向无限小元的长度是(图 1.38c)

⊖ 我在本书前面曾经说过,矢量是不限地点的,我仍然坚持这一点。矢量本身是不依赖坐标系的选择的。但是,我们用来表示它们的标记在曲线坐标系中却取决于所考虑问题的点的位置。

$$dl_\phi = r\sin\theta d\phi \tag{1.67}$$

这样，一般的无限小位移 $d\boldsymbol{l}$ 是

$$d\boldsymbol{l} = dr\hat{\boldsymbol{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{1.68}$$

它扮演(比如在线积分时)直角系中 $d\boldsymbol{l} = dx\hat{\boldsymbol{x}} + dy\hat{\boldsymbol{y}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$ 所扮演的角色。

在球坐标系中的无限小体元 $d\tau$ 是三个无限小位移的乘积：

$$d\tau = dl_r dl_\theta dl_\phi = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi \tag{1.69}$$

我无法给出无限小面元 $d\boldsymbol{a}$ 的一般表示，因为这依赖于面的指向。你们必须分析所给面的几何(这对直角坐标系和球坐标系都是一样的)。例如，如果是对一个球面积分，则 r 是常数，而 θ，ϕ 是变化的(见图 1.39)，在这种情况下，

$$d\boldsymbol{a}_1 = dl_\theta dl_\phi\hat{\boldsymbol{r}} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\boldsymbol{r}}$$

另一方面，如果所给面处在 xy 平面，则 θ 是常数($\pi/2$)，而 r，ϕ 是变化的，这时有

$$d\boldsymbol{a}_2 = dl_r dl_\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} = rdrd\phi\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

最后，注意，r 变化的范围是 0 到 ∞，ϕ 是 0 到 2π，θ 是 0 到 π(不是 2π——那样会把每个点计两次)。⊖

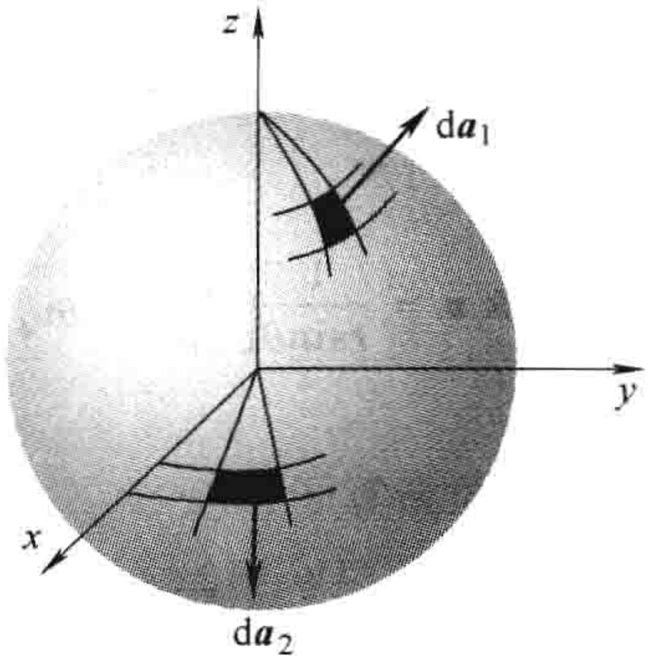


图　1.39

例题 1.13

求出半径为 R 的球体的体积。

解：

$$V = \int d\tau = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$= \left(\int_0^R r^2 dr\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)$$

$$= \left(\frac{R^3}{3}\right)(2)(2\pi) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

(这一点也不惊奇。)

到现在为止，我们仅讨论了球坐标的几何。现在让我们把矢量导数(梯度、散度、旋度、拉普拉斯算子)用 r，θ，ϕ 写出。原则上这是直截了当的，对梯度情况有

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

我们首先利用复合导数求导规则重新表示偏导数，例如

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{\partial T}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + \frac{\partial T}{\partial\phi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

圆括弧中求导项可由式(1.62)——或者它们的逆变式(习题 1.36)求出。然后我们对 $\partial T/\partial y$，$\partial T/\partial z$ 同样作变换。最后，我们把 $\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$ 用 $\hat{\boldsymbol{r}}$，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$，$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 代换(习题 1.37)。用这种费力的方法，也许要用上 1 小时去求出球坐标系中的梯度表示式。我猜测最初就是这样做的，不过在附录 A 中我们给出了一种更有效的非直接的方法，这种方法的优点是统一处理所有的坐标系。这里介绍“直接方

⊖ 当然，你可以只让 ϕ 从 0 到 π(覆盖东半球)，再让 θ 从 π 到 2π(覆盖西半球)。不过这是一个很糟糕的标记法，除了其他一些原因(因为 $\sin\theta$ 将会有负值)，你将不得不在体元和面元上加上绝对值号(面积和体积本质上都是正值量)。

法”是想告诉你们变换到球坐标系没什么神秘古怪：仅是把同样的事物(梯度、散度或者其他)用不同的术语表示而已。

下面是矢量导数在球坐标系中的表示。

梯度：

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{1.70}$$

散度：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \tag{1.71}$$

旋度：

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{1.72}$$

拉普拉斯算子：

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \tag{1.73}$$

为便于查找，这些公式也附在了书后。

习题 1.36 求出以 x，y，z 表示的 r，θ，ϕ 的表示式[即，式(1.62)的逆变式]。

· 习题 1.37 以直角坐标系的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$ 表示球坐标系的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{r}}$，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$，$\hat{\boldsymbol{\phi}}$[也就是推导出式(1.64)]。用几种方法验证你的结果($\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}} \overset{?}{=} 1$，$\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} \overset{?}{=} 0$，$\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}} \overset{?}{=} \hat{\boldsymbol{\phi}}$，…)。另外求出逆变式，用 $\hat{\boldsymbol{r}}$，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$，$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 表示 $\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$。

· 习题 1.38

(a) 对函数 $\boldsymbol{v}_1 = r^2\hat{\boldsymbol{r}}$ 验证散度定理，体积选为中心在原点，半径为 R 的球体。

(b) 同样对函数 $\boldsymbol{v}_2 = (1/r^2)\hat{\boldsymbol{r}}$ 计算(如果你对结果感到惊讶，回顾习题 1.16)。

习题 1.39 求函数

$$\boldsymbol{v} = (r\cos\theta)\hat{\boldsymbol{r}} + (r\sin\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} + (r\sin\theta\cos\phi)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

的散度。对这个函数验证散度定理，体积选取如图 1.40 所示的倒置半球体，球心在原点，半径为 R，放置在 xy 平面上。

习题 1.40 求函数 $T = r(\cos\theta + \sin\theta\cos\phi)$ 的梯度和拉普拉斯算子。把 T 变换到直角坐标系，用式(1.42)验证拉普拉斯算子。从点(0，0，0)到点(0，0，2)用图 1.41 所给路径，对这个函数检验梯度定理。

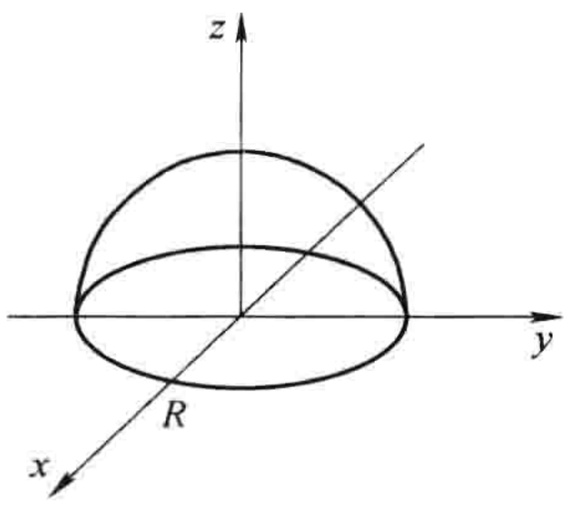


图 1.40

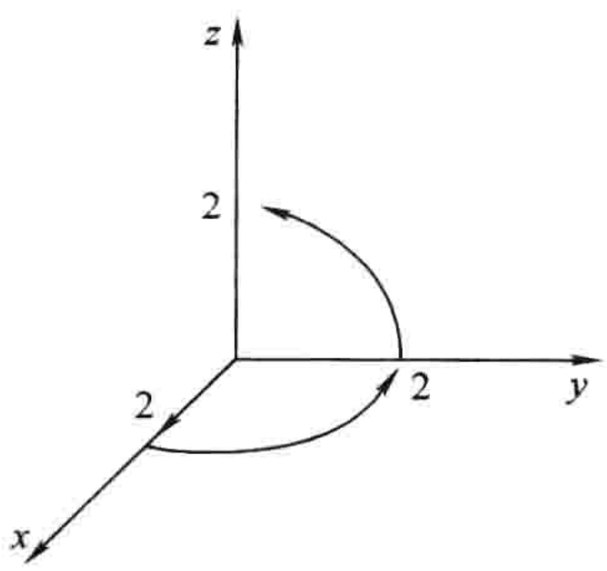


图 1.41

1.4.2　柱坐标系

图 1.42 给出了一个点 P 的柱坐标$(s,\ \phi,\ z)$的定义。注意，ϕ 的意义与球坐标相同，z 的意义与直角坐标相同；s 是从 z 轴到 P 点的距离，而在球坐标系中 r 是从原点到 P 点的距离。s，ϕ，z 与直角坐标的关系是

$$x = s\cos\phi,\ y = s\sin\phi,\ z = z \tag{1.74}$$

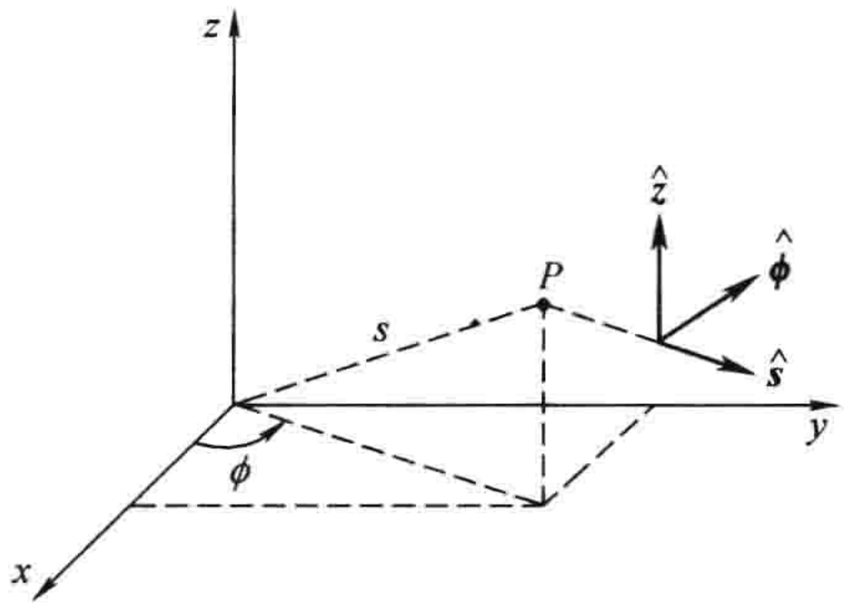


图　1.42

单位矢量是(习题 1.41)

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{s}} &= \cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}\\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}\\ \hat{\boldsymbol{z}} &= \hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned}\right\} \tag{1.75}$$

无限小线元为

$$\mathrm{d}l_s = \mathrm{d}s,\ \mathrm{d}l_\phi = s\mathrm{d}\phi,\ \mathrm{d}l_z = \mathrm{d}z \tag{1.76}$$

所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}s\hat{\boldsymbol{s}} + s\mathrm{d}\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + \mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.77}$$

体积元是

$$\mathrm{d}\tau = s\mathrm{d}s\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \tag{1.78}$$

s 的变化范围是从 $0\rightarrow\infty$，ϕ 从 $0\rightarrow2\pi$，z 从 $-\infty$ 到 ∞。

柱坐标系中的矢量导数为

梯度：

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s}\hat{\boldsymbol{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial T}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.79}$$

散度：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sv_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1.80}$$

旋度：

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{s}} + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(sv_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial\phi}\right]\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.81}$$

拉普拉斯算子：

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial T}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{1.82}$$

这些公式也附在书后。

习题 1.41　用$(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{z}})$表示出$(\hat{\boldsymbol{s}},\hat{\boldsymbol{\phi}},\hat{\boldsymbol{z}})$[即推导出式(1.75)]。求出逆变式，即用$(\hat{\boldsymbol{s}},\hat{\boldsymbol{\phi}},\hat{\boldsymbol{z}})$表示出$(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{z}})$。

习题 1.42

(a) 求出函数

$$\boldsymbol{v} = s(2+\sin^2\phi)\hat{\boldsymbol{s}} + s\sin\phi\cos\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + 3z\hat{\boldsymbol{z}}$$

的散度。

(b) 对这个函数验证散度定理，体积为图 1.43 所示的 1/4 圆柱体(半径为 2，高度为 5)。

(c) 求$\boldsymbol{v}$ 的旋度。

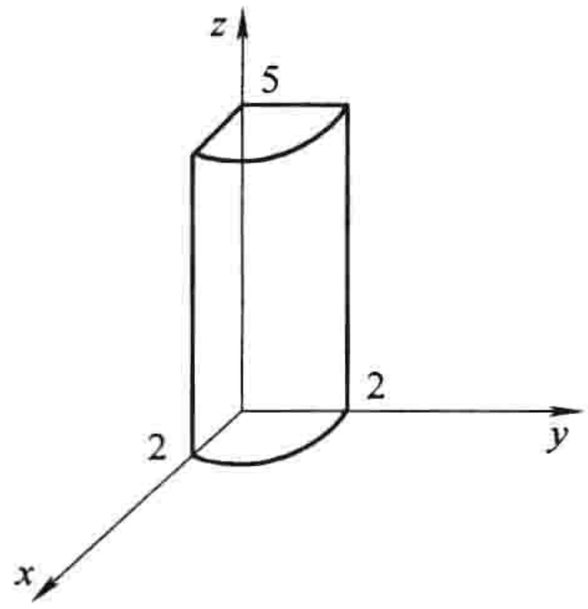


图　1.43

1.5 狄拉克 δ 函数

1.5.1 $\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$ 的散度

考虑矢量函数

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.83}$$

在每一点，$\boldsymbol{v}$ 的方向是径向外指的（见图 1.44）；如果有什么函数有很大的正散度，那么就是这个函数。但是，当实际计算它的散度时［用式(1.71)］，结果却为零：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0 \tag{1.84}$$

（在习题 1.16 你已经遇到过这个佯谬）如果对这个函数应用散度定理会出现更大的问题。假定我们对半径为 R，球心在原点的球面积分［习题 1.38(b)］，这个积分为

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int\left(\frac{1}{R^2}\hat{\boldsymbol{r}}\right)\cdot(R^2\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi\hat{\boldsymbol{r}}) = \left(\int_0^{\pi}\sin\theta \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right) = 4\pi \tag{1.85}$$

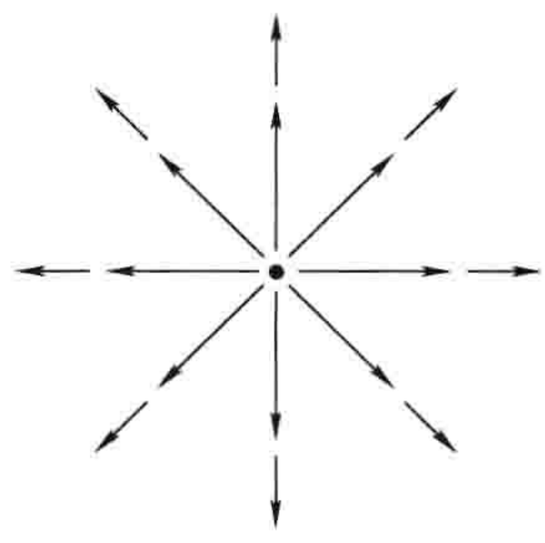


图 1.44

可是，如果我们相信式(1.84)是正确的，就这个球对散度进行体积分，$\int\nabla\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}\tau$，会发现它为零。是散度定理不正确吗？究竟出现了什么问题？

问题的根源出在 $r=0$ 点，这里 $\boldsymbol{v}$ 为无限大（在式(1.84)中我们想当然地把这点的散度认为是零）。除了 $r=0$ 的原点，散度为零，这没有一点问题，但是在原点，情况就没有这么简单。注意，式(1.85)的面积分与球的半径无关；如果散度定理是正确的（它的确是正确的），对任意球心在原点的球，无论它多么小，我们都应当得到 $\int\nabla\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}\tau = 4\pi$。显然所有的贡献都来自 $r=0$ 点！所以，$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ 具有非常奇特的性质，除了原点，它处处为零，而且它的积分（对任何包围原点的体积）为 4π。这是普通函数所没有的一种特性。（在另一方面，物理中却有这样的例子：比如一个质点的密度，除了这个质点所处的那一点，密度处处为零，而对密度的积分则是有限的，为这个质点的质量。）这里迷惑我们的问题是物理学家称之为狄拉克 δ 函数的数学问题。在理论物理的各分支都有这样的问题。对于我们现在的具体问题（函数 $\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$ 的散度问题），它并不是什么奇珍异物——事实上它是整个电动力学的要枢。所以我们有必要先对狄拉克 δ 函数进行一些详细的讨论。

1.5.2 一维狄拉克 δ 函数

一维狄拉克 δ 函数 $\delta(x)$，可以想象为一个面积为 1，无限高且无限窄的“尖峰”（见图 1.45）。也就是说：

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x\neq 0 \\ \infty, & x=0 \end{cases} \tag{1.86}$$

并且它的积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{1.87}$$

技术上，$\delta(x)$并不是一个函数，因为它在 $x=0$ 处的值不是有限的。在数学文献中它被称为推广函数或者广义函数。如果你愿意，可以把它想象为一序列函数的极限，比如高度为 n，宽度为 $1/n$ 的矩形函数 $R_n(x)$当 $n\to\infty$ 时的极限，或者是高为 n，底边为 $2/n$ 的等腰三角形当 $n\to\infty$ 时的极限(见图 1.46)。

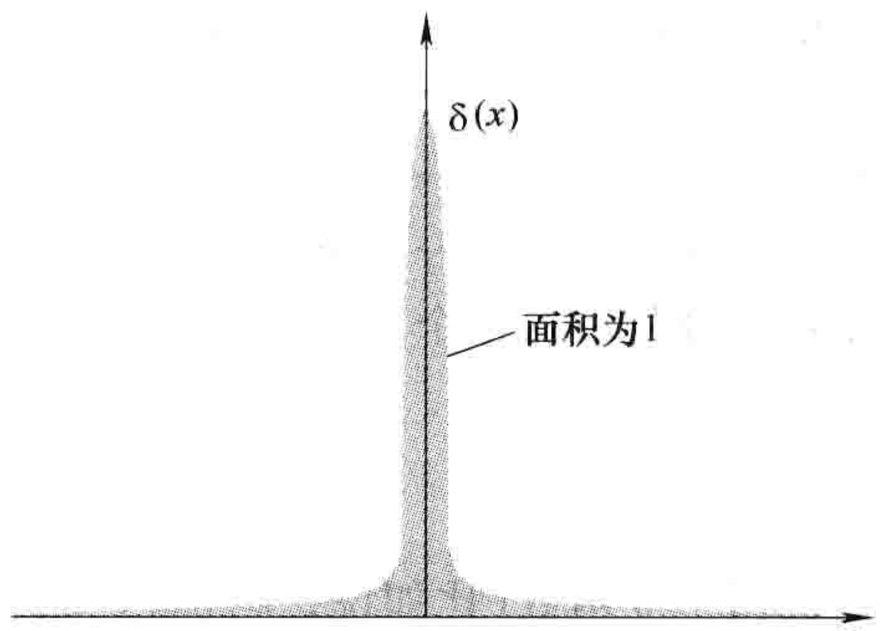


图　1.45

如果 $f(x)$是某个“普通”函数(也就是说，不是另外一个 δ 函数——为安全起见，让我们说它是连续函数)，则乘积 $f(x)\delta(x)$除了在 $x=0$ 处外处处为零。由此可知

$$f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x) \tag{1.88}$$

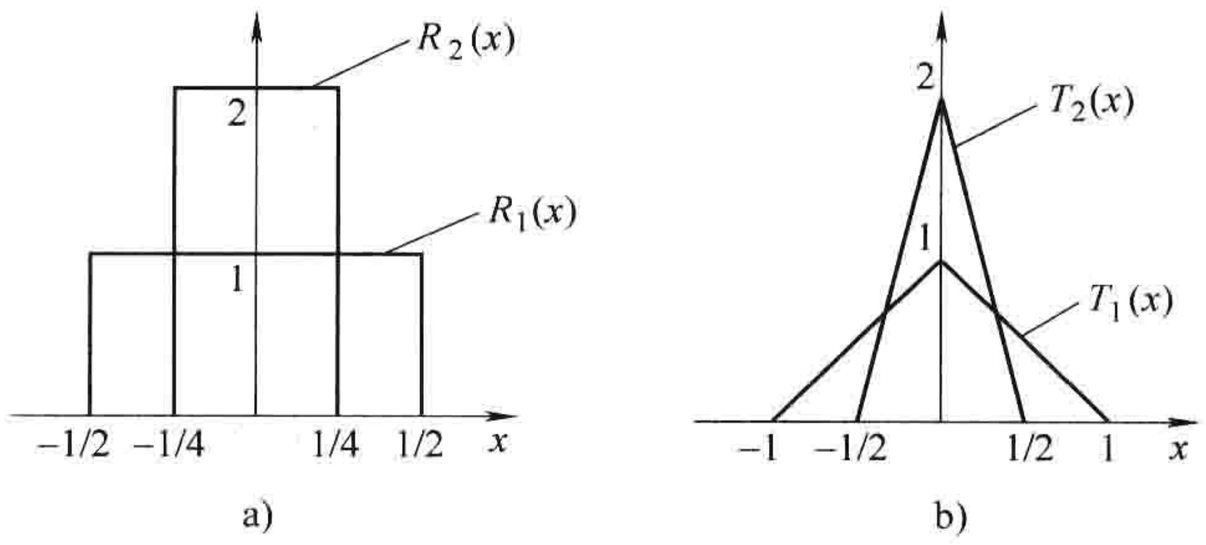


图　1.46

(这是 δ 函数最重要的特性，所以请确信你已经理解它的含义：由于乘积 $f(x)\delta(x)$除了在 $x=0$ 处外处处为零，所以我们可以用 $f(0)$替代 $f(x)$。)特别有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\,dx=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=f(0) \tag{1.89}$$

即在积分号下，δ 函数把 $f(x)$在 $x=0$ 处的值挑选出来。(由此，积分不必从 $-\infty$ 积到 ∞，只要积分区域包含使 δ 函数为无限大的那一点就可以了，比如从 $-\varepsilon$ 到 $+\varepsilon$。)

当然，我们也可以把尖峰从 $x=0$ 移动到另一点，$x=a$(见图 1.47)：

$$\delta(x-a)=\left\{\begin{matrix}0, & x\neq a\\ \infty, & x=a\end{matrix}\right\},\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,dx=1 \tag{1.90}$$

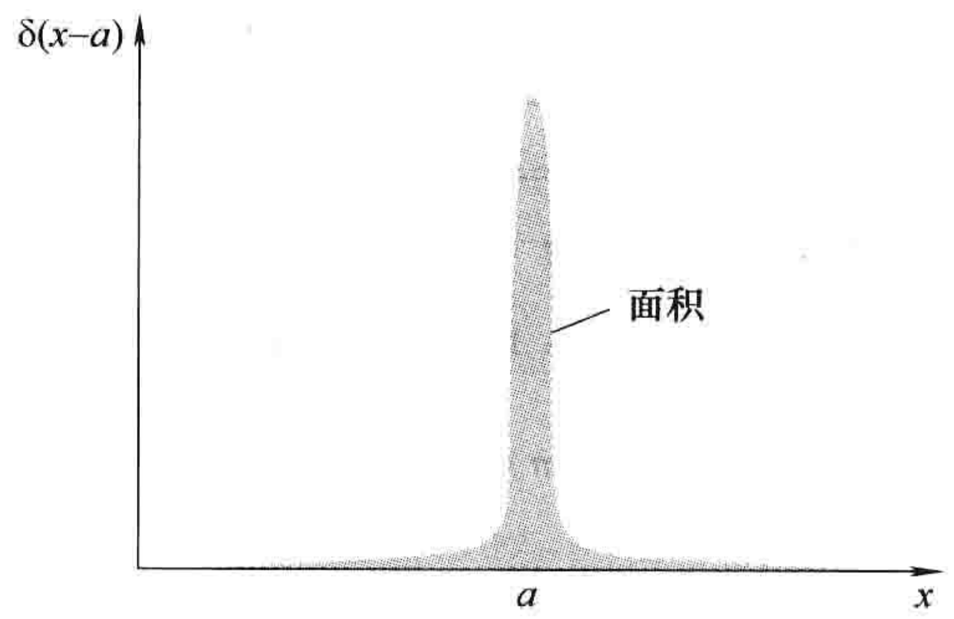


图　1.47

式(1.88)现在应为

$$f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a) \tag{1.91}$$

式(1.89)现在应推广为

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)\,dx=f(a) \tag{1.92}$$

例题 1.14

计算积分

$$\int_0^3 x^3\delta(x-2)\,dx。$$

解： δ 函数把 x^3 在 $x=2$ 处的值挑选出来，所以积分值为 $2^3=8$。请注意，如果积分上限不是 3 而是 1，结果将是零，因为“尖峰”处于积分区域以外。

尽管 δ 本身不是一个正统的函数，但对 δ 的积分是完全合理的。实际上，把 δ 函数想象为总是跟在积分号后的某个东西会更容易理解它的含义。特别地，如果对所有的(“普通”)函数 $f(x)$，都有[⊖]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)D_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)D_2(x)\,dx \tag{1.93}$$

我们说两个 δ 函数(比如说，$D_1(x)$，$D_2(x)$)是相等的。

例题 1.15

证明

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x) \tag{1.94}$$

式中，k 为任意(非零)常数。(特别地，有 $\delta(-x)=\delta(x)$)

解： 对一个任意检验函数 $f(x)$，考虑积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)\,dx$$

作变量变换，令 $y\equiv kx$，则 $x=y/k$，$dx=dy/k$。如果 k 为正，则积分仍然是从 $-\infty$ 到 ∞，但是，如果 k 是负的，则 $x=\infty$ 对应 $y=-\infty$，$x=-\infty$ 对应 $y=\infty$，积分上下限颠倒，恢复到“正当”的积分上下限，产生一个负号。这样

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)\,dx = \pm\int_{-\infty}^{\infty} f(y/k)\delta(y)\,\frac{dy}{k} = \pm\frac{1}{k}f(0) = \frac{1}{|k|}f(0)$$

(负号对应 k 为负，我们把符号吸收到绝对值号中)这样，在积分号下 $\delta(kx)$ 与 $(1/|k|)\delta(x)$ 的作用一样：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(kx)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\frac{1}{|k|}\delta(x)\right]dx$$

因此，按照式(1.93)的判据，$\delta(kx)$ 与 $(1/|k|)\delta(x)$ 相等。

习题 1.43 计算下列积分

(a) $\int_2^6 (3x^2-2x-1)\delta(x-3)\,dx$。

(b) $\int_0^5 \cos x\,\delta(x-\pi)\,dx$。

(c) $\int_0^3 x^3\delta(x+1)\,dx$。

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x+3)\delta(x+2)\,dx$。

习题 1.44 计算下列积分

(a) $\int_{-2}^{2} (2x+3)\delta(3x)\,dx$。

(b) $\int_0^2 (x^3+3x+2)\delta(1-x)\,dx$。

(c) $\int_{-1}^{1} 9x^2\delta(3x+1)\,dx$。

⊖ 这并不像它看起来那样随意。关键点是积分必须对任何 $f(x)$ 都成立。假定，比如说 $D_1(x)$ 与 $D_2(x)$ 在 $x=17$ 的领域确实不同，若我们选择一个在 $x=17$ 处尖锐凸起的函数 $f(x)$，则积分就不会相等。

(d) $\int_{-\infty}^{a}\delta(x-b)\,dx$。(考虑 a 大于或小于 b 两种情况。)

习题 1.45

(a) 证明

$$x\frac{d}{dx}(\delta(x)) = -\delta(x)$$

[提示：利用分部积分。]

(b) 设 $\theta(x)$ 为阶梯函数

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.95}$$

证明 $d\theta/dx = \delta(x)$。

1.5.3　三维 δ 函数

很容易把 δ 函数推广到三维情况：

$$\delta^3(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{1.96}$$

(同前一样，$\boldsymbol{r} \equiv x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ 是从源点到点 (x, y, z) 的位置矢量。)这个三维 δ 函数除了在点(0, 0, 0)为无限大外，处处为零。它的体积分为 1：

$$\int_{\text{整个空间}}\delta^3(\boldsymbol{r})\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\delta(y)\delta(z)\,dx\,dy\,dz = 1 \tag{1.97}$$

式(1.92)的推广式为

$$\int_{\text{整个空间}} f(\boldsymbol{r})\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\,d\tau = f(\boldsymbol{a}) \tag{1.98}$$

同一维情况一样，积分把函数在 δ 函数所处位置的值挑选出来。

现在我们可以解决 1.5.1 小节中的佯谬问题了。回想一下，我们发现 $\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$ 的散度除了原点处处为零，且它对包含原点的体积积分为一个常数(4π)。这正是 δ 函数的特性，显然应有

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\right) = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{1.99}$$

更一般地，

$$\boxed{\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\right) = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{\imath})} \tag{1.100}$$

式中同前一样，$\boldsymbol{\imath} \equiv \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ 是分离矢量。注意，上式中求导是对 $\boldsymbol{r}$ 的，而 $\boldsymbol{r}'$ 保持常数。顺便提及，由于

$$\nabla\left(\frac{1}{\imath}\right) = -\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\right) \tag{1.101}$$

(见习题 1.13)所以

$$\nabla^2\left(\frac{1}{\imath}\right) = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{\imath}) \tag{1.102}$$

例题 1.16

计算积分

$$J = \int_V (r^2 + 2)\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\right)d\tau$$

式中，V 是半径为 R，球心在原点的球。

解法 1：利用式(1.99)重写散度，式(1.98)进行积分

$$J = \int_V (r^2 + 2) 4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\tau = 4\pi(0 + 2) = 8\pi$$

这个非常简单的计算方法显示了 δ 函数强大的优越性，不过我还是要给你们展示第二种方法，这种方法尽管有点繁琐，但是阐明了 1.3.6 小节分部积分的方法。

解法 2：利用式(1.59)，我们把对 $\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$ 的求导转换为对(r^2+2)的求导：

$$J = -\int_V \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\cdot\nabla(r^2+2)\,\mathrm{d}\tau + \oint(r^2+2)\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

梯度为

$$\nabla(r^2+2) = 2r\hat{\boldsymbol{r}}$$

所以体积分为

$$\int \frac{2}{r}\mathrm{d}\tau = \int \frac{2}{r}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 8\pi\int_0^R r\mathrm{d}r = 4\pi R^2$$

而对球的边界$(r=R)$，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\hat{\boldsymbol{r}}$$

所以面积分为

$$\int(R^2+2)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 4\pi(R^2+2)$$

合并两个积分结果有

$$J = -4\pi R^2 + 4\pi(R^2+2) = 8\pi$$

这同解法 1 的结果一致。

习题 1.46

(a) 写出处在 $\boldsymbol{r}'$的点电荷 q 的体电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$表示式，要保证 $\rho(\boldsymbol{r})$的体积积分为 q。

(b) 一个点电荷 $-q$ 处在原点，另一个点电荷 $+q$ 处在 a 点，写出这个电偶极子的体电荷密度。

(c) 一个球心在原点，半径为 R 的无限薄球壳，总电荷为 Q，均匀分布在球壳上，它的体电荷密度是多少？[注意：体电荷密度对整个空间的积分必须等于 Q。]

习题 1.47 计算下列积分：

(a) $\int_{\text{整个空间}}(r^2 + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a} + a^2)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\mathrm{d}\tau$，其中 $\boldsymbol{a}$ 是一个常矢量，a 是它的量值。

(b) $\int_V |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{b}|^2\delta^3(5\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau$，式中$V$是中心在原点，边长为 2 的立方体，$\boldsymbol{b} = 4\hat{\boldsymbol{y}} + 3\hat{\boldsymbol{z}}$。

(c) $\int_V[r^4 + r^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}) + c^4]\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{c})\mathrm{d}\tau$，式中 V 是球心在原点，半径为 R 的球；$\boldsymbol{c} = 5\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}} + 2\hat{\boldsymbol{z}}$，$c$ 是它的量值。

(d) $\int_V \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{r})\delta^3(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau$，式中 $\boldsymbol{d} = (1, 2, 3)$，$\boldsymbol{e} = (3, 2, 1)$，$V$是半径为 1.5，球心在(2, 2, 2)的球。

习题 1.48 同例题 1.16 一样，用两种方法计算积分

$$J = \int_V \mathrm{e}^{-r}\left(\nabla\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\right)\mathrm{d}\tau$$

式中，V是半径为 R，球心在原点的球。

1.6　矢量场理论

1.6.1　亥姆霍兹定理

自法拉第起，电和磁的规律用电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 来表述。同许多物理规律一样，电磁场的规律可用微分方程表示为非常紧凑的形式。由于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是矢量，它们的微分方程很自然地要涉及矢量导数：散度和旋度。也的确如此，麦克斯韦把整个理论归纳为四个方程，它们是涉及 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 散度和旋度的方程。[⊖]

麦克斯韦方程组导致一个重要的数学问题：在什么程度上一个矢量函数是由它的散度和旋度所决定的？换句话说，如果我告诉你 $\boldsymbol{F}$（它可以是 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{B}$）的散度是一个给定的（标量）函数 D，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = D$$

同时还告诉你 $\boldsymbol{F}$ 的旋度是一个给定的（矢量函数）$\boldsymbol{C}$，即

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}$$

（为保持自洽，$\boldsymbol{C}$ 必须是无散的，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{C} = 0$$

因为旋度的散度总是为零），则你可以由这些确定函数 $\boldsymbol{F}$ 吗？

答案是并不能完全确定。例如，也许你已在习题 1.19 中发现，有很多函数的散度和旋度处处为零——当然平庸情况 $\boldsymbol{F} = 0$ 也属其中，但是 $\boldsymbol{F} = yz\hat{\boldsymbol{x}} + xz\hat{\boldsymbol{y}} + xy\hat{\boldsymbol{z}}$，$\boldsymbol{F} = \sin x \cosh y \hat{\boldsymbol{x}} - \cos x \sinh y \hat{\boldsymbol{y}}$ 等也属这种情况。要解一个微分方程，还必须有适当的边界条件。在电动力学中我们一般要求场在“无限远处”（远离所有的电荷）趋于零。[⊖]有了这些额外的信息，亥姆霍兹定理保证场可以由它的散度和旋度唯一确定（亥姆霍兹定理的证明在附录 B 中给出）。

1.6.2　势函数

如果一个矢量场（$\boldsymbol{F}$）的旋度处处为零，则 $\boldsymbol{F}$ 可以表示为一个标（量）势（V）的梯度：

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{F} = -\nabla V \tag{1.103}$$

（梯度前的负号仅是一个惯例）这是下列定理的要点。

定理 1：无旋场。下列条件是等价的（即，当且仅当 $\boldsymbol{F}$ 满足其他所有条件时，它也满足余下的一条）：

（a）对任何一点有 $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$。

（b）对任何给定的端点，$\int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是不依赖于路径的。

（c）对任何闭合路径，$\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$。

（d）$\boldsymbol{F}$ 是一个标势的梯度，$\boldsymbol{F} = -\nabla V$。

标量势 V 不是唯一确定的——对其加上一个任意常数没有任何影响，因为这不影响梯度。

如果一个矢量场（$\boldsymbol{F}$）的散度处处为零，则 $\boldsymbol{F}$ 可以表示为一个矢（量）势（$\boldsymbol{A}$）的旋度：

⊖ 严格讲来，这仅针对静电静磁情况，在一般情况下，场的散度和旋度与场自身的时间导数也有关。

⊖ 在某些习题中电荷自身的分布可到无限远处（比如，一个无限大的带电平面的电场，或者一根无限长带电流导线的磁场）。在这种情况下，通常的边界条件不再适用，我们必须由所给问题的对称性去唯一确定场。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.104}$$

这是下列定理的主要结论。

定理 2：无散场。下列条件是等价的：

(a) 对任何一点有$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$。

(b) 对任何给定边界的面积分$\int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$是不依赖于所选面的。

(c) 对任何闭合面，$\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0$。

(d) $\boldsymbol{F}$是一个矢量的旋度，$\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{A}$。

矢量势不是唯一确定的——加上一个标量的梯度不会产生任何影响，因为一个梯度的旋度总是零。

现在你应该能够证明这些定理之间的关系了，(a)、(b)和(c)的成立意味着(d)的成立。这非常微妙，后面我们将会用到。顺便提及，在任何情况下一个矢量场$\boldsymbol{F}$(无论它的散度和旋度是什么)总可以表示为一个标量的梯度与一个矢量的旋度之和，即

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V + \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.105}$$

习题 1.49

(a) 设$\boldsymbol{F}_1 = x^2\hat{\boldsymbol{z}}$，$\boldsymbol{F}_2 = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$，计算它们的散度和旋度。哪一个可以表示为一个标量的梯度？请给出一个标势。哪一个可以表示为一个矢量的旋度？请给出一个适当的矢量势。

(b) 证明$\boldsymbol{F}_3 = yz\hat{\boldsymbol{x}} + xz\hat{\boldsymbol{y}} + xy\hat{\boldsymbol{z}}$既可以表示为一个标量的梯度，也可以表示为一个矢量的旋度。给出标势和矢势。

习题 1.50 由定理 1 证明(d)⇒(a)，(a)⇒(c)，(c)⇒(b)，(b)⇒(c)以及(c)⇒(a)。

习题 1.51 由定理 2 证明(d)⇒(a)，(a)⇒(c)，(c)⇒(b)，(b)⇒(c)以及(c)⇒(a)。

习题 1.52

(a) 在习题 1.15 中哪一个矢量可以被表示为一个标量的梯度？给出一个标量函数。

(b) 在习题 1.15 中哪一个矢量可以被表示为一个矢量的旋度？给出一个矢量函数。

第 1 章补充习题

习题 1.53 对函数

$$\boldsymbol{v} = r^2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + r^2\cos\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} - r^2\cos\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

验证散度定理，体积为半径为R的 1/8 球体(图 1.48)，注意要把所选体积的所有表面都考虑到。[答案：$\pi R^4/4$]

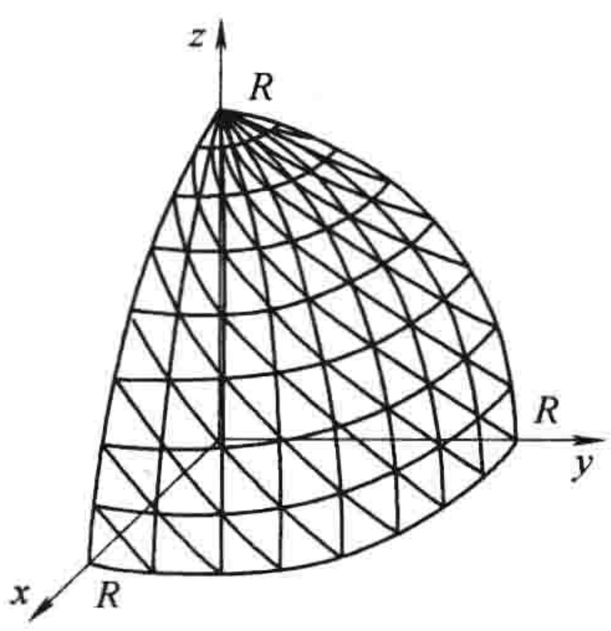


图 1.48

习题 1.54 对函数$\boldsymbol{v} = ay\hat{\boldsymbol{x}} + bx\hat{\boldsymbol{y}}$($a$，$b$为常数)验证斯托克斯定理，面的边界线选为处在$xy$平面，半径为$R$，圆心在原点的圆周线。[答案：$\pi R^2(b-a)$]

习题 1.55 对图 1.49 所示的三角路径对函数

$$\boldsymbol{v} = 6\hat{\boldsymbol{x}} + yz^2\hat{\boldsymbol{y}} + (3y+z)\hat{\boldsymbol{z}}$$

进行线积分。利用斯托克斯定理验证答案。[答案：8/3]

习题 1.56 对图 1.50 所示路径(点的位置标记是它们的直角坐标)对函数

$$\boldsymbol{v} = (r\cos^2\theta)\hat{\boldsymbol{r}} - (r\cos\theta\sin\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} + 3r\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

进行线积分。可用柱坐标或球坐标。利用斯托克斯定理验证答案。[答案：$3\pi/2$]

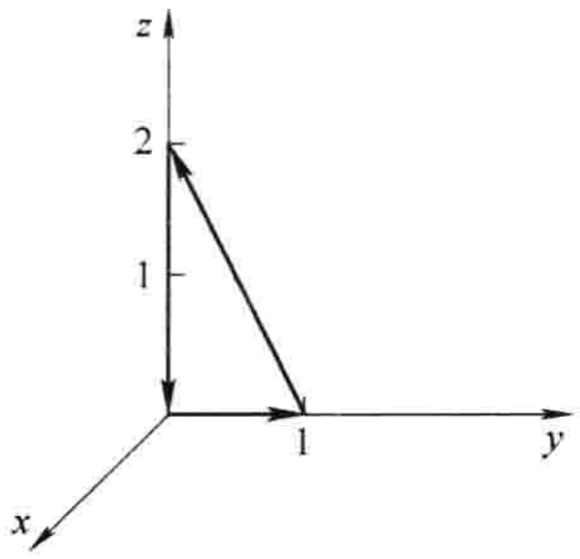


图　1.49

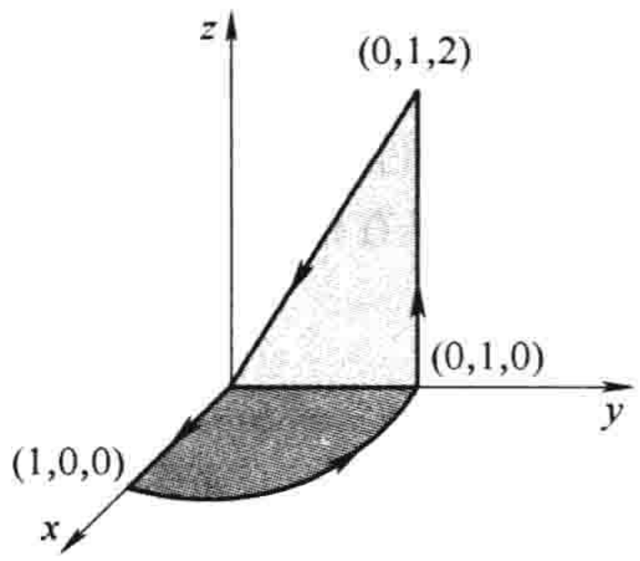


图　1.50

习题 1.57　对图 1.51 所示的三角平面对函数$\boldsymbol{v} = y\hat{\boldsymbol{z}}$验证斯托克斯定理。[答案：$a^2$]

习题 1.58　对图 1.52 所示的“冰淇淋”状体积(顶面是球心在原点，半径为 R 的球面部分)对函数

$$\boldsymbol{v} = (r^2\sin\theta)\hat{\boldsymbol{r}} + (4r^2\cos\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} + (r^2\tan\theta)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

验证散度定理。[答案：$(\pi R^4/12)(2\pi + 3\sqrt{3})$]

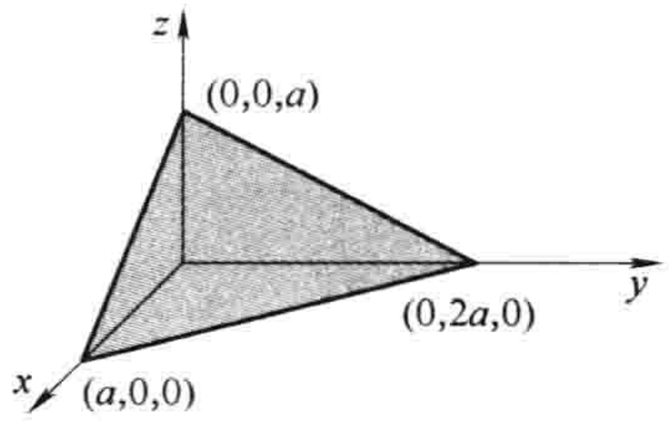


图　1.51

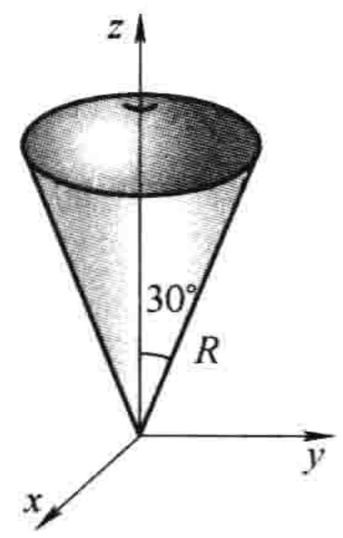


图　1.52

习题 1.59　这里有两个关于基本定理的优美检验：

(a) 把梯度定理的推论 2 与斯托克斯定理(现在用$\boldsymbol{v} = \nabla T$)结合，证明所得结果与你已经知道的二次导数结果是一致的。

(b) 把斯托克斯定理的推论 2 与散度定理结合，证明所得结果是我们已知的结果。

· 习题 1.60　尽管梯度、散度和旋度定理是矢量微积分的基本积分定理，但从它们还可以得到一些如下推理：

(a) $\int_{\mathcal{V}}(\nabla T)\,\mathrm{d}\tau = \oint_{\mathcal{S}} T\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}$。[提示：在散度定理中，令$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}T$，其中 $\boldsymbol{c}$ 是一个常矢量，然后利用乘积求导规则。]

(b) $\int_{\mathcal{V}}(\nabla\times\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}}\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{a}$。[提示：在散度定理中以$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{c}$取代$\boldsymbol{v}$。]

(c) $\int_{\mathcal{V}}[T\nabla^2 U + (\nabla T)\cdot(\nabla U)]\,\mathrm{d}\tau = \oint_{\mathcal{S}}(T\nabla U)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$。[提示：在散度定理中令$\boldsymbol{v} = T\nabla U$]

(d) $\int_{\mathcal{V}}(T\nabla^2 U - U\nabla^2 T)\,\mathrm{d}\tau = \oint_{\mathcal{S}}(T\nabla U - U\nabla T)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$。[评注：此式称为格林定理，它可直接由(c)导出，而(c)有时称为格林恒等式。]

(e) $\oint_{\mathcal{S}}(\nabla T)\times\mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\oint_{\mathcal{P}} T\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。[提示：在斯托克斯定理中令$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}T$。]

· 习题 1.61 积分

$$\boldsymbol{a} \equiv \int_S \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{1.106}$$

有时称为面 $\boldsymbol{S}$ 的矢量面积。显然，如果 $\boldsymbol{S}$ 恰好是平坦的，则 $|\boldsymbol{a}|$ 就是普通的(标量)面积。

(a) 求出半径为 R 的半球面的矢量面积。

(b) 证明对任何闭合曲面都有 $\boldsymbol{a}=0$。[提示：利用习题 1.60(a)。]

(c) 证明对任何具有相同边界线的面 $\boldsymbol{a}$ 都是相同的。

(d) 证明

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\oint \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.107}$$

式中，积分是沿着边界线的。[提示：证明此题的一个方法是画一个顶点在原点的圆锥面。把圆锥面分割为无限小的三角形 V 形条，每一条的顶点在原点，对边是 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，然后应用叉积的几何解释(图 1.8)。]

(e) 证明对任何常矢量都有

$$\oint (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} \tag{1.108}$$

[提示：在习题 1.60(e)中令 $T=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}$。]

· 习题 1.62

(a) 求出函数

$$\boldsymbol{v} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r}$$

的散度。首先像式(1.84)那样直接计算。像式(1.85)那样，利用散度定理验证你的结果。它同函数 $\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$ 那样在原点为 δ 函数吗？$r^n\hat{\boldsymbol{r}}$ 散度的一般公式是什么？[答案：$\nabla\cdot(r^n\hat{\boldsymbol{r}}) = (n+2)r^{n-1}$，但是 $n=-2$ 除外，此时散度为 $4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$]

(b) 求出 $r^n\hat{\boldsymbol{r}}$ 的旋度。用习题 1.60(b)验证你的结果。[答案：$\nabla\times(r^n\hat{\boldsymbol{r}}) = 0$]

第2章　静　电　学

2.1　电场

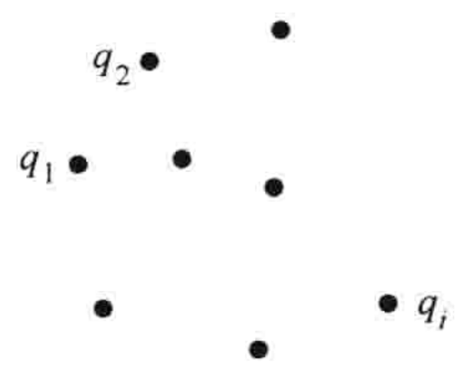
2.1.1　引言

在电磁理论中我们所希望解决的基本问题是(见图 2.1)：我们有一些电荷 q_1，q_2，q_3，…(称它们为源电荷)；它们施加给另外一个电荷 Q(称为检验电荷)的力是什么？源电荷的位置(作为时间的函数)给定；检验电荷的轨迹待计算。一般来讲，源电荷和检验电荷都是运动的。

叠加原理有助于这个问题的解决，这个原理指出，任何两个电荷之间的相互作用是完全不受其他电荷存在的影响的。这意味着要决定作用在 Q 上的力，我们可以首先计算由 q_1 引起的力 $\boldsymbol{F}_1$(不考虑其他源电荷)，然后依次计算由 q_2 引起的力 $\boldsymbol{F}_2$……最后我们求出所有这些单个力的矢量和：$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \cdots$。由此，如果我们能够求出单个源电荷作用在 Q 上的力，则原则上我们就可以求出所有源电荷作用在 Q 上的力(只不过是反复用同样的方法求出每一个源电荷的作用力，然后把它们叠加在一起)。[⊖]

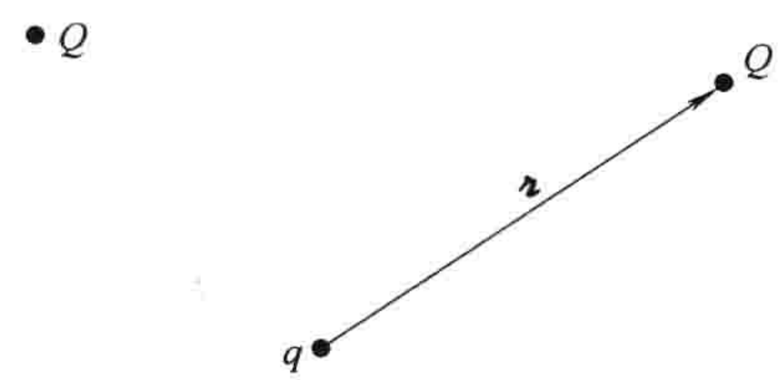
这看起来好像非常容易：为什么不能直接写出 q 作用于 Q 的力的公式，然后计算它？我们可以这么做，并且在第 10 章也将这么做。但是现在我们需要仔细考虑一下，因为作用在 Q 上的力不仅与距 q 的距离有关(见图 2.2)，而且还与两者的速度以及 q 的加速度有关。另外，除了 q 的位置、速度和加速度，电磁“信息”是以光速传播的，在某一时刻影响 Q 的是在早一时刻信息释放时 q 的位置、速度和加速度。

因此，尽管基本问题(q 作用在 Q 上的力是什么)简单明了，要解决就没有那么容易了，我们需要一步步深入。同时，我们要学习的理论包含更复杂问题的解，这些问题并非有非常简单的形式。作为问题的开始，我们首先考虑一种特殊情况——静电学——在这种情况下所有的源电荷都是静止的(尽管检验电荷可以有运动)。



源电荷

图　2.1



检验电荷

图　2.2

2.1.2　库仑定律

设一个静止点电荷 q 距检验电荷 Q 的距离为 $\boldsymbol{r}$，那么它作用在 Q 上的力是什么？答案由(基于实验的)库仑定律给出：

⊖ 叠加原理在你看来也许非常“显然”，但并非如此：比如，如果电磁力是正比于总源电荷二次方的，那么叠加原理就不再成立，因为 $(q_1 + q_2)^2 \neq q_1^2 + q_2^2$(需要考虑交叉项存在)。叠加原理不是一个逻辑上的必然，而是一个实验事实。

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{\imath^2}\hat{\boldsymbol{\imath}}} \tag{2.1}$$

常数 ε_0 称为真空介电常数。用 SI 单位制，力的单位为牛顿(N)，距离为米(m)，电荷为库仑(C)，则

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}$$

可以看出，力正比于两电荷的乘积而反比于它们之间的距离。我们总用 $\boldsymbol{\imath}$ 表示间隔矢量，

$$\boldsymbol{\imath} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \tag{2.2}$$

式中，$\boldsymbol{r}'$是 q 的位矢；$\boldsymbol{r}$ 是 Q 的位矢；$\imath$ 是 $\boldsymbol{\imath}$ 的大小；$\hat{\boldsymbol{\imath}}$ 是沿 $\boldsymbol{\imath}$ 方向的单位矢量。力沿 q 到 Q 的连线方向；如果 q 同 Q 同号，是排斥力，如果 q 同 Q 反号，是吸引力。

库仑定律和叠加原理构成了静电学的物理基础——余下的事情，除了有关物质的某些特殊性质，仅是一些阐明基本规律的数学方法。

习题 2.1

(a) 12 个带相同电荷量 q 的电荷分别位于一个正 12 边形的顶角处(比如，在一个钟表的每一个读数处)。一个检验电荷 Q 位于这个正 12 边形的中心，它受到的合力是多大?

(b) 假定一个电荷被移走(处在 6 点钟位置的那个)，则作用在 Q 上的力是什么? 仔细解释你的理由。

(c) 现在，设 13 个带相同电荷量 q 的电荷分别位于一个正 13 边形的顶角处，那么，位于这个正 13 边形中心的 Q 受的力是什么?

(d) 假定 13 个电荷中的一个电荷被移走，则作用在 Q 上的力是什么? 解释你的理由。

2.1.3 电场

如果我们有若干个点电荷 q_1，q_2，q_3，…，它们距检验电荷 Q 的距离分别为 $\imath_1$，$\imath_2$，$\imath_3$，…，则 Q 受到的力显然为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \cdots \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 Q}{\imath_1^2}\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + \frac{q_2 Q}{\imath_2^2}\hat{\boldsymbol{\imath}}_2 + \frac{q_3 Q}{\imath_3^2}\hat{\boldsymbol{\imath}}_3 + \cdots\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{\imath_1^2}\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + \frac{q_2}{\imath_2^2}\hat{\boldsymbol{\imath}}_2 + \frac{q_3}{\imath_3^2}\hat{\boldsymbol{\imath}}_3 + \cdots\right)\end{aligned}$$

或者

$$\boxed{\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}} \tag{2.3}$$

式中，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\imath_i^2}\hat{\boldsymbol{\imath}}_i \tag{2.4}$$

称为源电荷的电场。注意，它是坐标($\boldsymbol{r}$)的函数，因为间隔矢量 $\boldsymbol{\imath}_i$ 依赖于场点 P(图 2.3)的坐标。但是它与检验电荷无关。显然电场是一个矢量，它由源电荷在空间的分布决定，并且是逐点变化的；物理上，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$是单位检验电荷在场点 P 所受的力。

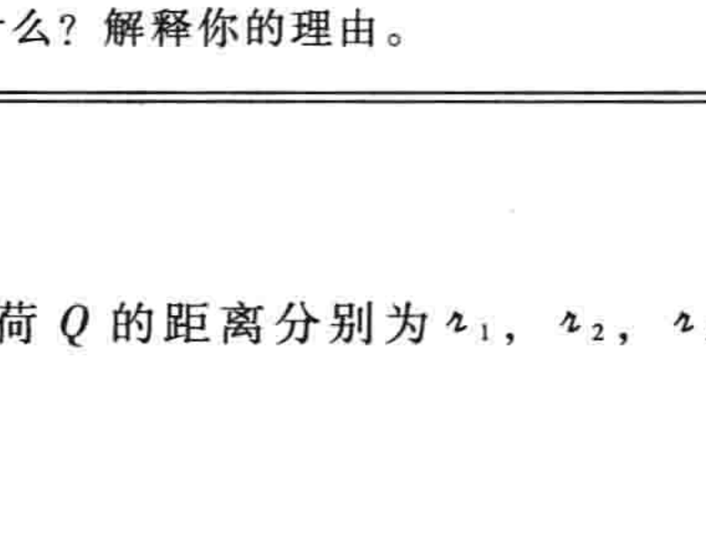


图 2.3

精确来讲，电场是什么? 我有意从你们可能称为 $\boldsymbol{E}$ 的“最低限度”解释开始，把它作为一个计算电场力的中间步骤。但是我鼓励你们把电场想象为一个“真实”的物理实体，它存在于任何

电荷周围的空间。麦克斯韦本人相信，电场和磁场代表存在于不可见的天生的“以太”胶质中的真实应力和应变。狭义相对论已迫使我们放弃以太的概念，以及用它对电磁场所进行的力学解释。(完全抛弃场的概念，把经典电动力学表述为相互距离作用(action-at-a-distance)的理论，还是有可能的，尽管有点繁杂)。此时，我无法确切告诉你们电场到底是什么——而仅能告诉你们如何计算它以及一旦得到它我们能够拿它做什么。

习题 2.2

(a) 两个都带电为 q 的电荷，相距 d 放置，求距它们中点为 z 处(图 2.4)电场的大小和方向。用 $z \gg d$ 时所期望的结果验证你的结果。

(b) 把右边的电荷 q 换为 $-q$，重新计算电场。

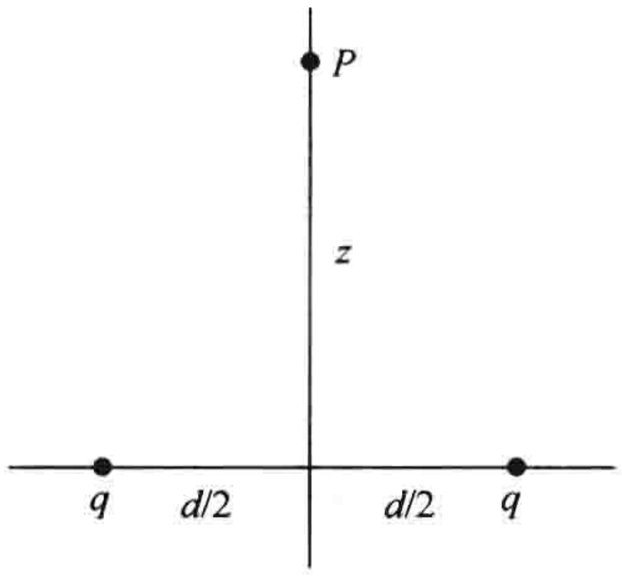


图 2.4

2.1.4 连续分布电荷

我们前面对电场的定义(式(2.4))假设了场源是分立点电荷 q_i 的集合。如果电荷是在一个区域连续分布的，那么，求和需要用积分代替(图 2.5a)：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}q \tag{2.5}$$

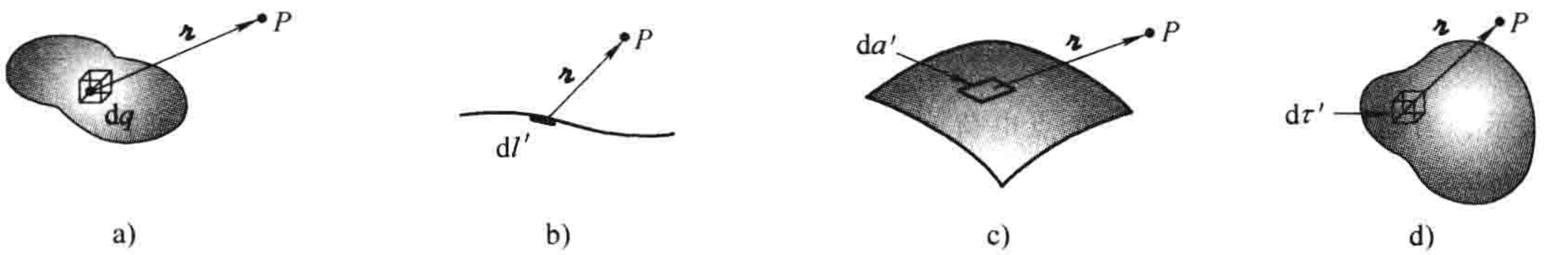


图 2.5

a)连续分布 b)线电荷，λ c)面电荷，σ d)体电荷，ρ

如果电荷分布在一条线段上(见图 2.5b)，单位长度上的电荷为 λ(这称为电荷线密度)，则 $\mathrm{d}q = \lambda\mathrm{d}l'$($\mathrm{d}l'$为线元)；如果电荷分布在一个面上(见图 2.5c)，单位面积上的电荷为 σ(这称为电荷面密度)，则 $\mathrm{d}q = \sigma\mathrm{d}a'$($\mathrm{d}a'$为面元)；如果电荷分布在一个体积中(图 2.5d)，单位体积中的电荷为 ρ(这称为电荷体密度)，则 $\mathrm{d}q = \rho\mathrm{d}\tau'$($\mathrm{d}\tau'$为体元)。这样在积分中分别代入

$$\mathrm{d}q \rightarrow \lambda\mathrm{d}l' \sim \sigma\mathrm{d}a' \sim \rho\mathrm{d}\tau'$$

对线电荷分布，电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_P \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}l' \tag{2.6}$$

对面电荷分布，电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}a' \tag{2.7}$$

对体电荷分布，电场为

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\tau'} \tag{2.8}$$

式(2.8)本身常称做“库仑定律”，因为它是由原始的定律式(2.1)直接导出的，也因为体电荷分布是最常见和最真实的情况。请留意在这些公式中 $\mathscr{r}$ 的意义。最初在式(2.4)中，$\mathscr{r}_i$ 表示从源电荷 q_i 到场点 $\boldsymbol{r}$ 的矢量。相应地，在式(2.5)—式(2.8)中，$\mathscr{r}$ 表示从 $\mathrm{d}q$(因此从 $\mathrm{d}l'$，$\mathrm{d}a'$，$\mathrm{d}\tau'$)到场点 $\boldsymbol{r}$ 的矢量。[⊖]

例题 2.1

一个长度为 $2L$ 的细杆均匀带电，电荷线密度为 λ，求出垂直于杆且与杆中心距离为 z 处的电场(见图 2.6)。

解： 把杆水平放置，使杆中心处于 $x=0$ 处，在杆左右两端 $\pm x$ 处各取一对线元，由对称性这对线元产生的电场水平分量相互抵消，竖直分量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{\mathscr{r}^2}\right)\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}$$

式中，$\cos\theta = z/\mathscr{r}$；$\mathscr{r} = \sqrt{x^2+z^2}$；$x$ 从 0 积到 L：

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{2\lambda z}{(x^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\lambda z}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{z^2\sqrt{x^2+z^2}}\right)\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda L}{z\sqrt{L^2+z^2}}$$

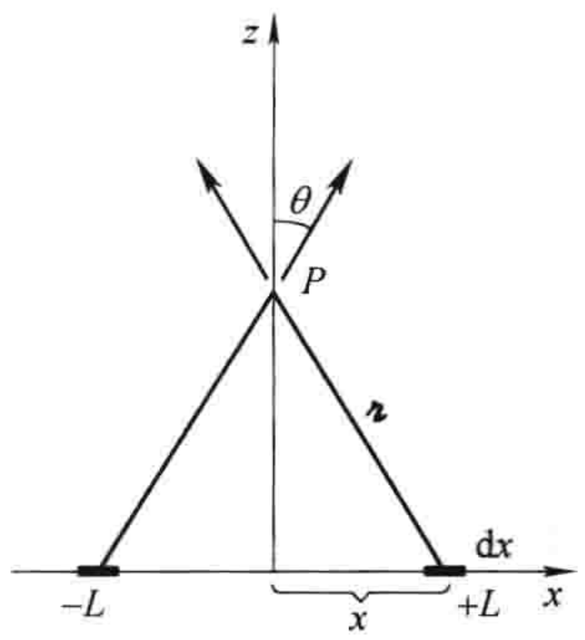


图 2.6

电场的方向沿 z 方向(λ 为正上指，λ 为负下指)。

当 $z \gg L$ 时，结果化为

$$E \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda L}{z^2}$$

这表示，当远离杆时，电场为一个点电荷 $q = 2L\lambda$ 产生的电场。当 $L\to\infty$ 时，我们得到无限长杆产生的电场：

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{z}$$

或者更一般地

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{s} \tag{2.9}$$

式中，s 为距杆的距离。

习题 2.3 一长度为 L 的均匀带电细杆，电荷线密度为 λ，求杆一端上方距杆为 z 处的电场(见图 2.7)。用 $z \gg L$ 时所期望的结果验证你的结果。

习题 2.4 一边长为 a 的正方线框均匀带电，电荷线密度为 λ，求距线框中心高度为 z 处的电场(见图 2.8)。[提示：利用习题 2.1 的结果。]

习题 2.5 一半径为 r 的圆形线框均匀带电，电荷线密度为 λ，求距线框中心高度为 z 处的电场(见图 2.9)。

⊖ 注意：单位矢量 $\hat{\mathscr{r}}$ 不是常数；它的方向依赖于源点 $\boldsymbol{r}'$，因此在式(2.5)—式(2.8)中它不能被拿出积分号外。在实用中，即便使用曲线坐标系去计算积分，你也必须用直角分量($\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$ 是常数，可以拿到积分号外)。

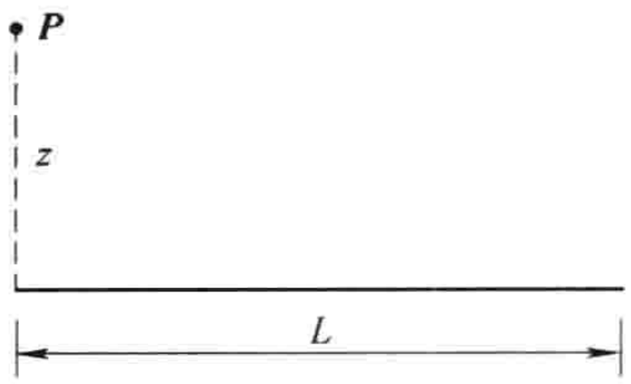


图 2.7

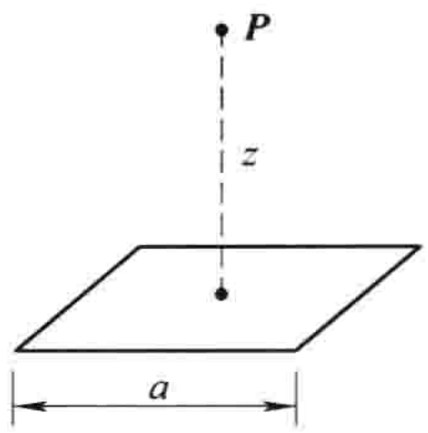


图 2.8

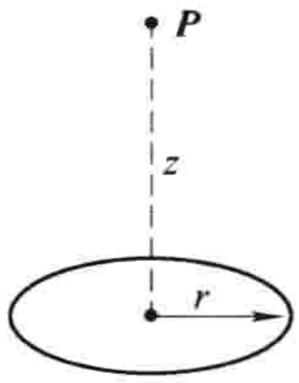


图 2.9

习题 2.6 一半径为 R 的均匀带电圆片，电荷面密度为 σ，求距圆片中心高度为 z 处的电场(见图 2.10)。对所得结果考虑 $R\to\infty$ 的极限情况以及 $z>>R$ 的情况。

习题 2.7 一半径为 R 的均匀带电球面，电荷面密度为 σ，求距离球心为 z 处的电场(见图 2.11)。分别考虑 $z<R$(球面内)和 $z>R$(球面外)。用球面上的总电荷 q 表示你的结果。[提示：用余弦定理把 r 用 R 和 θ 表示。注意要取平方根的正值：如果 $R>z$，$\sqrt{R^2+z^2-2Rz}=R-z$，如果 $R<z$，则 $\sqrt{R^2+z^2-2Rz}=z-R$]

习题 2.8 利用习题 2.7 的结果，求半径为 R，电荷体密度为 ρ 的均匀带电球在球内和球外的电场。以总电荷 q 表示你的结果。画出 $|\boldsymbol{E}|$ 作为到球心距离函数的图形。

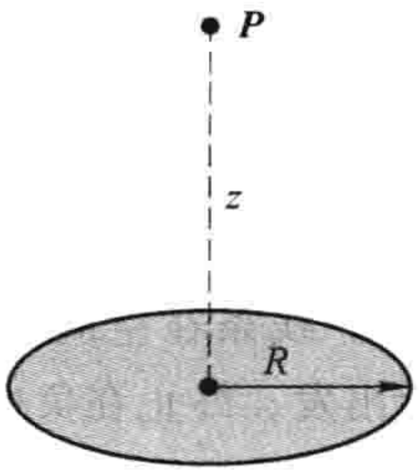


图 2.10

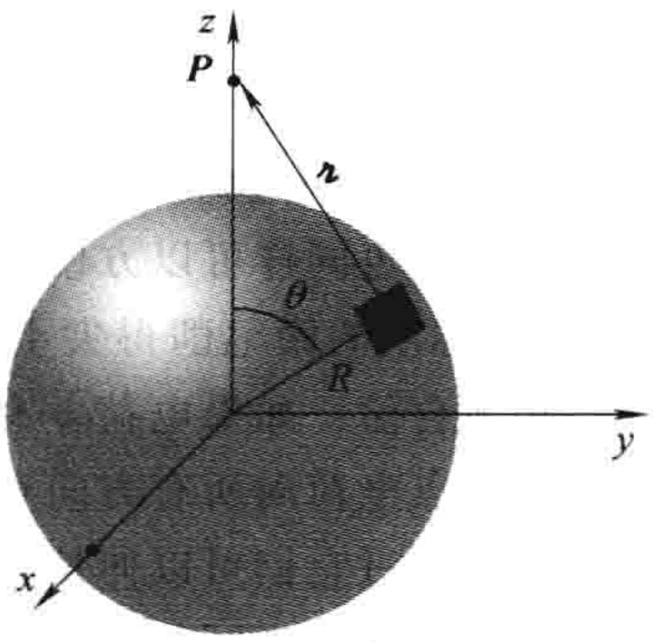


图 2.11

2.2 静电场的散度和旋度

2.2.1 电场线、电场强度通量和高斯定理

对我们现在研究的静电学问题，式(2.8)告诉我们如何去计算一个电荷分布产生的电场，式(2.3)告诉我们这个电场对检验电荷作用的力是什么。遗憾的是，也许你在演算习题 2.7 时已经发现，即使是对非常简单合理的电荷分布，计算 $\boldsymbol{E}$ 所涉及的积分也非常棘手。对静电学剩余的大部分内容是专注于避免这些积分的技巧和工具。我们将从 $\boldsymbol{E}$ 的散度和旋度开始。我在 2.2.2 小节将从式(2.8)直接计算 $\boldsymbol{E}$ 的散度，但是我们首先从一个更有启发性的定性探讨出发。

让我们从最简单的情况开始，一个位于原点的点电荷：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{2.10}$$

为了对这个电场有些感性认识，在图 2.12a 中画出了它一些有代表性的矢量。由于这个电场是按 $1/r^2$ 减小的，离原点越远矢量越短；矢量的方向总是径向外指的。但是有一个更好的方法来表示

这个电场，即把箭矢连接起来，形成电场线(见图 2.12b)。你也许会认为我这样做会失去电场强度的信息，因为电场强度的大小是由箭矢的长度表示的。实际上，并非如此，电场的大小可由电场线的密度表示：在靠近原点处电场较强，电场线较密，在远离原点处电场较弱，电场线较稀疏。

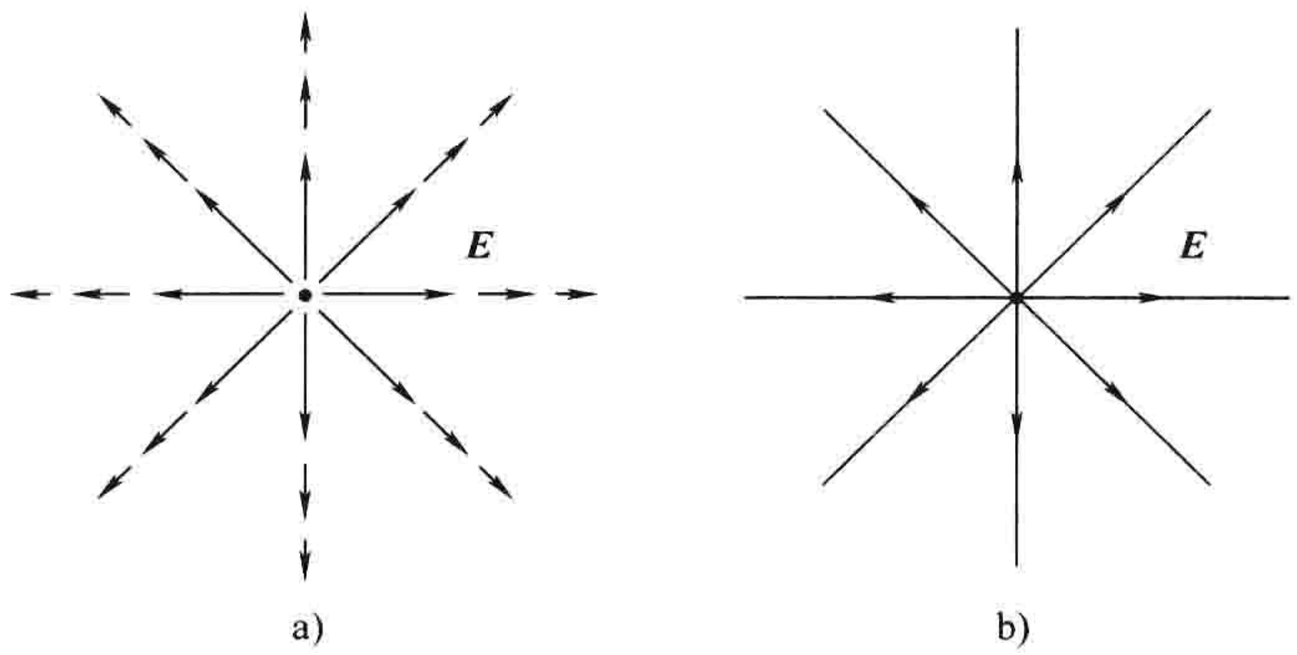


图 2.12

实际上，当我在一个二维面上画出电场线时，电场线图有点失真，因为穿过一个半径为 r 的圆圈的电场线密度是总的电场线数除以周长$[n/(2\pi r)]$，它按 $1/r$ 减小，并非 $1/r^2$。但是，如果在三维空间来画电场线(像一个球形针插，在所有的方向都有外指的针)，则电场线密度是总的电场线数除以球表面积$[n/(4\pi r^2)]$，这的确是按 $1/r^2$ 减小的。

这样的电场线图也同样可以方便地表示更复杂的场。当然，在图中你想要画多少电场线与你的精力有关(也与你用的铅笔削得尖不尖有关)，不过为了得出电场的特征，你应当画出足够的电场线，并且必须自洽：如果电荷 q 有 8 条线，则 $2q$ 应有 16 条。线条在空间的分布也必须合理——它们从一个点电荷向所有方向对称发出。电场线从正电荷出发，终止在负电荷上；它们不能在半空中中断，不过它们可以伸长到无限远处。另外，电场线也不能交叉——如果交叉意味着在交叉点处的电场有两个不同的方向，这是不可能的！搞清楚了这些要点，画任何点电荷简单构型的电场线便不是很难的事情：首先在每一个点电荷附近区域画出它的电场线，然后连接这些电场线或者把它们伸展到无限远处(见图 2.13 和图 2.14)。

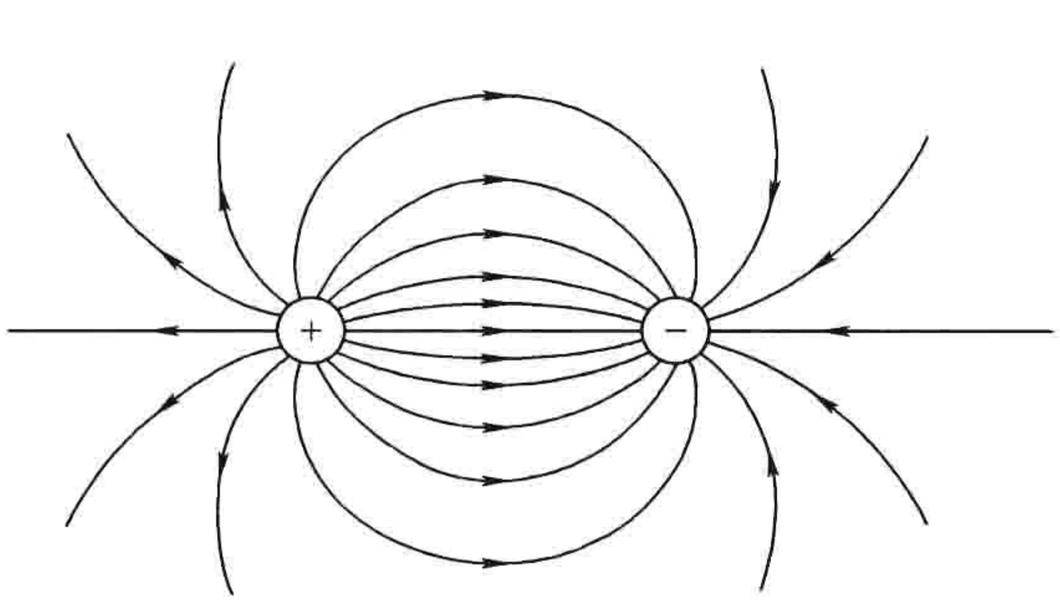


图 2.13　电荷量相同的两反号电荷的电场线图

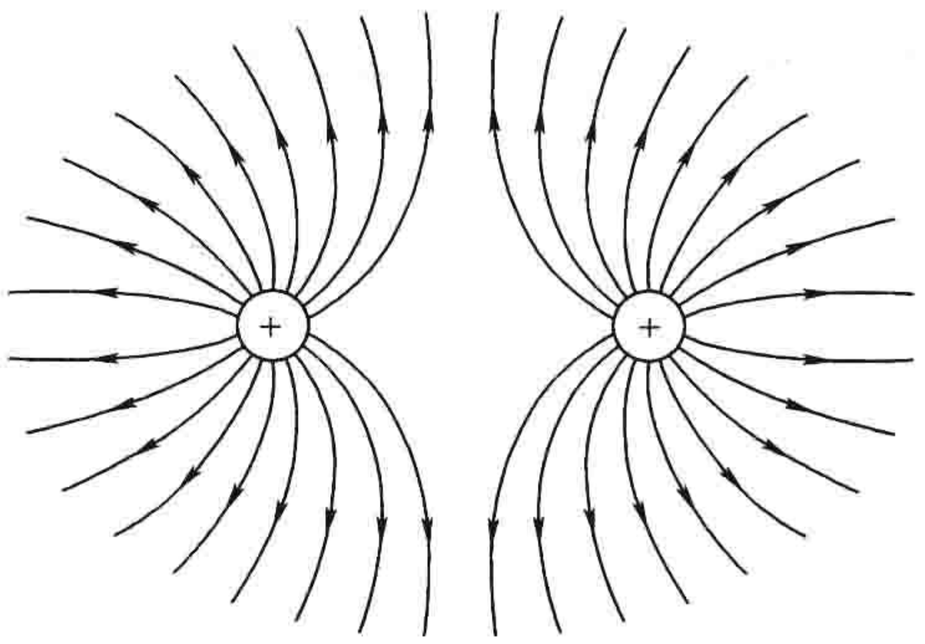


图 2.14　电荷量相同的两同号电荷的电场线图

以这种模型，通过一个面 S 的电场 $\boldsymbol{E}$ 的电场强度通量为

$$\Phi_E \equiv \int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{2.11}$$

这是通过 S 面“电场线数目”的一个量度。我之所以用引号是因为我们仅能画出电场线的一些代

表——总的数目实际上是无限多的。但是对于给定的取样标准，电场强度通量是正比于所画电场线的多少的，因为电场强度是正比于电场线密度的(通过单位面积的电场线数)，因此，$\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 正比于通过无限小面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的电场线数。(点积给出 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 沿 $\boldsymbol{E}$ 方向的分量，如图 2.15 所示。当我们说电场线密度是通过单位面积的电场线数时，我们是指垂直于 $\boldsymbol{E}$ 的面积。)

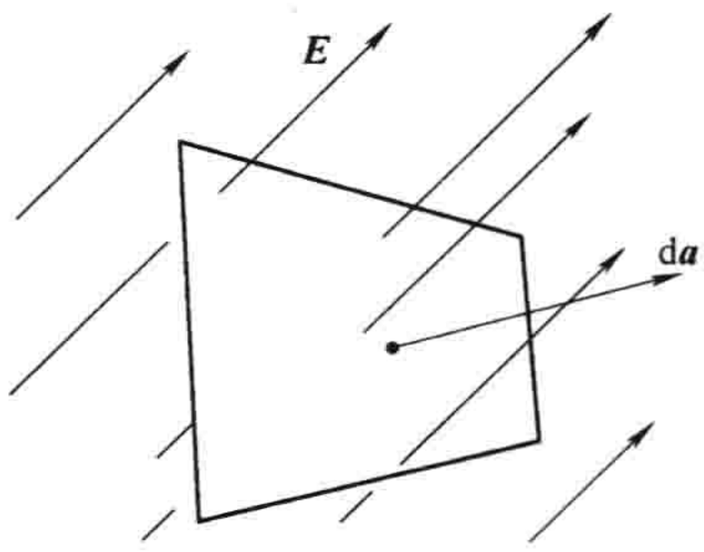


图 2.15

这启示我们，通过一个闭合曲面的电场强度通量是曲面内所包含电荷的量度。因为起源于正电荷的电场线要么穿出闭合曲面，要么终止在这曲面内的负电荷(见图 2.16a)。另外，位于这个闭合曲面外的电荷对总的电场强度通量没有任何贡献，因为它的电场线从闭合面的一面进去而从另一面出来(见图 2.16b)。这就是高斯定理的本质。现在让我们给出定量的描述。

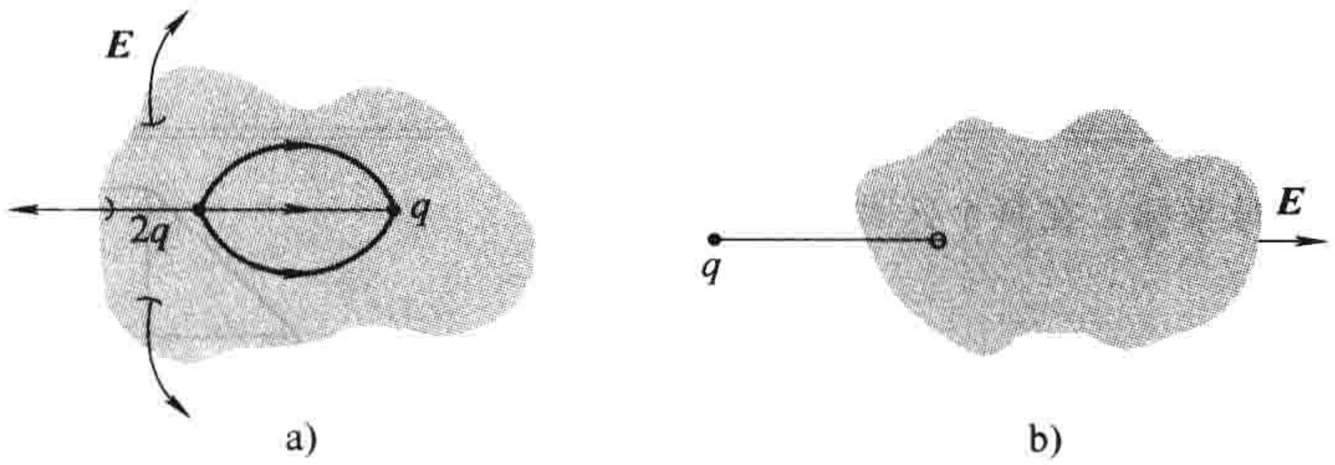


图 2.16

对位于原点的一个点电荷 q，通过半径为 r 的球面的电场强度通量为

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\right)\cdot\left(r^2\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \hat{\boldsymbol{r}}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}q \tag{2.12}$$

注意，球的半径不出现在最后的表达式中，因为球表面积按 r^2 增大，而电场按 $1/r^2$ 减小，所以两者乘积为常数。以电场线的图形更易理解，无论其半径如何，通过任何球面的电场线数目相同。事实上，闭合面不必是球面——任何闭合面，无论其形状如何，通过它的电场线数目都是一样的。显然通过包含电荷 q 的任何闭合曲面的电场强度通量均为 q/ε_0。

现在取代一个点电荷，假设我们有许多电荷。按照叠加原理，总电场是(单个电荷产生的电场的矢量和)

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i$$

通过包围所有电荷的一个闭合面的电场强度通量为

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n}\left(\oint \boldsymbol{E}_i\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}q_i\right)$$

则对任何闭合曲面有

$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_{\mathrm{enc}}} \tag{2.13}$$

式中，Q_{enc} 是闭合曲面内的总电荷。这就是高斯定理的定量描述公式。尽管它并不比库仑定律和叠加原理包含更多的内容，但是它非常有利于应用，我们将在 2.2.3 小节看到这一点。注意，关键点是库仑定律的 $1/r^2$ 特性；没有这一点式(2.12)最后的结果中 r 就不会被消除，$\boldsymbol{E}$ 的总通量将依赖所选面，而不是仅依赖于闭合面内的总电荷。其他的 $1/r^2$ 力(例如，牛顿万有引力)也服从它们自己的“高斯定理”，我们这里讨论的应用也适用于它们。

高斯定理是一个积分方程，但是通过散度定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_V (\nabla\cdot \boldsymbol{E})\,\mathrm{d}\tau$$

我们可以把它转化为微分方程。把 Q_{enc} 以电荷密度 ρ 表示，我们有

$$Q_{\text{enc}} = \int_V \rho \mathrm{d}\tau$$

所以高斯定理变为

$$\int_V (\nabla\cdot \boldsymbol{E})\,\mathrm{d}\tau = \int_V \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)\mathrm{d}\tau$$

由于对任何体积上式都成立，两边的被积函数必须相等：

$$\boxed{\nabla\cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho} \tag{2.14}$$

式(2.14)含有与式(2.13)同样的信息；它被称为高斯定理的微分形式。微分形式更简洁，而积分形式的优点是在讨论点、线和面电荷分布时更容易一些。

习题 2.9 假定用球坐标，在某个区域的电场可以写为 $\boldsymbol{E} = kr^3\hat{\boldsymbol{r}}$（$k$ 为常数）。

(a) 求出电荷密度 ρ。

(b) 求出包含在半径为 R、球心在原点的闭合球面内的总电荷。(用两种不同方法做)

习题 2.10 如图 2.17 所示，一个电荷 q 位于一个立方体的后下角。通过图中阴影面的电场强度通量为多少？

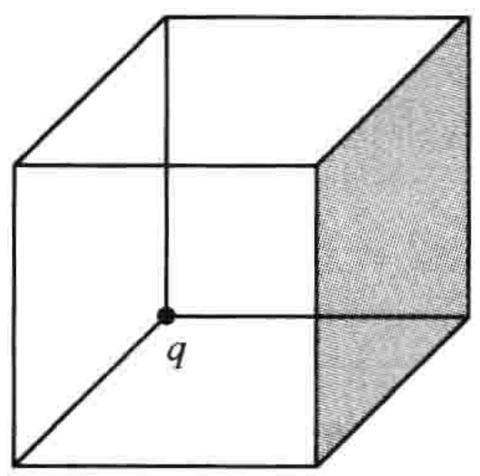


图 2.17

2.2.2 $\boldsymbol{E}$ 的散度

现在让我们回过头来由式(2.8)直接计算 $\boldsymbol{E}$ 的散度：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{整个空间}} \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau' \tag{2.15}$$

(原先仅对有电荷占据的空间积分，但是我们可以把积分扩展到整个空间，因为在被扩展的空间中有 $\rho = 0$。)注意，电场对 $\boldsymbol{r}$ 的依赖是包含在 $\boldsymbol{\imath} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ 中的，我们有

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\right)\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau'$$

这正是我们在式(1.100)计算过的散度

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\right) = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{\imath})$$

这样

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int 4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.16}$$

这正是高斯定理的微分形式(式(2.14))。要恢复到式(2.13)的积分形式，对体积积分并利用散度定理：

$$\int_V (\nabla\cdot \boldsymbol{E})\,\mathrm{d}\tau = \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_{\text{enc}}$$

2.2.3 高斯定理的应用

现在我必须打断理论的探讨而向你们展示高斯定理积分形式的强大威力。当所考虑的问题具有某种对称性时，它提供了一种非常简单快捷计算电场的方法。我以几个例子来阐述这种方法。

例题 2.2

求总电荷为 q，半径为 R 的均匀带电球体球外的电场。

解： 画一个半径 $r > R$ 的球面(见图 2.18)，这称为“高斯面”。高斯定理指出对这个面(对其他任何闭合面也一样)

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\mathrm{enc}}$$

并且有 $Q_{\mathrm{enc}} = q$。乍看起来这个并不能帮助我们进一步继续，因为 $\boldsymbol{E}$ 是含在面积分里的。幸运的是，对称性使我们可以把 $\boldsymbol{E}$ 提取到积分号外：$\boldsymbol{E}$ 的方向是径向外指的，[⊖]处处与 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 同向，所以我们可以去掉点积，

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_S |\boldsymbol{E}| \, \mathrm{d}a$$

另外 $\boldsymbol{E}$ 的大小在球面上是一个常数，所以它可以被移到积分号外：

$$\int_S |\boldsymbol{E}| \, \mathrm{d}a = |\boldsymbol{E}| \int_S \mathrm{d}a = |\boldsymbol{E}| \, 4\pi r^2$$

这样有

$$|\boldsymbol{E}| \, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

或者

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\boldsymbol{r}}$$

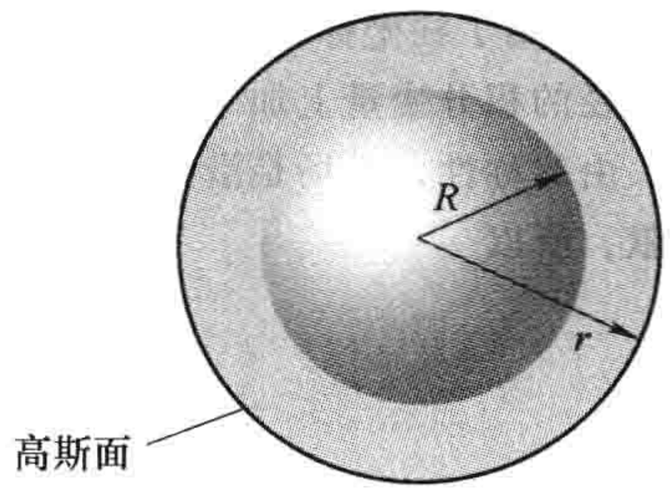


图 2.18

注意，这个结果的一个显著特性是：球外的电场同把所有的电荷集中在球心时所产生的电场是一样的。

高斯定理总是成立的，但是它并不是什么情况下都十分有用。如果 ρ 不是均匀的(或者，至少，不是球对称分布的)，或者我们选择了其他形状的高斯面，在这种情况下，$\boldsymbol{E}$ 的通量仍然是 q/ε_0，但是 $\boldsymbol{E}$ 的方向不一定总是同 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 同向，它在整个高斯面上的值也未必是一个常数，这样我们就无法把 $|\boldsymbol{E}|$ 移到积分号外。对称性是高斯定理这种应用的关键点。据我所知，仅有三个种类的对称性可以这样应用：

1. 球对称性：高斯面为同心球面。
2. 柱对称性：高斯面为共轴柱面(见图 2.19)。
3. 面对称性：高斯面为“扁盒”状，它夹着电荷分布面(见图 2.20)。

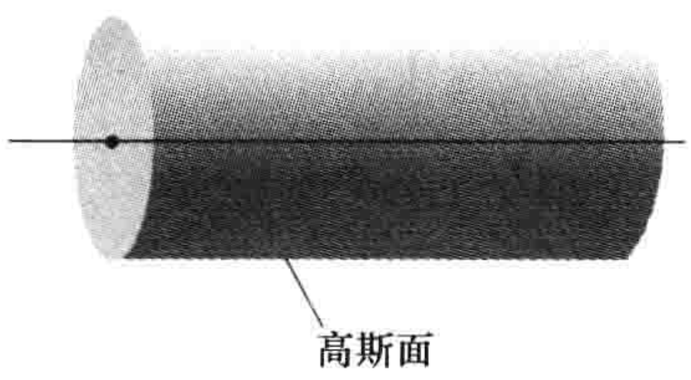


图 2.19

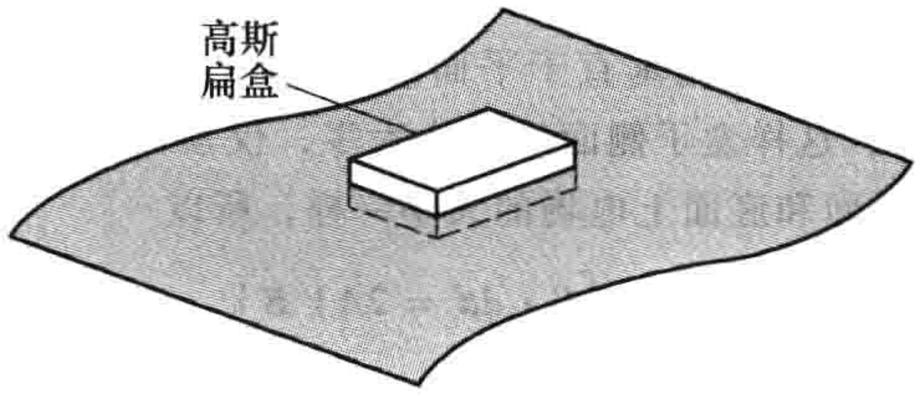


图 2.20

⊖ 如果你怀疑 $\boldsymbol{E}$ 是沿径向的，那么考虑另外的可能性。比如说，假定在赤道它指向东方。但是赤道的指定是完全任意的——这里没有自转，所以这里没有自然定义的“南-北”轴——所以，任何支持 $\boldsymbol{E}$ 指向东方的论断也可以用来证明它指向西方，或者北方，或者任何其他方向。所以唯一的方向只能是径向。

虽然 2 和 3 技术上要求无限长的柱和无限大的平面，我们常常可以对长柱和大面在远离边界的点近似使用。

例题 2.3

一个带电长圆柱体(见图 2.21)，其电荷密度正比于到圆柱轴的距离 s：$\rho = ks$。其中 k 为某个常数。求出圆柱体内的电场。

解： 在圆柱体内画一个长度为 l、半径为 s 的高斯面。对这个面，由高斯定理：

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\mathrm{enc}}$$

高斯面所包含的电荷为

$$Q_{\mathrm{enc}} = \int \rho \mathrm{d}\tau = \int (ks')(s'\mathrm{d}s'\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z) = 2\pi kl \int_0^s s'^2 \mathrm{d}s' = \frac{2}{3}\pi kls^3$$

(这里使用了柱坐标，$\mathrm{d}\phi$ 的积分是从 0 到 2π，$\mathrm{d}z$ 的积分是从 0 到 l，在半径的积分变量上加了一撇，以与高斯面半径 s 区别 。)

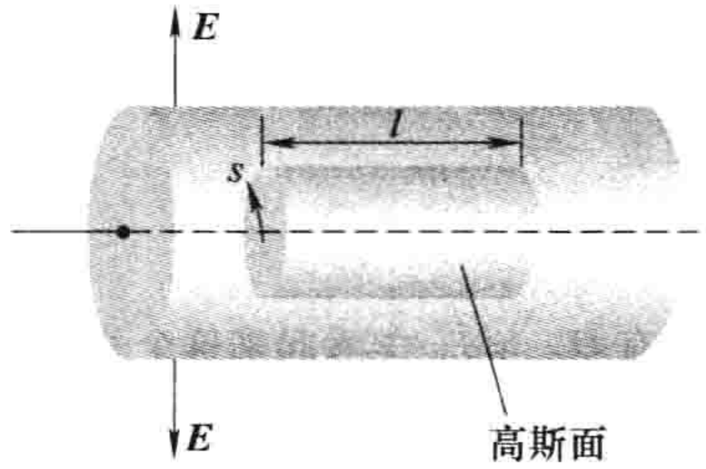


图 2.21

由对称性，电场是沿径向方向的，在柱面上与面元方向一致，而在端面上与面元方向垂直对积分没有贡献，所以

$$\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int |\boldsymbol{E}| \, \mathrm{d}a = |\boldsymbol{E}| \int \mathrm{d}a = |\boldsymbol{E}| \, 2\pi sl$$

这样

$$|\boldsymbol{E}| \, 2\pi sl = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{2}{3}\pi kls^3$$

最后有

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{3\varepsilon_0} ks^2 \hat{\boldsymbol{s}}$$

例题 2.4

一个均匀带电的无限大平面，电荷面密度为 σ，求出它产生的电场。

解： 画出一个“高斯盒面”，盒子的顶面处于平面上方，底面处于平面的下方，顶面和底面与平面的距离相同(见图 2.22)。对盒面应用高斯定理：

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\mathrm{enc}}$$

对现在的情况，$Q_{\mathrm{enc}} = \sigma A$，其中 A 是被盒子所包含的带电平面的面积，它等于盒子的顶面积或底面积。由对称性，电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向是垂直于平面的(如果平面带正电，是外指向的)，这样盒子侧面的积分为零，仅顶面和底面有贡献，而在顶面和底面上电场的大小一样，所以

$$\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 2A|\boldsymbol{E}|$$

因而

$$2A|\boldsymbol{E}| = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma A$$

或者

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{\boldsymbol{n}} \tag{2.17}$$

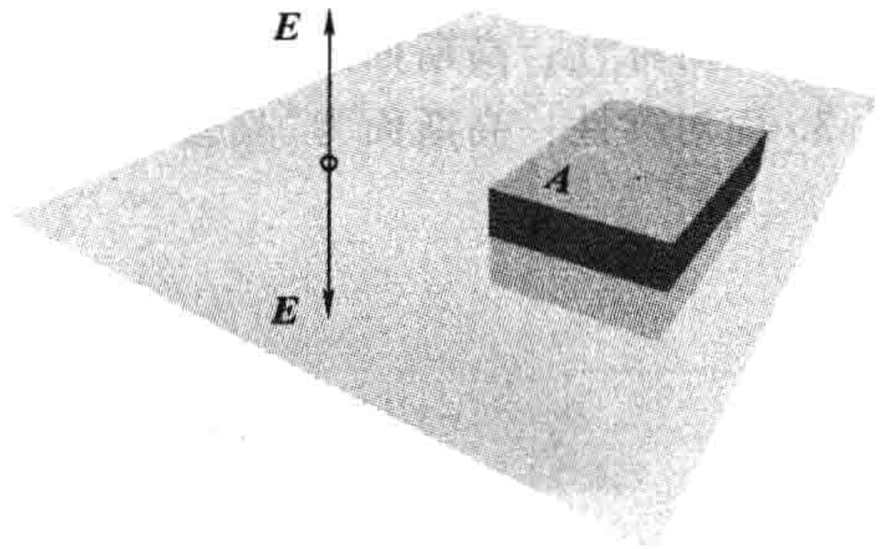


图 2.22

这里，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是从平面外指的单位矢量。在习题 2.6 曾用一个很麻烦的方法得到过这个结果。

乍看起来，这个结果令人不可思议。一个无限大平面产生的电场与到平面的距离无关。这与库仑定律里的 $1/r^2$ 规律符合吗？这里的要点是，当你远离平面时，越来越多的电荷进入你的“视野”(一个始于你眼睛的圆锥)，这个弥补了距离的增加。一个球体外的电场按 $1/r^2$ 减小；一个无限长直线的电场按 $1/r$ 减小；而一个无限大平面的电场不随距离变化。

利用高斯定理直接计算电场局限于球对称、柱对称、平面对称性，我们可以计算由这些对称性物体结合成的物体的电场，即便结合物作为一个整体没有任何对称性。例如，利用叠加原理，我们可以求出两个平行的均匀带电圆柱附近区域的电场，或者在一个无限大平面附近还有一个球体的电场。

例题 2.5

两个无限大均匀带电平面，带有相反电荷，电荷面密度为 $\pm\sigma$(见图 2.23)。求出在下列三个区域内的电场：(i)两者的左边，(ii)两者的中间，(iii)两者的右边。

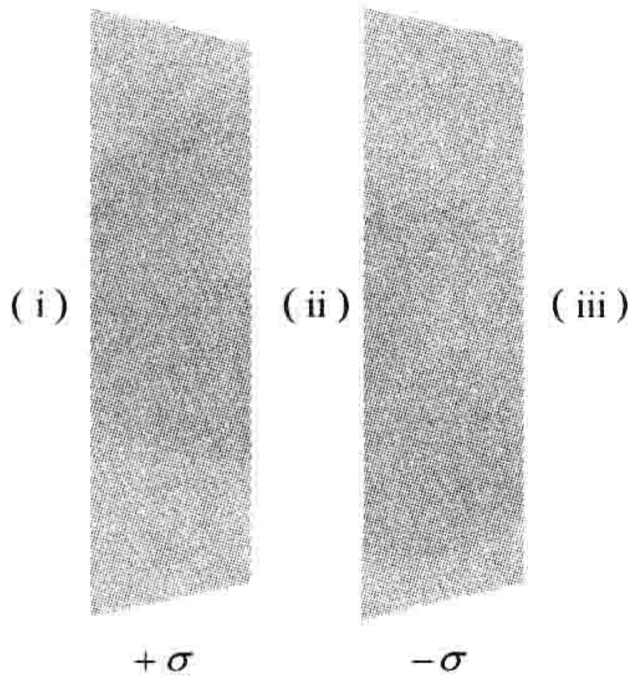


图　2.23

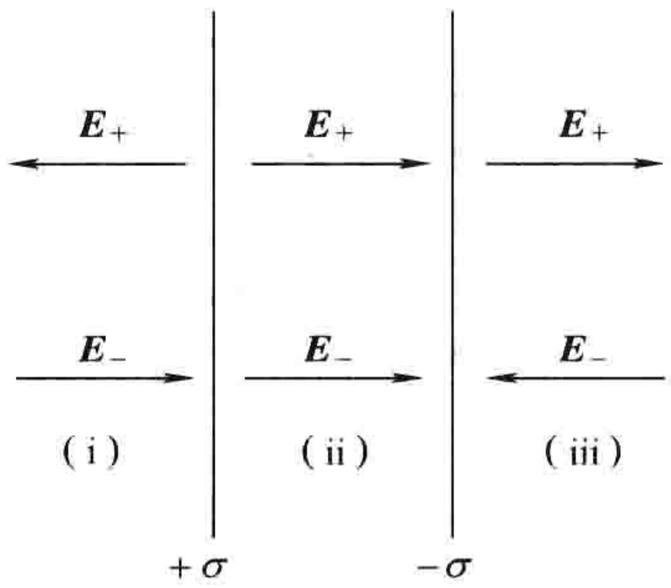


图　2.24

解： 左边一个平面产生一个指向这个平面外的电场 $\sigma/(2\varepsilon_0)$(见图 2.24)，在(i)区指向左，在(ii)区、(iii)区指向右。右边的平面产生一个指向这个平面的电场 $\sigma/(2\varepsilon_0)$，在(i)区和(ii)区指向右，在(iii)区指向左。在(i)区和(iii)区这两个电场相互抵消；在(ii)区这两个电场方向一致相加。结论：在两个平面的中间区域电场大小为 σ/ε_0，方向指向右，其他地方电场为零。

习题 2.11　一个半径为 R 的均匀带电球面，电荷面密度为 σ。利用高斯定理求出该球面内外的电场。与习题 2.7 比较你的结果。

习题 2.12　一个均匀带电球体，电荷密度为 ρ。利用高斯定理求出球内的电场。与习题 2.8 比较你的结果。

习题 2.13　一根无限长直均匀带电线，电荷线密度为 λ，求出与线距离为 s 处的电场，并与式(2.9)比较。

习题 2.14　一个带电球，其电荷密度正比于到球心的距离，$\rho = kr$，k 是一个常数，求出球内的电场。[提示：电荷分布是不均匀的，你必须积分得到高斯面内的电荷。]

习题 2.15　一个中空带电球，其电荷密度在 $a \leqslant r \leqslant b$ 区域(见图 2.25)为

$$\rho = k/r^2$$

求出下列三个区域内的电场：(i)$r < a$，(ii)$a \leqslant r \leqslant b$，(iii)$r > b$。画出 $|\boldsymbol{E}|$ 随 r 的变化图。

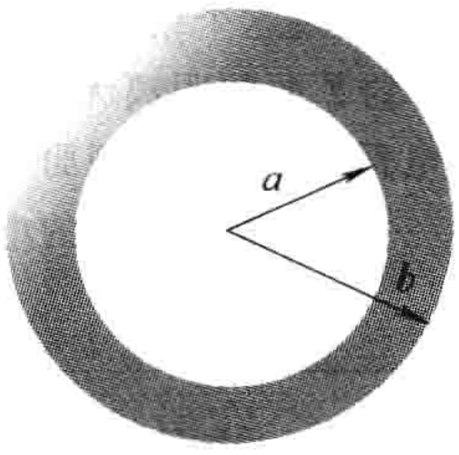


图 2.25

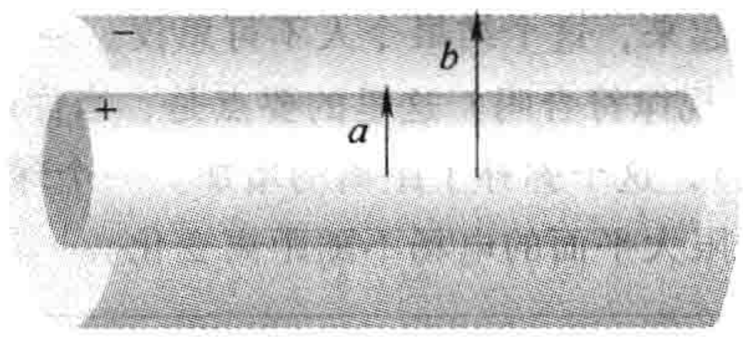


图 2.26

习题 2.16 一个长同轴电缆(见图 2.26)其内芯(半径为 a)载有均匀的电荷，密度为 ρ，外壳层(半径为 b)载有均匀的面电荷。面电荷为负，大小正好使得整个电缆为电中性。求出下列三个区域内的电场：(i)内芯里面($s<a$)，(ii)内芯与外壳层之间($a<s<b$)，(iii)电缆外部($s>b$)。画出 $|\boldsymbol{E}|$ 随 s 的变化图。

习题 2.17 一个无限大平板，厚度为 $2d$，带有均匀的电荷，密度为 ρ(见图 2.27)。令 $y=0$ 为板的中心，作为 y 的函数求出电场，并画出 E 随 y 的变化。设电场方向指向 y 的正方向时 E 取正值，当电场方向指向 $-y$ 的方向时 E 取负值。

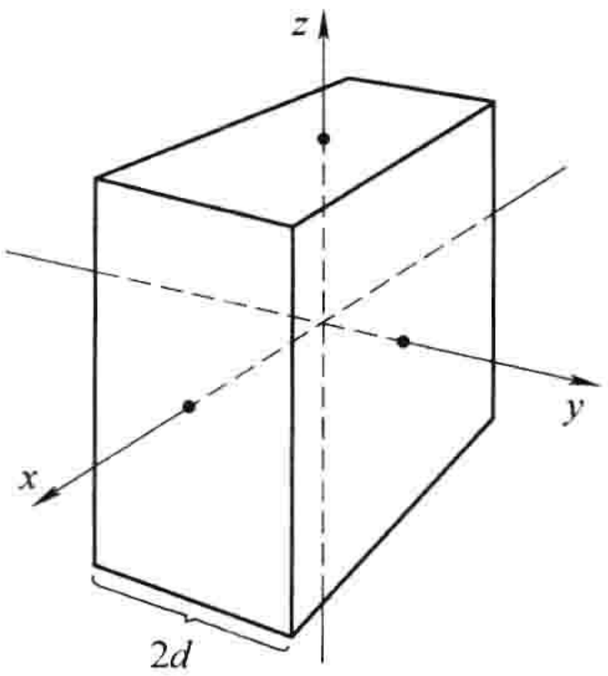


图 2.27

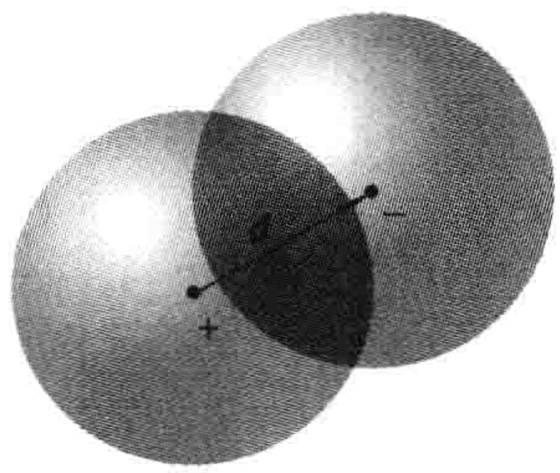


图 2.28

习题 2.18 两个半径都为 R 的带电球体，分别带有均匀的电荷，密度为 ρ 和 $-\rho$，两个球有部分交叠(见图 2.28)。令从带正电的球的球心到带负电的球的球心的距离矢量为 $\boldsymbol{d}$。证明在交叠区的电场为常数，并求出其值。[提示：利用习题 2.12 的结果。]

2.2.4 $\boldsymbol{E}$ 的旋度

本节将计算 $\boldsymbol{E}$ 的旋度，如在 2.2.1 小节计算散度那样，我们首先研究一个最简单的构型：一个位于原点的点电荷。对这种情况

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

观察点电荷的电场线图 2.12，可以想象点电荷场的旋度应当为零，不过我们应该更严格地证明这一点。当我们从一点 a 到另一点 b 对这个电场计算线积分(见图 2.29)

$$\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

时，结果会是什么？在球坐标系中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}r\hat{\boldsymbol{r}}+r\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\sin\theta\mathrm{d}\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$，所以

$$\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r$$

因此

$$\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{q}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_a}-\frac{q}{r_b}\right) \tag{2.18}$$

式中，r_a 是从原点到点 a 的距离；r_b 是从原点到点 b 的距离。对一个闭合路径(这时 $r_a = r_b$)，其积分显然为零：

$$\boxed{\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0} \tag{2.19}$$

因此应用斯托克斯定理有

$$\boxed{\nabla\times \boldsymbol{E} = 0} \tag{2.20}$$

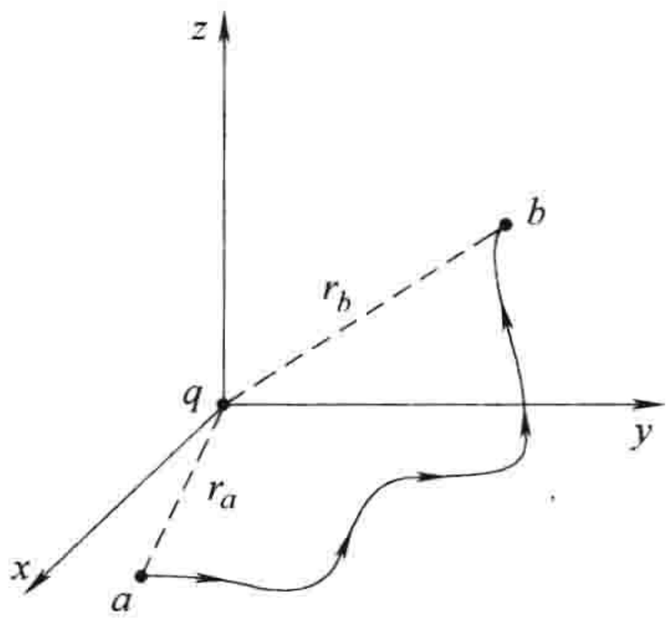


图　2.29

虽然上面的证明是对应于原点的点电荷的，但是无论电荷位于何处，这个结果都是成立的。进一步说，如果我们有很多电荷，则由叠加原理，这些电荷产生的总电场是个别电荷电场的矢量和：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots$$

所以

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = \nabla\times(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots) = \nabla\times\boldsymbol{E}_1 + \nabla\times\boldsymbol{E}_2 + \cdots = 0$$

这样，式(2.19)和式(2.20)对任何静态分布的电荷都是成立的。

习题 2.19　利用 2.2.2 小节的方法，从式(2.8)直接计算 $\nabla\times\boldsymbol{E}$。如果有困难，参考习题 1.62。

2.3　电势

2.3.1　电势的概念

静电场 $\boldsymbol{E}$ 不是一个普通的矢量函数，它是一类特别的矢量函数，因为它的旋度总是为零。例如，$\boldsymbol{E} = y\hat{\boldsymbol{x}}$，就不可能是静电场，因为没有任何电荷分布，无论其形状和位置，可以产生这样的电场。在本节我们探讨静电场的这个独特性质，并且把求 $\boldsymbol{E}$ 矢量的问题转化为一个更简单的求标量的问题。在 1.6.2 小节中的第一个定理指出任何旋度为零的矢量可以表示为某个标量的梯度。我们现在要做的是，在静电场的范畴内，给这个定理更具体的阐述。

由于 $\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$，(由斯托克斯定理)所以 $\boldsymbol{E}$ 对任何闭合回路的线积分为零。因为 $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，对从点 a 到点 b 的所有路径 $\boldsymbol{E}$ 的线积分都是相等的(否则的话，如果我们从一条路径出发而从另一条路径返回，将会得到 $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \neq 0$ 的矛盾结果，如图 2.30 所示。)由于电场的线积分是不依赖于路径的，我们可以定义一个函数[⊖]

$$\boxed{V(\boldsymbol{r}) \equiv -\int_{\mathcal{O}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}} \tag{2.21}$$

⊖　我可能在积分变量上加一个撇号以避免任何可能的混淆：

$$V(\boldsymbol{r}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

不过这有点累赘，我更倾向于用撇号表示源点。但是，当我们明显计算像在例题 2.6 中那样的积分时我将使用撇号。

式中，$\mathcal{O}$ 是一个我们预先设置的标准参考点，这样 V 仅依赖于 $\hat{\boldsymbol{r}}$，我们称 V 为电势。

显然，两个点 a 与 b 之间的电势差为

$$V(b) - V(a) = -\int_{\mathcal{O}}^{b} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{\mathcal{O}}^{a} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{\mathcal{O}}^{b} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \int_{a}^{\mathcal{O}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{a}^{b} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.22}$$

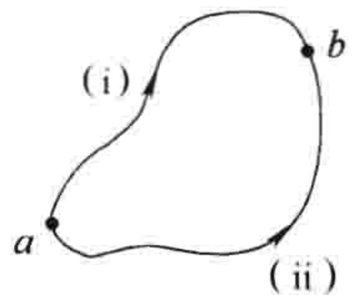


图 2.30

有关梯度的基本定理指出

$$V(b) - V(a) = \int_{a}^{b} (\nabla V) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

所以

$$\int_{a}^{b} (\nabla V) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{a}^{b} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

最后，由于这个等式对任何点 a 和 b 都是成立的，因此被积分函数必须相等：

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\nabla V} \tag{2.23}$$

式(2.23)是式(2.21)的另外一种表述；它表明，静电场是一个标量函数，这就是我们想要证明的。

注意，在上述结论中路径无关(或者等价的 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$)所扮演的微妙且关键的作用。如果 $\boldsymbol{E}$ 的线积分是依赖所选路径的，则 V 的定义式(2.21)将没有意义。改变路径将改变 $V(\boldsymbol{r})$ 的值，在这种情况下是无法定义一个势函数的。顺便提及，不要受式(2.23)中的负号的干扰；它来自于式(2.21)的定义，主要是为方便而引入的。

习题 2.20 在下列所给静电场中有一个是不可能的，是哪一个？

(a) $\boldsymbol{E} = k(xy\hat{\boldsymbol{x}} + 2yz\hat{\boldsymbol{y}} + 3xz\hat{\boldsymbol{z}})$；

(b) $\boldsymbol{E} = k[y^2\hat{\boldsymbol{x}} + (2xy + z^2)\hat{\boldsymbol{y}} + 2yz\hat{\boldsymbol{z}}]$。

式中，k 是具有适当量纲的常数。对可能的电场，求出它的电势，用原点作为参考点。计算 ∇V 验证你的结果。[提示：你必须选择一个具体的路径进行积分。选择什么路径是无关紧要的，因为结果是与路径无关的，但是如果不指定一条具体路径你就无法进行积分。]

2.3.2 有关势的评注

(i) 名称：“势”这个名称有点令人误解，因为它不可避免地使人联想到势能。特别是，你们将在 2.4 节看到，“势”和“势能”之间有密切联系，这更容易引起混淆。我很抱歉无法避免使用这个词。我所能做的就是强调“势”和“势能”是完全不同的概念，它们应当有不同的名称。顺便提及，一个面如果势在其上为常数则称为等势面。

(ii) 势形式的优点：如果知道了 V，很容易求出 $\boldsymbol{E}$——计算梯度：$\boldsymbol{E} = -\nabla V$。如果你仔细思考，这很不寻常，因为 $\boldsymbol{E}$ 是一个矢量(有三个分量)，而 V 是一个标量(仅有一个分量)。一个函数如何能包含有三个独立函数的所有信息呢？答案是 $\boldsymbol{E}$ 的三个分量不是完全独立的；事实上，这三个分量是由 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 的条件联系在一起的。以分量表述为

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

这使我们回到在 2.3.1 小节开始所提到的论断：$\boldsymbol{E}$ 是一类非常特殊的矢量。势形式充分展示了这个特殊性并将其优点发挥到极致，把一个矢量问题约化为一个标量问题，这样就不必为分量所烦扰。

(iii) 参考点 $\mathcal{O}$：由于参考点 $\mathcal{O}$ 的选择是任意的，这给势的定义带来不确定性。改变参考点意味着势将增加一个常数 K：

$$V'(\boldsymbol{r}) \equiv -\int_{\mathcal{O}'}^{r}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{\mathcal{O}'}^{\mathcal{O}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} - \int_{\mathcal{O}}^{r}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = K + V(\boldsymbol{r})$$

式中，K 是 $\boldsymbol{E}$ 从原来的参考点 $\mathcal{O}$ 到新参考点 $\mathcal{O}'$的线积分。当然，势增加一个常数不会影响到两点之间的势差：

$$V'(b) - V'(a) = V(b) - V(a)$$

因为 K 被抵消掉了(实际上，从式(2.22)已经很清楚了，势差是不依赖于参考点 $\mathcal{O}$ 的，因为势差可以表示为 $\boldsymbol{E}$ 从点 a 到点 b 的线积分，与参考点 $\mathcal{O}$ 无关)。这个不确定性也不影响 V 的梯度：

$$\nabla V' = \nabla V$$

因为一个常数的梯度总是零。这就是为什么所有区别仅是所选参考点不同的势对应着同样的电场 $\boldsymbol{E}$。

很显然，这样定义的势没有真实的物理意义，在任何所给点，我们可以通过选择参考点 $\mathcal{O}$ 使此点的势具有任何我们想要的值。在这个意义上这很像高度：如果我问丹佛有多高，你也许会告诉我它的海拔，因为海平面是一个传统方便的参考面。我们也同样可以以华盛顿、格林威治，或者其他任何地方为参考面测量丹佛的高度，得到的结果可能会比海拔高一些(也许会低一些)，但是这并不会改变真实世界的任何事情。我们最关心的是两点之间的高度差，无论以什么作为参考面这个高度差是不会改变的。

尽管如此，但是在静电学中参考点有一种很自然的选择——这类似于测量高度时选择海平面作为参考面——选择距点电荷无限远处为参考点。这样，通常我们选择“在无限远处势为零”。(由于 $V(\mathcal{O})=0$，选择一个参考点等价于选择这个地方的 V 为零。)但是我必须提醒你们在某些特别情况下无法用这种选择：这种情况就是当电荷本身的分布扩展到无限远时。在这种情况下，所遇到的问题是势会出现无限大。例如，我们在例题 2.4 讨论的均匀带电的无限大平面的电场是 $(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\boldsymbol{n}}$；如果我们选择 $\mathcal{O}=\infty$，则距平面高度为 z 处的电势为

$$V(z) = -\int_{\infty}^{z}\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma(z-\infty)$$

在这种情况下，我们可以简单地选择另外的参考点解决这个问题(对无限大平面可以选择原点为参考点)。注意，这样的问题仅出现在课本范例中；在“真实世界”没有电荷分布是扩展到无限远的，我们总可以选择无限远处为参考点。

(iv) 势的叠加原理：电动力学中最初的叠加原理来自于检验电荷 Q 所受的力。它指出 Q 所受到的总力等于每一个源电荷所施力的矢量和：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots$$

除以检验电荷，我们得到电场的叠加原理

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots$$

从一个共同的参考点到 $\boldsymbol{r}$ 积分，我们发现电势也满足这样的叠加原理：

$$V = V_1 + V_2 + \cdots$$

也就是说，在任何一点的电势是所有源电荷分别在此点所产生电势的叠加。只不过现在是普通加法，而不再是矢量加法，这使得电势使用起来更加方便。

(v) 势的单位：对于我们所用的单位制，力的单位是牛顿(N)，电荷的单位是库仑(C)，所以电场的单位是牛顿每库仑(N/C)。相应地，电势的单位是牛顿米每库仑(N·m/C)，或者用焦耳每库仑(J/C)。一焦耳每库仑称为一伏特(V)。

例题 2.6

一个半径为 R 的均匀带电球壳(见图 2.31)，求出球内和球外的电势。选无限远处为参考点。

解：由高斯定理，球外的电场是

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

式中，q 为球壳所带的总电荷。球内的电场为零。对球外的点($r>R$)势为

$$V(r)=-\int_{\mathcal{O}}^{r}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{q}{r'^2}\mathrm{d}r'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}\Big|_{\infty}^{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

要求出球内($r<R$)的电势，我们必须把积分分为两个区域，代入每个区域内的电场：

$$V(r)=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{R}\frac{q}{r'^2}\mathrm{d}r'-\int_{R}^{r}(0)\,\mathrm{d}r'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}\Big|_{\infty}^{R}+0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

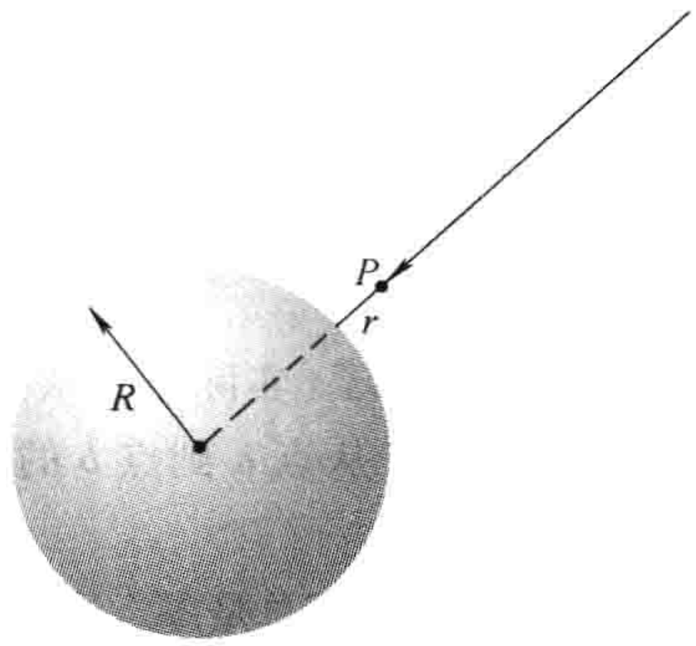


图 2.31

注意，尽管球内的电场为零，但是电势并不为零。电势在球内是一个常数，所以$\nabla V=0$——这是关键所在。在这类问题中你必须从参考点开始积分，电势在这里为零。从球内的电场出发去猜测出的球内的电势，看似简单，但很容易出错。球内的电势对球外电荷的分布非常敏感。如果我们在 $R'>R$ 处再放一个均匀带电球壳，这时球内($r<R$)的电场仍然为零，但是电势发生了变化。高斯定理保证在高斯面之外的电荷，只要它们是球对称或柱对称分布的，它们将不会在高斯面内一点产生净的电场；但是对电势没有这样的结论。

习题 2.21 一个半径为 R 的均匀带电球体，总电荷为 q，求出球外和球内的电势，选无限远处为参考点。在每个区域计算势的梯度，验证所得到的电场是正确的。画出 $V(r)$。

习题 2.22 一条均匀带电的无限长直线，电荷线密度为 λ，求出距离线为 s 处的电势。计算所得电势的梯度，验证所得的电场是正确的。

习题 2.23 对习题 2.15 所给的电荷分布，求出球心处的电势，选无限远处为参考点。

习题 2.24 对习题 2.16 所给的电荷分布，求出电缆轴上一点同电缆外层上一点的电势差。注意如果你用式(2.22)就没有必要选择参考点。

2.3.3 泊松方程和拉普拉斯方程

在 2.3.1 小节我们发现，电场可以写为一个标量势的梯度，

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V$$

这引出一个问题：如果用 V，电场的基本方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\text{和}\nabla\times\boldsymbol{E}=0$$

可以写作什么？这很简单，既然$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot(-\nabla V)=-\nabla^2V$，所以除了一个负号外，电场的散度可表示为电势的拉普拉斯算子。这样，高斯定理的内容可表示为

$$\boxed{\nabla^2V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}\tag{2.24}$$

这称为泊松方程。如果在所考虑区域内没有电荷，$\rho=0$，则泊松方程约化为如下拉普拉斯方程：

$$\nabla^2V=0\tag{2.25}$$

我们将在第 3 章更加仔细地研究这些方程。

除了高斯定理，旋度定理如何？也就是说

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla\times(-\nabla V)$$

必须为零。但是这对 V 没有附加任何条件——梯度的旋度总是为零。当然，我们利用了旋度定理

证明 $\boldsymbol{E}$ 可以表示为一个标量的梯度，所以这没有什么奇怪的：$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 允许 $\boldsymbol{E} = -\nabla V$；反过来，$\boldsymbol{E} = -\nabla V$ 保证了 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$。由于 V 是标量，我们仅需一个方程（泊松方程）求出 V，而对 $\boldsymbol{E}$ 则需要两个，散度和旋度方程。

2.3.4　局域电荷分布的电势

在式(2.21)中我们用 $\boldsymbol{E}$ 定义了 V。通常，尽管 $\boldsymbol{E}$ 是我们想求的量（如果已知 $\boldsymbol{E}$ 求 V 很简单）。一个基本思想是首先求 V 会更容易一些，然后再由梯度求 $\boldsymbol{E}$。典型的问题是，我们知道电荷分布（即我们知道 ρ），我们想求出 V。现在泊松方程联系着 V 和 ρ，遗憾的是这是一个“错误的路线”：如果我们知道 V，可以求出 ρ，但是我们的问题是知道 ρ，而要求出 V。这样我们要做的是“逆转泊松方程”。这是这小节要讲的内容，不过我将采用一种迂回的路线，同前面一样，我们以位于原点的点电荷开始。

选择无限远处为参考点，一个位于原点的点电荷的电势为

$$V(r) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{q}{r'^2}\mathrm{d}r' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}\Big|_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

（你可以体会到用无限远作为参考点的好处：它使积分的下限为零。）注意 V 的正负；在定义 V 时（式(2.21)）所特意选取的负号是为了使正电荷的电势为正。记住正电荷的电势当接近它时是增加的（势峰），而负电荷的电势当接近它时是减小的（势谷），而电场的方向是从正电荷指向负电荷的。

更一般地，一个点电荷 q 周围的电势是

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\imath} \tag{2.26}$$

式中，$\imath$ 总是从电荷到 $\boldsymbol{r}$ 的距离（见图 2.32）。利用叠加原理，则电荷集合所产生的电势为

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\imath_i} \tag{2.27}$$

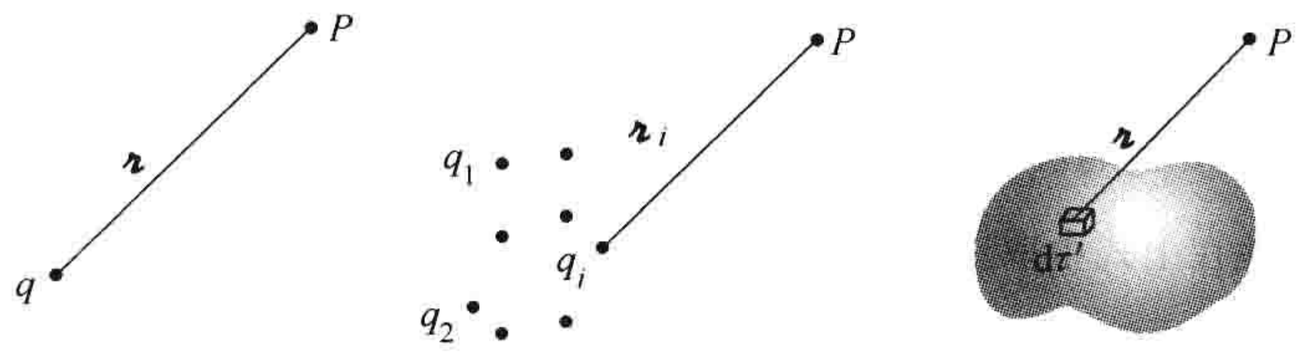


图　2.32

或者对连续电荷分布有

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{\imath}\mathrm{d}q \tag{2.28}$$

特别地，对体电荷分布，上式化为

$$\boxed{V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\imath}\mathrm{d}\tau'} \tag{2.29}$$

这就是我们想要寻找的公式，它告诉我们在知道 ρ 时如何计算 V，如果你愿意，也可以称它为局域电荷分布时“泊松方程的解”。[㊀]你们可以把式(2.29)与用 ρ 表示电场的相应公式（式(2.8)）相比较：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\imath^2}\hat{\boldsymbol{\imath}}\,\mathrm{d}\tau'$$

㊀　式(2.29)是亥姆霍兹定理（附录 B）在静电学中的例子，其中电场的旋度为零，散度是 ρ/ε_0。

除了分母上 $\mathscr{r}^2$ 变为 $\mathscr{r}$ 外，主要的区别在于单位矢量 $\hat{\mathscr{r}}$ 不再出现，所以现在无需考虑分量问题。顺便提及，线电荷和面电荷的电势是

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda(\boldsymbol{r}')}{\mathscr{r}}\mathrm{d}l',\quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{\mathscr{r}}\mathrm{d}a' \tag{2.30}$$

我特别要提醒你们，在这一小节我们选择无限远处为参考点。这在式(2.29)中没有明显体现，但是要记住我们是从位于原点的点电荷的电势$(1/4\pi\varepsilon_0)(q/r)$出发得到式(2.29)的，而所使用的点电荷的电势仅对选择参考点为无限远处成立。如果你们要把这些公式用到那些电荷本身扩展到无限远处的人造问题，积分将会发散。

例题 2.7

求出一个半径为 R 的均匀带电球壳的电势(图 2.33)。

解： 这个问题同例题 2.6，不过现在我们将用式(2.30)

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma}{\mathscr{r}}\mathrm{d}a'$$

设 $\boldsymbol{r}$ 位于 z 上，利用余弦定理把 $\mathscr{r}$ 用极角 θ 表示：

$$\mathscr{r}^2 = R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta'$$

球面上的面元为 $R^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$，所以

$$\begin{aligned}4\pi\varepsilon_0 V(z) &= \sigma\int\frac{R^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta'}}\\ &= 2\pi R^2\sigma\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta'}{\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta'}}\mathrm{d}\theta'\\ &= 2\pi R^2\sigma\left(\frac{1}{Rz}\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\theta'}\right)\Big|_0^{\pi}\\ &= \frac{2\pi R\sigma}{z}\left(\sqrt{R^2+z^2+2Rz}-\sqrt{R^2+z^2-2Rz}\right)\\ &= \frac{2\pi R\sigma}{z}\left[\sqrt{(R+z)^2}-\sqrt{(R-z)^2}\right]\end{aligned}$$

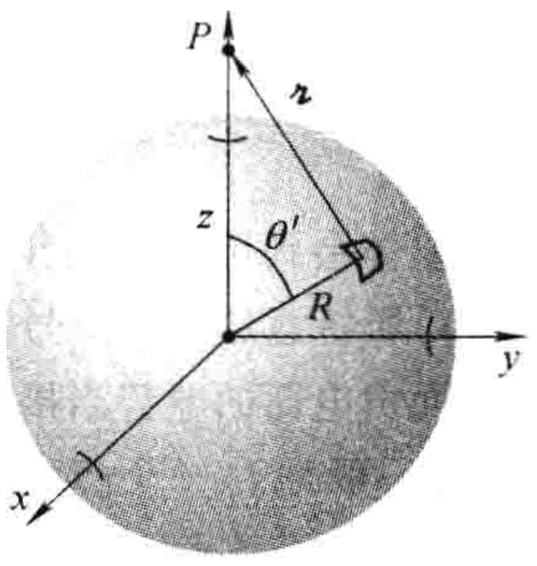


图 2.33

现在我们必须非常小心地在上式中取正根。对球面外的点 $z>R$，所以 $\sqrt{(R-z)^2}=z-R$；对处于球面内的点 $z<R$，所以 $\sqrt{(R-z)^2}=R-z$。这样有

$$V(z)=\frac{R\sigma}{2\varepsilon_0 z}[(R+z)-(z-R)]=\frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 z},\quad \text{球外}$$

$$V(z)=\frac{R\sigma}{2\varepsilon_0 z}[(R+z)-(R-z)]=\frac{R\sigma}{\varepsilon_0},\quad \text{球内}$$

如用球壳上的总电荷 $q=4\pi R^2\sigma$ 表示，球外电势为 $V(z)=(1/4\pi\varepsilon_0)(q/z)$(或者更普遍的是 $V(r)=(1/4\pi\varepsilon_0)(q/r)$)，球内电势为$(1/4\pi\varepsilon_0)(q/R)$。

当然，对这个特殊例子，利用式(2.21)会比用式(2.30)更容易一些，因为利用对称性和高斯定理很容易求出 $\boldsymbol{E}$。但是如果你比较例题 2.7 和习题 2.7，你就会体会到势形式的优点了。

习题 2.25 对图 2.34 所示的三种电荷分布，利用式(2.27)和式(2.30)求出距中心为 z 处的电势。对每一种情况，计算 $\boldsymbol{E}=-\nabla V$，并分别与习题 2.2(a)、例题 2.1 和习题 2.6 比较结果。假定在图 2.34a 中把右边的电荷换为 $-q$，则 P 点的电势为什么？电场是什么？与习题 2.2(b)比较结果，并仔细比较差别。

习题 2.26 一个尖角向下的圆锥面(一个空的冰淇淋壳)均匀带电，电荷面密度为 σ。圆锥的高度为 h，正好等于上圆面的半径。求出尖角 a 到上圆面中心 b 的电势差。

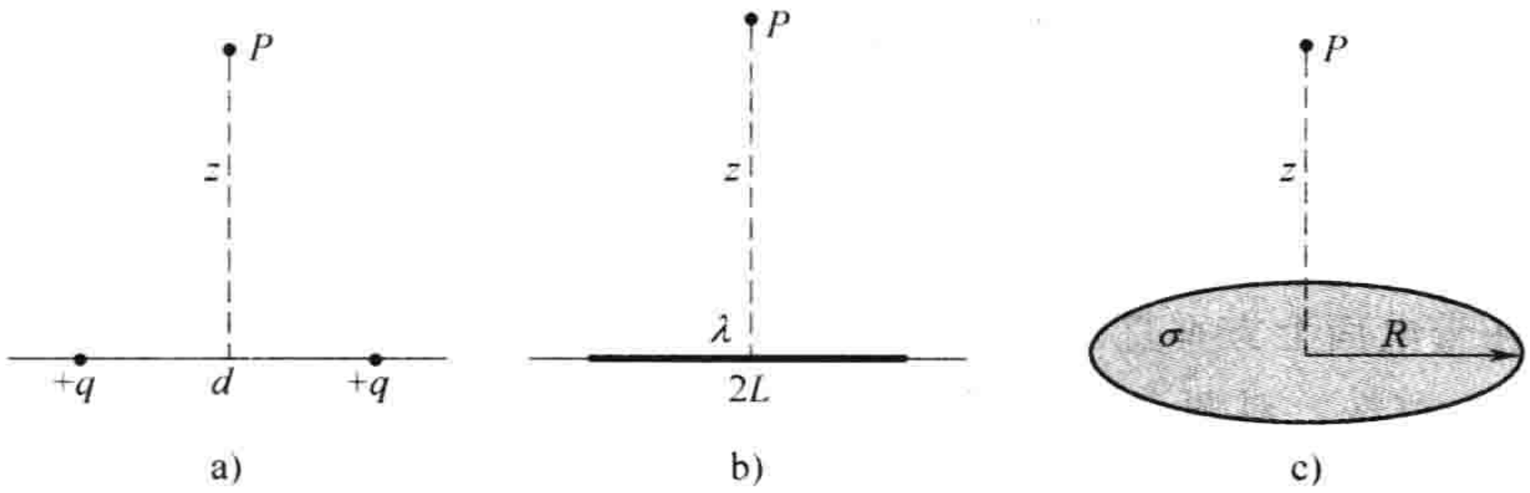


图　2.34

a)两个点电荷　b)均匀线电荷　c)均匀面电荷

习题 2.27　一个均匀带电圆柱体，长度为 L，半径为 R，电荷密度为 ρ，求出圆柱轴上距圆柱中心为 z 处的电势。利用所得结果计算此点处的电场。(假设 $z > L/2$)

习题 2.28　一个均匀带电球体，半径为 R，总电荷为 q。利用式(2.29)求出球内的电势。与习题 2.21 比较结果。

习题 2.29　应用拉普拉斯算子和式(1.102)，验证式(2.29)满足泊松方程。

2.3.5　总结　静电场的边界条件

在典型的静电问题中给定了源电荷分布 ρ，我们想要求出由此产生的电场 $\boldsymbol{E}$。除非问题具有对称性使得可以用高斯定理求解，一般来讲首先计算电势作为一个中间步骤会更容易一些。静电学的三个基本量是：ρ、$\boldsymbol{E}$ 和 V。在前面的讨论中我们已经导出联系它们之间关系的 6 个公式。这些公式很简洁地总结在图 2.35 中。我们是由两个实验上的观测开始的：(1)叠加原理——一个对所有电磁力都成立的普遍规律，(2)库仑定律——静电学的基本规律。其他的都是由此导出的。

你们也许已经注意到，在学习例题 2.4 和例题 2.5，或者演算像习题 2.7、习题 2.11 和习题 2.16 时，当通过一个面电荷 σ 时，电场总存在一个不连续的变化。实际上，很容易求出 $\boldsymbol{E}$ 在这样边界上的改变量。假定我们画出一个非常扁的高斯盒子，盒子的上顶面和下底面正好贴着带电面的上下表面(见图 2.36)。高斯定理指出

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\mathrm{enc}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma A$$

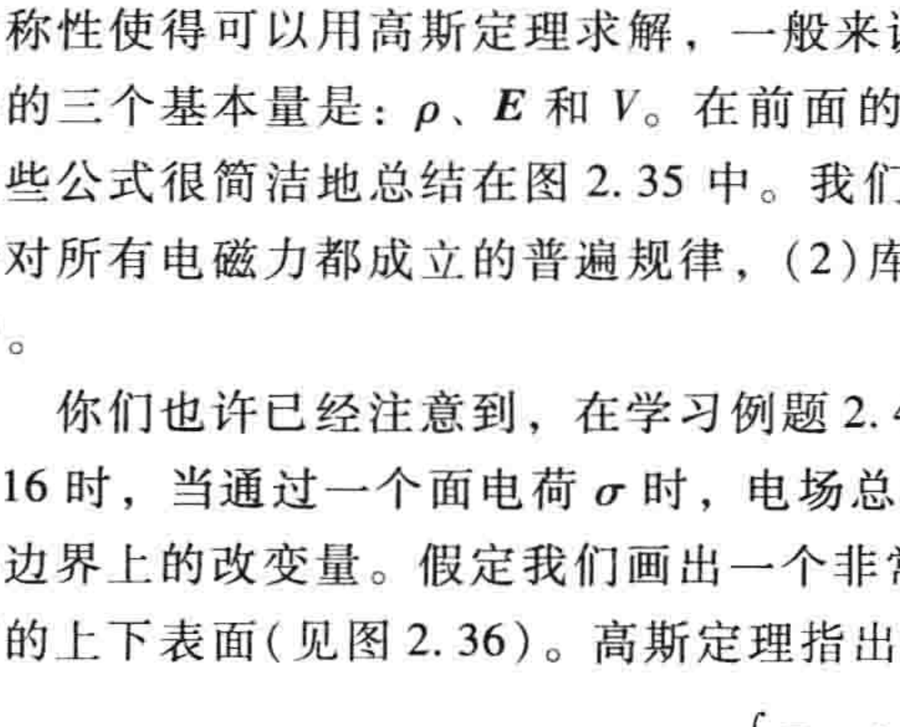


图　2.35

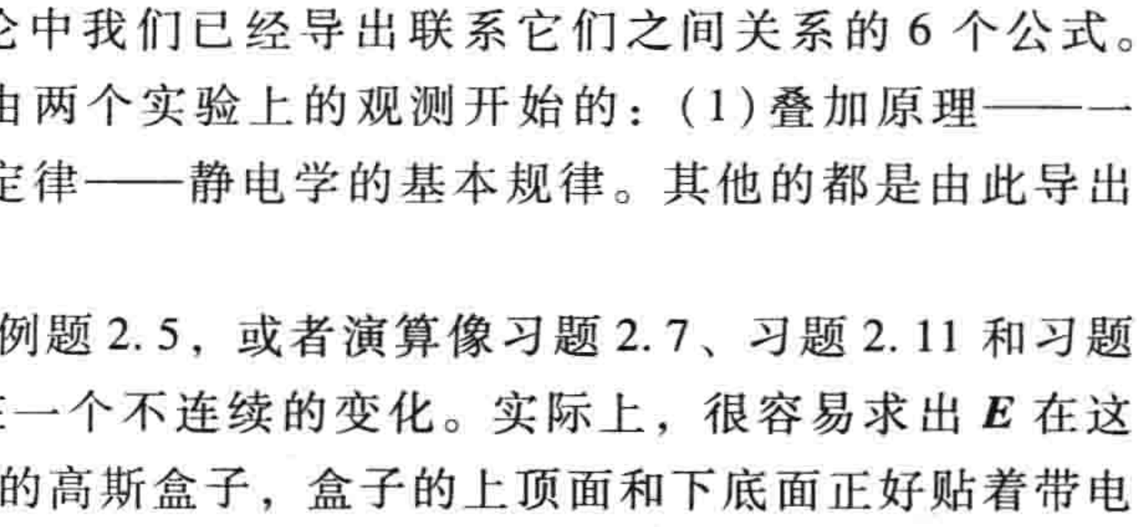


图　2.36

式中，A 是盒子顶面(或底面)面积(也是所包围的带电面的面积)。(如果 σ 是变化的，或者带电面是弯曲的，我们必须把 A 取得非常小。)现在，盒子的侧面对电场强度通量没有贡献，在盒子的厚度趋于零的极限下，我们得到

$$\boldsymbol{E}_{\text{上}}^{\perp} - \boldsymbol{E}_{\text{下}}^{\perp} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma \tag{2.31}$$

式中，$\boldsymbol{E}_{\text{上}}^{\perp}$ 表示在带电面上方垂直于带电面的电场分量；$\boldsymbol{E}_{\text{下}}^{\perp}$ 表示在带电面下方垂直于带电面的电场分量。为保持一致性，对两者我们都设上指的方向为正方向。结论：$\boldsymbol{E}$ 的法线分量是不连续的，通过任何带电面的改变量为 σ/ε_0。特别地，如果没有面电荷存在，则 $\boldsymbol{E}^{\perp}$ 是连续的，比如在一个均匀带电球体的表面。

作为对照，$\boldsymbol{E}$ 的切向分量总是连续的。因为如果我们把式(2.19)

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}$$

应用于图 2.37 所示的非常窄的长方形闭合路径，两端的路径对积分没有贡献(当 $\varepsilon \to 0$ 时)，两边长的积分给出 $(\boldsymbol{E}_{\text{上}}^{\parallel} l - \boldsymbol{E}_{\text{下}}^{\parallel} l) = 0$，所以

$$\boldsymbol{E}_{\text{上}}^{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\text{下}}^{\parallel} \tag{2.32}$$

式中，$\boldsymbol{E}^{\parallel}$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 平行于表面的分量。$\boldsymbol{E}$ 的边界条件[式(2.31)和式(2.32)]可以合并为一个公式：

$$\boldsymbol{E}_{\text{上}} - \boldsymbol{E}_{\text{下}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{n}} \tag{2.33}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是垂直于表面的单位矢量，指向由“下”到“上”。[⊖]

而另一方面，电势在经过任何边界时都是连续的(见图 2.38)，因为

$$V_{\text{上}} - V_{\text{下}} = -\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

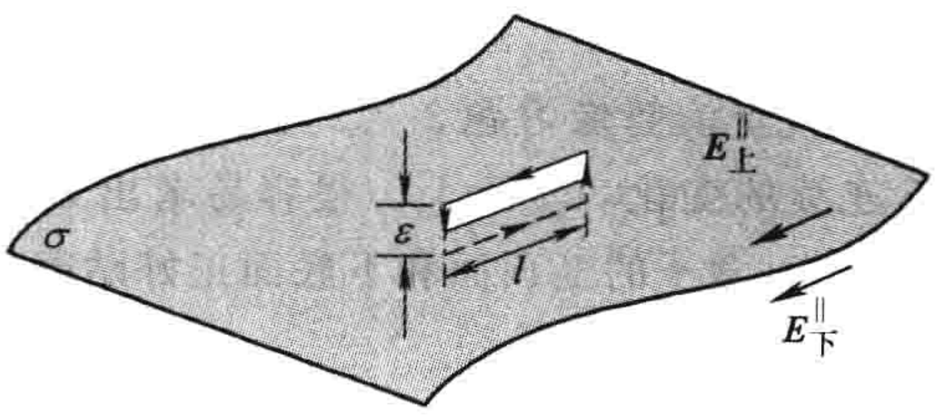


图 2.37

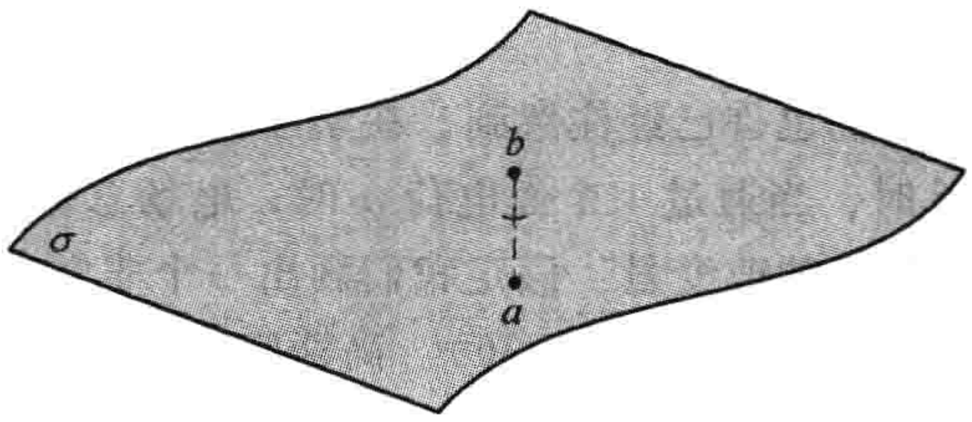


图 2.38

当积分路径收缩为零时，积分也为零，所以

$$V_{\text{上}} = V_{\text{下}} \tag{2.34}$$

但是，由于 $\boldsymbol{E} = -\nabla V$，$V$ 的梯度具有同 $\boldsymbol{E}$ 类似的不连续性，式(2.33)意味着

$$\nabla V_{\text{上}} - \nabla V_{\text{下}} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\hat{\boldsymbol{n}} \tag{2.35}$$

或者更方便的

⊖ 注意称什么为“上”或“下”是无关紧要的，颠倒后将逆转 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的方向。顺便提及，如果你仅对由局域面电荷(基本是平的面)产生的场感兴趣，则在紧贴电荷面上方的电场是 $(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\boldsymbol{n}}$，下方的电场是 $-(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\boldsymbol{n}}$。这可由例题 2.4 得出，因为如果你足够靠近电荷面，它“看起来”就像一个无限大面。显然 $\boldsymbol{E}$ 的不连续完全是这个面电荷的存在所产生的。

$$\frac{\partial V_{上}}{\partial n} - \frac{\partial V_{下}}{\partial n} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma \tag{2.36}$$

式中

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \tag{2.37}$$

表示 V 的法向导数（即在垂直于表面方向上的变化率）。

请注意这些边界条件是联系着紧贴表面上方和下方的电场和电势的。比如，式（2.36）所给的导数是从两边接近表面时的极限值。

习题 2.30

（a）验证例题 2.4、例题 2.5 和习题 2.11 的结果与式（2.33）是否一致。

（b）一个均匀带电中空圆柱壳，电荷面密度为 σ，利用高斯定理求出柱壳内外的电场。验证所得结果与式（2.33）是否一致。

（c）验证例题 2.7 的结果与边界条件式（2.34）和式（2.36）是否一致。

2.4　静电场的能量与做功

2.4.1　移动电荷所需做的功

假定源电荷的分布是稳定的，在它们所产生的电场中我们想要把一个检验电荷 Q 从点 a 移动到点 b（见图 2.39）。问题：你需要做多少功呢？在移动路径上的每一点，作用在 Q 上的电场力为 $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$；你需施加的力，应当是与这个力大小相等方向相反的力，$-Q\boldsymbol{E}$。（如果你被正负号所困惑，想象举起一块砖：重力 mg 向下，但是你施加的一个力 mg 向上。当然，你也可以施加一个更大的力——这时砖将加速运动，你的部分能量将被“浪费”，转化为砖的动能。这里我们感兴趣的是所需施加的最小力。）因此功为

$$W = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -Q\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = Q[V(b) - V(a)]$$

注意，所得结果是不依赖于从 a 到 b 的路径的；按力学中的说法，我们称静电场力为“保守力”。除以电荷 Q，我们有

$$V(b) - V(a) = \frac{W}{Q} \tag{2.38}$$

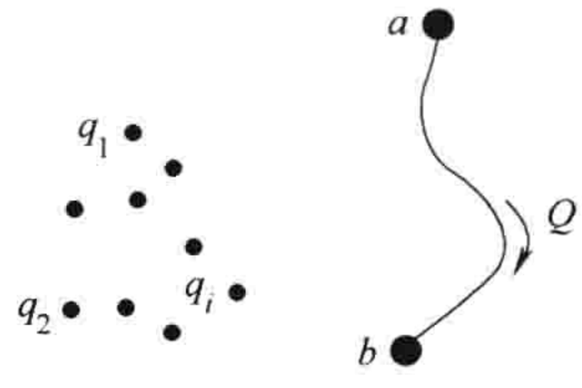


图　2.39

用语言表述，点 a 和点 b 之间的电势差等于把单位电荷从 a 移动到 b 所需做的功。特别有，如果你想要把一个电荷 Q 从无限远处移到 $\boldsymbol{r}$ 处，你必须做的功为

$$W = Q[V(\boldsymbol{r}) - V(\infty)]$$

如果你已经选无限远为参考点，则

$$W = QV(\boldsymbol{r}) \tag{2.39}$$

在这个意义上电势是每单位电荷的电势能（建立体系所需的功），而电场是单位电荷所受的力。

2.4.2　点电荷分布的能量

如果要建立起一个点电荷集合体系需要做多少功呢？可以设想把点电荷一个接一个地从无限远处移到指定位置（见图 2.40）。移动第一个电荷时无须做功，因为还没有电场。当移动第二个电荷时，按照式(2.39)，这需要做功 $q_2V_1(\boldsymbol{r}_2)$，式中 V_1 是 q_1 所产生的电势，$\boldsymbol{r}_2$ 是 q_2 现在的位

置，则

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}} \right)$$

（r_{12}是 q_1 与 q_2 之间现在的距离）。现在移动 q_3，所需做的功为 $q_3 V_{1,2}(\boldsymbol{r}_3)$，式中 $V_{1,2}$是电荷 q_1，q_2 所产生的电势，即$[1/(4\pi\varepsilon_0)](q_1/r_{13} + q_2/r_{23})$。这样有

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

类似地，再移动第四个电荷所需做的功为

$$W_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_4 \left(\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}} \right)$$

建立起这四个电荷集合体系所需的总功为

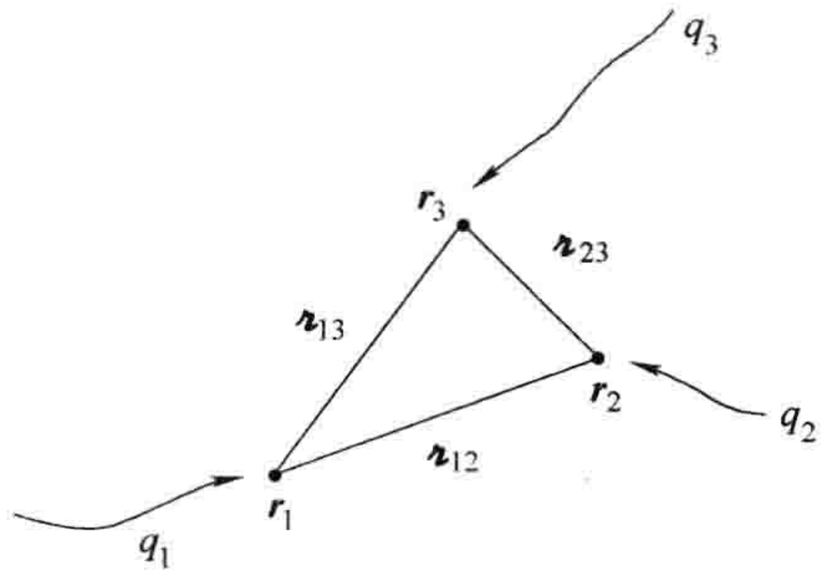


图 2.40

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right)$$

你们可以发现一般的规律：取每对电荷的乘积，再除以它们之间的距离，然后求和：

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \tag{2.40}$$

$j > i$ 的约定只是提醒你不要对一对电荷计算两次。一个达到同样目的的简洁办法是故意对每对电荷计算两次，然后再除以 2：

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \tag{2.41}$$

（当然，我们仍然需要避免 $j = i$ 的情况）。注意，既然每对电荷都出现在求和中，所得结果显然与你移动电荷的次序无关。让我们把 q_i 提到后一个求和号外：

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right)$$

圆括号内的是在点 $\boldsymbol{r}_i$（q_i 所处位置）处由所有其他点电荷所产生的电势——是体系建立起后所有其他点电荷的电势，而不是在建立过程中的某一时候。这样，

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V(\boldsymbol{r}_i) \tag{2.42}$$

这就是建立一个点电荷集合体系所需做的功；这也是完全拆散这个电荷集合体系所需的功。同时它也代表储存在这个电荷构型中的能量（如果你愿意，可称其为电“势”能，虽然由于明显的原因我倾向于避免在本书使用这个词。）

习题 2.31

（a）三个电荷安放在一个正四边形（边长为 a）的三个顶角处，如图 2.41 所示。如果把另外一个电荷 $+q$ 从无限远处移到第四个顶角处，需要做多少功？

（b）构建整个四电荷体系需要做多少功？

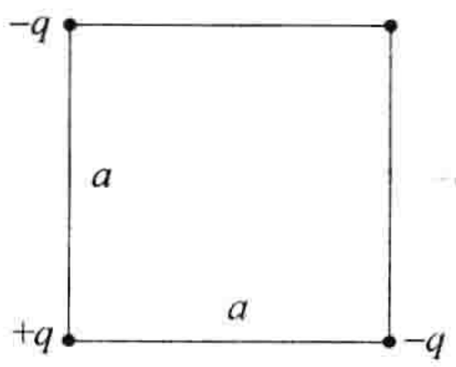


图 2.41

2.4.3 连续电荷分布的能量

对电荷体密度 ρ，式(2.42)变为

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V \mathrm{d}\tau \tag{2.43}$$

(与线电荷、面电荷对应的积分分别为 $\int \lambda V \mathrm{d}l$ 和 $\int \sigma V \mathrm{d}a$ 。)这里有一个很优美的方式重写这个结果，其中可用 $\boldsymbol{E}$ 取代 ρ 和 V。首先利用高斯定理以 $\boldsymbol{E}$ 表示 ρ：

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} \text{ 所以 } W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\nabla \cdot \boldsymbol{E}) V \mathrm{d}\tau$$

然后再利用分部积分把对 $\boldsymbol{E}$ 的求导转换为对 V 的求导：

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[-\int \boldsymbol{E} \cdot (\nabla V)\,\mathrm{d}\tau + \oint_S V\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \right]$$

然而 $\nabla V = -\boldsymbol{E}$，所以

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_V E^2 \mathrm{d}\tau + \oint_S V\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \right) \tag{2.44}$$

但是我们是对什么体积进行积分的？让我们回到开始出发的式(2.43)。从它的推导很清楚地知道应当对电荷分布的区域进行积分。可实际上把积分区域扩大为所有空间也没有关系，因为在扩大的区域里 $\rho = 0$，对积分没有贡献。有了这个考虑，再来看式(2.44)。当我们把积分区域扩大到含有电荷区域以外会发生什么？显然 E^2 的积分会增加(被积函数是正的)，这样面积分必须减小，以保证两者之和不变。事实上，在远离电荷的区域，E 按 $1/r^2$ 衰减，V 按 $1/r$ 衰减，而面积按 r^2 增加。所以粗略算来，面积分按 $1/r$ 减小。请确切理解，无论用多大体积(只要这体积包含所有的电荷)，式(2.44)都给出正确的能量 W，但是随体积的增大，体积分增大，而面积分减小，但是两者之和保持不变。这样一来，为什么不把积分区域扩大为整个空间呢？这时面积分为零，仅余下

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\text{整个空间}} E^2 \mathrm{d}\tau} \tag{2.45}$$

例题 2.8

求出半径为 R，总电荷为 q 的均匀带电球壳的能量。

解法 1： 利用式(2.43)对面电荷的版本：

$$W = \frac{1}{2}\int \sigma V \mathrm{d}a$$

对均匀带电球壳，在球面上的电势是 $(1/4\pi\varepsilon_0)q/R$(一个常数)，所以

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}\int \sigma \mathrm{d}a = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R}$$

解法 2： 利用式(2.45)求解。球内电场为零；球外为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \text{所以 } E^2 = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{q^2}{r^4}$$

因此

$$W_{\text{tot}} = \frac{\varepsilon_0}{2(4\pi\varepsilon_0)^2}\int_{\text{球外空间}} \left(\frac{q^2}{r^4}\right)(r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi)$$

$$= \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0} q^2 4\pi \int_R^\infty \frac{1}{r^2} \mathrm{d}r = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{R}$$

习题 2.32 用以下三种不同方法求出一个半径为 R、总电荷为 q 的均匀带电球体的能量。

(a) 利用式(2.43)和习题 2.21 求出的势。

(b) 利用式(2.45)，不要忘记积分是对整个空间。

(c) 利用式(2.44)，取一个半径为 a 的球体进行积分。注意当 $a \to \infty$ 会发生什么。

习题 2.33 这里是计算均匀带电球体的能量的第四种方法：一层层球壳地构造这个球体，每次把无限小电荷 $\mathrm{d}q$ 从无限远处移过来使其均匀分布在一个球壳，这样使半径增加。使半径增加 $\mathrm{d}r$ 需要做多少功？积分求出构造一个半径为 R、总电荷为 q 的球体所需的功。

2.4.4 有关静电场能量的评注

(i) 一个令人困惑的“不一致性”。式(2.45)清楚地表明一个稳定电荷分布的能量总是正的。另一方面，式(2.42)(事实上式(2.45)是由此式导出的)可以为正也可以为负。例如，按照式(2.42)，两个带电荷量相等但是符号相反，距离为 r 的电荷，其能量为 $-(1/4\pi\varepsilon_0)(q^2/r)$。问题出在哪里呢？哪个公式是对的呢？

答案是两个公式都是正确的，但是它们适合于不同的情况。式(2.42)没有考虑把第一个点电荷放在它位置上所需做的功；我们从这个点电荷开始，简单地求出把另外一个电荷移动过来所需做的功。这是一个明智的选择，因为式(2.45)表明一个点电荷的能量事实上是无限大的：

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2(4\pi\varepsilon_0)^2} \int \left(\frac{q^2}{r^4}\right)(r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \infty$$

在某种意义上，式(2.45)更完善，它告诉我们储存在一个电荷构型中的总能量，但是式(2.42)对研究点电荷更适用，因为我们更喜欢(这有很好的理由)摆脱总能中由点电荷引起的那部分无限大能量。毕竟，在实际中，点电荷(比如说电子)是现成的；我们所能做的只是使它们运动。我们不把它们靠在一起，也无须分离它们，所以这些过程中需做多少功也是无关紧要的。(一个点电荷的无限大能量是电磁理论中经常遇到的麻烦事，不仅折磨着经典电磁学也同样折磨着量子理论，我们在第 11 章会重新讨论这个问题。)

现在，你们也许会担心这个不一致性会影响到一些公式推导的严密性。“瑕疵”出现在式(2.42)和式(2.43)之间：在前者中，$V(\boldsymbol{r}_i)$ 表示除了电荷 q_i 外其他所有电荷产生的电势，而在后者中，$V(\boldsymbol{r})$ 是完全的电势。对连续电荷分布这没有区别，因为处在一点 $\boldsymbol{r}$ 的电荷几乎为零，对电势的贡献也是零。

(ii) 能量储存在哪里？式(2.43)和式(2.45)提供了计算同样事情的两种不同方法。第一种是对电荷分布积分；第二种是对场积分。这样积分会涉及完全不同的区域。例如，对带电球壳的情况(例题 2.8)，电荷局限于球面上，而在球面外空间的任何地方都有电场。能量在哪里？像式(2.45)表示的那样，是储存在电场里，还是像式(2.43)表示的那样，储存在电荷里？在目前阶段，这是一个无法回答的问题：我可以告诉你们总能量是多少，我也可以提供给你们几种不同的方法去计算总能，但是不必忧心能量在哪里。在辐射理论中(第 11 章)把能量认为是储存在电场里是有用的(在广义相对论中它是本质的)，能量密度为

$$\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 = \text{每单位体积中的能量} \tag{2.46}$$

但是在静电学中我们也可以说能量储存在电荷里，能量密度为$\frac{1}{2}\rho V$。这种说法的差异纯粹是一种术语不同而已。

(iii)叠加原理。由于静电能与电场的二次方有关，所以它不遵从叠加原理。一个复合体系的能量不等于它每一部分能量之和——这里存在“交叉项”：

$$\begin{aligned} W_{\text{tot}} &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 \mathrm{d}\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2)^2 \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int (E_1^2 + E_2^2 + 2\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2)\mathrm{d}\tau \\ &= W_1 + W_2 + \varepsilon_0 \int \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 \mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{2.47}$$

例如，如果把每个地方的电荷加倍，总能量会变为原来的4倍。

习题 2.34　考虑两个同心球面，半径分别为 a 和 b。假定内球面带有电荷 q，外球面带有电荷 $-q$(两者都是均匀分布在球面上)。计算这个构型的能量。

(a) 利用式(2.45)；

(b) 利用式(2.47)及例题2.8的结果。

2.5　导体

2.5.1　基本性质

在绝缘体中，例如玻璃和橡胶，每一个电子都附属于一个原子。作为对照，在金属导体中，每个原子的一个或更多电子可以在金属中自由运动。(在液体导体中，比如盐水，运动的是离子。)一个理想导体可认为是可以提供无限多个完全自由电荷的材料。在现实中，没有理想导体，但是很多物质非常接近理想导体的性质。从这个定义可直接得出理想导体的基本静电学性质：

(i) 导体内部 $\boldsymbol{E}=\mathbf{0}$。为什么？因为如果导体内部存在任何电场，自由电荷将会运动，也就不是我们所说的静电情况了。这也许不是一个满意的解释；也许当导体存在时根本就没有静电平衡。我们最好考察一下当把一个导体放入一个外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 时，会发生什么(见图2.42)。开始时，自由正电荷会移向右边，自由负电荷移向左边。(实际中，只有负电荷——电子——可以运动，但是它们的离开会使右边带有净的正电——固定的原子核——所以说哪种电荷在移动是无关紧要的；效果是一样的。)当它们运动到导体的边界，电荷将会积累：右边为正电荷，左边为负电荷。这些积累的诱导电荷本身会产生一个场，$\boldsymbol{E}_1$，由图可以看出，这个场的方向与 $\boldsymbol{E}_0$ 相反。这一点很关键，因为它意味着诱导电荷所产生的场倾向于抵消原来的外场 $\boldsymbol{E}_0$。电荷将持续移动直到完全抵消 $\boldsymbol{E}_0$，其结果是导体内部的电场为零。[⊖]整个这个电荷移动的过程是非常短暂的。

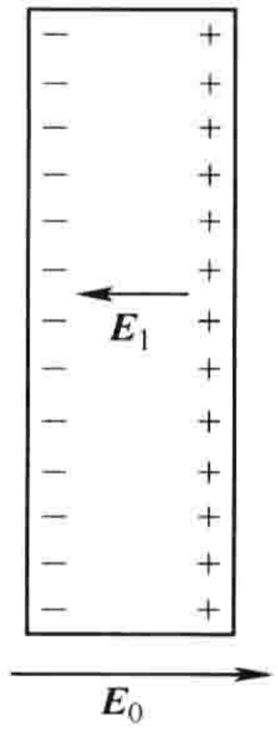


图　2.42

⊖　在导体外部电场不为零，因为那里 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{E}_1$ 不相消。

(ii) 导体内部 $\rho=0$。这个结论可由高斯定理导出：$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$。如果导体内处处 $\boldsymbol{E}=0$，则 ρ 也为零。当然导体内仍然有电荷，但是正电荷与负电荷一样多，所以净的电荷密度在导体内部为零。

(iii) 净电荷分布在导体表面。这是唯一它们可以位于的地方。

(iv) 导体是一个等势体。因为如果 a，b 是导体中的任意两点(或者是表面上的任意点)，$V(a)-V(b)=-\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0$，因此 $V(a)=V(b)$。

(v) 在导体外表面，电场垂直于导体表面。否则的话，如同(i)情况，电荷将会在表面运动，直到电场的切向分量被消除(见图 2.43)。(当电场垂直于表面时，电荷不能运动，当然它们是被限制着不能脱离导体。)

这看起来有点奇怪，导体中的电荷要运动到它表面上。因为同性电荷是相互排斥的，它们应当尽可能地彼此远离，但是它们却都运动到表面上，浪费了内部的空间。当然我们可以做得更好，让每一个电荷尽可能远离它的邻居，把它们分布在整个导体中……但是，完全不是如此。无论导体的大小和形状如何，所有的诱导电荷只能处于导体表面上。[⊖]

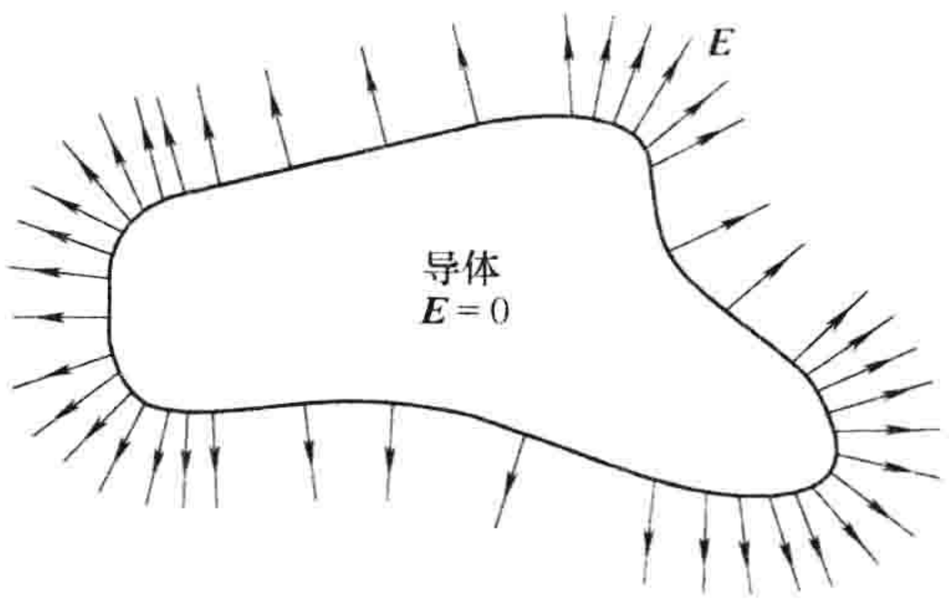


图 2.43

这个问题也可以用能量来阐述。像其他任何自由动力学体系一样，导体中的电荷也将寻找一个能使其电势能最小的分布。性质(iii)的推论是一个固体(具有一定形状和总电荷)的静电能当电荷分布在表面时为最小。例如，如果电荷均匀分布在表面上，一个球体的能量是 $(1/8\pi\varepsilon_0)(q^2/R)$，如我们在例题 2.8 中得出的那样，但是如果电荷均匀分布在球体中，它的能量将会变大，为 $(3/20\pi\varepsilon_0)(q^2/R)$(习题 2.32)。

2.5.2 诱导电荷

如果让一个电荷 $+q$ 靠近一个不带电的导体(见图 2.44)，两者之间将会相互吸引。原因是 q 会吸引负电到靠近自己的一边，而排斥正电荷到远离自己的一边。(另外一个思考这个问题的方法是导体内电荷如此的运动可以抵消 q 在导体内部产生的场，内部的场必须为零。)因为诱导出的负电荷更靠近 q，这样就有净的吸引力(我们将在第 3 章对球形导体具体计算这个力)。

顺便说一下，当我提到一个导体内部的电场、电荷或电势时，我是指导体材料的内部；如果在导体中有一些空洞，在空洞中有一些电荷，则空洞中的电场不会为零。但是很显然，由于导体的环绕，空洞及它里面的东西与外部世界是电孤立的(见图 2.45)。在导体外部，空洞内电荷产生的电场完全被导体内表面诱导出的电荷所抵消。(但是，由此会在导体外表面产生弥补电荷，它们“有效地”把空洞内电荷 q 的存在传递到外面的世界，如我们将在例题 2.9 遇到的那样。)在空洞面上诱导出的总电荷，与空洞内的电荷大小相等，符号相反，因为如果我们用一个高斯面包围着整个空洞，高斯面上的所有点将在导体中(见图 2.45)，有 $\oint\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{a}=0$，因此(由高斯定理)高斯面所包围的净电荷必须为零。但是 $Q_{\text{enc}}=q+q_{\text{诱导}}$，所以 $q_{\text{诱导}}=-q$。

⊖ 顺便指出，一维和二维情况同三维很不一样：一个导电圆面上的电荷不能都位于它的圆周线上(R. Friedberg, Am. J. of Phys. 61, 1084(1993))，一个导电针的电荷也不能都位于它的端点(D. J. Griffiths and Y. Li, Am. J. of Phys. 64, 706(1996))。参见习题 2.52。

图　2.44

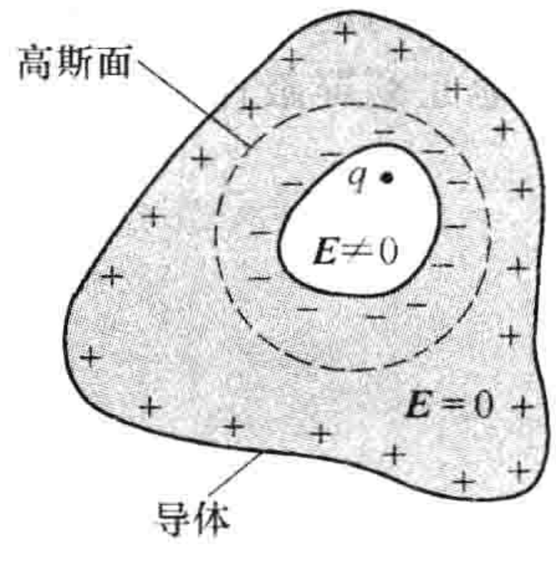


图　2.45

例题 2.9

一个不带电的球形导体，球心在原点，导体内部有一个任意形状的空洞(图 2.46)。在空洞某处有一个电荷 q。问题：球外的电场是什么？

解： 乍看起来答案应该依赖于空洞的形状以及空洞内电荷的位置，但是这是错误的，答案是

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

其原因是，除了空洞内的总电荷以外，导体消除了有关空洞的所有信息。为什么会是这样呢？电荷 $+q$ 在空洞表面诱导出反号电荷 $-q$，这个诱导电荷要分布得使球外任何一点 $+q$ 所产生的电场被抵消。由于导体没有带净电荷，这样在球的外表面有均匀分布的 $+q$。(外表面电荷的均匀分布是因为空洞内 $+q$ 不对称的影响被内表面 $-q$ 的分布所抵消。)这样球外的电场就是均匀分布在外表面上的 $+q$ 所产生的电场。

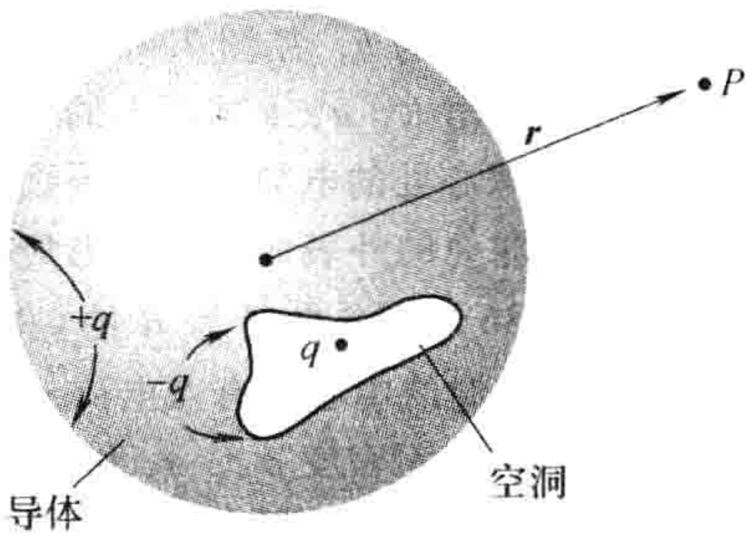


图　2.46

你们也许会认为这种论述还是有问题的：这里实际存在三个电场 $\boldsymbol{E}_q$，$\boldsymbol{E}_{\text{内表面电荷}}$ 以及 $\boldsymbol{E}_{\text{外表面电荷}}$。我们知道的仅是这三个电场的矢量和在导体内为零，但是我宣称前两个电场相互抵消，而第三个自己在导体中就是零。进一步讲，即便前两个在导体内相消，在球外它们还是否相消？毕竟，它们在空洞内是不相消的。此时我无法给你们一个完全令人满意的回答，但是这确实是正确的：这里存在 $-q$ 在内表面的一种分布，它可以抵消在外面所有点处 q 产生的电场。因为同样的空洞可以存在于一个巨大的球导体内，半径可以为 27 英里，或者一光年，或者其他什么的。在这种情况下，导体外表面电荷十分远离，对内部电场的影响极小，因此，另外两个电场必须相互抵消。所以我们知道它们可以做到这一点……但是我们确信它们会选择这样做吗？也许对很小的球体自然界喜欢某种复杂的三场相消的方式。不是这样的：在第 3 章唯一性定理中我们将会看到，静电场对它的选择是非常吝啬的；总是用一种方式——而不是更多种——在导体上分布电荷以使导体内部的场为零。如果发现了一种可能的方式，即便是在原则上，我们也将确信没有其他方式存在了。

如果一个被导体材料包围的空洞内不存在电荷，则空洞内的电场为零。这可论述如下：如果空洞内有电场，任何电场线必须从空洞壁上正电荷出发然后终止在空洞壁负电荷上(见图 2.47)。设这电场线是一条闭合回路的一部分，另外余下的部分完全在导体中(那里 $\boldsymbol{E}=0$)，这样积分 $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 显然不为零，违反了式(2.19)。因此在没有电荷的空洞内 $\boldsymbol{E}=0$，事实上在空洞壁上也没有电荷存在。(这就是为什么在雷雨中躲在一个金属轿车内比较安全——如果被雷击中，你可能会被煮熟，但是不会被电击致死。应用同样的原理，可以把敏感仪器放入一个接地的法拉第笼罩

内，以屏蔽外界电场的干扰。实用中，甚至不必用完全密闭的固体屏蔽罩——栅格状导体网也许就可以足够好地起到屏蔽作用。）

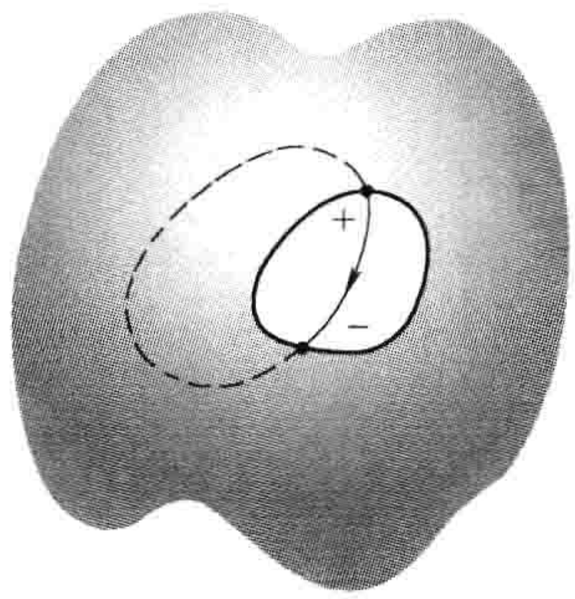


图 2.47

习题 2.35 一个半径为 R 的金属球，带有电荷 q，这个金属球又被一个厚的同心金属球壳所包围（球壳内径为 a，外径为 b，见图 2.48），球壳不带净电荷。

(a)分别求出 R，a，b 球面上的电荷面密度 σ。

(b)求出球心处的电势，选无限远处为参考点。

(c)现在球壳的外表面接地，电势能变为零（同无限远处）。(a)和(b)所得结果改变为什么？

习题 2.36 一个半径为 R 的（中性）导体球体，其内部有两个半径分别为 a 和 b 的圆形空洞（图 2.49），在 a 空洞的中心放有点电荷 q_a，在 b 空洞的中心放有点电荷 q_b。

(a)求出电荷面密度 σ_a，σ_b 和 σ_R。

(b)导体外面的电场是什么？

(c)每个空洞内的电场是什么？

(d)q_a 和 q_b 受到的力是什么？

(e)如果让第三个电荷 q_c 靠近导体，上面所得结果哪一个会发生变化？

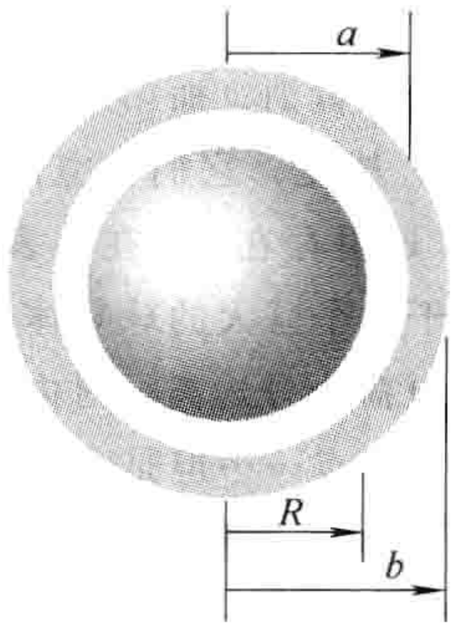


图 2.48

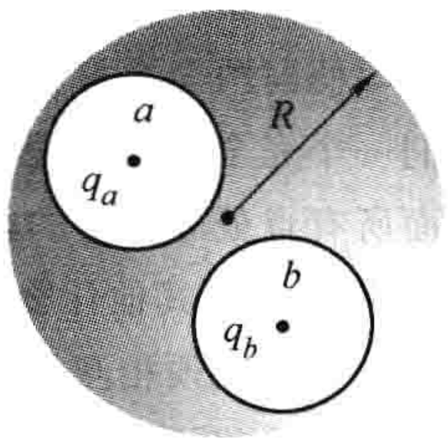


图 2.49

2.5.3 表面电荷和导体受到的力

由于导体内的电场为零，边界条件式(2.33)要求导体外表面的电场为

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{n}} \tag{2.48}$$

这与我们前面的电场是垂直于表面的结论一致。以电势表示，式(2.36)给出

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} \tag{2.49}$$

如果知道了 $\boldsymbol{E}$ 或者 V，这些公式使我们能够计算导体表面的电荷；在后面一章我们会经常用到它们。

在电场存在时，面电荷很自然会受到力；每单位面积受到的力 $\boldsymbol{f}$ 为 $\sigma\boldsymbol{E}$。但是这里有一个问题，由于电场在带电面处是不连续的，我们应当用 $\boldsymbol{E}_{上}$ 和 $\boldsymbol{E}_{下}$ 中的哪一个，或者两者之间的某个值？答案是我们应当用两者的平均值：

$$\boldsymbol{f} = \sigma\boldsymbol{E}_{平均} = \frac{1}{2}\sigma(\boldsymbol{E}_{上} + \boldsymbol{E}_{下}) \tag{2.50}$$

为什么是平均值？理由非常简单，尽管论述听起来好像很复杂。让我们考虑带电面上的一小块面积(图 2.50)。使这面积足够小所以可以看做是平坦的，上面的电荷面密度是常数。总的电场包含两部分——一是这块小面积上所带电荷的贡献，另外是来自其他方面的贡献(比如带电面其他区域的贡献，以及其他任何可能存在的外源的贡献)：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{小面} + \boldsymbol{E}_{其他}$$

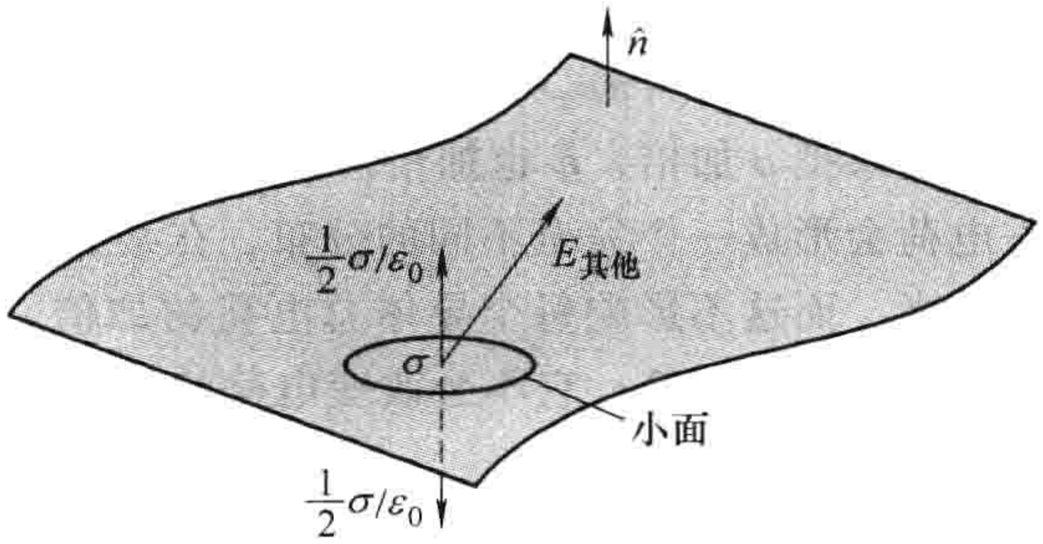


图　2.50

这个小面积自身不能对自己施加一个力，就像你站在一个篮子里，通过向上提篮子的把手不能把你自己举起一样。作用在这小面积上的力，完全是由 $\boldsymbol{E}_{其他}$ 引起的，而这个电场是连续的(如果你把这小块面积去掉，显出一个洞，洞处的电场是非常光滑的)。电场的不连续完全是这小面积上的电荷引起的，它在每一边产生电场($\sigma/2\varepsilon_0$)，方向垂直于这面积。这样，

$$\boldsymbol{E}_{上} = \boldsymbol{E}_{其他} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{n}}$$

$$\boldsymbol{E}_{下} = \boldsymbol{E}_{其他} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{n}}$$

因此

$$\boldsymbol{E}_{其他} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{上} + \boldsymbol{E}_{下}) = \boldsymbol{E}_{平均}$$

所以求平均就是去掉这小面积自身对电场的贡献。

这个论断适用于任何面电荷；对导体的特殊情况，导体内的电场为零，外面的是(σ/ε_0)$\hat{\boldsymbol{n}}$(式(2.48))，所以平均是($\sigma/2\varepsilon_0$)$\hat{\boldsymbol{n}}$，每单位面积受到的力为

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\hat{\boldsymbol{n}} \tag{2.51}$$

这是一个作用在表面方向外指的静电压力，倾向于把导体吸引进电场里，而无论 σ 为正还是为负。以表面处的电场表示这个压力有

$$P = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \tag{2.52}$$

习题 2.37　两个大金属板(每个面积为 A)相距距离 d 放置。假定每个板带电 Q，板所受到的静电压力是多少？

习题 2.38　一个半径为 R 的金属球，带有总电荷 Q。“北半球”同“南半球”之间的排斥力是多少？

2.5.4　电容

假定我们有两个导体，我们使一个带 $+Q$ 电荷，另一个带 $-Q$ 电荷(见图 2.51)。由于一个

导体上的电势 V 是一个常数，我们可以明确得出这两个导体的电势差：

$$V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

如果导体的形状是复杂的，我们不知道电荷在导体上是如何分布的，所以也无法计算电场，但是我们的确知道，$\boldsymbol{E}$ 正比于 Q，因为 $\boldsymbol{E}$ 是由库仑定律给出的：

图 2.51

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho}{\mathcal{r}^2}\,\hat{\boldsymbol{\mathcal{r}}}\,\mathrm{d}\tau$$

所以，如果把 ρ 加倍，$\boldsymbol{E}$ 也加倍。（请稍等一下！我们如何知道加倍 Q（$-Q$ 也同样）就会加倍 ρ？也许电荷会形成一个完全不同的分布，在某些地方的 ρ 是原来的 4 倍，而在另外一些地方仅有原来的一半，而这不影响每个导体总电荷的加倍。事实上这种担心是没有必要的——加倍 Q 确实使每个地方的 ρ 加倍；它不会改变电荷的分布比例。这个的证明将在第 3 章给出；现在你们只需相信我的论断。）

既然 $\boldsymbol{E}$ 正比于 Q，那么电势差 V 也正比于 Q。比例系数称为这个构型的电容：

$$C \equiv \frac{Q}{V} \tag{2.53}$$

电容纯粹是一个几何量，由两个导体的大小、形状以及两者之间的距离所决定。在 SI 单位制中，C 的单位是法拉第（F）；1F 为 1C/V。实用中，这个单位太大，很不方便；[一]更实际的单位是微法（10^{-6}F）和皮法（10^{-12}F）。

注意，由其定义，V 是带正电导体的电势减去带负电导体的电势；同样，Q 是带正电导体的电荷。这样，电容本质上是一个正值量。（顺便提及，有时我们会遇到有些人讲单个导体的电容。在这种情况下，带负电的“第二个导体”可想象为包围着这个导体的一个无限大球壳。这个球壳对电场没有贡献，所以电容也由式(2.53)给出，V 是以无限远处为参考点的导体处的电势。

例题 2.10

两块面积为 A 的金属薄平板，相距距离为 d，平行放置，求出这个“平板电容器”的电容（见图 2.52）。

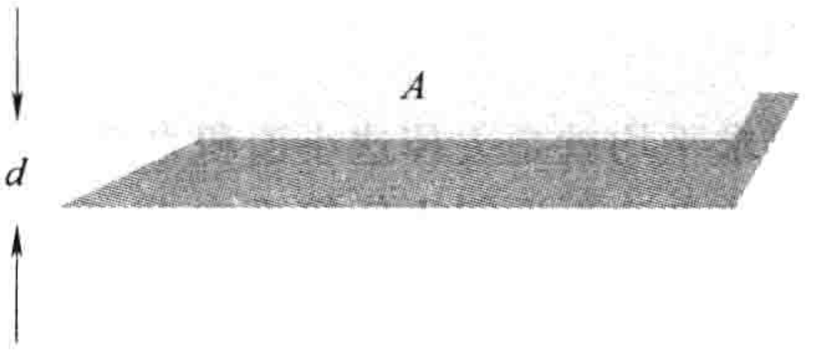


图 2.52

解： 如果我们令上板带电 $+Q$，下板带电 $-Q$，只要板足够大，两板之间的距离足够小[二]，电荷将均匀分布在板面上。电荷面密度在上板为 $\sigma = Q/A$，由例题 2.5，两板之间的电场为 $(1/\varepsilon_0)Q/A$，所以两板之间的电势差为

$$V = \frac{Q}{A\varepsilon_0}d$$

因此

$$C = \frac{A\varepsilon_0}{d} \tag{2.54}$$

如果，例如板为边长为 1cm 的正方形板，两板距离为 1mm，则电容为 9×10^{-13}F。

[一] 在本书第 2 版中我曾宣称一个 1F 的电容器需要用一个叉车搬运。现在情况不是这样了——你可以买一个 1F 的电容器，其大小与一个小汤勺差不多。

[二] 严格的解并不容易得到——即使是圆形板面的简单情况。见 G. T. Carlson 和 B. L. Illman，Am. J. Phys. 62，1099（1994）。

例题 2.11

求出两个同心球壳的电容，球壳的半径分别为 a 和 b。

解： 在内球壳放电荷 $+Q$，外球壳放 $-Q$。两球壳之间的电场为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

所以球壳之间的电势差为

$$V = -\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

像预想的那样，V 正比于 Q；电容为

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

要对一个电容器“充电”，必须把正极板上的电子移动到负极板上。这样做需要克服电场的阻碍，因为电场倾向于使电子离开负极板而回到正极板。这样，使一个电容带电 Q，要做多少功？假定在这个过程中的某个中间步骤，正极板带电为 q，所以此时的电势差为 q/C。按照式(2.38)，如果移动电荷 $\mathrm{d}q$，所需做的功为

$$\mathrm{d}W = \left(\frac{q}{C}\right)\mathrm{d}q$$

所以当充电从 $q=0$ 到 $q=Q$ 所需做的总功为

$$W = \int_0^Q \left(\frac{q}{C}\right)\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

或者，由于 $Q=CV$，

$$W = \frac{1}{2}CV^2 \tag{2.55}$$

式中，V 为充电最后电容器的电势差。

习题 2.39　两个同轴金属管壳，半径分别为 a 和 b(见图 2.53)，求出单位长度的电容。

习题 2.40　假设平板电容器平板之间的距离，由于两板之间的相互吸引作用，减小了一个无限小距离 ε。

(a) 利用式(2.52)表示电场力做的功，以电场 E 和平板面积 A 表示结果。

(b) 利用式(2.46)表示这个过程中能量的减小。

(这个问题比较容易，但是它含有用能量守恒方法推导式(2.52)的萌芽。)

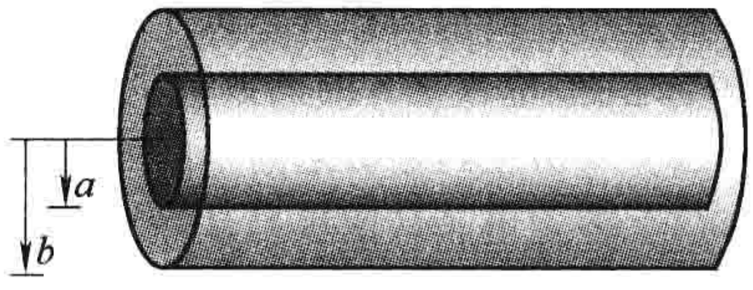


图　2.53

第 2 章补充习题

习题 2.41　一个均匀带电、边长为 a 的正方形面，电荷面密度为 σ。求出距中心高度为 z 处的电场。对 $a\to\infty$ 和 $z>>a$ 两种极限情况检验所得结果。

[答案；$(\sigma/2\varepsilon_0)\{(4/\pi)\arctan\sqrt{1+(a^2/2z^2)}-1\}$]

习题 2.42　如果某个区域内的电场由下式给出(在球坐标系中)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{A\hat{\boldsymbol{r}} + B\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}$$

式中，A 和 B 为常数。那么电荷密度为什么？[答案：$\varepsilon_0(A-B\sin\phi)/r^2$]

习题 2.43 一个均匀带电球体，求出南半球与北半球之间的净相互作用力。以球的半径 R 和总电荷 Q 表示你的结果。[答案：$(1/4\pi\varepsilon_0)(3Q^2/16R^2)$]

习题 2.44 一个半径为 R 的倒置半球面，均匀带电，电荷面密度为 σ。求出“北极”与球心处的电势差。[答案：$(R\sigma/2\varepsilon_0)(\sqrt{2}-1)$]

习题 2.45 一个半径为 R 的球体，电荷密度为 $\rho(r)=kr$（k 是一个常数）。求出这个球体的能量。至少用两种不同的方法验证你的结果。[答案：$\pi k^2R^7/7\varepsilon_0$]

习题 2.46 某种电荷分布产生的电势为

$$V(\boldsymbol{r}) = A\frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

式中，A 与 λ 为常数。求出电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$、电荷密度 $\rho(r)$，以及总电荷 Q。[答案：$\rho=\varepsilon_0 A(4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})-\lambda^2 e^{-\lambda r}/r)$]

！ **习题 2.47** 两条平行于 x 轴的无限长均匀带电线，电荷线密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$（图 2.54）。

（a）选坐标原点为参考点，求出任意一点 (x, y, z) 的电势。

（b）证明等势面为圆柱面，对给定的电势 V_0，给出圆柱面的半径和轴的位置。

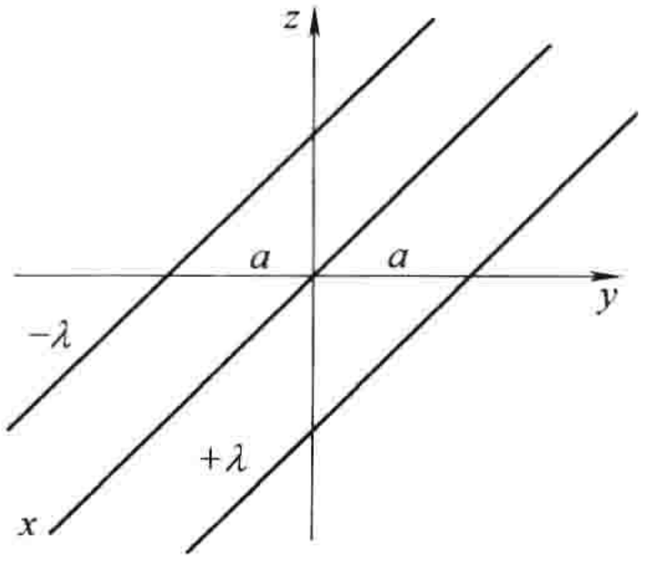


图 2.54

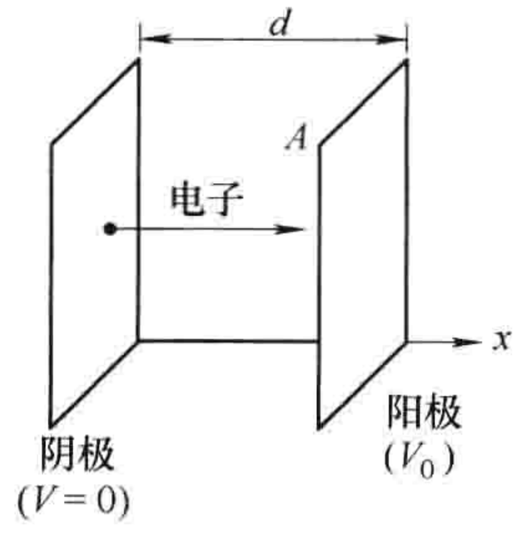


图 2.55

！ **习题 2.48** 在一个真空二极管中，电子从阴极面“热蒸发”后向阳极面加速运动，阴极电势为零，对面阳极的电势为 V_0。在两极间隙中所形成的电子云（称为空间电荷）很快会达到一种分布状态，使得阴极面上的电场为零。然后在两极板之间形成稳定的电流 I。

假定两个极板面积 A 远大于它们之间的距离 d（$A \gg d$，见图 2.55），所以边界效应可以忽略。则 V，ρ，v（电子速度）都仅是 x 的函数。

（a）写出在两极板之间空间的泊松方程。

（b）假定电子从阴极是从静止开始运动的，那么在点 x，这里电势为 $V(x)$，电子速度为多少？

（c）在稳定状态下，电流 I 不依赖于 x。那么 ρ 和 v 之间的关系是什么？

（d）利用上面的结果，消去 ρ 和 v，得出 V 满足的微分方程。

（e）作为 x，V_0，d 的函数，求出 V 的解。画出 $V(x)$，并与没有空间电荷的情况比较。另外作为 x 的函数，求出 ρ 和 v。

（f）证明

$$I = KV_0^{3/2} \tag{2.56}$$

求出常数 K。（式(2.56)称为 Child-Langmuir 定律。只要是空间电荷限制电流的情况，它对另外的几何构型也同样成立。注意，受空间电荷限制的二极管是非线性的——它不遵从欧姆定律。）

！ **习题 2.49** 假设现在极精确的测量已经揭示出库仑定律的误差。两个点电荷之间的作用力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{\boldsymbol{r}^2}\left(1+\frac{\boldsymbol{r}}{\lambda}\right)e^{-\boldsymbol{r}/\lambda}\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

式中，λ 是一个新的自然常数（显然它具有长度的量纲，并且是一个巨大的数——比如说已知的宇宙的半径——所以引起的修正是很小的，这也是以前从没人注意到这个差别的原因）。你的任务是按照这个新发

现重新表述静电学。假定叠加原理仍然成立。

(a) 如果电荷的分布密度是ρ，电场是什么(代替式(2.8))?

(b) 这个场允许一个标量势吗? 简要解释你得到你的结论的理由。(不需要正式的证明——仅需一个有说服力的论述。)

(c) 类似于式(2.26)，求出一个点电荷的电势。(如果你对(b)的回答是“否”，最好回头再仔细考虑一下，并改变你的回答!)选择∞作为参考点。

(d) 对一个位于原点的点电荷，证明

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} + \frac{1}{\lambda^2}\int_V V\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}q$$

式中，S是球心在q处的球面积；V是球的体积。

(e) 证明上面的结果对任意的电荷分布可以推广为

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} + \frac{1}{\lambda^2}\int_V V\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_{\mathrm{enc}}$$

(这是这个新“静电学”中的高斯定理。)

(f) 对这个世界，画出一个三角图(类似于图2.35)，放上所有适当的公式。(给出以电势V表示ρ的泊松方程，以电场$\boldsymbol{E}$表示ρ的(形式不同的)高斯定理。)

习题 2.50 假设一个电场$\boldsymbol{E}(x, y, z)$为

$$E_x = ax, E_y = 0, E_z = 0$$

式中，a是一个常数。电荷密度为什么? 你如何考虑，当电荷密度为常数时，一点电场的方向却是沿一个特定的方向?[比它表面看起来，这实际上是一个很微妙的问题，值得仔细思考。]

习题 2.51 所有的静电学特性都是从库仑定律的$1/r^2$以及叠加原理导出的。因此也可以对牛顿万有引力构建类似的理论。什么是一个半径为R，质量为M的球体的引力能? 假设质量密度是均匀的。利用所得结果估计太阳的引力能(查询相关数据)。太阳的辐射功率是$3.86\times10^{26}\,\mathrm{W}$，如果辐射能完全是由引力能提供的，太阳可以生存多久?[太阳事实上比这要老得多，所以引力能显然不是其辐射的源头。]

习题 2.52 我们知道导体上的电荷是分布于其表面的，但是在表面上是如何分布的不是很容易确定的。电荷面密度可以直接计算的著名例子是椭圆面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$

对这种情况[㊀]

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2} \tag{2.57}$$

式中，Q为总电荷。选择a，b，c适当的值，由式(2.57)获得:(a)一个半径为R的圆盘的净电荷面密度$\sigma(r)$(两面的);(b)位于x，y平面一条无限长的导体“丝带”的电荷面密度$\sigma(x)$，丝带沿y轴放置，宽度从$x=-a$到$x=a$。(令Λ为丝带单位长度上的总电荷);(c)求出一个从$x=-a$到$x=a$的导体“针”每单位长度的电荷$\lambda(x)$。对每一种情况画出你的结果的草图。

㊀ 对它的推导(这是一件很费力的事)参见 WRSmythe, Static and Dynamic Elelctricity, 第3版。(New York: Hemisphere, 1989), 5.02节。

第3章　特殊技术

3.1　拉普拉斯方程

3.1.1　引言

静电学的主要任务是对给定的稳态电荷分布求出电场。原则上，这个目的可以利用库仑定律以式(2.8)的形式完成

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau' \tag{3.1}$$

遗憾的是，除了一些很简单的电荷分布，这种类型的积分很难计算。有时也许我们可以由问题的对称性利用高斯定理绕过这个积分，但是通常最好的方案是由式(2.29)

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{\imath}\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau' \tag{3.2}$$

首先计算电势 V。但是，即便如此，大多数情况积分仍然很难获得。另外，在涉及导体的问题中，电荷 ρ 本身有时并不能事先知道：因为电荷可以自由运动，我们可以直接控制的仅是每个导体的总电荷(或者电势)。

在这样的情况下利用泊松方程式(2.24)

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{3.3}$$

把问题表述成微分方程是十分有利的，这个方程加上边界条件等价于式(3.2)。事实上，通常我们仅对求出 $\rho=0$ 区域的电势感兴趣。(当然，如果处处 $\rho=0$，则 $V=0$，也没什么可说的了——可这不是我要说的意思。在其他地方可能有大量的电荷，但是我们只关心这些没有电荷的区域。)在这种情况下，泊松方程约化为拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 V = 0 \tag{3.4}$$

或者在直角坐标系写出

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{3.5}$$

这个方程非常基本，以至于有人可能会说静电学就是研究拉普拉斯方程的。同时，这也是一个普遍存在的方程，在物理学很多分支中都有它的身影，比如引力、磁学、热学理论以及肥皂泡的研究。在数学的解析函数理论中它扮演着主要角色。为获得对拉普拉斯方程以及其解(被称为调和函数)的一些感性认识，我们从一维和二维的例子入手，因为它们比较容易理解，并具备三维情况下所有的基本性质(虽然一维情况不如二维和三维情况丰富)。

3.1.2　一维拉普拉斯方程

假设 V 仅依赖于一个变量 x，则拉普拉斯方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

它的一般解是

$$V(x) = mx + b \tag{3.6}$$

这是一条直线的方程。由于它是一个二阶(普通)微分方程，它含有两个未定常数(m 和 b)。在任何特定情况下，这两个常数由所给问题的边界条件所决定。比如，如果在 $x=1$ 处 $V=4$，在 $x=5$ 处 $V=0$，在这种情况下 $m=-1$，$b=5$，所以 $V=-x+5$(见图 3.1)。

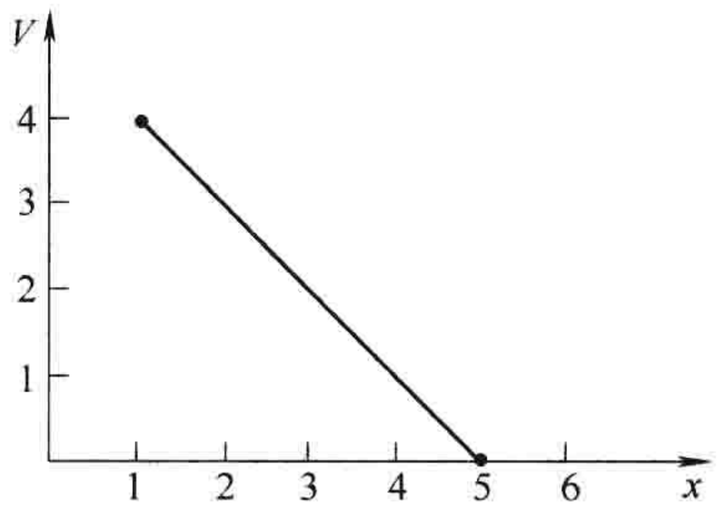


图　3.1

我想提醒你们注意这个结果的两个特性：也许对一维可以直接写出一般解的情况，它们看起来很显然和普通，但是在二维和三维的情况下获得它们并非能直截了当，尽管它们仍然非常有用。

1. 对任何 a，$V(x)$是 $V(x+a)$和 $V(x-a)$的平均：

$$V(x)=\frac{1}{2}[V(x+a)+V(x-a)]$$

拉普拉斯方程是一类指示平均的方程：它告诉你在点 x 的值是此点左边和右边值的平均。在这个意义上，拉普拉斯方程的求解就是不断寻找能拟合端点值的点的值。

2. 拉普拉斯方程不允许局域的极大和极小：V 的极值必定是出现在端点处。实际上这是(1)的结果，因为如果存在局域极大值，V 在此点的值将比两边的都大，这样它不可能由两边值的平均得到。(通常，我们预期在极大值处的二阶导数为负，极小值处的二阶导数为正。而拉普拉斯方程表示二阶导数为零，所以解没有局域极值是很自然的。但是，这不是一个证明，因为存在这样的函数，在它们的极大或极小处，二阶导数为零：例如，x^4 在 $x=0$ 处具有极小值，而此处的二阶导数为零。)

3.1.3　二维拉普拉斯方程

如果 V 依赖于两个变量，拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

这不是一个普通微分方程(即仅涉及一个变量的方程)，而是一个偏微分方程。这样一来，一些你们熟悉的规则就无法应用。比如，这个方程的一般解不止含有两个待定常数——或者，就此而论，任何有限数目——尽管这是一个二阶方程。的确，我们无法写出一个“一般解”(至少，无法写出像式(3.6)那样的封闭形式)。然而，我们仍然有可能得出所有解的一些共同性质。

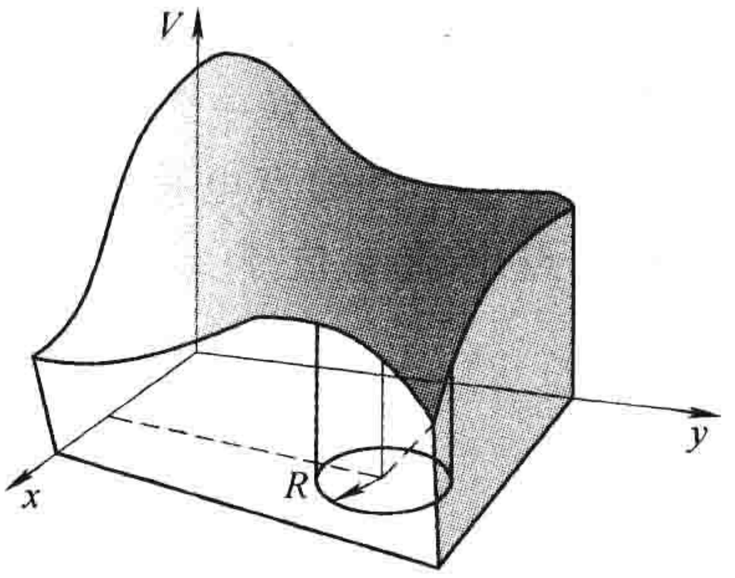


图　3.2

考虑一个物理的例子也许是有帮助的。想象一个薄橡皮膜(或者一个肥皂泡)在某些支撑物上展开。为确定起见，假定你取一个纸盒箱，沿四边切一条曲线，然后把切下的顶部去掉(见图 3.2)。现在把一个拉紧的橡皮膜粘在纸箱上，所以它看起来像一个鼓面(当然，它不会是平坦的，除非你是沿直线切纸盒四边的)。现在如果你选纸盒底为(x，y)坐标平面，(x，y)处膜对纸盒底的高度为 $V(x,y)$，则 $V(x,y)$将满足拉普拉斯方程。[㊀](一维的类比是伸展

㊀　实际上，橡皮膜满足的方程是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial V}{\partial y}\right)=0,\text{式中 } g=\left[1+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right]^{-1/2}$$

只要膜面对平面的偏离不是很剧烈，它(近似)约化为拉普拉斯方程。

在两点之间的一条橡皮带，当然，这将是一条直线。）

二维调和函数具有同前面所提到的一维情况所相同的性质：

1. 在点(x, y)处的V值是环绕此点处的那些点处V值的平均。更确切地，如果在(x, y)平面上以(x, y)为圆心画任意半径为R的圆，V在圆周上的平均值等于圆心处的V值：

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi R}\oint_{\text{圆周线}} V\mathrm{d}l$$

（顺便提及，这是计算机求解拉普拉斯方程弛豫方法的基础：从边界处V的特定值开始，合理猜测V在内部栅点上的值，第一步，对每个点赋予它最近邻点的平均值。第二步，使用修正后的值，重复这个过程，以此类推。在几次重复后，结果开始稳定下来，再次重复的修正会变得极小，这样对给定的边界条件，就得到了拉普拉斯方程的数值解。[⊖]）

2. V没有局域极大和极小；所有极值都位于边界上。（同前一样，这可由(1)导出。）再一次，拉普拉斯方程挑选出符合边界条件的最平凡的可能函数：无山无谷，只是一个最平滑的面。比如，如果你在图3.2所示的橡皮膜上放一个乒乓球，它将从一边掉下——它不会发现一个凹处并停在那里，因为拉普拉斯方程不允许面上有这样的凹处存在。从几何的观点看，正如两点之间的直线最短，在给定边界线的二维调和函数所给出的面积最小。

3.1.4 三维拉普拉斯方程

在三维情况我既不能提供给你们一个明显解（像一维那样），也不能给出一个有启发性的物理例子（像二维那样）。然而，所提到的两个性质仍然存在，下面我将简示一个证明。

1. 在$\boldsymbol{r}$点处的V是对以该点为球心的一个球面上所有V值的平均：

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_{\text{球面}} V\mathrm{d}a$$

2. 作为上面的结果，V没有局域的极大或极小；极值必在边界上。（因为如果V在某个$\boldsymbol{r}$有极大值，那么我可以以$\boldsymbol{r}$为圆心画一个球面使得球面上所有的V值小于球心处的值——以至于其平均值也小于球心处的值。）

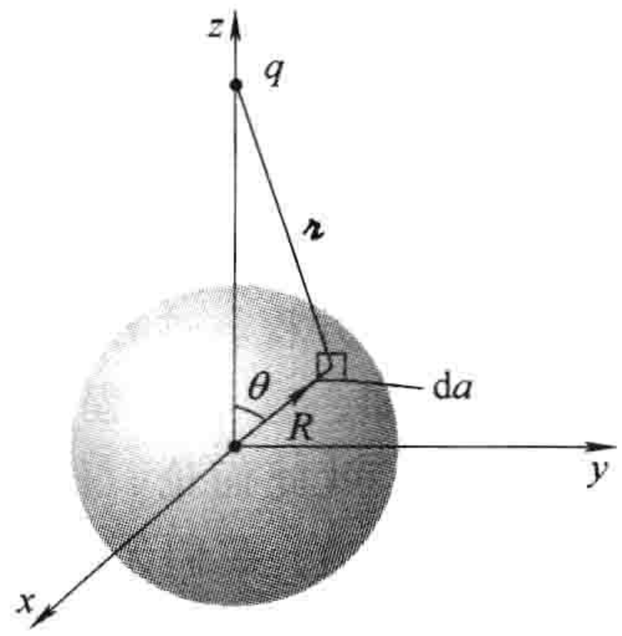


图 3.3

证明： 让我们计算一个半径为R的球面上的电势的平均值，电势是由球外一点的点电荷产生的。我们可以让球心处于原点处，并让点电荷q位于z上（见图3.3）。球面上一点的电势为

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

式中

$$r^2 = z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta$$

所以

$$V_{\text{平均}} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta\right]^{-1/2}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2zR}\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta}\Bigg|_0^{\pi}$$

⊖ 参见，例如，E. M. Purcell, Electricity and Magnetism，第2版，习题3.30（第119页）（New York: McGraw-Hill, 1985）。

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2zR}[(z+R)-(z-R)] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z}$$

但是这正是点电荷在球心处产生的电势！由叠加原理，对球外任何电荷的分布，上述结论都成立：球面上电势的平均值等于这些电荷在球心处产生的净电势。证毕。

习题 3.1　求出一个半径为 R 的球面上由一个球内点电荷所产生的电势的平均值(同前面一样计算，只不过现在 $z<R$)。(当然，对现在的情况，球内区域不满足拉普拉斯方程。)证明，一般有

$$V_{\text{平均}} = V_{\text{球心}} + \frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

式中，$V_{\text{球心}}$ 是所有球外电荷在球心处产生的电势；Q_{enc} 是球面所包围的总电荷。

习题 3.2　用一句话，论述 Earnshaw's 定理的合理性：仅由静电力，一个带电粒子不能处于稳定的平衡状态。作为一个例子，考虑固定电荷在一个立方体顶角的放置，如图 3.4 所示。看起来，由于来自于每个顶角的斥力，一个位于中心的正电荷可以自动地悬浮在空中。这"静电瓶子"的漏洞在哪里？[为利用核聚变作为实际的能源，必须加热等离子体(雾化带电粒子)到一个极高的温度——足以融化任何接触坩锅的温度。Earnshaw's 定理指出静电约束也不能解决问题。幸运的是，可以用磁场约束热等离子体。]

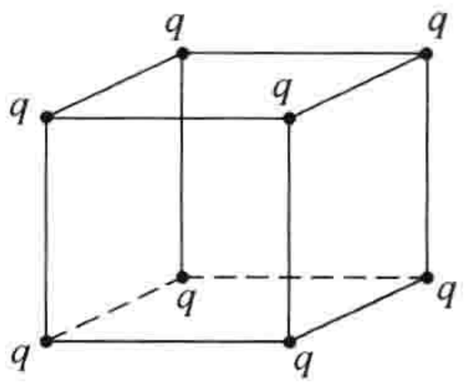


图　3.4

习题 3.3　在球坐标下，对 V 仅依赖于 r 的情况，求出拉普拉斯方程的一般解。对柱坐标系，假定 V 仅依赖于 s，做同样的计算。

3.1.5　边界条件和唯一性定理

仅由拉普拉斯方程本身还无法确定 V；所以还必须指定一组适当的边界条件。这产生一个敏感的问题：什么是适当的边界条件？即它足以确定解，但是还不至于产生不一致性。对一维情况这很容易，一般解 $V=mx+b$ 仅有两个未定常数，因此我们需要两个边界条件。我们可以，比如，指定函数在两个端点的值，或者我们也可以在一个端点指定函数的值和它的导数值，或者在一个端点指定函数值，在另一个端点指定导数值，等等。但是仅由一个端点的函数值或者导数值我们无法求解——所给条件是不充分的。仅给出两个端点的导数也是有问题的——可能是多余的(如果两者等价)或者是不一致的(如果两者不等价)。

在二维和三维情况我们面对的是偏微分方程，要得出什么是可接受的边界条件并不容易。比如，是由框边所唯一确定的绷紧橡胶膜的形状，或者像灌装瓶帽，可以由一种稳定构型变为另一种？答案是，如你们的直觉感知的那样，V 是唯一地由它的边界值所决定的(灌装瓶帽显然不遵从拉普拉斯方程)。可是，另外的边界条件同样可以应用(见习题 3.4)。一组适当的边界条件将是充分条件的证明通常以唯一性定理的形式给出。静电学中有很多这样的定理，所有的都具有相同的基本形式——我将给你们展示两个最有用的。[⊖]

第一唯一性定理：在某个区域 $\mathcal{V}$ 内拉普拉斯方程的解由电势 V 在这个区域的边界面 $\mathcal{S}$ 上的值所唯一决定。

证明：在图 3.5 中我画出了这样的区域和它的边界面。(只要电势在所有表面的值都是确定的，在里面也可以有"孤岛"存在；同样，外边界可以是无限远处，那里的电势通常取为零。)假定存在两个拉普拉斯方程的解：

⊖ 我不试图在这里证明解的存在——这是一件更困难的事情。由其来龙去脉，在物理的基础上，解的存在性是清楚的。

$$\nabla^2 V_1 = 0, \quad \nabla^2 V_2 = 0$$

两者具有相同的边界条件。我要证明的是这两个解必定相等。方法是考虑它们的差

$$V_3 \equiv V_1 - V_2$$

显然它也满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = 0$$

而且 V_3 在所有边界上为零(因为 V_1 和 V_2 在边界上相同)。但是拉普拉斯方程不存在局域的极大和极小——所有极值都发生在边界上。所以 V_3 的极大和极小都是零。因此,V_3 必须处处为零,这样有

$$V_1 = V_2$$

证毕。

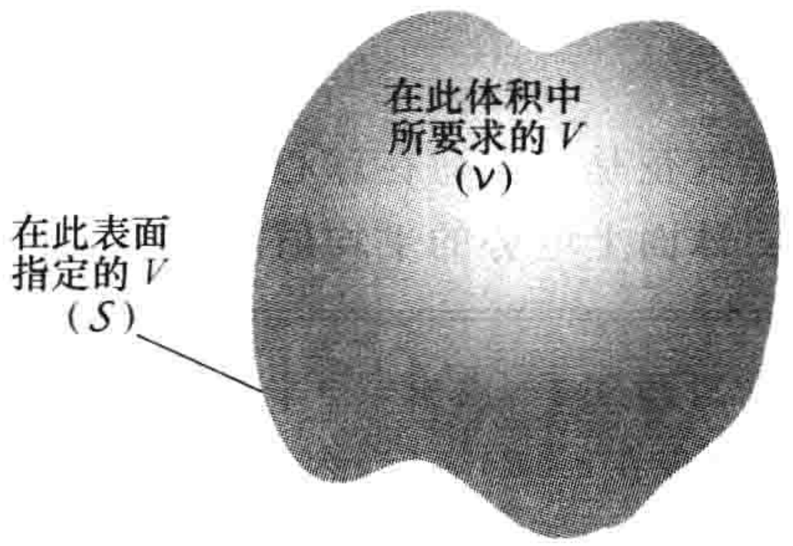


图 3.5

例题 3.1

证明由导体材料所包围空间中,只要该空间中没有电荷存在,则电势是个常数。

解: 在空洞壁上的电势是某个常数,V_0(见 2.5.1 小节(iv)),所以空洞内的电势满足拉普拉斯方程,并且在边界上的值为常数 V_0。很容易猜想空洞内的一个解是:$V = V_0$。唯一性定理保证了这是唯一的解。(由此可得出空洞内的电场为零——在 2.5.2 小节在完全不同的基础上我们曾得到同样的结果。)

唯一性定理打开了我们的想象空间:无论用什么方法得到解都无关紧要;只要(a)它满足拉普拉斯方程,(b)它满足边界条件,则它就是正确的解。当我们学习镜像法时你将看到唯一性定理的威力。

顺便提及,很容易提升第一唯一性定理:我曾假定在所考虑区域内没有电荷存在,所以电势满足拉普拉斯方程,但是我们也可以放入某些电荷(此时 V 满足泊松方程)。论述是同样的,只是此时

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

所以

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

这样电势差($V_3 \equiv V_1 - V_2$)仍然满足拉普拉斯方程,并且在所有边界上为零,所以 $V_3 = 0$,因此仍然有 $V_1 = V_2$。

推论: 如果(a)电荷密度遍及区域 v,(b)电势在所有的边界都已指定,则区域 v 内的电势是唯一确定的。

3.1.6 导体和第二唯一性定理

对一个静电学问题指定边界条件,最简单的方法是在所感兴趣区域的所有边界上指定电势 V 的值。这在实际中也是最常见的:在实验室中,我们有连接于电池的导体,导体保持有一定的电势,或者接地,这是实验工作者用以表示 $V = 0$ 的术语。但是也存在其他情况,在这些情况下我们不知道边界上的电势,而只是知道导体表面上的电荷。假定我在第一个导体上放置电荷 Q_1,在第二个上放置 Q_2 等——我无法告诉你们电荷在每一个导体的表面是如何分布的,因为一旦电荷被放置在导体上,它将会以一种我们无法控制的方式运动。除此之外,比方说,在导体之间的

区域还有一些指定的密度为 ρ 的电荷。那么电场现在可以唯一确定吗？或者可能存在几种不同的方式，从而电荷可以在安放它的导体上形成不同的分布状态，产生不同的场吗？

第二唯一性定理： 设在一个区域 v 中有导体存在，并且有给定的电荷密度 ρ，如果每一个导体上的总电荷已经给定(见图 3.6)，则电场是唯一确定的。(整个区域可以被另外的导体所包围，也可以不被包围。)

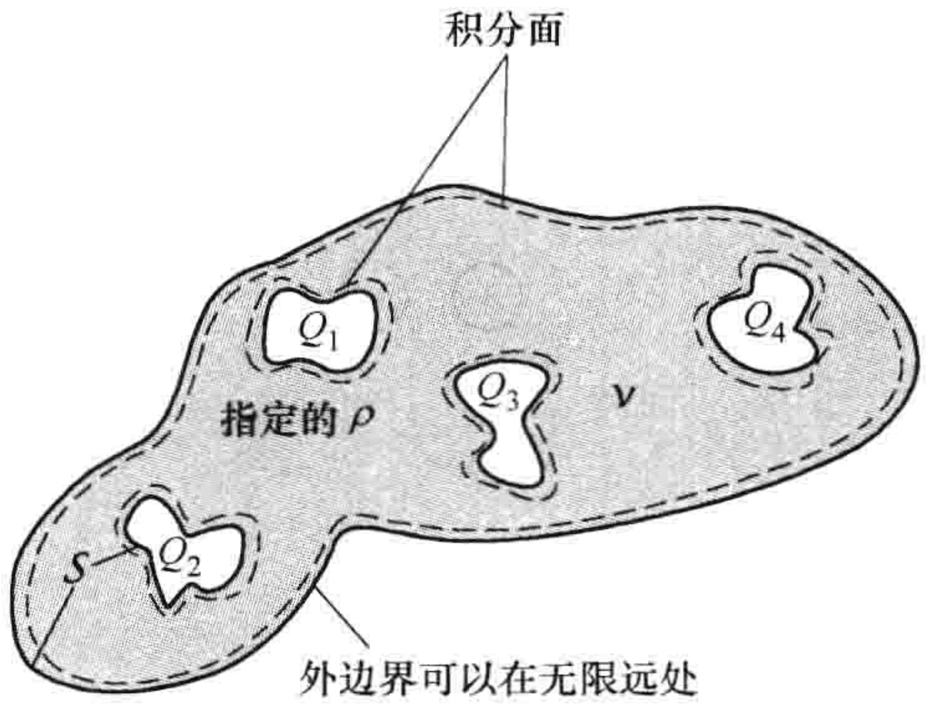


图　3.6

证明： 假定有两个电场满足所给问题的条件。在导体之间的空间两个电场都满足微分形式的高斯定理：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E}_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

对紧围着一个导体的高斯面，两个场都满足积分形式的高斯定理：

$$\oint_{第i个导体面} \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_i, \qquad \oint_{第i个导体面} \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_i$$

同样，对整个区域的外边界面(可以是无限大，或者包围着整个区域的另外导体的内界面)有

$$\oint_{外边界面} \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_{\mathrm{tot}}, \oint_{外边界面} \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q_{\mathrm{tot}}$$

同前面一样，我们考察这两个电场之差

$$\boldsymbol{E}_3 \equiv \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2$$

它在导体之间的区域满足

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_3 = 0 \tag{3.7}$$

在每一个边界面上满足

$$\oint \boldsymbol{E}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0 \tag{3.8}$$

现在这里有一个最后的信息我们必须探讨：虽然我们不知道电荷 Q_i 在第 i 个导体上是如何分布的，我们却知道每一个导体都是一个等势体，因此，电势 V_3 在每一个导体表面都是一个常数(不必是相同的，也不必为零，因为 V_1 和 V_2 可能不相等——我们仅知道两者在每一个导体上都是常数。)现在我们应用一个技巧。利用积规则(5)，我们发现

$$\nabla \cdot (V_3\boldsymbol{E}_3) = V_3(\nabla \cdot \boldsymbol{E}_3) + \boldsymbol{E}_3 \cdot (\nabla V_3) = -(\boldsymbol{E}_3)^2$$

这里我利用了式(3.7)和 $\boldsymbol{E}_3 = -\nabla V_3$。把所得式子对导体之间的整个区域积分，并对左边应用散度定理：

$$\int_V \nabla \cdot (V_3\boldsymbol{E}_3)\,\mathrm{d}\tau = \oint_S V_3\boldsymbol{E}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\int_V (E_3)^2\,\mathrm{d}\tau$$

面积分包含问题中的所有边界面——导体面和外边界面。V_3 在每一个面上都是常数(如果外边界面为无限远处的面，则 $V_3 = 0$)，所以对每一个面积分，V_3 可以提到积分号外，而按照式(3.8)，每个面积分都为零。因此有

$$\int_V (E_3)^2\,\mathrm{d}\tau = 0$$

由于被积函数总是非负的，所以积分为零的条件是处处都有 $E_3 = 0$，这样有 $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2$，定理得到证明。

这个证明不是很容易，并且存在这样的危险，即同证明本身相比，你可能认为定理本身更合

理。当你认为第二唯一性定理是“显然的”时，考虑 Purcell 所给的例子：图 3.7 展示了一个舒适的静电构型，它含有电荷分别为 $\pm Q$ 的四个导体，带正电荷的导体紧靠着带负电的。它看起来非常稳定。现在，如果我们用细导线把它们成对连接起来，如图 3.8 所示，会发生什么？由于正电荷非常靠近负电荷(这也是它们最可能位于的地方)，你也许会认为什么都不会发生——构型仍然稳定。

图 3.7

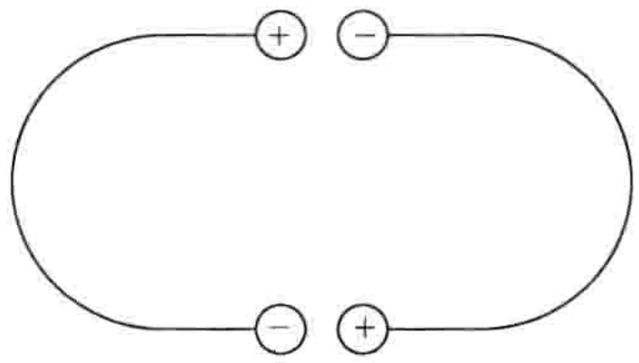


图 3.8

这听起来很合理，但却是错误的。图 3.8 所给的构型是不可能的。因为现在实际上只有两个导体，每一个上的电荷为零。这些导体上电荷为零的一种可能方式是在导体上任何地方都没有电荷存在，因此电场也处处为零(见图 3.9)。由第二唯一性定理，这就是问题的解：电荷将流过细导线，正负相互抵消。

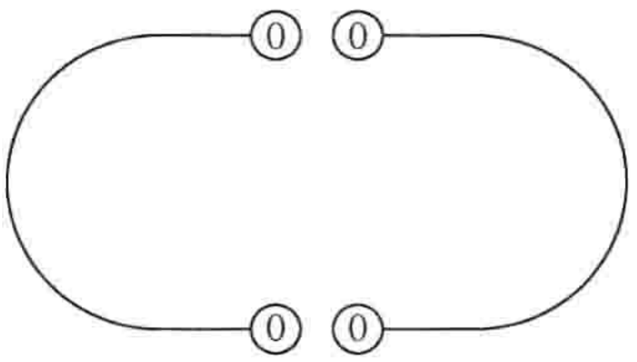


图 3.9

习题 3.4 证明当电荷密度 ρ 给定，在每一个边界上 V 或其法线导数 $\partial V/\partial n$ 之一是给定的时，电场是唯一确定的。不要假设边界是导体，也不要假设 V 在任何边界面上是常数。

习题 3.5 利用格林恒等式(习题 1.60c)，设 $T = U = V_3$，可以给出第二唯一性定理的一个更优美的证明。给出证明细节。

3.2 镜像法

3.2.1 典型镜像问题

假定一个点电荷 q 位于一个无限大接地导体板上方，与板距离为 d(见图 3.10)。问题：在板上方的电势是什么？它不会再是 $(1/4\pi\varepsilon_0)q/r$，因为 q 将在靠近它的板面上诱导出一定量的反号电荷；总的电势，部分是由 q 直接产生的，部分是由诱导电荷产生的。但是当我们不知道诱导电荷有多少，也不知道它们如何分布时，我们如何计算电势呢？

从数学的观点看，我们的问题是在 $z>0$ 区域求解泊松方程，在 $(0, 0, d)$ 处有一个点电荷，边界条件为

1. 当 $z=0$ 时 $V=0$(因为导体板是接地的)；
2. 当远离电荷时 $V\to 0$(远离是指 $x^2+y^2+z^2 >> d^2$)。

第一唯一性定理(实际上是它的推论)保证了仅有一个函数满足上述要求。如果使用一些技巧或精心猜测我们可以找到这个函数，它就是正确的答案。

技巧：先把所给的问题放在一边，我们先研究一个完全不同的问题。在这个问题中有两个点

电荷，一个 $+q$ 放在(0，0，d)，另一个 $-q$ 放在(0，0，$-d$)，并且它们之间没有导体板存在(见图 3.11)。对这个构型我们可以很容易写出它的电势：

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right] \tag{3.9}$$

(分母分别表示从(x，y，z)到 $+q$ 或 $-q$ 的距离。)由这个电势可以看出

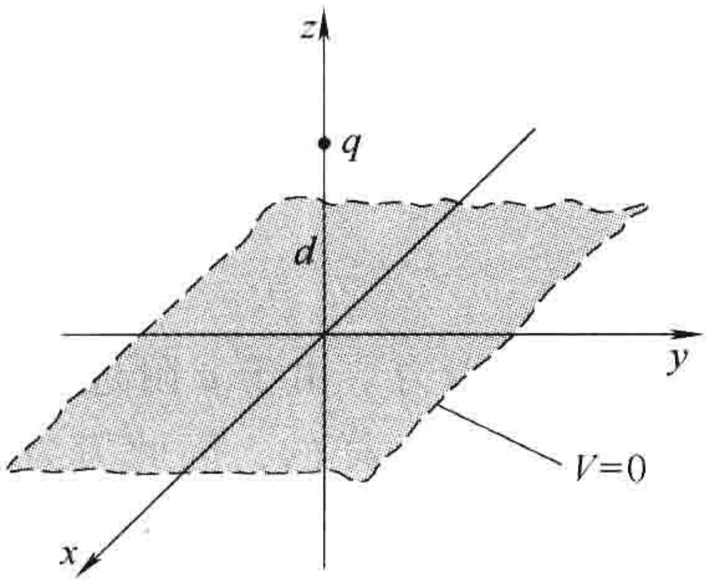


图　3.10

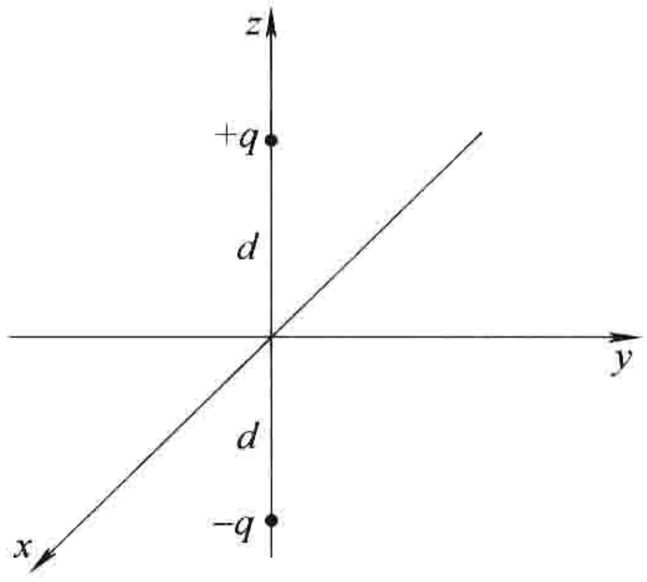


图　3.11

1. 当 $z=0$ 时，$V=0$；
2. 对 $x^2+y^2+z^2 >> d^2$，$V\to 0$。

并且在 $z>0$ 区域仅有的电荷是位于(0，0，d)处的点电荷 $+q$。这正好严格满足原来问题的条件！显然，在 $z\geqslant 0$ 的“上半”区域，第二种构型所产生的电势将与原来的第一种构型完全一样。(在 $z<0$ 的“下半”区域，是完全不同的，但是我们不关心这个，仅上半部分是我们需要的。)结论：一个位于无限大导体板上方的点电荷产生的电势是由式(3.9)取 $z>0$ 给出的。

注意，唯一性定理在这个论述中所起到的关键作用：没有这个定理，没人会相信这个解，因为它是从一个完全不同的电荷分布得出的。但是唯一性定理保证了它的正确性：如果解在所考虑区域满足泊松方程，并且满足所给边界条件，则它就是正确的解。

3.2.2　诱导表面电荷

一旦我们知道了电势，计算一个导体表面的诱导电荷是直截了当的。按照式(2.49)

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$

式中，$\partial V/\partial n$ 是 V 在表面处的法向导数。对前一小节的情况，法向是 z 方向，所以

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0}$$

由式(3.9)有

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{-q(z-d)}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}} + \frac{q(z+d)}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}\right\}$$

所以

$$\sigma(x,y) = \frac{-qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} \tag{3.10}$$

如预期的那样，诱导电荷是负的(假定 q 是正的)，σ 的最大值在 $x=y=0$ 处。

有了 σ，让我们计算总的诱导电荷

$$Q = \int \sigma \mathrm{d}a$$

这个积分是对 xy 平面进行的，可以用直角坐标系，此时 $\mathrm{d}a = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，不过如果用极坐标$(r, \phi)$会更容易一些，此时 $r^2 = x^2 + y^2$，$\mathrm{d}a = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$。这样有

$$\sigma(r) = \frac{-qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

从而

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{-qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = \left.\frac{qd}{\sqrt{r^2 + d^2}}\right|_0^{\infty} = -q \tag{3.11}$$

显然板面上总的诱导电荷为 $-q$，（作为后见之明）你们可以使自己确信它的确应该如此。

3.2.3 力和能量

由于负的诱导电荷，电荷 q 将被板所吸引。让我们计算这个吸引力。由于 q 附近的电势与类似问题（即存在 $+q$，$-q$，但是没有导体板）中的一样，所以电场也是一样的，因此力为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2d)^2}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{3.12}$$

注意：假设任何事情在这两个问题中都是一样的，则会引起错误。比如能量就不是一样的。对没有导体板的两电荷问题，式(2.42)给出

$$W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2d} \tag{3.13}$$

但是对有导体板的单电荷问题，能量为上式的一半：

$$W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4d} \tag{3.14}$$

为什么是一半？思考一下能量是储存在电场中的（式(2.45)）：

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\,\mathrm{d}\tau$$

在第一种情况下，上半区域（$z>0$）和下半区域（$z<0$）都有贡献——而且由对称性它们的贡献是一样的。但是在第二种情况下，仅上半区域存在非零的电场，因此能量减半。

当然，我们也可以计算把 q 移到无限远处所需的功来确定能量。所需的力（与式(3.12)所给的电场力反向）是$(1/4\pi\varepsilon_0)(q^2/4z^2)\hat{\boldsymbol{z}}$，所以

$$W = \int_{\infty}^{d}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{d}\frac{q^2}{4z^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q^2}{4z}\right)\Bigg|_{\infty}^{d} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4d}$$

当我朝着导体板移动 q 时，我仅对 q 做功。的确诱导电荷也在导体板上运动，但是这不消耗任何东西，因为整个导体的电势为零。作为对照，如果我同时移动两个点电荷（没有导体板），我对两个电荷都需做功，因此总功加倍。

3.2.4 其他镜像问题

前面所描述的方法并不仅局限于单个点电荷：任何靠近接地导电面的稳定电荷分布都可以通过引入它的镜像电荷这种方法处理——因此命名为镜像法。（记住镜像电荷具有相反的符号；这保证了 xy 平面电势为零。）还有一些珍奇问题也可以用这种方式处理；下面是最优美的一个。

例题 3.2

一个点电荷 q 距一个半径为 R 的接地导体球的球心为 a（见图 3.12）。求出球外的电势。

解： 考察一个完全不同的构型，除了点电荷 q 还有另外一个点电荷

$$q' = -\frac{R}{a}q \tag{3.15}$$

其位置为球心右边距球心距离为(见图 3.13)

$$b = \frac{R^2}{a} \tag{3.16}$$

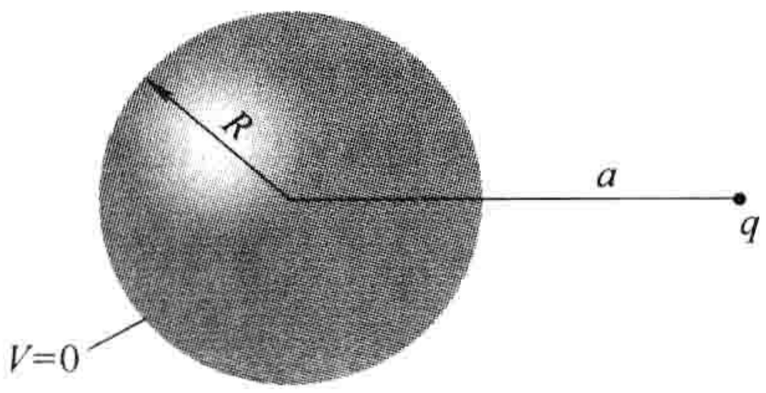


图　3.12

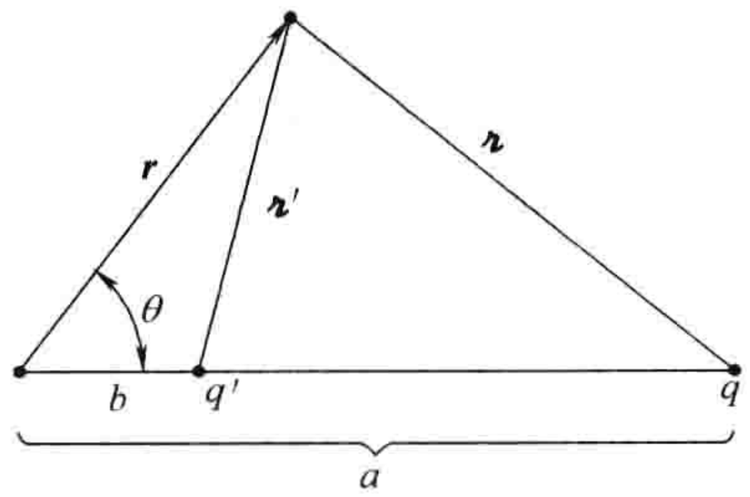


图　3.13

处。现在没有导体——仅两个电荷。这个构型的电势为

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\imath} + \frac{q'}{\imath'}\right) \tag{3.17}$$

式中，$\imath$，$\imath'$分别为到 q，q'的距离。现在，这个电势在球面上所有点的势都为零(见习题 3.7)，因此在球外区域满足我们原来问题的边界条件。

结论：式(3.17)就是一个靠近导体球点电荷的电势。(注意，b 小于 R，所以镜像电荷 q'安全地位于球内——你不能把镜像电荷放在你要计算 V 的区域；这将改变 ρ，你求解的泊松方程的源将是错误的。)特别有，点电荷和球面之间的吸引力为

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(a-b)^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2Ra}{(a^2-R^2)^2} \tag{3.18}$$

这个解非常简洁，但是也非常侥幸。应用镜像法有很多技巧，有时你必须考虑适当的“辅助问题”。解决上面问题的第一人不会事先知道镜像电荷应为多大，应该放在哪里。也许他(或她)是从任意的 q'并把它放在任意位置开始的，计算球面上的电势，然后发现使球面电势为零的 q'和 b。但是并不是任何情况下我们都可以这么做——如果用一个立方体代替球，在立方体内任何地方放置镜像电荷都不会使它的表面电势为零。

习题 3.6　如图 3.14 所示，求出作用在电荷 $+q$ 上的力。(xy 面是接地导体。)

习题 3.7

(a) 利用余弦定理证明式(3.17)可以写成

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2+(ra/R)^2-2ra\cos\theta}}\right] \tag{3.19}$$

式中，r 和 θ 是通常的球坐标；z 轴是沿通过 q 的直线。在这种形式下，当 $r=R$ 时，$V=0$ 表示得更清楚。

(b) 作为 θ 的函数，求出球面上的诱导电荷面密度。对其积分求出总诱导电荷。(它应该为多大?)

(c) 计算这个构型的能量。

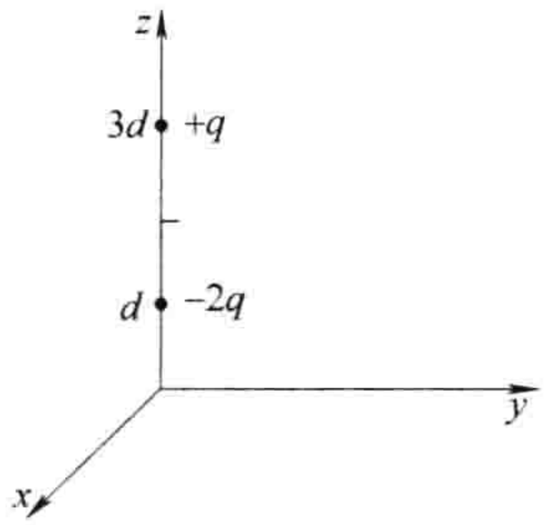


图　3.14

习题 3.8　在例题 3.2 中我们假设了导体球是接地的($V=0$)。但是如果增添第二个镜像电荷，同样的考虑可以处理一个具有任意电势 V_0(当然是相对于无限远处)球的情况。你应当用什么样的电荷？应该把它放在哪里？求出点电荷 q 同一个中性导体球的吸引力。

！ **习题 3.9** 一条无限长均匀带电线，电荷线密度为 λ，它距一个接地导体板距离为 d。（可设带电线平行于 x 轴并位于 x 轴上方，导体板为 xy 平面）

（a）求出导体板上方的电势。

（b）求出导体板上的诱导电荷的面密度。

习题 3.10 两个半无限大接地导体板一端相接形成一个直角。在它们之间的区域有一个点电荷 q，位置如图 3.15 所示。构造镜像构型，计算这个区域内的电势。你应当用什么样的电荷？应该把它放在哪里？作用在 q 上的力是什么？把 q 从无限远处移到所示位置需做多少功？假定两板形成的角度不是 90°，而是另外的一些角度，你还能用镜像法求解问题吗？如果不能，对什么样的特殊角度仍然可以用镜像法求解？

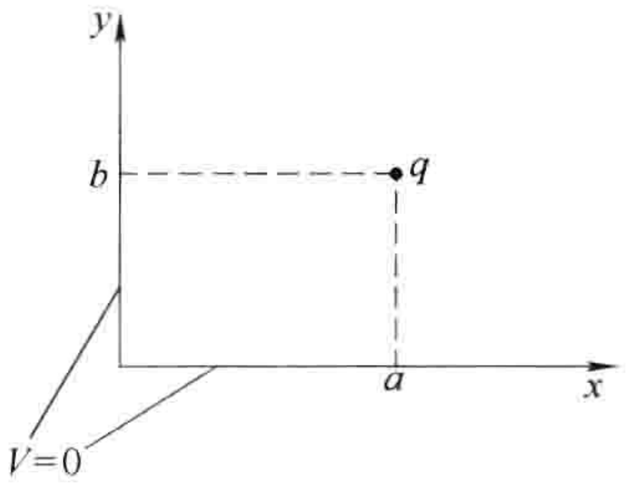


图 3.15

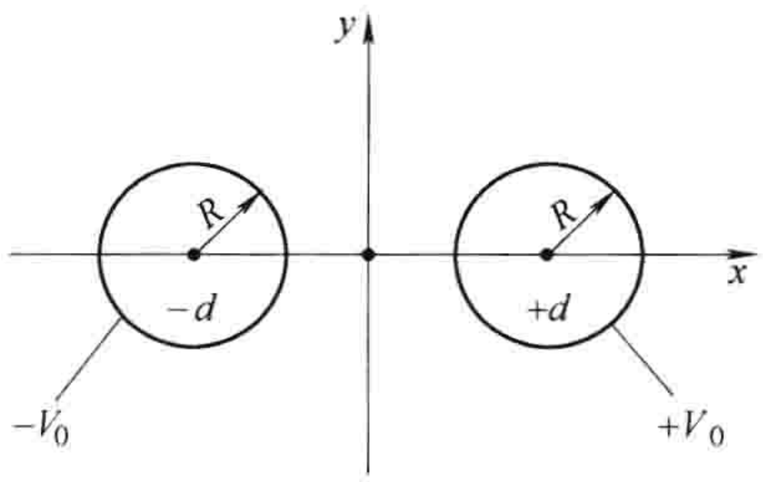


图 3.16

！ **习题 3.11** 两个长直铜管，每一个半径为 R，两管中心距离为 $2d$。一个管的电势为 V_0，另一个的为 $-V_0$（见图 3.16）。求出所有地方的电势。［建议：利用习题 2.47 的结果。］

3.3 分离变量法

在这一节我们将利用分离变量法直接求解拉普拉斯方程，分离变量法是物理学家求解偏微分方程时最喜爱的工具。当电势（V）或电荷面密度（σ）在某个区域的边界给定，我们想求出区域内的电势时，分离变量法非常适用。基本策略非常简单：我们寻找函数乘积形式的解，而每个函数仅依赖于一个坐标。可是计算的细节可能有点繁杂，所以我打算通过一系列的例子介绍这种方法。我们先由直角坐标开始，然后再介绍球坐标（柱坐标的情况在习题 3.23 留给你们自己处理。）

3.3.1 直角坐标

例题 3.3

两个无限大接地金属平板平行于 xz 平面放置，一个位于 $y=0$，另一个位于 $y=a$（见图 3.17）。在 $x=0$ 两板的左端点，被与两板绝缘的无限长带封闭，带子上维持特定的电势 $V_0(y)$。求出这个“夹缝”中的电势。

解：这个构型不依赖于 z，所以它其实是一个二维问题。从数学上讲，我们必须求解二维拉普拉斯方程，

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \tag{3.20}$$

其边界条件为

$$\begin{aligned}&\text{(i) 当 } y=0 \text{ 时},V=0\\&\text{(ii) 当 } y=a \text{ 时},V=0\\&\text{(iii) 当 } x=0 \text{ 时},V=V_0(y)\\&\text{(iv) 当 } x\to\infty \text{ 时},V\to 0\end{aligned} \tag{3.21}$$

(最后一个边界条件题中并没有明显指出，但是在物理的基础上它是必需的：当你越来越远离 $x=0$ 处的“热”带时，电势应当减小为零。)由于在所有边界上电势已指定，问题的解是唯一确定的。

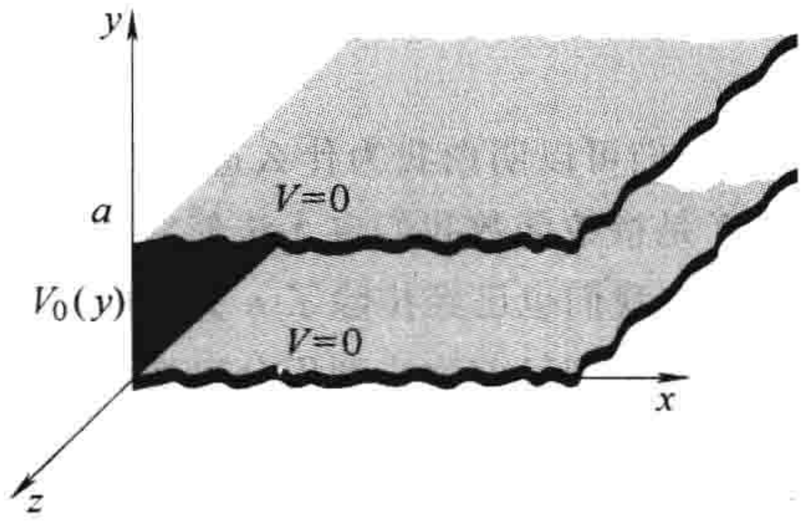


图　3.17

求解的第一步是设解具有乘积的形式：

$$V(x,y) = X(x)Y(y) \tag{3.22}$$

乍看起来，这是一个不合理的限制——拉普拉斯方程的大多数解不具有这种形式。例如，$V(x, y)=(5x+6y)$ 满足式(3.20)，但是你无法把它表示为一个 x 的函数乘以一个 y 的函数。显然，由这种方法我们只能得到所有可能解中的一小部分，如果其中一个能够适合我们问题的边界条件，那才真是一个奇迹……是的，我们得到的解的确很特殊，但是如果我们把这些特解叠加在一起，我们就可以构造一个一般解。

不管怎样，把式(3.22)代入式(3.20)，我们得到

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

下一步是“分离变量”(即，把所有依赖 x 的放在一起，把所有依赖 y 的放在一起)。通常，可以用除以 V 做到这一点：

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \tag{3.23}$$

现在第一项仅依赖于 x，而第二项仅依赖于 y；换句话说，我们有下面形式的方程

$$f(x) + g(y) = 0 \tag{3.24}$$

这个方程成立只有一种可能：f 和 g 都必须为常数。因为如果我们变化 x，但保持 y 不变，这样 $f(x)$ 将发生改变，而 $g(y)$ 保持不变，所以和 $f(x)+g(y)$ 将发生改变，这将违反两者之和总是为零的式(3.24)。(这是一个简单但又难以理解的论述；不要仅是接受它而不仔细思考，因为整个方法是建立在这个基础上的。)这样式(3.23)可以写为

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = C_1, \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = C_2, \text{并且有 } C_1 + C_2 = 0 \tag{3.25}$$

两个常数中一个为正，另一个为负(也许两个都为零)。一般来讲，我们必须考察所有的可能性；不过，在我们的具体问题中我们需要 C_1 为正，C_2 为负，理由下面马上给出。这样有

$$\frac{d^2X}{dx^2} = k^2X, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2Y \tag{3.26}$$

注意所发生的事情：一个偏微分方程(式(3.20))被转换为两个普通微分方程(式(3.26))。其优点是显然的——普通微分方程比较容易求解。的确：

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \quad Y(y) = C\sin ky + D\cos ky$$

所以

$$V(x,y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C\sin ky + D\cos ky) \tag{3.27}$$

这就是拉普拉斯方程适当的分离变量解；余下的事就是加上边界条件，求出式中的常数。首先边界条件(iv)要求 A 为零。[⊖]把 B 吸收到 C 和 D 中，我们有

$$V(x,y) = e^{-kx}(C\sin ky + D\cos ky)$$

条件(i)要求 $D=0$，所以

$$V(x,y) = Ce^{-kx}\sin ky \tag{3.28}$$

同时(ii)给出 $\sin ka=0$，这样有

⊖ 我假定了 k 为正，但是这并不失一般性——负的 k 给出与式(3.27)一样的解，只不过常数有点变化($A \leftrightarrow B$，$C \rightarrow -C$)。顺便指出(但是不对目前的例子)，$k=0$ 也应包括在内(见习题 3.47)。

$$k = \frac{n\pi}{a}, \qquad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{3.29}$$

(现在你们可以明白我为什么选择 C_1 为正和 C_2 为负：如果 X 是正弦函数，我们无法使它在无限远处为零，如果 Y 是指数函数我们也无法使它在 0 和 a 处为零。顺便指出，$n=0$ 是不必要的，因为这种情况下电势处处为零。我们也已经排除了 n 为负的情况。)

这就是到目前为止利用分离变量我们所能做的，除非对某个 n，$V_0(y)$ 正好具有 $\sin(n\pi y/a)$ 的形式，我们不可能拟合 $x=0$ 处的最后一个边界条件。现在是补救这个方法的关键一步：分离变量法给我们提供了一个无限的解集(每个 n 对应一个解)，尽管其中的某一个解不能拟合最后的那个边界条件，它们以某种方式的组合却是有可能的。拉普拉斯方程是线性的，即如果 V_1，V_2，V_3，…分别满足方程，则它们的任何线性叠加 $V=\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2+\alpha_3 V_3+\cdots$ 也满足方程，其中 α_1，α_2，…为任意常数。因为

$$\nabla^2 V = \alpha_1 \nabla^2 V_1 + \alpha_2 \nabla^2 V_2 + \cdots = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots = 0$$

利用这个事实，我们可以把分离变量解(式(3.28))叠加在一起构造一个更一般的通解：

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a) \tag{3.30}$$

这个通解仍然满足前三个边界条件；问题是，它可以拟合(由精心选择叠加系数 C_n)最后一个边界条件吗？

$$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi y/a) = V_0(y) \tag{3.31}$$

你们可能已经认出这个求和——它是一个傅里叶正弦级数。狄利克雷(Dirichlet)定理[㊀]实际上保证了任何函数 $V_0(y)$——它甚至可以为不连续的有限数——可以用这个级数展开。

但是我们如何确定出现在无限求和中的系数 C_n 呢？确定系数的方法非常优美，名副其实——我称它为傅里叶技巧，尽管欧拉早时也曾用过基本类似的思想。这种技巧如下：把 $\sin(n'\pi y/a)$(这里 n' 是一个正整数)与式(3.31)相乘，然后从 0 到 a 积分：

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \sin(n\pi y/a)\sin(n'\pi y/a)\,dy = \int_0^a V_0(y)\sin(n'\pi y/a)\,dy \tag{3.32}$$

左边的积分你们可以自己求出，答案是

$$\int_0^a \sin(n\pi y/a)\sin(n'\pi y/a)\,dy = \begin{cases} 0, & \text{如果 } n' \neq n \\ \dfrac{a}{2}, & \text{如果 } n' = n \end{cases} \tag{3.33}$$

这样除了 $n'=n$ 的项外，其余项都被消除，式(3.32)左边约化为 $(a/2)C_{n'}$。结论：[㊁]

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a V_0(y)\sin(n\pi y/a)\,dy \tag{3.34}$$

这完成了我们的任务：由式(3.34)所给出系数的式(3.30)是我们所要求的解。作为一个具体的例子，假定在 $x=0$ 处的带是一个金属板，电势为常数 V_0(记住，在 $y=0$ 和 $y=a$，它是与接地板绝缘的)，则有

$$C_n = \frac{2V_0}{a}\int_0^a \sin(n\pi y/a)\,dy = \frac{2V_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{如果 } n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{4V_0}{n\pi}, & \text{如果 } n \text{ 为奇数} \end{cases} \tag{3.35}$$

显然

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots} \frac{1}{n} e^{-n\pi x/a}\sin(n\pi y/a) \tag{3.36}$$

图 3.18 画出了这个电势；图 3.19 展示了傅里叶级数中前几项的结合是如何越来越接近常数 V_0 的：(a)仅是 $n=1$，(b)n 取到 5，(c)前 10 项之和，(d)前 100 项之和。

㊀ Boas, M., Mathematical Methods in the Physical Sciences, 2nd ed. (New York: John Wiley, 1983)。

㊁ 为优美起见，我去掉了撇号；式(3.34)对 $n=1$，2，3，…成立，(显然)对“哑”指标用什么字母是无关紧要的。

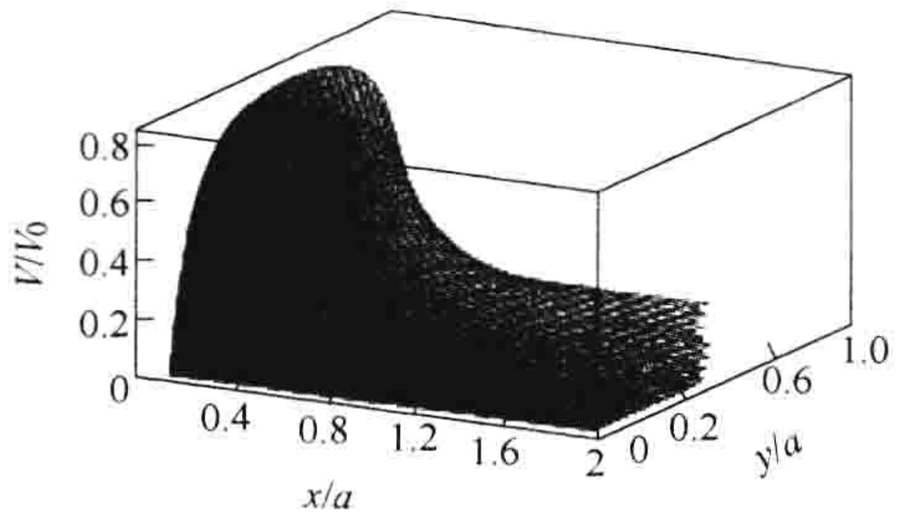


图　3.18

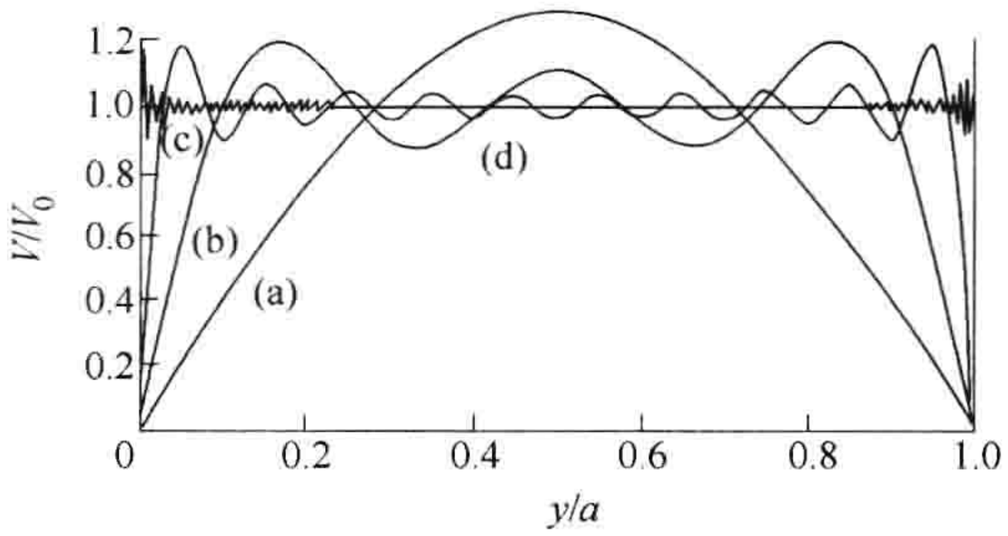


图　3.19

顺便指出，式(3.36)的无限求和可以明显求出(如果你喜欢，自己试试)；结果是

$$V(x,y) = \frac{2V_0}{\pi}\arctan\left(\frac{\sin(\pi y/a)}{\sinh(\pi x/a)}\right) \tag{3.37}$$

以这种形式，很容易验证它满足拉普拉斯方程以及满足边界条件式(3.21)。

分离变量解(式(3.28))的成功依赖于这种方法有两个极不寻常的特性：完备性和正交性。一组函数被称为是完备的，即如果任何其他函数$f(y)$可以展开为这组函数的线性叠加：

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(y) \tag{3.38}$$

函数系 $\sin(n\pi y/a)$在区间 $0 \leqslant y \leqslant a$ 是完备的。正是这个事实，加之由 Dirichlet 定理选出适当的系数 C_n，才保证了式(3.31)的成立。(对一组函数完备性的证明，是非常困难的，我恐怕物理学家都是倾向于承认它是正确的，而把验证留给他人。)一组函数被称为正交的，即如果它们之中的任意两个之积的积分为零：

$$\int_0^a f_n(y) f'_n(y)\,\mathrm{d}y = 0, n' \neq n \tag{3.39}$$

正弦函数是正交的(式(3.33))；这个性质是傅里叶技巧的基础，它允许我们在无限级数中除了一项以外消除掉所有其他项，从而得到系数 C_n。(正交性的证明一般来讲比较简单，可直接积分验证或分析得出这些函数的微分方程证明。)

例题 3.4

两个无限长接地金属板，分别在 $y=0$ 和 $y=a$ 放置，在 $x=\pm b$ 的侧边连接有电势为 V_0 的两个金属带，如图 3.20 所示(在每个角有薄细绝缘层防止四块金属之间短接)。求出这个矩形管中的电势。

解： 这个构型也是不依赖于 z 的。我们的问题是求解拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

边界条件为

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) 当 } y = 0 \text{ 时}, V = 0\\ \text{(ii) 当 } y = a \text{ 时}, V = 0\\ \text{(iii) 当 } x = b \text{ 时}, V = V_0\\ \text{(iv) 当 } x = -b \text{ 时}, V = V_0\end{array}\right\} \tag{3.40}$$

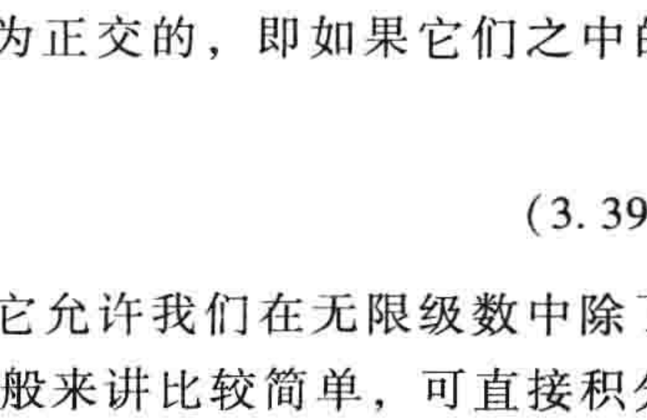


图　3.20

直到式(3.27)，做法同前：

$$V(x,y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C\sin ky + D\cos ky)$$

不过这次，我们不能再令 $A=0$；本问题所给的区域并不扩展到 $x=\infty$，所以 e^{kx}是完全可取的。另一方面，所给问题对 x 是对称的，所以 $V(-x,y)=V(x,y)$，这样有 $A=B$。利用

$$e^{kx} + e^{-kx} = 2\cosh kx$$

并且把 $2A$ 吸收进 C 和 D，我们有

$$V(x,y) = \cosh kx(C\sin ky + D\cos ky)$$

同前一样，边界条件(i)和(ii)要求 $D=0$ 和 $k=n\pi/a$，所以

$$V(x,y) = C\cosh(n\pi x/a)\sin(n\pi y/a) \tag{3.41}$$

由于 $V(x,y)$ 是 x 的偶函数，如果它满足条件(iii)，它将自动满足(iv)。因此，余下的事是构造一般的叠加解

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cosh(n\pi x/a)\sin(n\pi y/a)$$

并且设定系数 C_n 使其拟合边界条件(iii)：

$$V(b,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cosh(n\pi b/a)\sin(n\pi y/a) = V_0$$

这是我们前面遇到的傅里叶分析的同样问题；我引用式(3.35)的结果

$$C_n\cosh(n\pi b/a) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{4V_0}{n\pi}, & \text{如果 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

结论：这个情况中电势为

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{1}{n}\frac{\cosh(n\pi x/a)}{\cosh(n\pi b/a)}\sin(n\pi y/a) \tag{3.42}$$

这个函数在图 3.21 中画出。

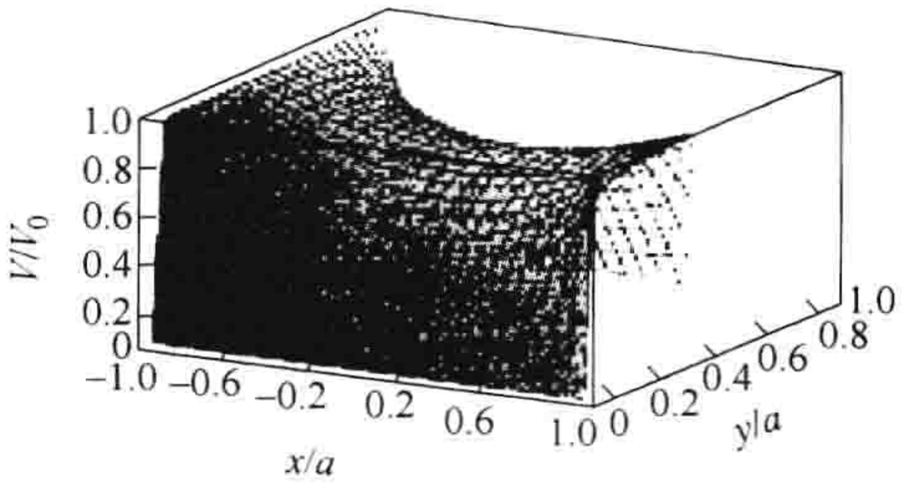


图 3.21

例题 3.5

一个无限长矩形金属管(边长分别为 a 和 b)，在其 $x=0$ 的端口维持有电势 $V_0(y,z)$，如图 3.22 所示。求出管内的电势。

解：这是一个真正的三维问题

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{3.43}$$

边界条件为

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)}\ y=0, & V=0 \\ \text{(ii)}\ y=a, & V=0 \\ \text{(iii)}\ z=0, & V=0 \\ \text{(iv)}\ z=b, & V=0 \\ \text{(v)}\ x\to\infty, & V\to 0 \\ \text{(vi)}\ x=0, & V=V_0(y,z) \end{array}\right\} \tag{3.44}$$

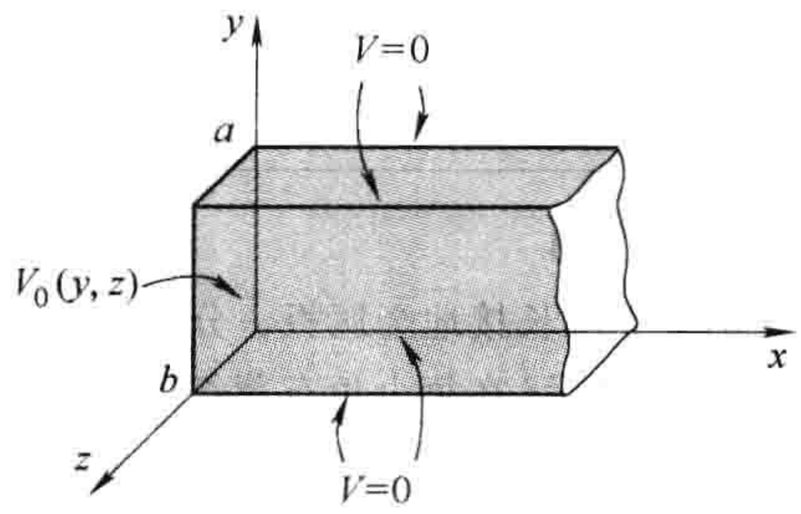


图 3.22

同前一样，我们探寻乘积形式的解

$$V(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{3.45}$$

把这代入式(3.43)，并除以 V，我们发现

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

由此得出

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = C_1, \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = C_2, \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = C_3, \text{其中 } C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

由先前的经验(例题 3.3)C_1 应为正的，C_2 和 C_3 为负。令 $C_2 = -k^2$，$C_3 = -l^2$，我们有 $C_1 = k^2 + l^2$，因此

$$\frac{d^2X}{dx^2} = (k^2 + l^2)X, \frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2Y, \frac{d^2Z}{dz^2} = -l^2Z \tag{3.46}$$

我们再次看到，分离变量把一个偏微分方程转化为普通的微分方程。解为

$$X(x) = Ae^{\sqrt{k^2+l^2}x} + Be^{-\sqrt{k^2+l^2}x}$$

$$Y(y) = C\sin ky + D\cos ky$$

$$Z(z) = E\sin lz + F\cos lz$$

边界条件(v)意味着 $A=0$，(i)给出 $D=0$，(iii)给出 $F=0$，而(ii)和(iv)要求 $k=n\pi/a$ 和 $l=m\pi/b$，这里 n，m 为正整数。合并剩余的常数，我们得到

$$V(x,y,z) = Ce^{-\pi\sqrt{(n/a)^2+(m/b)^2}x}\sin(n\pi y/a)\sin(m\pi z/b) \tag{3.47}$$

这个解除了(vi)外满足所有的其他边界条件。它用两个整数(n，m)标记一个特解，所以一般解是双重求和：

$$V(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m}e^{-\pi\sqrt{(n/a)^2+(m/b)^2}x}\sin(n\pi y/a)\sin(m\pi z/b) \tag{3.48}$$

我们希望通过适当选择系数 $C_{n,m}$ 来拟合剩余的一个边界条件

$$V(0,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m}\sin(n\pi y/a)\sin(m\pi z/b) = V_0(y,z) \tag{3.49}$$

为了决定系数，我们乘以 $\sin(n'\pi y/a)\sin(m'\pi z/b)$，其中 n'，m' 为任意正整数，然后积分

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m}\int_0^a \sin(n\pi y/a)\sin(n'\pi y/a)\,dy\int_0^b \sin(m\pi z/b)\sin(m'\pi z/b)\,dz$$

$$= \int_0^a\int_0^b V_0(y,z)\sin(n'\pi y/a)\sin(m'\pi z/b)\,dy\,dz$$

引用式(3.33)的结果，上式左边为 $(ab/4)C_{n',m'}$，所以

$$C_{n,m} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b V_0(y,z)\sin(n\pi y/a)\sin(m\pi z/b)\,dy\,dz \tag{3.50}$$

系数由式(3.50)所给的式(3.48)就是我们问题的解。

例如，如果管端面为一个电势为 V_0 的导体，则

$$C_{n,m} = \frac{4V_0}{ab}\int_0^a \sin(n\pi y/a)\,dy\int_0^b \sin(m\pi z/b)\,dz$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{如果 } n \text{ 或 } m \text{ 为偶数} \\ \dfrac{16V_0}{\pi^2 nm}, & \text{如果 } n \text{ 和 } m \text{ 为奇数} \end{cases} \tag{3.51}$$

对这种情况

$$V(x,y,z) = \frac{16V_0}{\pi^2}\sum_{n,m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{nm}e^{-\pi\sqrt{(n/a)^2+(m/b)^2}x}\sin(n\pi y/a)\sin(m\pi z/b) \tag{3.52}$$

注意，后面的项衰减很快，所以仅保留前几项就可以得到合理的近似。

习题 3.12　如果例题 3.3 中 $x=0$ 边界是由两个金属带组成的：一个从 $y=0$ 到 $y=a/2$，电势为 V_0，另一个从 $y=a/2$ 到 $y=a$，电势为 $-V_0$。求出这个无限狭缝中的电势。

习题 3.13　假设例题 3.3 无限长狭缝中 $x=0$ 处的带是一个电势为 V_0 的导体，求出它的电荷面密度 $\sigma(y)$。

习题 3.14　一个矩形管，平行于 z 轴放置(从 $-\infty$ 到 ∞)，它在 $y=0$，$y=a$，$x=0$ 的三个面是接地金属面。在 $x=b$ 的第四个面维持电势 $V_0(y)$。

(a) 给出一个管内电势的一般公式。

(b) 对 $V_0(y) = V_0$(常数)情况，求出电势。

习题 3.15 一个立方体盒子(边长为 a)有五个面是连接在一起接地的(见图 3.23)。顶面是与其他面绝缘的一特殊金属面，电势为 V_0，求出盒内的电势。

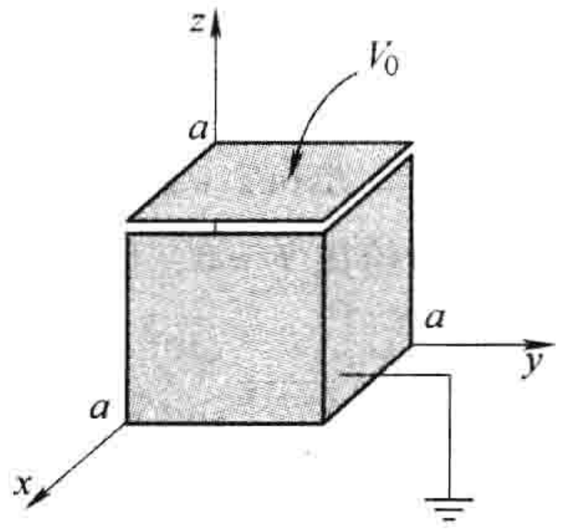


图 3.23

3.3.2 球坐标

到目前为止所考虑的例子中，直角坐标系非常适用，因为边界是平板。对圆形物体使用球坐标更自然。在球坐标系中，拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0 \tag{3.53}$$

我将假定所给问题具有轴对称性，所以 V 不依赖于 ϕ；[⊖]这种情况下式(3.53)化为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0 \tag{3.54}$$

同前面一样，我们寻找乘积形式的解：

$$V(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta) \tag{3.55}$$

把这个式子代入式(3.54)，并除以 V：

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)=0 \tag{3.56}$$

既然第一项仅依赖于 r，第二项仅依赖于 θ，所以每一项必为一个常数：

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=l(l+1),\quad\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)=-l(l+1) \tag{3.57}$$

这里 $l(l+1)$ 只是表示分离常量的一种便利方式——你们很快会看到它的便利之处。

总是如此，分离变量把一个偏微分方程(式(3.54))转化为普通微分方程(式(3.57))。径向方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=l(l+1)R \tag{3.58}$$

其一般解为

$$R(r)=Ar^l+\frac{B}{r^{l+1}} \tag{3.59}$$

你们可以很容易验证此式；如对二阶微分方程预期的那样，A 和 B 是两个任意常数。但是角方程

⊖ 对电势依赖 ϕ 的一般情况，在所有的研究生教材中都有讨论。比如，参见 J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 第 3 版，第 3 章(New York: John Wiley, 1999)。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = -l(l+1)\sin\theta\Theta \tag{3.60}$$

就没有那么简单了。解是以变量 $\cos\theta$ 表示的勒让德[Legendre]多项式：

$$\Theta(\theta) = \mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{3.61}$$

$\mathrm{P}_l(x)$ 可方便地由罗德里格[Rodrigue]公式定义：

$$\mathrm{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l (x^2-1)^l \tag{3.62}$$

前几个勒让德多项式在表 3.1 中列出。

表 3.1　勒让德多项式

$\mathrm{P}_0(x) = 1$
$\mathrm{P}_1(x) = x$
$\mathrm{P}_2(x) = (3x^2-1)/2$
$\mathrm{P}_3(x) = (5x^3-3x)/2$
$\mathrm{P}_4(x) = (35x^4-30x^2+3)/8$
$\mathrm{P}_5(x) = (63x^5-70x^3+15x)/8$

注意，$\mathrm{P}_l(x)$（如其名字暗示的那样）是 x 的一个 l 次多项式；如果 l 是偶数，它仅含有偶次项，如果 l 是奇数，它仅含有奇次项。前面的因子 $(1/2^l l!)$ 选取的是

$$\mathrm{P}_l(1) = 1 \tag{3.63}$$

罗德里格公式显然仅对非负的整数 l 成立。另外，它仅提供给我们一个解。但是式(3.60)是一个二阶微分方程，对每一个 l，它应当有两个解。情况是那些“另外的解”在 $\theta=0$ 和/或者 $\theta=\pi$ 发散，所以在物理的基础上这些解是不可取的。[⊖]例如，对 $l=0$ 的第二个解是

$$\Theta(\theta) = \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.64}$$

你们可以自己验证它满足式(3.60)。

这样，在轴对称情况下，拉普拉斯方程符合最小物理要求的最一般分离变量解为

$$V(r,\theta) = \left(Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

（这里无须在式(3.61)中加进一个常数，因为它可以在此时被吸收进 A 和 B。）同前一样，分离变量给出一个无限的解集，每个解对应一个 l。所以通解是分离变量解的线性叠加：

$$\boxed{V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)} \tag{3.65}$$

下面的例题展示了这个重要结果的威力。

例题 3.6

在一个半径为 R 的中空球面上，电势为 $V_0(\theta)$。求出球内的电势。

解： 对本题情况，对所有的 l，$B_l=0$——否则电势在原点会变为无限大。这样有

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{3.66}$$

在 $r=R$ 时，必须拟合指定的函数 $V_0(\theta)$：

⊖ 在某些稀有情况下，由于某些原因 z 轴是难以得到的，这些“其他解”也许需要考虑。

$$V(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) = V_0(\theta) \tag{3.67}$$

选择适当的系数 A_l，这个方程能够得到满足吗？是的，勒让德多项式（像正弦函数一样）在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$（$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$）区间构成一个完备集。我们如何能确定这些系数呢？再一次，可利用傅里叶技巧，因为勒让德多项式是正交的函数：[一]

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l'}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \mathrm{P}_l(\cos\theta)\mathrm{P}_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \begin{cases} 0, & \text{如果 } l \neq l' \\ \dfrac{2}{2l+1}, & \text{如果 } l = l' \end{cases}\end{aligned} \tag{3.68}$$

这样把式（3.67）乘以 $\mathrm{P}_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$ 然后积分，我们得到

$$A_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l'+1} = \int_0^{\pi} V_0(\theta)\mathrm{P}_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

或者

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l}\int_0^{\pi} V_0(\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{3.69}$$

具有式（3.69）所给系数的式（3.66）就是我们问题的解。

解析上计算积分式（3.69）可能比较困难，在实际中通过“观察”求解式（3.67）常常比较容易。[二]假定，球面上的电势为

$$V_0(\theta) = k\sin^2(\theta/2) \tag{3.70}$$

式中，k 是一个常数。利用半角公式，把上式写为

$$V_0(\theta) = \frac{k}{2}(1-\cos\theta) = \frac{k}{2}[\mathrm{P}_0(\cos\theta) - \mathrm{P}_1(\cos\theta)]$$

把这代入式（3.67），我们直接得到 $A_0 = k/2$，$A_1 = -k/(2R)$，其余的 A_l 为零。这样

$$V(r,\theta) = \frac{k}{2}\left[r^0\mathrm{P}_0(\cos\theta) - \frac{r^1}{R}\mathrm{P}_1(\cos\theta)\right] = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right) \tag{3.71}$$

例题 3.7

仍给定半径为 R 的球面上的电势 $V_0(\theta)$，但是现在我们想求球面外的电势，假定球外没有电荷分布。

解： 对这种情况下的球外的电势诸 A_l 必须为零（否则 V 在无限远处将不会为零），所以

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{3.72}$$

在球面上电势必须满足

$$V(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta) = V_0(\theta)$$

把这个式子乘以 $\mathrm{P}_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$ 并积分——再次利用正交关系式（3.68）——我们有

$$\frac{B_{l'}}{R^{l'+1}}\frac{2}{2l'+1} = \int_0^{\pi} V_0(\theta)\mathrm{P}_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

或者

$$B_l = \frac{2l+1}{2}R^{l+1}\int_0^{\pi} V_0(\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{3.73}$$

[一] M. Boas, Mathematical Methods in the physical Sciences, 2nd ed., Section 12.7 (New York: John Wiley. 1983)。

[二] 当 $V_0(\theta)$ 可以展开为 $\cos\theta$ 多项式时，的确如此。多项式的幂次告诉我们需要的最高的 l，最前面的系数决定了 A_l。减掉 $A_l R^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)$，重复计算，我们最终可求出 A_0。注意，如果 V_0 是一个 $\cos\theta$ 偶函数，则求和项中仅有偶数项出现（对奇函数也有类似结果）。

式(3.72)，其中的系数是由式(3.73)给出的，就是我们的问题的解。

例题 3.8

一个不带电的半径为 R 的金属球放入一个均匀外电场 $\boldsymbol{E} = E_0\hat{z}$ 中。[电场将把正电荷推向“北半球”面，而“南半球”面将出现负电荷(见图 3.24)。这些诱导电荷反过来将扰动球面附近的电场。]求出球外区域的电势。

解： 金属球是一个等势体——我们可以设它的电势为零。由对称性，整个 xy 平面的电势为零。不过对本题的情况，当 $z\to\infty$ 时 V 并不为零。事实上在远离球的地方，电场是 $E_0\hat{z}$，因此

$$V \to -E_0 z + C$$

由于在赤道面上 $V=0$，常数 C 必须为零。这样这个问题的边界条件是

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\ V = 0,\text{当}\ r = R\ \text{时}\\&\text{(ii)}\ V \to -E_0 r\cos\theta,\text{当}\ r \gg R\ \text{时}\end{aligned}\right\} \tag{3.74}$$

对式(3.65)所给出的函数，我们必须拟合这些边界条件。

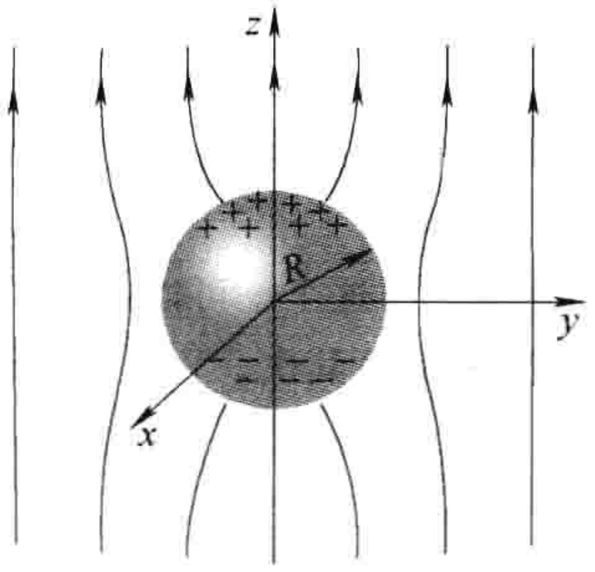


图　3.24

第一个条件给出

$$A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0$$

或者

$$B_l = -A_l R^{2l+1} \tag{3.75}$$

所以

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

对 $r \gg R$，圆括号内的第二项可以忽略，因此条件(ii)要求

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) = -E_0 r\cos\theta$$

显然，仅有 $l=1$ 的项存在。事实上，由于 $\mathrm{P}_1(\cos\theta)=\cos\theta$，我们可以直接得出

$$A_1 = -E_0,\text{其余诸}\ A_l\ \text{为零}$$

结论：

$$V(r,\theta) = -E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta \tag{3.76}$$

电势中的第一项($-E_0 r\cos\theta$)起源于外场：诱导电荷的贡献显然为

$$E_0\frac{R^3}{r^2}\cos\theta$$

如果你想知道诱导电荷密度，它可以由通常的方法计算：

$$\sigma(\theta) = -\varepsilon_0\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=R} = \varepsilon_0 E_0\left(1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta\Big|_{r=R} = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta \tag{3.77}$$

如预期的那样，在($0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$)“北”半球面诱导电荷为正，在($\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi$)“南”半球面为负。

例题 3.9

在半径为 R 的球壳上分布有电荷面密度为 $\sigma_0(\theta)$ 的电荷。求出球壳内外的电势。

解： 当然，你可以直接积分求解

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma_0}{\mathscr{r}}\mathrm{d}a$$

但是分离变量法通常会更容易。对内部区域我们有

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) \quad (r \leqslant R) \tag{3.78}$$

(无需 B_l 项——因为它们在原点为无限大)；在外部区域

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} \mathrm{P}_l(\cos\theta) \quad (r \geqslant R) \tag{3.79}$$

(没有 A_l 项——它们在无限远处不为零)。这两个函数必须在球壳上由适当的边界条件相连接。首先，电势在($r=R$)(式(2.34))是连续的：

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} \mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{3.80}$$

这样两边同幂次的勒让德多项式的系数应当相等：

$$B_l = A_l R^{2l+1} \tag{3.81}$$

(要正式证明这个，可以在式(3.80)的两边同乘以 $\mathrm{P}_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$，然后从 0 到 π 积分并利用式(3.68)所给的正交关系。)其次，V 的径向导数在球面上满足不连续关系式(2.36)：

$$\left(\frac{\partial V_{\text{球外}}}{\partial r} - \frac{\partial V_{\text{球内}}}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_0(\theta) \tag{3.82}$$

即

$$-\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{B_l}{R^{l+2}}\mathrm{P}_l(\cos\theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1}\mathrm{P}_l(\cos\theta) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_0(\theta)$$

或者利用式(3.81)：

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)A_l R^{l-1}\mathrm{P}_l(\cos\theta) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_0(\theta) \tag{3.83}$$

由此可以利用傅里叶技巧决定系数：

$$A_l = \frac{1}{2\varepsilon_0 R^{l-1}}\int_0^{\pi}\sigma_0(\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{3.84}$$

代入由式(3.81)和式(3.84)所给的系数，式(3.78)和式(3.79)就是我们问题的解。

例如，如果

$$\sigma_0(\theta) = k\cos\theta = k\mathrm{P}_1(\cos\theta) \tag{3.85}$$

式中，k 是一个常数，则除了 $l=1$ 外其余的 A_l 都为零，

$$A_1 = \frac{k}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}[P_1(\cos\theta)]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{k}{3\varepsilon_0}$$

因此球壳内的电势为

$$V(r,\theta) = \frac{k}{3\varepsilon_0}r\cos\theta \quad (r \leqslant R) \tag{3.86}$$

而球壳外的电势为

$$V(r,\theta) = \frac{kR^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\theta \quad (r \geqslant R) \tag{3.87}$$

特别有，如果 $\sigma_0(\theta)$ 是一个处在外场 $E_0\hat{z}$ 中金属球面上的诱导电荷，则 $k = 3\varepsilon_0 E_0$，内部的电势是 $E_0 r\cos\theta = E_0 z$，电场为 $-E_0\hat{z}$——这正好抵消了外电场，当然它也应当如此。由诱导面电荷在球外产生的电势为

$$E_0\frac{R^3}{r^2}\cos\theta$$

这与我们在例题 3.8 中的结论一致。

习题 3.16 由罗德里格公式(式(3.62))导出 $\mathrm{P}_3(x)$，并验证 $\mathrm{P}_3(\cos\theta)$ 满足 $l=3$ 的角方程(式(3.60))。由直接积分验证 P_3 与 P_1 是正交的。

习题 3.17

(a) 假定在一个球面上电势是一个常数 V_0。利用例题 3.6 和例题 3.7 的结果求出球面内外的电势。(当然，你们预先知道答案——这仅是为了验证方法的一致性。)

(b) 利用例题 3.9 的结果求出一个带有均匀面电荷分布 σ_0 的球壳内外的电势。

习题 3.18　一个球面(半径为 R)上的电势为

$$V_0 = k\cos 3\theta$$

式中，k 是一个常数。求出球面内外的电势以及球面上的电荷面密度 $\sigma(\theta)$。(假定球内和球外没有电荷分布。)

习题 3.19　假定一个球面上的电势为 $V_0(\theta)$，并且球内球外没有电荷分布。证明球面上的电荷面密度为

$$\sigma(\theta) = \frac{\varepsilon_0}{2R}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)^2 C_l \mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{3.88}$$

式中

$$C_l = \int_0^{\pi} V_0(\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{3.89}$$

习题 3.20　一个带电金属球(电荷为 Q，半径为 R)置于均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，求出球外的电势。清楚地解释你把电势的零点设在哪里。

习题 3.21　在习题 2.25 中你们求出了一个均匀带电盘轴线上的电势：

$$V(r,0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{r^2+R^2} - r)$$

(a) 利用这个结果以及 $\mathrm{P}_l(1)=1$ 的事实，对带电盘不在轴线上的电势，计算在展开式(3.72)中的前三项，假设 $r > R$。

(b) 利用式(3.66)，用同样的方法求出 $r < R$ 的电势。[注意：你必须把内部区域分成两个半球，一个在盘上面，一个在盘下面。不要假定两个半球的系数 A_l 是一样的。]

习题 3.22　一个半径为 R 的球壳在“北半球”带有均匀的面电荷，电荷面密度为 σ_0，在“南半球”也带有均匀的面电荷，电荷面密度为 $-\sigma_0$。求出球壳内外的电势，明确给出到 A_6 和 B_6 的系数。

习题 3.23　在柱坐标系中由分离变量法求解拉普拉斯方程，假定不依赖 Z(柱对称性)。[确信你求出了径向方程的所有解；特别是，你的结果包含无限长线电荷的情况，(当然)我们已经知道了这种情况的答案。]

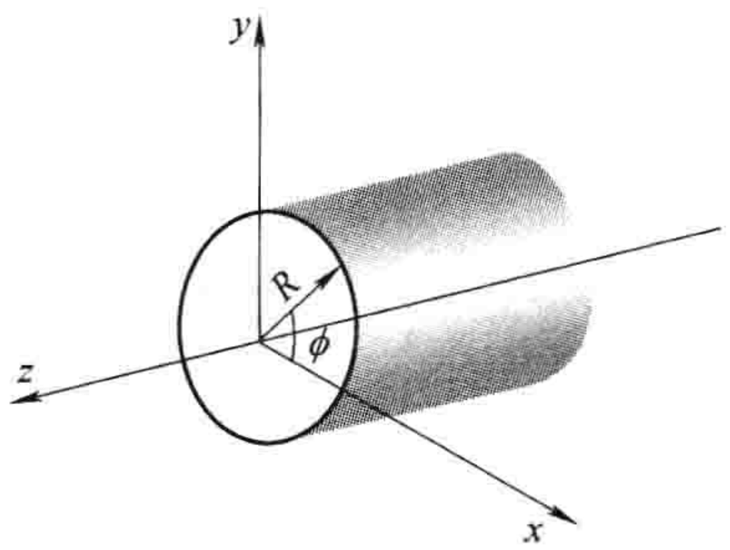


图　3.25

习题 3.24　一个半径为 R 的无限长金属管，置于均匀外场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，电场方向与金属管轴线成直角。求出管外的电势以及管表面上的诱导电荷面密度。[利用你在习题 3.23 得到的结果。]

习题 3.25　一个半径为 R 的无限长柱体表面分布有电荷面密度

$$\sigma(\phi) = a\sin 5\phi$$

(式中 a 是一个常数)(见图 3.25)。求出柱面内外的电势。[利用你在习题 3.23 得到的结果。]

3.4　多极展开

3.4.1　远距离处的近似电势

如果你远离一个局域电荷分布，它“看起来”很像一个点电荷，它的电势——作为一个很好

的近似——为$(1/4\pi\varepsilon_0)Q/r$，这里Q是总电荷。我们经常用这个来检验V是否正确。但是如果Q为零会怎样呢？你可能会回答电势近似为零，当然，你是对的(的确，即便Q不为零，在很远处电势也是非常小的)。但是我们想探寻比这更多的信息。

例题 3.10

一个(物理的)**电偶极子**是由两个相距为d，带电荷量相同但是符号相反的电荷($\pm q$)构成的。求出远离电偶极子处的近似电势。

解： 设r_-是到$-q$的距离，r_+是到$+q$的距离(见图 3.26)。则有

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right)$$

以及(由余弦定理)

$$r_\pm^2 = r^2 + (d/2)^2 \mp rd\cos\theta = r^2\left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)$$

我们对$r >> d$的区域感兴趣，所以把第三项略去，把根号展开有

$$\frac{1}{r_\pm} \cong \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} \cong \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$

这样有

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \cong \frac{d}{r^2}\cos\theta$$

所以

$$V(\boldsymbol{r}) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2} \tag{3.90}$$

显然对很大的r，电偶极子的电势是按$1/r^2$减小的；像我们可以预见的那样，它比点电荷的电势减小得更快。顺便指出，如果我们把两个相同的电偶极子反向放在一起构成一个**四极子**，则电势按$1/r^3$减小；对背靠背的两个四极子(一个**八极子**)，电势按$1/r^4$减小，依次类推。图 3.27 总结了这个分级；为完整起见我也包含了**单极子**(点电荷)，当然它的电势是按$1/r$减小的。

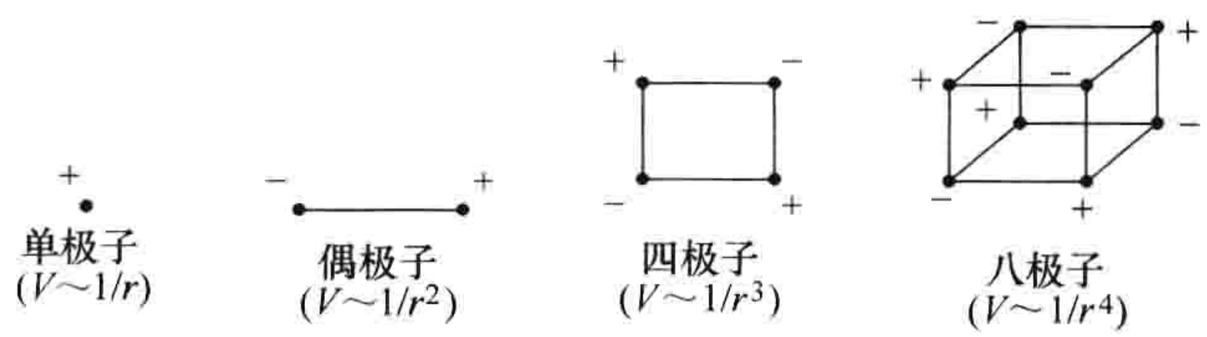


图 3.27

例题3.10是一种非常特殊的电荷分布情况。对任意的局域电荷分布，现在我要介绍一种以$1/r$幂次系统展开的方法。图 3.28 定义了适当的变量；在$\boldsymbol{r}$点的电势为

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r}\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau' \tag{3.91}$$

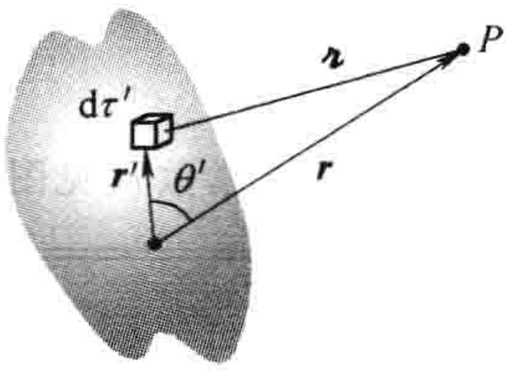


图 3.28

利用余弦定理

$$r^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\theta' = r^2\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta'\right]$$

或者

$$r = r\sqrt{1+\varepsilon} \tag{3.92}$$

式中

$$\varepsilon \equiv \left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)$$

对电荷分布区域以外的点，ε 远小于1，这样我们可以作展开：

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}(1+\varepsilon)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{5}{16}\varepsilon^3 + \cdots\right) \tag{3.93}$$

或者用 r，r'和 θ'表示：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathscr{r}} &= \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)^2 - \right.\\ &\left.\frac{5}{16}\left(\frac{r'}{r}\right)^3\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)^3 + \cdots\right]\\ &= \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)(\cos\theta') + \left(\frac{r'}{r}\right)^2(3\cos^2\theta' - 1)/2 + \right.\\ &\left.\left(\frac{r'}{r}\right)^3(5\cos^3\theta' - 3\cos\theta')/2 + \cdots\right]\end{aligned}$$

在最后一步我已经按(r'/r)的幂次合并同类项：令人吃惊的是，它们的系数(小圆括号内的)是勒让德多项式！这个不平常的结果是㊀

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n \mathrm{P}_n(\cos\theta') \tag{3.94}$$

式中，θ'是 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$之间的夹角。把它代入式(3.91)中，并注意当涉及积分时 r 是个常数，我们得到

$$\boxed{V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{(n+1)}}\int (r')^n \mathrm{P}_n(\cos\theta')\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau'} \tag{3.95}$$

或者更明显的

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\int\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau' + \frac{1}{r^2}\int r'\cos\theta'\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau' + \right.\\ \left.\frac{1}{r^3}\int (r')^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right)\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau' + \cdots\right]\end{aligned} \tag{3.96}$$

这是一个惬意的结果——V 按 $1/r$ 幂次的**多极展开**。第一项($n=0$)是单极子的贡献(按 $1/r$ 减小)；第二项($n=1$)是偶极子(按 $1/r^2$ 减小)；第三项是四极子；第四项是八极子；依次类推。如推导过程所示，式(3.95)是严格的，但是它主要用于近似计算；展开式中最低阶的非零项给出了在大 r 处的近似电势，如果需要更高的精度，后面的项将告诉我们如何改进近似。

习题 3.26　一个半径为 R 的球，球心位于原点，载有电荷密度

$$\rho(r,\theta) = k\frac{R}{r^2}(R - 2r)\sin\theta$$

式中，k 是一个常数；r，θ 是通常的球坐标。求出远离球且位于 z 轴上的点的近似电势。

3.4.2　单极项和偶极项

通常，多极展开中的主要贡献来自于单极项：

㊀ 顺便提及，这提供了获得勒让德多项式的第二种方法(第一种是罗德里格公式)；$1/\mathscr{r}$ 称为勒让德多项式的**生成函数**。

$$V_{\text{单极}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{3.97}$$

式中，$Q = \int\rho\mathrm{d}\tau$ 是总电荷。这正是远离电荷处我们所预期的近似电势。对恰巧位于原点的点电荷，$V_{\text{单极}}$就是所有地方的严格电势，而不仅仅是对大 r 处的一级近似；对这种情况，所有高阶的多极矩为零。

如果总电荷为零，对电势的主要贡献是偶极(除非它也为零)：

$$V_{\text{偶极}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int r'\cos\theta'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$

由于 θ'是 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$之间的夹角(见图 3.28)

$$r'\cos\theta' = \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'$$

偶极势可以更有趣地表示为

$$V_{\text{偶极}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\int\boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$$

式中那个完全不依赖 $\boldsymbol{r}$ 的积分，称为电荷分布的**偶极矩**：

$$\boxed{\boldsymbol{p} \equiv \int\boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'} \tag{3.98}$$

偶极矩对电势的贡献可以简单表示为

$$\boxed{V_{\text{偶极}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}} \tag{3.99}$$

偶极矩是由电荷分布的几何(尺寸、形状和密度)参量所决定的。对点电荷、线电荷和面电荷分布，式(3.98)可按通常的方式计算(见 2.1.4 小节)。这样一个点电荷集合的偶极矩为

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i\boldsymbol{r}'_i \tag{3.100}$$

对“物理的”偶极子($\pm q$)

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{r}'_+ - q\boldsymbol{r}'_- = q(\boldsymbol{r}'_+ - \boldsymbol{r}'_-) = q\boldsymbol{d} \tag{3.101}$$

式中，$\boldsymbol{d}$ 为从负电荷到正电荷的距离矢量(见图 3.29)。

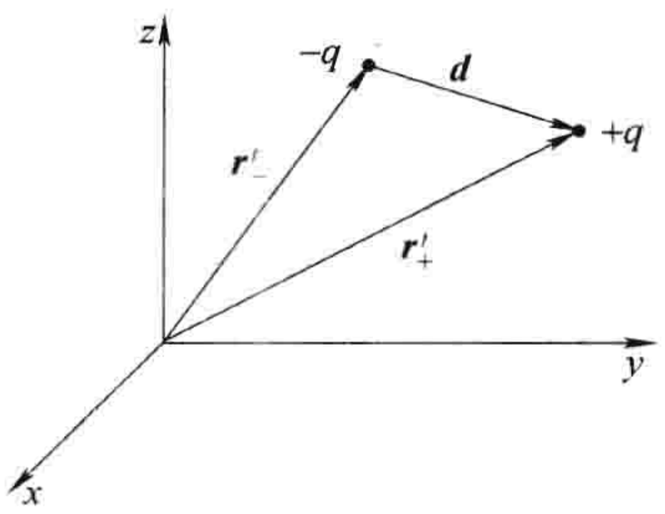


图 3.29

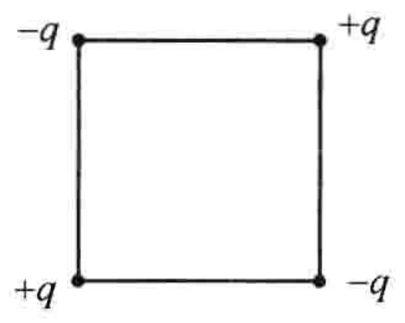


图 3.30

这个结果与我们在例题 3.10 中所得到的物理的偶极子结果一致吗？是的，是一致的：如果你把式(3.100)代入式(3.99)，你将会得到式(3.90)。不过，注意，这仅是物理偶极子的近似电势——显然还存在高阶项的贡献。当然，当你走得越来越远时，由于高阶项随着 r 的增加迅速衰减，$V_{\text{偶极}}$成为越来越好的近似。出于同样的考虑，对固定的 r，当你减小偶极子的分离距离 d 时，也会改善偶极近似。要构造一个电势由式(3.99)严格表示的“纯粹”的偶极子，你必须让 d 趋于

零。遗憾的是，这时你也将失去偶极项，除非你能同时让 q 趋于无限大！在一个相当人为的极限 $d\to 0$，$q\to\infty$，并且乘积 $qd = p$ 保持不变的情况下，一个物理的偶极子成为一个纯粹的偶极子。（当某些人使用“偶极子”这个词时，你并不能总是分辨出他们说的是一个物理的偶极子（两个电荷分离一定的距离）还是一个纯粹的（点）偶极子。如果有疑问，假定 d 足够小（与 r 相比），这样你可以安全地使用式(3.99)。

偶极矩是矢量，它们遵从矢量加法：如果有两个偶极矩 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$，则总偶极矩是 $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$。例如，对图 3.30 所示的位于一个正方形四角的四个电荷，净偶极矩为零。你可以把电荷结合成对儿来理解这一点（竖直来看，↓ + ↑ = 0，水平来看，→ + ← = 0），或者按式(3.100)把四个电荷的贡献加在一起。如在前面指出的那样，这是一个四极矩，它的电势主要由多极展开中的四极矩项所决定。

习题 3.27　四个粒子（一个带电为 q，一个为 $3q$，另两个为 $-2q$）如图 3.31 放置，每一个距原点距离为 a。求出远离原点处电势的简单近似表达式。（用球坐标表示你的结果。）

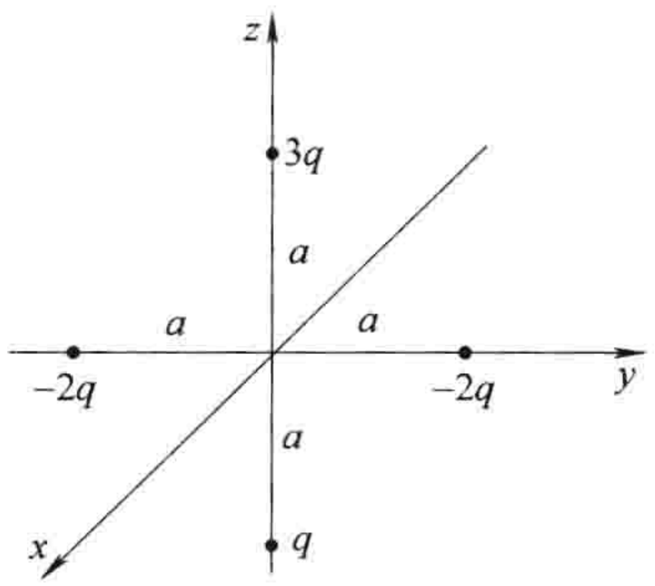


图　3.31

习题 3.28　在例题 3.9 中，对半径为 R，电荷面密度 $\sigma = k\cos\theta$ 的球壳，我们求出了严格的电势。

（a）计算这个电荷分布的偶极矩。

（b）对远离球壳的点，求出近似电势，并与严格解（式(3.87)）比较。对高阶极矩你可以得出什么样的结论？

习题 3.29　对例题 3.10 中的偶极子，把 $1/\mathscr{r}_+$ 展开到 $(d/r)^3$，利用这个确定电势中的四极矩项和八极矩项。

3.4.3　多极展开中的坐标原点

我在前面讲过，一个位于原点的点电荷构成一个“纯粹”的单极子。如果它不在原点，它就不再是一个纯粹的单极子。例如，图 3.32 中的电荷有偶极矩 $\boldsymbol{p} = qd\hat{\boldsymbol{y}}$，电势中也有相应的偶极项。单极势 $(1/4\pi\varepsilon_0)q/r$ 对这个构型是不正确的；严格的电势是 $(1/4\pi\varepsilon_0)q/\mathscr{r}$。要记住，多极展开是 r（到原点的距离）的倒数各幂次的级数。当我们展开 $1/\mathscr{r}$，我们得到所有的幂次，而不仅仅是首个。

所以移动原点（或者等价地移动电荷）可以完全改变多极展开。**单极矩** Q 并不改变，因为总电荷显然是不依赖于坐标系的。（在图 3.32 中当我们把 q 移离原点时，单极项不受影响——但是现在单极项不再是全部的故事：一个偶极项——以及所有的高极矩项——将会出现。）通常来讲，当你移动原点时，偶极矩将会改变，但是有一个很重要的例外：如果总电荷为零，则偶极矩是不依赖于原点的选择的。假定我们把原点移动了 $\boldsymbol{a}$（见图 3.33）。新的偶极矩为

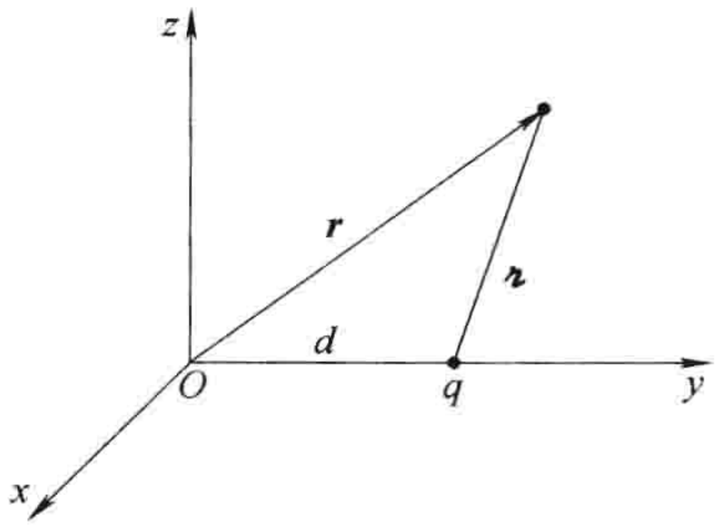


图　3.32

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \int \bar{\boldsymbol{r}}'\rho(\boldsymbol{r}')\,d\tau' = \int(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{a})\rho(\boldsymbol{r}')\,d\tau'$$

$$= \int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')\,d\tau' - \boldsymbol{a}\int\rho(\boldsymbol{r}')\,d\tau' = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}Q$$

特别有，如果 $Q = 0$，则 $\bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}$。所以，如果有人问图 3.34a 中的偶极矩是什么，你可以确定地回答为“$q\boldsymbol{d}$”，但是，如果问图 3.34b 中的偶极矩是什么，适当的回答应为“原点选在哪里？”

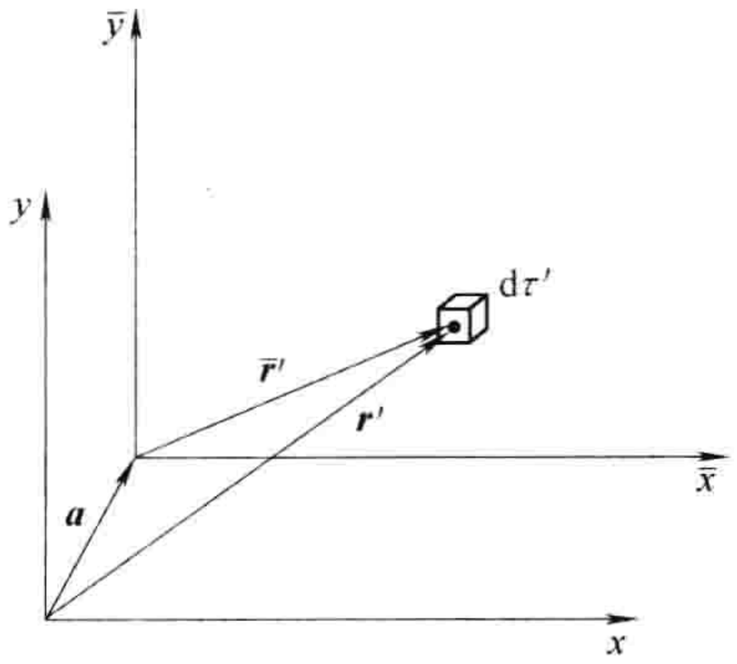


图 3.33

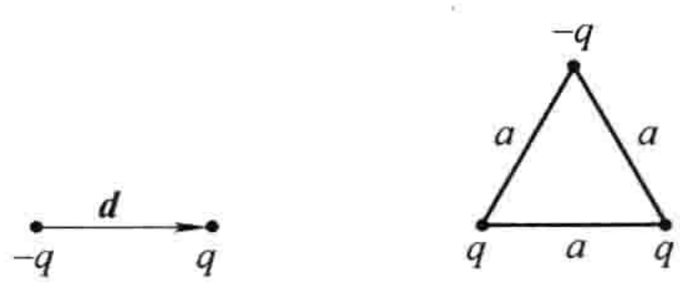


图 3.34

习题 3.30 两个点电荷，$3q$ 和 $-q$ 相距为 a。对图 3.35 所示的每一种电荷安置方法，求出(i)单极矩，(ii)偶极矩，(iii)大 r 处的近似电势(用球坐标)(包括单极项和偶极项的贡献)。

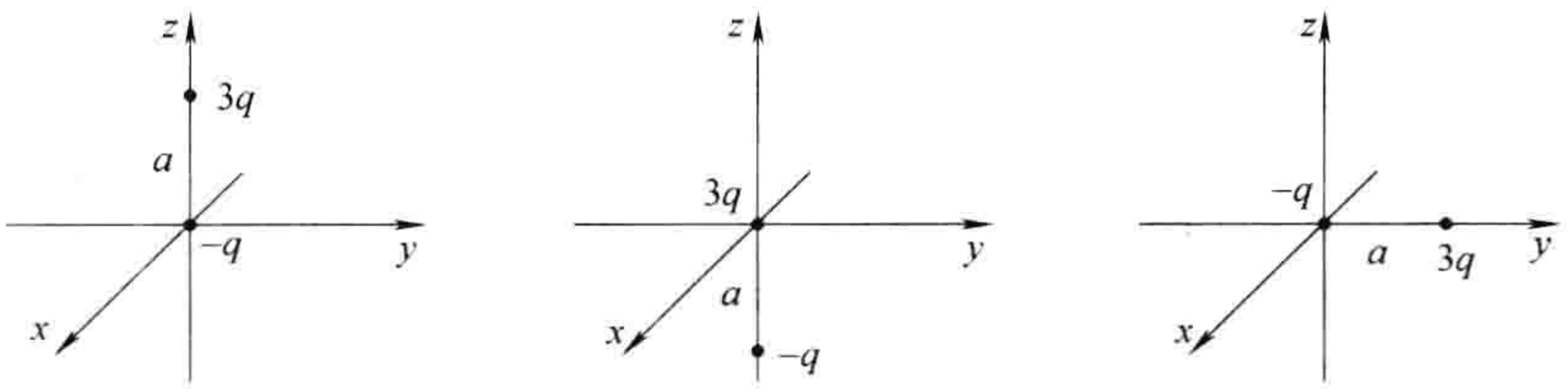


图 3.35

3.4.4 偶极子的电场

到目前为止我们仅探讨了偶极子的电势。现在我想计算一个(纯粹)偶极子的电场。如果我们选择坐标系使 $\boldsymbol{p}$ 位于原点并使其指向 z 轴方向(见图 3.36)，则在 r，θ 处的电势为(式(3.99))

$$V_{\text{偶极}}(r,\theta) = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{3.102}$$

为得到电场，我们求 V 的负梯度：

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$$

这样有

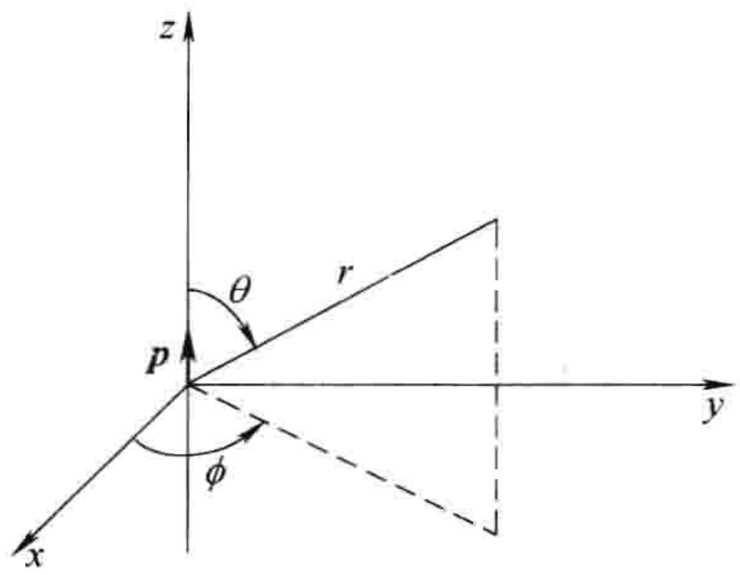


图 3.36

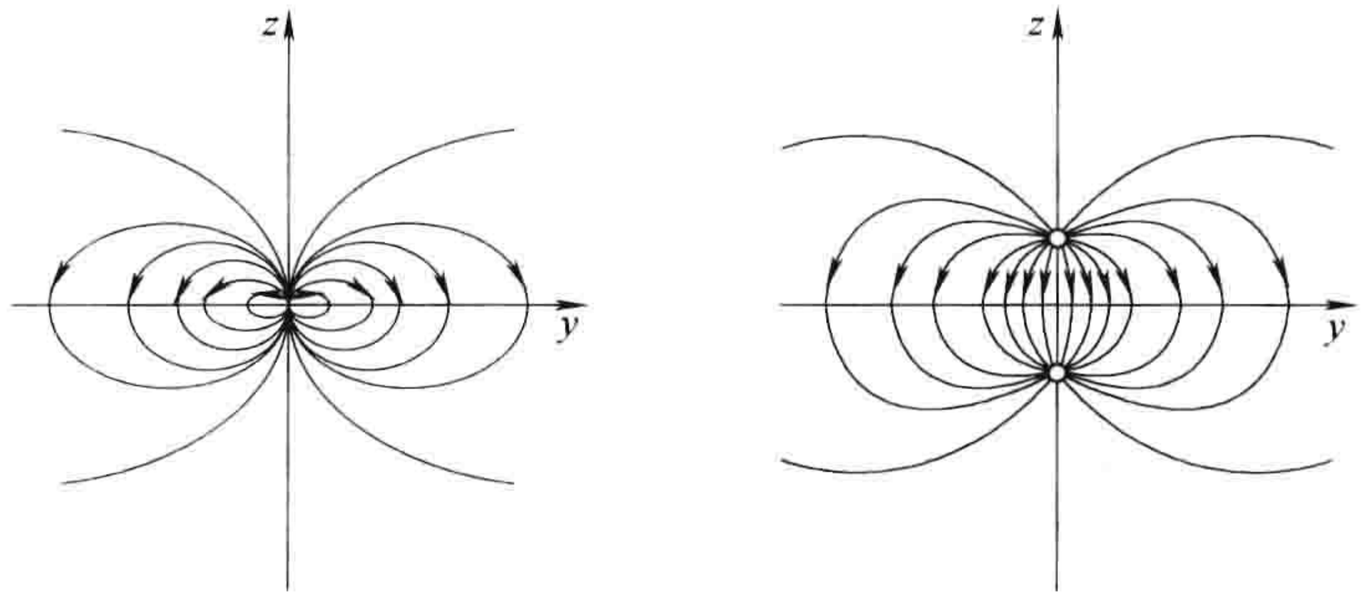
$$\boxed{\boldsymbol{E}_{\text{偶极}}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})} \tag{3.103}$$

这个表达式明显依赖所用的坐标系(球坐标系)和 $\boldsymbol{p}$ 的指向(沿 z 方向)。类似于式(3.99)中的电势，它也可以化为不依赖于坐标选择的形式——如习题 3.33 所示。

注意，偶极矩的电场按 $1/r^3$ 衰减；当然，单极矩的电场($Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$)$\hat{\boldsymbol{r}}$ 是按 $1/r^2$ 衰减的。四极矩

的电场按 $1/r^4$ 衰减，八极矩的电场按 $1/r^5$ 衰减，依次类推。（这仅是单极矩电势按 $1/r$ 衰减，偶极矩电势按 $1/r^2$ 衰减，四极矩电势按 $1/r^3$ 衰减等的反映——求梯度引入了另外的 $1/r$ 因子。）

图 3.37a 给出了“纯粹”电偶极子的电场线示意图。为比较，我也在图 3.37 中画出了一个“物理”电偶极子的电场线。注意，如果忽略中心区域，两个图非常相似；但是在中心区域它们是完全不同的。仅在 $r >> d$ 的区域，式(3.103)才表示一个物理偶极子的有效近似电势。如前面提及的那样，这样的区域可由取大 r 得到，或者使两电荷非常靠近得到。⊖



a)　　b)

图　3.37

a)“纯粹”电偶极子的电场　b)“物理”电偶极子的电场

习题 3.31　一个“纯粹”的偶极子 $\boldsymbol{p}$ 位于原点，指向 z 方向。

(a) 作用在位于 $(a,0,0)$（直角坐标系）的点电荷 q 上的力是什么？

(b) 作用在位于 $(0,0,a)$（直角坐标系）的点电荷 q 上的力是什么？

(c) 把点电荷 q 从 $(a,0,0)$ 移动到 $(0,0,a)$ 所需的功为多少？

习题 3.32　三个点电荷如图 3.38 安置，每一个距原点距离为 a。求出远离原点处的近似电场。用球坐标表示你的答案，计算到多极展开中的最低两项。

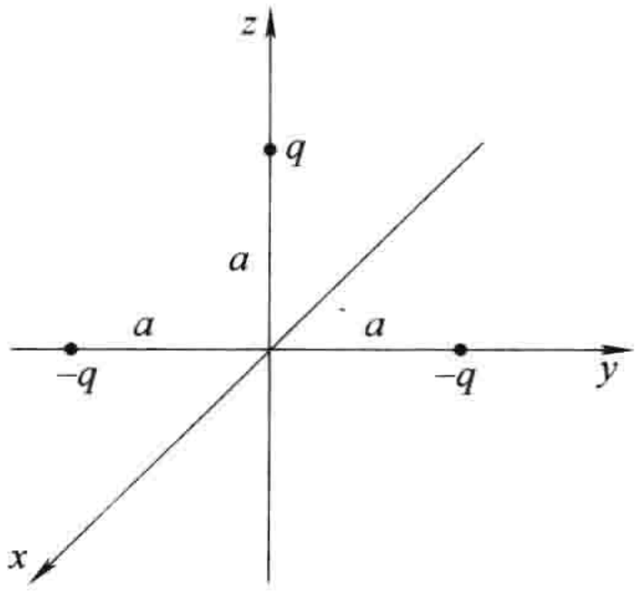


图　3.38

习题 3.33　证明一个（“纯粹”）偶极子的电场（式(3.103)）可以写为不依赖于坐标系的形式

$$\boxed{\boldsymbol{E}_{\text{偶极}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}[3(\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{p}]} \qquad (3.104)$$

第 3 章补充习题

习题 3.34　一个质量为 m、带电为 q 的粒子，从与一个无限大接地导体平板距离为 d 处由静止开始释放。求这个粒子碰击到板的时间为多少？[答案：$(\pi d/q)\sqrt{2\pi\varepsilon_0 md}$。]

习题 3.35　两个无限大接地导体平板平行放置，相距为 a。一个点电荷 q 位于两板之间，距其中一个距离为 x。求出作用在 q 上的力。对特殊情况 $a\to\infty$ 和 $x = a/2$ 验证所得结果是正确的。（求出诱导面电荷不是很容易的事。参见 B. G. Dick, Am. J. Phys. 41, 1289 (1973), M. Zahn, Am. J. Phys. 44, 1132 (1976), J. Pleines and S. Mahajan, Am. J. Phys. 45, 868(1977)，以及下面的习题 3.44。）

习题 3.36　两条长直线，载有均匀分布异号电荷，电荷线密度为 $\pm\lambda$。两直线分别放置在一个长导体

⊖ 即便是在这个极限下，在原点仍存在无限小的区域，在其中物理偶极子的电场指向“错误”的方向，你可以沿图 3.35b 中 z 轴“下”行体会这一点。如果你想探讨这个微妙而又重要的论点，试做习题 3.42。

柱的两边(见图 3.39)。导体柱(不载有净电荷)半径为 R，带电线距导体柱轴线的距离为 a。求出 r 点处的电势。$\left[\text{答案：}V(s,\ \phi)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left\{\frac{(s^2+a^2+2sa\cos\phi)\left[(sa/R)^2+R^2-2sa\cos\phi\right]}{(s^2+a^2-2sa\cos\phi)\left[(sa/R)^2+R^2+2sa\cos\phi\right]}\right\}\right]$

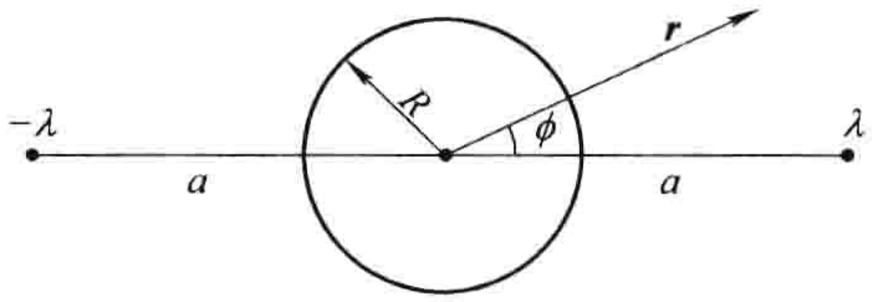


图 3.39

习题 3.37 一个半径为 a 的导体球，电势为 V_0。一个半径为 $b(b>a)$ 的薄球壳包围着导体球，在球壳上分布有电荷面密度

$$\sigma(\theta)=k\cos\theta$$

式中，k 是一个常数；θ 是通常的球坐标。

(a) 求出(i)$r>b$，(ii)$a<r<b$ 区域内的电势。

(b) 求出导体球表面上的诱导电荷面密度 $\sigma_i(\theta)$。

(c) 这个体系的总电荷为多少？验证你的答案与大 r 处 V 的行为是一致的。

$$\left[\text{答案：}V(r,\ \theta)=\begin{cases}aV_0/r+(b^3-a^3)k\cos\theta/3r^2\varepsilon_0, & r\geqslant b\\ aV_0/r+(r^3-a^3)k\cos\theta/3r^2\varepsilon_0, & r\leqslant b\end{cases}\right]$$

习题 3.38 电荷 $+Q$ 沿 z 从 $z=-a$ 到 $z=+a$ 均匀分布。证明对 $r>a$，$\boldsymbol{r}$ 点处的电势为

$$V(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^2\mathrm{P}_2(\cos\theta)+\frac{1}{5}\left(\frac{a}{r}\right)^4\mathrm{P}_4(\cos\theta)+\cdots\right]$$

习题 3.39 一个半径为 R 的长柱壳上半壳载有均匀分布的电荷，电荷面密度为 σ_0，下半壳载有均匀分布的电荷面密度为 $-\sigma_0$ 的电荷(见图 3.40)。求出柱壳内外的电势。

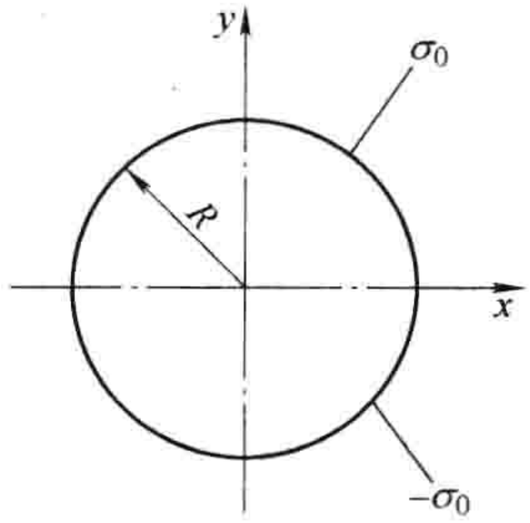


图 3.40

习题 3.40 一个细绝缘杆，端点位于 $z=-a$ 和 $z=+a$，细杆载有均匀电荷，电荷线密度为 λ。对下列情况求出多极展开电势中的首项：(a)$\lambda=k\cos(\pi z/2a)$，(b)$\lambda=k\sin(\pi z/a)$，(c)$\lambda=k\cos(\pi z/a)$，式中 k 为常数。

· 习题 3.41 证明一个半径为 R 的球内由球内所有电荷所产生的平均电场为

$$E_{\text{ave}}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{R^3}\tag{3.105}$$

式中，$\boldsymbol{p}$ 是总偶极矩。有几种方法证明这个优美的结果。这里是其中一个：

(a) 证明一个位于球内点 $\boldsymbol{r}$ 处的单电荷 q 所产生的平均电场等于球内均匀电荷分布 $\rho=-q/\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ 在 $\boldsymbol{r}$ 处产生的电场，为

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}\int\frac{q}{\imath^2}\,\hat{\imath}\,\mathrm{d}\tau'$$

式中，$\hat{\imath}$ 为从 $\boldsymbol{r}$ 到 $\mathrm{d}\tau'$ 的单位矢量。

(b) 后者可由高斯定理(见习题 2.22)得出。以 q 的偶极矩表示结果。

(c) 证明由所有外部电荷在球内产生的平均电场等于它们在球心处产生的电场。

习题 3.42 利用式(3.103)，对半径为 R，球心在原点的球体计算一个偶极子的平均电场。首先进行角积分。[注意：在积分前，你必须以 $\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$ 表示 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$(见书后附录)。如果你不明白为什么，重读 1.4.1 小节的讨论。]与式(3.105)所给的普遍定理比较你的结果。这里的差别与偶极子的电场在 $r=0$ 发散有关。角积分为零，但是径向积分为无限大，所以我们确实不知道怎么得出答案。为克服这个困境，把式

(3.103)应用于一个半径为 ε 的微小球的外部——则它对 E_{ave} 的贡献为零，贡献完全来自于 ε 球内的电场。

(b)为了使普遍定理(式(3.105))成立，ε 球内的电场必须是什么？[提示：由于 ε 是任意小的，我们讨论的是某个东西，它在 $r=0$ 是无限大的，但是对一个无限小体积的积分是有限值。][答案：$-(\boldsymbol{p}/3\varepsilon_0)\delta^3(\boldsymbol{r})$]

[显然，一个偶极子的真实电场是

$$\boldsymbol{E}_{\text{偶极}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}[3(\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{p}] - \frac{1}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\delta^3(\boldsymbol{r})] \tag{3.106}$$

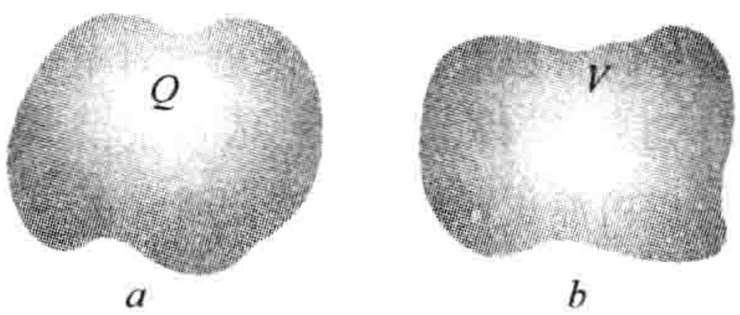
你也许会困惑，当我们在 3.4.4 小节计算偶极子电场时是如何丢掉了 δ 函数势项的。回答是，导致式(3.103)的求导，除了 $r=0$ 外，是完全有效的，但是(从我们在 1.5.1 小节的经验)我们应当知道 $r=0$ 点是有问题的。参见 C. P. Frahm, Am. J. Phys. 51, 826 (1983)，或者最近的 R. Estrada and R. P. Kanwal, Am. J. Phys. 63, 278(1995)。更进一步的细节和应用，参见 D. J. Griffiths, Am. J. Phys. 50, 698(1982)。]

习题 3.43

(a) 假定一个电荷分布 $\rho_1(\boldsymbol{r})$ 产生了一个电势 $V_1(\boldsymbol{r})$，另外一个电荷分布 $\rho_2(\boldsymbol{r})$ 产生了一个电势 $V_2(\boldsymbol{r})$。[对我所关注的，这两种情况也许没有任何共性——也许 1 是一个均匀带电球，2 是一个平行板电容器。请明白 ρ_1 和 ρ_2 不是存在于同一时间的；我们谈论的是两个不同的问题，在一个中仅 ρ_1 存在，在另一个中仅 ρ_2 存在。]证明格林互易定理(Green's reciprocity theorem)：

$$\int_{\text{整个空间}}\rho_1 V_2\,\mathrm{d}\tau = \int_{\text{整个空间}}\rho_2 V_1\,\mathrm{d}\tau$$

[提示：用两种方法计算 $\int \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\,\mathrm{d}\tau$，首先写出 $\boldsymbol{E}_1 = -\nabla V_1$，利用分部积分把求导转移为对 $\boldsymbol{E}_2$ 求导。再写出 $\boldsymbol{E}_2 = -\nabla V_2$，利用分部积分把求导转移为对 $\boldsymbol{E}_1$ 求导。]



a　　b

图　3.41

(b) 假定你有两个分开的导体(见图 3.41)。一方面，如果你使导体 a 带电 Q(保持导体 b 不带电)，使得导体 b 的电势为 V_{ab}。另一方面，如果你使导体 b 带电 Q(保持导体 a 不带电)，使得导体 a 的电势为 V_{ba}。利用格林互易定理证明 $V_{ab} = V_{ba}$(一个令人吃惊的结果，因为我们对两导体的形状和安置没有作任何假设)。

习题 3.44　利用格林互易定理(习题 3.43)求解下面两个问题。[提示：对分布 1，使用实际的情况；对分布 2，移去 q，设一个导体的电势为 V_0。]

(a) 一个平行板电容器的两板都接地，两板间的距离为 d。一个点电荷 q 放置在两板之间，距 1 板的距离为 x。求出每一板上的诱导电荷。[答案：$Q_1 = q(x/d-1)$；$Q_2 = -qx/d$]

(b) 两个同心的接地导体球壳(半径分别为 a 和 b)，一个点电荷 q 放置在两球壳之间 r 处($a<r<b$)，求出每个球面上的诱导电荷。

习题 3.45

(a) 证明多极展开中的四极矩项可以写为

$$v_{\text{四极}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^3}\sum_{i,j=1}^{3}\hat{r}_i\hat{r}_j Q_{ij}$$

式中

$$Q_{ij} \equiv \int[3r'_i r'_j - (r')^2\delta_{ij}]\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau'$$

这里

$$\delta_{ij} = \begin{cases}1, & \text{如果 } i=j\\ 0, & \text{如果 } i\neq j\end{cases}$$

是克罗内克 δ 符号，Q_{ij} 是电荷分布的四极矩。注意分阶表示：

$$V_{\text{单极}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r};\ V_{\text{偶极}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum\hat{r}_i p_i}{r^2};\ V_{\text{四极}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{1}{2}\sum\hat{r}_i\hat{r}_j Q_{ij}}{r^3};\cdots$$

单极矩(Q)是一个标量，偶极矩($\boldsymbol{p}$)是一个矢量，四极矩(Q_{ij})是一个二阶张量，依次类推。

(b) 对图 3.30 所给的构型求出 Q_{ij}的九个分量(假定正方形的边长为 a，放于 xy 平面，中心在原点)。

(c) 证明，如果单极矩和偶极矩都为零，则四极矩是不依赖于原点的。(这个结论对其他极矩也成立——一个最低非零多极矩总是不依赖于原点的。)

(d) 你如何定义八极矩？在多极展开中，用八极矩表示八极矩项。

习题 3.46 在例题 3.8 中我们求出了放置于一个均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的导体球(半径为 R)的球外电场。现在用镜像法求解这个问题，并验证你的结果与式(3.76)一致。[提示：利用例题 3.2，但是放置另外一个电荷，$-q$，径向方向上与 q 相反。让 $a\to\infty$，并使$(1/4\pi\varepsilon_0)(2q/a^2) = -E_0$ 保持常数。]

! **习题 3.47** 对例题 3.4 中的无限长矩形管，假定底面($y=0$)和两个侧面($x=\pm b$)上的电势为零，但是顶面($y=a$)的电势为非零常数 V_0。求出管内的电势。[注释：这是习题 3.14(b)的一个旋转情况，但是在例题 3.4 中对 y 用正弦函数，对 x 用双曲函数。它是一个不寻常的情况，对其必须包含 $k=0$。当 $k=0$ 时从求式(3.26)的一般解开始。进一步的讨论见 S. Hassani, Am. J. Phys. 59, 470(1991)。]

$$\left[\text{答案：}V_0\left(\frac{y}{a}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{\cosh(n\pi x/a)}{\cosh(n\pi b/a)}\sin(n\pi y/a)\right)\right]$$

! **习题 3.48**

(a) 一个横截面为正四方形(边长为 a)的长金属管，管的三侧面接地，另一侧面(与其他三面绝缘)维持常数电势 V_0。求出相对于 V_0 面的面上单位长度的电荷。[提示：利用习题 3.14 和习题 3.47 的结果。]

(b) 一个横截面为圆形(半径为 R)的长金属管，管面沿圆周分为相等的四份，其中三份接地，余下的一份维持常数电势 V_0。求出相对于 V_0 面的面上单位长度的电荷。[(a)和(b)的答案：$\lambda = -\varepsilon_0 V_0 \ln 2$][㊀]

习题 3.49 如图 3.36 所示，一个理想的电偶极子位于原点，方向沿 z 轴方向。一个电荷从 xy 平面上的一点由静止开始释放。证明它在一个半圆弧上往复运动，就像挂在原点的一个单摆一样。[这个有趣的结果是由 R. S. Jones 给出的，参见 Am. J. Phys. 63, 1042(1995)。]

㊀ 这是 Thompson-Lampard 定理的特殊情况；参见 J. D. Jackson, Am. J. Phys. 67, 107(1999)。

第4章　物质中的电场

4.1　极化

4.1.1　电介质

在这一章中，我们将学习物质中的电场。当然，物质有许多种类——固态、液态、气态、金属、木材和玻璃——这些物质并不都以相同的方式来响应静电场的影响。然而，大多数经常遇到的物质(至少在很好的近似下)属于两大类中的一种：**导体**和**绝缘体**(或者电介质)。我们已经讲到过导体；它们是可以“无限制”地提供在其内部可自由移动的电荷的一类物体。这种说法的实际含义是，许多电子(在普通的金属中每个原子提供一到两个电子)并不和任何特定的原子核关联，而是在导体中漫游。相比之下，在电介质中，所有的电荷都附属于特定的原子或分子——它们被束缚着，所有的电子只能在原子或分子中移动一个小的位移。如此微小的位移并不像在导体中电子的完全重新分布那样引人注目，但是它们的累积效应可以解释电介质材料的行为特性。实际上，有两个主要的机制使得电场可以扭曲电介质原子或分子中的电荷分布：伸展和旋转。在下面的两小节中，我将讨论这些过程。

4.1.2　诱导偶极子

当一个中性的原子放在一个电场中会发生什么？你的第一想法可能是：“没什么会发生——因为它不带电，电场对其不起作用”。但这是不正确的。尽管原子作为一个整体是电中性的，但是它是由一个带正电的原子核和在其周围分布的带负电的电子云构成的。在原子中这两个带电的部分是受外电场影响的：核的移动与电场方向相同，电子朝着相反方向。原则上，如果电场足够大，它可以将原子完全分离开来，“电离”原子(物体则变成一个导体)。然而，当外电场较小时，一个平衡将很快建立，因为如果电子分布中心和核的中心不一致，正负电荷就会相互吸引，使得原子聚合在一起。两个相反的力——$\boldsymbol{E}$ 使电子和原子核分离，它们之间的相互吸引——达到一个平衡，平衡时正电荷和负电荷有一个很小的移动，导致原子**被极化**。原子现在有了一个微小的偶极矩 $\boldsymbol{p}$，它和电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向相同。一般来讲，这个诱导的偶极矩和电场近似成正比(只要电场不是太强)：

$$\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E} \tag{4.1}$$

式中，比例常数 α 称为**原子极化率**。它的大小依赖于具体问题中的原子结构。表 4.1 列出了一些实验测得的原子极化率。

表 4.1　原子极化率($\alpha/4\pi\varepsilon_0$，单位 $10^{-30}\,\mathrm{m}^3$)

H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K	Cs
0.667	0.205	24.3	5.60	1.76	0.396	24.1	1.64	43.4	59.6

来源：物理化学手册，第 78 版(Boca Raton：CRC Press，Inc.，1997)。

例题 4.1

一个简单的原子模型由带 $+q$ 电荷量的原子核和围绕它的均匀带 $-q$ 的半径为 a 的球形电子云组成(见图 4.1)。计算这样一个原子的极化率。

解：在外电场 $\boldsymbol{E}$ 中，原子核将向右偏离，电子云向左偏离，如图 4.2 所示。（因为实际位移是极其微小的（见习题 4.1），可以合理地认为电子云依然保持球状。）这样，当原子核从球中心移动一个距离 d 时达到平衡。此时，外电场将原子核向右推的力与内电场将原子核向左拉的力平衡：$E = E_e$，其中 E_e 为电子云产生的电场。一个均匀的球形分布电荷在距离球心为 d 处产生的电场为

$$E_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{a^3}$$

（习题 2.12）。在平衡时，有

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{a^3}, \text{或 } p = qd = (4\pi\varepsilon_0 a^3)E$$

因此，原子极化率为

$$\alpha = 4\pi\varepsilon_0 a^3 = 3\varepsilon_0 v \tag{4.2}$$

式中，v 是原子体积。尽管这种原子模型十分简略，但是结果式(4.2)并不是太糟——对许多简单原子它可精确到万分之一以上。

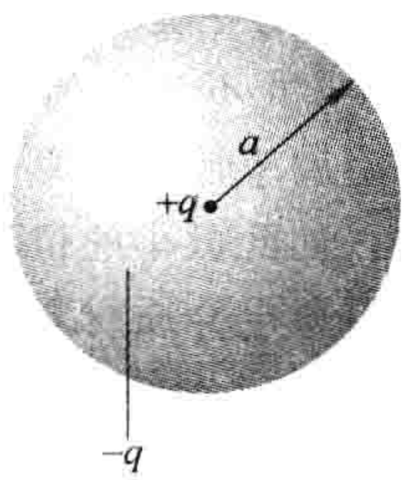


图 4.1

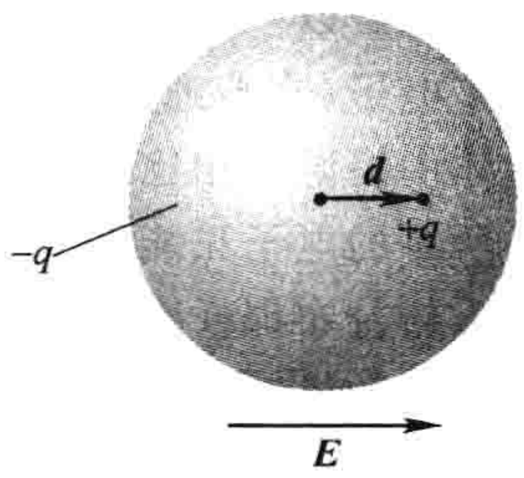


图 4.2

对于分子情况就不是那么简单了，因为它们常常沿某个方向更容易极化。例如，对二氧化碳（见图 4.3），当外电场方向沿着分子轴向时，极化率为 $4.5\times10^{-40}\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{m/N}$，而当外电场方向垂直于分子轴时，极化率为 $2\times10^{-40}\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{m/N}$。当外电场与分子轴有一个角度时，你必须将电场分解为平行分量和垂直分量来解决，并乘上相应的极化率：

$$\boldsymbol{p} = \alpha_{\perp}\boldsymbol{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel}\boldsymbol{E}_{\parallel}$$

在这种情况下，感应偶极矩可以和电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向不一致。与其他分子相比，CO_2 还是比较简单的，因为它的原子至少还排列为一条直线；对于完全非对称的分子式(4.1)将被更普遍的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的线性关系代替：

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ p_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

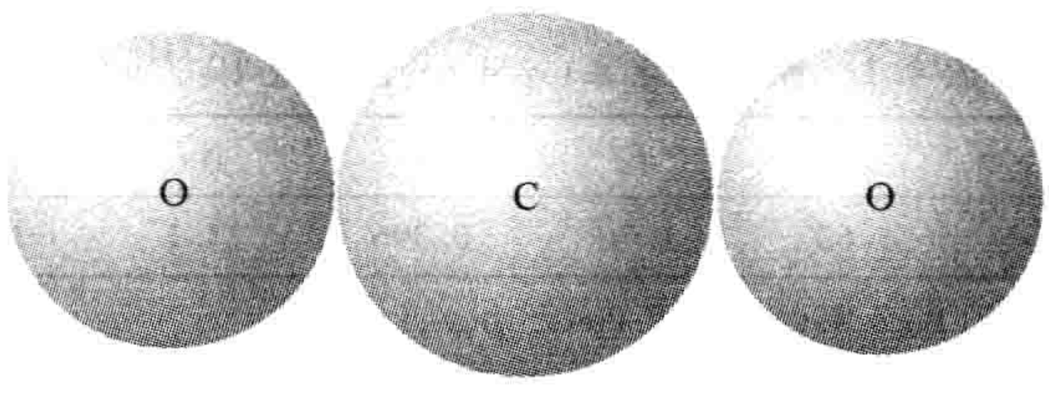


图 4.3

这九个常数 α_{ij} 组成了分子的**极化张量**。它们实际的值依赖于你所选取的坐标轴的方向，尽管通常总是可以选取“主”轴，使得非对角元（α_{xy}，α_{zx} 等）为零，仅余三个非零的：α_{xx}，α_{yy}，α_{zz}。

习题 4.1　一个氢原子(其玻尔半径为 0.5Å)位于两个相距 1mm 的金属板中间，金属板连接在 500V 的电池上。粗略地估计分离距离 d 与玻尔半径的比为多少？估计在这个装置中电离原子所需的电压为多少。[利用表 4.1 中提供的 α 值。原则上，这里所谈及的距离是十分微小的，即使是在原子尺寸上。]

习题 4.2　根据量子力学，对于基态氢原子电子云其电荷密度为

$$\rho(r) = \frac{q}{\pi a^3} e^{-2r/a}$$

式中，q 是电子电荷，a 为玻尔半径。求出这样一个原子的极化率。[提示：首先计算电子云的电场 $E_e(r)$；然后假设 $r \ll a$，将指数展开。一个更详细的解答参见 W. A. Bowers，Am. J. Phys. 54，347(1986)。]

习题 4.3　根据式(4.1)，原子的感应偶极矩是正比于外电场的。这是一个经验公式，并非基本定律，理论上它十分容易虚构例外。例如，假设电子云的电荷密度正比于距中心的距离，直到半径 R。近似到何种程度 E 和 p 成正比？找出 $\rho(r)$ 满足的条件，使得式(4.1)在弱场极限下成立。

习题 4.4　一个点电荷 q 放置在距离中性原子中心较大的距离 r 处，原子极化率为 α。求出它们之间的吸引力。

4.1.3　极化分子的排列

4.1.2 小节中讨论的中性原子开始时没有偶极矩——p 是由外电场诱导的。一些分子具有固有的永久偶极矩。例如，在水分子中，电子趋向于环绕在氧原子周围(见图 4.4)，由于分子呈 105°角，这使得负电荷位于顶角处，而正电荷在相反的一端。(水分子的偶极矩是不寻常地大：6.1×10^{-30} C·m；事实上，这就是水为什么可以作为一个有效的溶剂。)如果将这样的分子(称为**极化分子**)放置在电场中会发生什么？

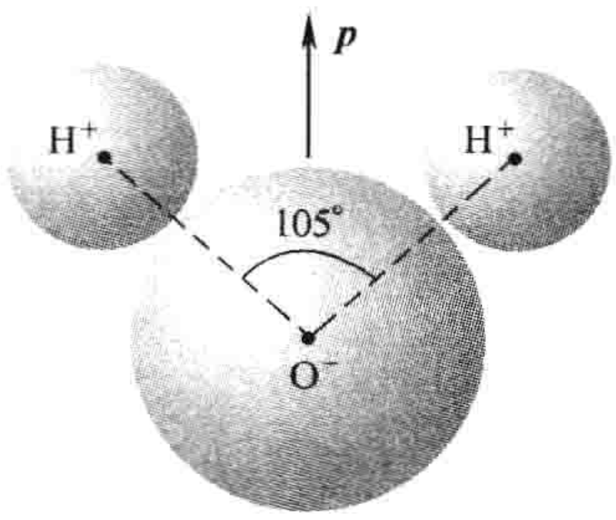


图　4.4

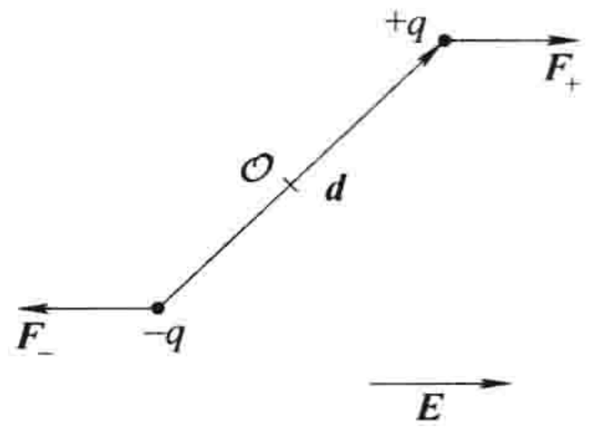


图　4.5

如果是均匀电场，作用在正电荷上的力 $\boldsymbol{F}_+ = q\boldsymbol{E}$，恰好和作用在负电荷上的力 $\boldsymbol{F}_- = -q\boldsymbol{E}$ 相互抵消(见图 4.5)。不过将出现一个力矩：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} &= (\boldsymbol{r}_+ \times \boldsymbol{F}_+) + (\boldsymbol{r}_- \times \boldsymbol{F}_-) \\ &= [(\boldsymbol{d}/2) \times (q\boldsymbol{E})] + [(-\boldsymbol{d}/2) \times (-q\boldsymbol{E})] = q\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{E}\end{aligned}$$

因此，一个偶极子 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$ 在一个均匀外电场 $\boldsymbol{E}$ 中受到一个力矩

$$\boxed{\boldsymbol{N} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}} \tag{4.4}$$

注意，$\boldsymbol{N}$ 的方向倾向于使 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 平行；一个可自由转动的极化分子的 $\boldsymbol{p}$ 将会转向外电场方向。

如果电场是非均匀的，那么 $\boldsymbol{F}_+$ 与 $\boldsymbol{F}_-$ 就不会严格相抵，除了力矩外，还会出现一个作用在偶极子上的净力。当然，这需要 $\boldsymbol{E}$ 必须在分子的尺度上变化得相当显著，在讨论电介质行为时这通常不是一个要考虑的主要因素。然而，非均匀电场所产生的作用在偶极子上的力的公式还是有某些有趣之处的：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{F}_- = q(\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-) = q(\Delta \boldsymbol{E})$$

式中，$\Delta \boldsymbol{E}$ 代表电场在正负电荷处的差值。假设，偶极子的长度是非常短的，我们可以利用式(1.35)对变化很小的电场 E_x 求近似：

$$\Delta E_x \equiv (\nabla E_x) \cdot \boldsymbol{d}$$

对于 E_y，E_z 也有同样的形式。更紧凑的有

$$\Delta \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{d} \cdot \nabla)\boldsymbol{E}$$

因此，[⊖]

$$\boxed{\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p} \cdot \nabla)\boldsymbol{E}} \tag{4.5}$$

对于一个理想化的无限小长度的偶极子，即使是非均匀电场，式(4.4)也给出了关于偶极子中心的力矩；而关于其他点，力矩为 $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}) + (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})$。

习题 4.5 在图 4.6 中，$\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 为理想的偶极子，相距为 r。$\boldsymbol{p}_2$ 导致 $\boldsymbol{p}_1$ 的力矩为多少？$\boldsymbol{p}_1$ 导致 $\boldsymbol{p}_2$ 的力矩为多少？[所求的力矩都是关于偶极子中心的。如果你所得到的答案不是大小相等、方向相反的，可参见习题 4.29。]

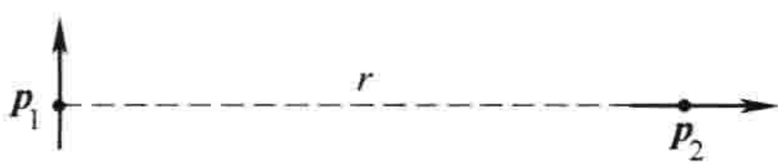


图 4.6

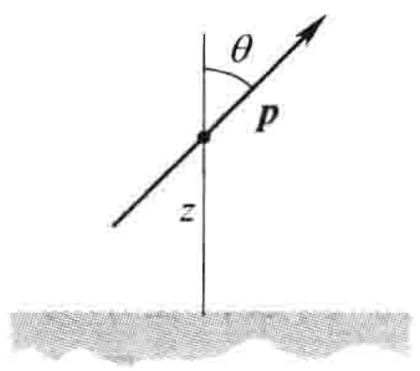


图 4.7

习题 4.6 一个理想偶极子 $\boldsymbol{p}$ 位于距一个无限大导体表面的 z 处(见图 4.7)。偶极子的方向与平面法线呈 θ 角。求作用在 $\boldsymbol{p}$ 上的力矩。如果偶极子可自由旋转，那么当它静止后指向什么方向？

习题 4.7 证明理想偶极子 $\boldsymbol{p}$ 在电场 $\boldsymbol{E}$ 中的能量为

$$\boxed{U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}} \tag{4.6}$$

习题 4.8 证明相距为 $\boldsymbol{r}$ 的两个偶极子的相互作用能为

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}[\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 - 3(\boldsymbol{p}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{p}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{r}})] \tag{4.7}$$

[提示：利用习题 4.7 和式(3.104)]

习题 4.9 一个偶极子 $\boldsymbol{p}$ 与一个点电荷 q 相距为 r，$\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角为 θ。

(a) 作用在 $\boldsymbol{p}$ 上的力为多少？

(b) 作用在 q 上的力为多少？

4.1.4 极化强度

在前两节中，我们考虑了外电场对单个原子或分子的影响。现在我们可以来回答(定性地)最初的问题：当一个电介质材料放入电场中会发生什么？如果材料由中性原子(或者非极化分子)组成，每一个原子或非极化分子都会被外场诱导出微小的偶极矩，其方向与外电场方向一致。[⊜]如果材料由极化分子组成，每一个偶极矩都会受到一个力矩，驱使它们沿外电场方向排列。

⊖ 在现在的情况下，式(4.5)可以写为更方便的形式 $\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E})$。不过，写成 $(\boldsymbol{p} \cdot \nabla)\boldsymbol{E}$ 更安全，因为我们将把公式应用于偶极磁矩(单位体积)本身是位置的函数的材料中，$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E})$ 意味着(不正确地)$\boldsymbol{p}$ 也要进行微分。

⊜ 在非对称的分子中，诱导的偶极矩可能不和外电场平行，但是如果分子为随机方向，垂直方向的贡献将平均为零。在一个单晶中，方向不是随机的，我们必须分开对待这种情况。

(随机的热运动会和这种过程竞争，因此极化分子的排列不是完全的，特别是在高温情况下，一旦外电场移除，极化将会立即完全消失)。

注意，这两个不同的机制产生同样的基本结果：许多小的偶极矩沿着外电场的方向——材料出现**极化**。这个效应的一个通常量度是

$$\boldsymbol{P} \equiv \text{单位体积偶极矩}$$

这被称做**极化强度矢量**。从现在起，我们将不再过多考虑极化是怎样产生的。实际上，我所描述的两种机制并没有明显的界限。即使在极化分子中也会有着某些位移极化(尽管，一般地，旋转一个极化分子比拉伸它要容易得多，因此第二个机制占优势)。有些材料也可以“冻结”极化，当外电场撤除时，材料仍然保持极化。但是让我们先暂且忘却产生极化的原因，来研究材料极化自身产生的电场。然后，在 4.3 节中，我们将把它们结合起来：原电场，它诱导了 $\boldsymbol{P}$，再加上由 $\boldsymbol{P}$ 产生的新电场。

4.2　极化物体的电场

4.2.1　束缚电荷

假设我们有一块极化材料——即一个含有许多排列整齐的微小偶极子的物体。单位体积的偶极矩由 $\boldsymbol{P}$ 给出。问题：这个物体产生的电场是什么(不是诱导极化的电场，而是极化本身产生的电场)？我们已经知道单个偶极子的电场，因此为什么不将物体分割为许多无限小的偶极子，然后再积分得到整体？通常，用电势来做更容易一些。对于单个的偶极子 $\boldsymbol{p}$，我们有方程(式(3.99))

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p}}{r^2} \tag{4.8}$$

式中，$\boldsymbol{r}$ 是从偶极子指向我们所要计算的电势的位置的矢量(见图 4.8)。现在，对每一个小体元 $\mathrm{d}\tau'$ 我们都有一个偶极矩 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}\mathrm{d}\tau'$，因此，总的电势为

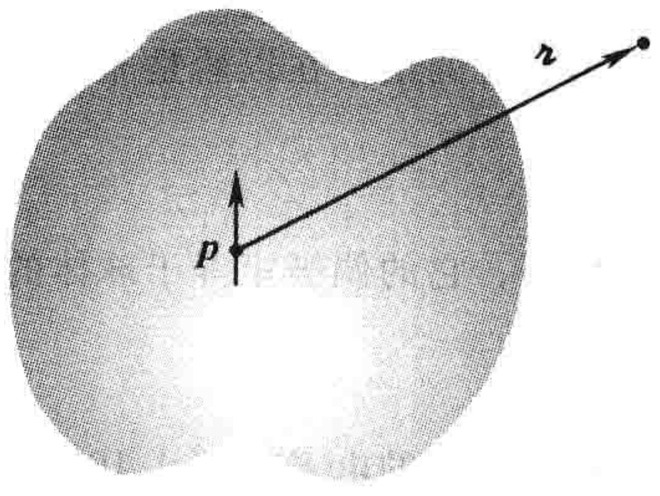


图　4.8

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{r^2}\mathrm{d}\tau' \tag{4.9}$$

在原则上，这个公式解决了我们的问题。但是它可以表示为更有启发性的形式。注意到

$$\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

式中(不像习题 1.13)的微分是对源的坐标($\boldsymbol{r}'$)进行的，我们有

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}\tau'$$

通过分部积分，用矢量积规则 5，得出

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right)\mathrm{d}\tau' - \int_{\mathcal{V}}\frac{1}{r}(\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{P})\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

或者，用散度定理，

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S\frac{1}{r}\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}' - \int_{\mathcal{V}}\frac{1}{r}(\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{P})\,\mathrm{d}\tau' \tag{4.10}$$

第一项像表面电荷

$$\boxed{\sigma_b \equiv \boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}} \tag{4.11}$$

的电势(其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 为法向单位矢量)，第二项像体电荷

$$\boxed{\rho_b \equiv -\nabla \cdot \boldsymbol{P}} \tag{4.12}$$

的电势。按照这样的定义，式(4.10)可以写作

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_b}{\mathcal{r}}\mathrm{d}a' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_b}{\mathcal{r}}\mathrm{d}\tau' \tag{4.13}$$

这意味着，极化物体的电势(因而电场也是)与体电荷 $\rho_b \equiv -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$ 加上面电荷 $\sigma_b = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ 产生的电势是一样的。代替像式(4.9)那样对无限小的偶极子的积分，我们只需求出**束缚电荷**，然后像计算其他电荷的电场一样(例如，用高斯定理)，计算束缚电荷产生的电场。

例题 4.2

求出一个半径为 R 的均匀极化球所产生的电场。

解： 我们可以选择坐标 z 轴的方向和极化方向一致(见图 4.9)。球体内的束缚电荷密度 ρ_b 为零，因为 $\boldsymbol{P}$ 是均匀的，但是

$$\sigma_b = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = P\cos\theta$$

式中，θ 为通常的球坐标。我们所要求的是电荷面密度为 $P\cos\theta$ 的电荷产生的电场。但是在例题 3.9 中我们已经计算过这种电荷的电势能：

$$V(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{P}{3\varepsilon_0} r\cos\theta, & r \leqslant R \\ \dfrac{P}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2}\cos\theta, & r \geqslant R \end{cases}$$

由于 $r\cos\theta = z$，所以球体内部的电场是均匀的，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{z}} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{P}, \quad r < R \tag{4.14}$$

这样不寻常的结果在以后是非常有用的。球外部的电势等效于一个在原点的理想偶极子的电势，

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}, r \geqslant R \tag{4.15}$$

无须惊讶，它的偶极矩等于球体的总偶极矩：

$$\boldsymbol{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \boldsymbol{P} \tag{4.16}$$

均匀极化球体的电场如图 4.10 所示。

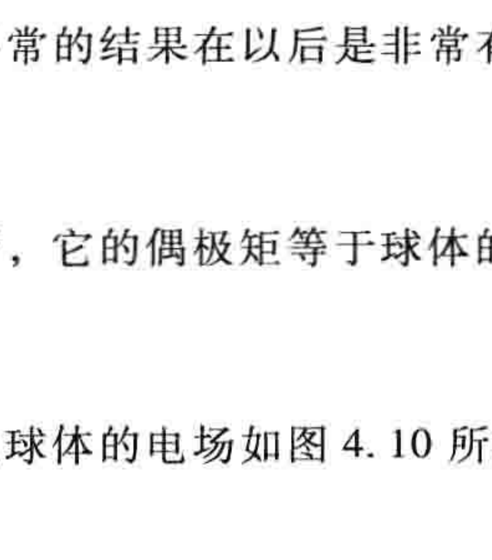


图 4.9

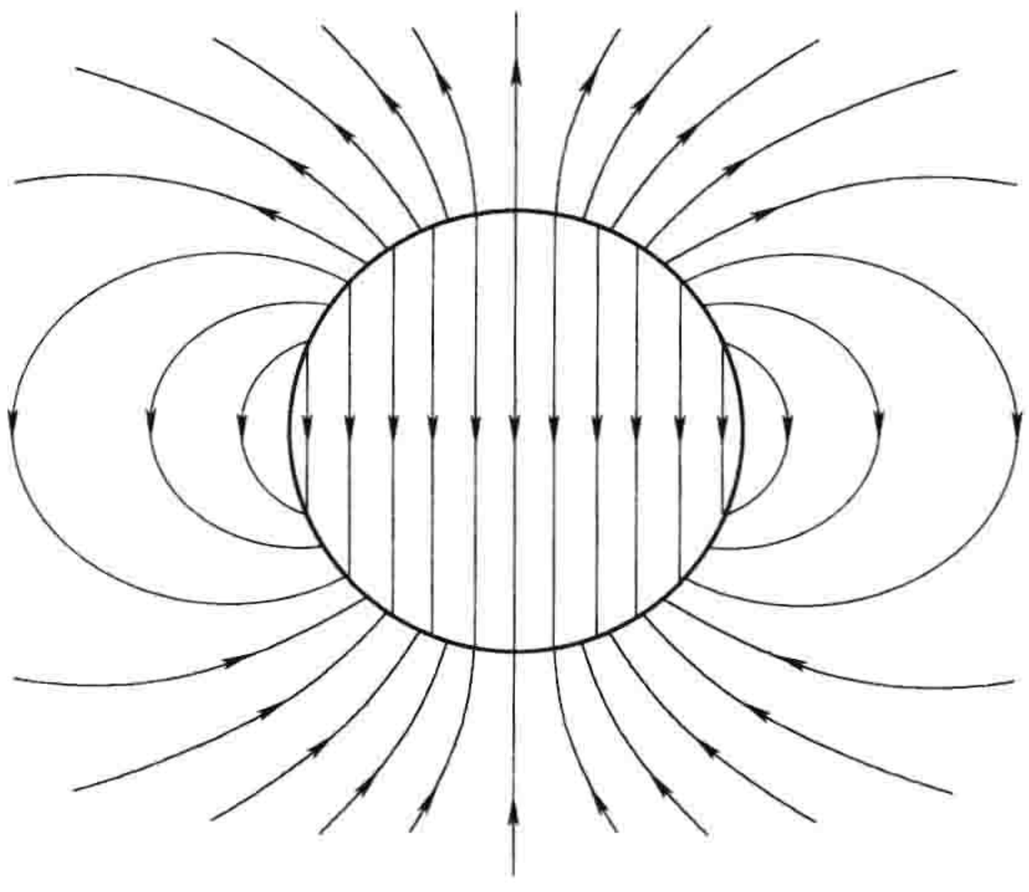


图 4.10

习题 4.10　一个半径为 R 的球的极化强度矢量为

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = k\boldsymbol{r}$$

式中，k 为常数，$\boldsymbol{r}$ 为从球心出发的矢量。

(a) 计算束缚电荷 σ_b 和 ρ_b。

(b) 求出球内部和外部的电场。

习题 4.11　一个短的圆柱体，半径为 a，长度为 L，具有“冻结的”均匀极化强度 $\boldsymbol{P}$，方向平行于圆柱体的轴线。求出束缚电荷，画出外电场草图：(i) $L >> a$，(ii) $L << a$，(iii) $L \approx a$。[这种装置称为**条形介电体**；类似于一个条形磁铁的介电体。实际中，只有一些特殊的材料——钡钛酸盐是“熟知”的例子——具有永久的电极化。这就是你为什么不能在玩具店里买到介电体。]

习题 4.12　直接从式(4.9)计算均匀极化球体(例题 4.2)的电势。

4.2.2　束缚电荷的物理解释

在上一节，我们发现一个极化物体的电场等同于一个特定的“束缚电荷”分布 σ_b 和 ρ_b 所产生的电场。但是这个结论出现在计算式(4.9)的过程中，让我们没有任何线索来了解束缚电荷的物理意义。的确，一些作者给你们的印象是束缚电荷在某种意义上是“虚构的”——仅是用来帮助计算电场的纸面上的东西。没有什么事物能够脱离真实；ρ_b 和 σ_b 完全是真实的累积电荷。在这一小节中，我将解释极化怎样导致电荷的累积。

基本思想非常简单：假设我们有一个长的线状偶极子阵列，如图 4.11 所示。沿着这条线，一个偶极子的起始端与它的相邻偶极子的尾端相抵消，但是在线的两端剩余两个电荷：正电荷在右端，负电荷在左端。就像是我们从右端去掉一个电子，将它沿线一直移到左端。事实上，尽管并没有单个电子走过这个过程——许多小的位移加起来累积成一个大的位移。我们称终端的净电荷为束缚电荷，从而来提醒我们它是不能移动的；在电介质中，每一个电子都是附着于特定的原子或分子上的。除此之外，束缚电荷和其他电荷并没有什么不同。

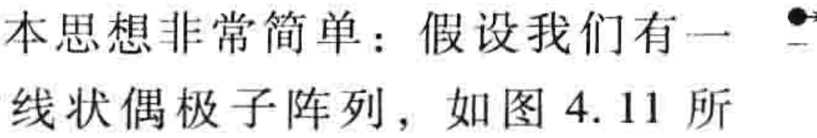


图　4.11

要计算一个给定的极化强度对应的束缚电荷，考虑一个平行于 $\boldsymbol{P}$ 的“管子”。如图 4.12 所示，一个小体块的偶极矩为 $P(Ad)$，其中 A 为管子的横截面积，d 为小体块的长度。令终端的电荷为 q，偶极矩也可以写为 qd。因此在管子右端的累积电荷为

$$q = PA$$

如果终端是垂直切下的话，那么表面的电荷面密度为

$$\sigma_b = \frac{q}{A} = P$$

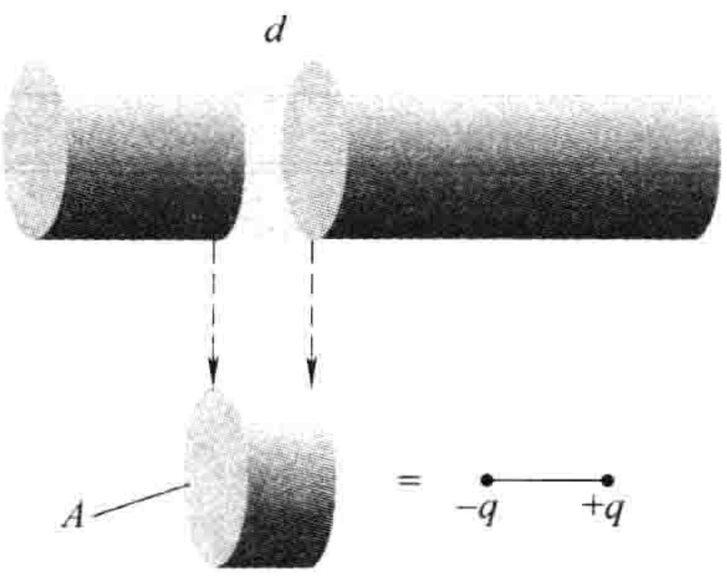


图　4.12

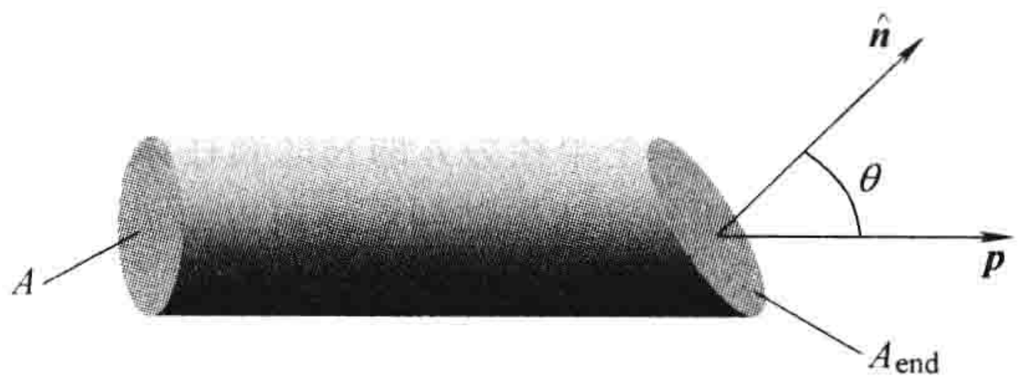


图　4.13

对斜面切割时(见图 4.13)，电荷依然相同，但是 $A = A_{end}\cos\theta$，所以

$$\sigma_b = \frac{q}{A_{end}} = P\cos\theta = \boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$$

因此，极化效应就是在物体表面产生束缚电荷 $\sigma_b = \boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$。这正是在 4.2.1 小节中使用更严谨的方法得到的结论。但是现在我们知道了束缚电荷来自哪里了。

如果极化是不均匀的，除了表面上的束缚电荷，物体内部也有束缚电荷积累。从图 4.14 可以看出负电荷的堆积会导致 $\boldsymbol{P}$ 有散度。的确，一个给定体积的全部束缚电荷 $\int\rho_b d\tau$ 和被排挤出表面的电荷相等且符号相反。后者(使用之前我们所用的同样论证)在单位面积上的大小为 $\boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$，所以

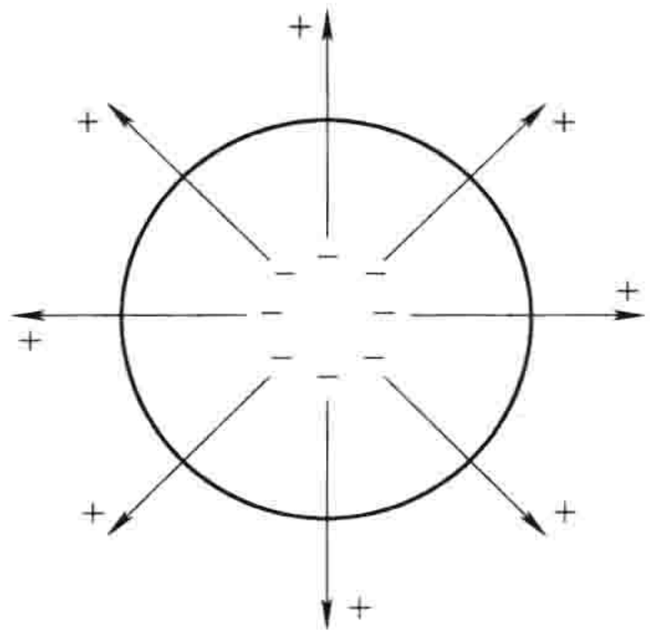


图 4.14

$$\int_V \rho_b d\tau = -\oint_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{a} = -\int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{P})\, d\tau$$

由于对于任何的体积都适用，我们可以得到

$$\rho_b = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}$$

这再次证实了 4.2.1 小节中更严谨的结论。

例题 4.3

对于均匀极化球体(例题 4.2)还有其他的分析方法，而且能很好地解释束缚电荷的概念。设我们有两个带电球体：一个带正电荷，另一个带负电荷。没有极化时，它们是完全重叠并完全相互抵消的。但是当物体均匀极化时，所有的正电荷稍微向上(z 方向)移动，而所有的负电荷稍微向下移动(见图 4.15)。这两个带电球体不再完全重叠：在顶端有一个剩余正电荷的“帽子”，而在底部有一个负电荷的“帽子”。这些“剩余”电荷恰恰就是表面束缚电荷 σ_b。

在习题 2.18 你们已经计算了两个均匀带电球重叠区域的电场，结果是

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\boldsymbol{d}}{R^3}$$

式中，q 是正电荷球体的总电荷，$\boldsymbol{d}$ 是从负电荷中心到正电荷中心的位移矢量，R 是带电球的半径。由于带电球体的极化，$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\boldsymbol{P}$，我们可以将上式表示为

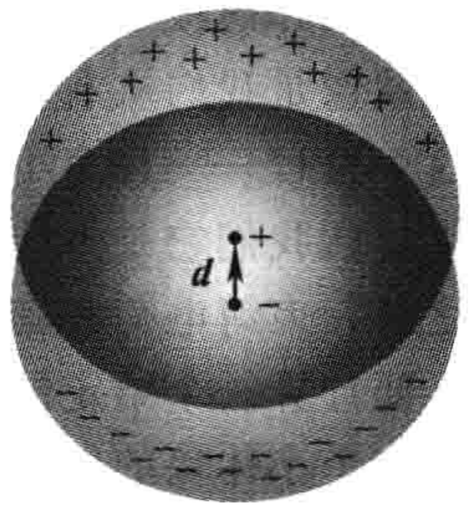


图 4.15

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{P}$$

同时，对球外的点，可把每一个带电球体的电荷都集中到各自的中心，然后我们得到一个偶极子，其电势为

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}$$

(记住与原子半径相比，$\boldsymbol{d}$ 非常之小；图 4.15 是非常夸大的。)这些结果和例题 4.2 当然是一致的。

习题 4.13 一个半径为 a 的长的圆柱体，具有垂直于轴线方向的均匀极化强度 $\boldsymbol{P}$。求出圆柱体内部的电场强度。证明圆柱体外部的电场可以写成如下形式：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{a^2}{2\varepsilon_0 s^2}[2(P\cdot\hat{\boldsymbol{s}})\hat{\boldsymbol{s}} - P]$$

[注意，我是说“均匀”，而不是“放射状”！]

习题 4.14 当你极化一个中性电介质时，电荷移动了一点点，但是总电荷依然为 0。这个事实要反映

到束缚电荷 σ_b 和 ρ_b 上。利用式(4.11)和式(4.12)证明总束缚电荷为 0。

4.2.3　电介质内部的电场

此前我并没有深究“纯粹的”偶极子和“物理的”偶极子之间的区别。在研究束缚电荷的过程中，我假定我们使用的是纯粹的偶极子——的确，我是从式(4.8)开始的，它是纯粹偶极子的电势。可是，一个实际的极化电介质是由物理的偶极子构成的，尽管它们极其微小。此外，我假定把分立的分子偶极子用一个连续的密度函数 $\boldsymbol{P}$ 来表示。那么我如何证明此种方法的正确性？在电介质外部它没有任何问题：此处距离分子较远(r 比正负电荷的间距大很多倍)，所以偶极子电势起决定性作用，源“微粒”的细节被距离所掩盖。但是，在电介质内部，我们几乎不能再假定距离所有偶极子都很远，在 4.2.1 小节中我们所用的推导面临着严重的挑战。

事实上，当你开始考虑它时，在微观尺度上，物体内部的电场一定极其复杂。如果你能非常靠近电子的话，它的电场会极其大，而且，当移动一个很小距离时，电场可能会变小或指向完全不同的方向。此外，瞬间之后，由于原子的移动，电场就会完全改变。这种真实的**微观**电场是完全不可能计算出来的，即使你可以计算，也不会有很大的兴趣。从宏观角度出发，我们可以把水当做连续的流体，而不考虑它的分子结构，所以，我们也可以忽略物体内部电场的微观隆起和褶皱，而只专注于**宏观**电场。它可以定义为包含成千上万个原子的足够大区域的平均电场(这样就可以消除我们不感兴趣的微观波动)，但是这个区域也要足够小，以保证我们没有剔除电场中任何有意义的大尺度的变化。(实际上，这就意味着我们必须在比物体本身尺度小很多的范围内求平均。)一般地，人们所说的物体内部的电场就是这样的宏观电场。[⊖]

余下的事情是证明在我们使用 4.2.1 小节的方法时得到的电场，实际上是宏观电场。这个论证很微妙，请留心。假设我想计算电介质内某些点 $\boldsymbol{r}$ 处的宏观电场(见图 4.16)。我知道我必须对一个适当体积内的真实(微观)电场求平均，因此我以 $\boldsymbol{r}$ 为球心画一个半径为分子尺寸数千倍的小球。则 $\boldsymbol{r}$ 处的宏观电场包含两部分：所有外部电荷在球体上产生的平均电场，再加上所有内部电荷的平均电场：

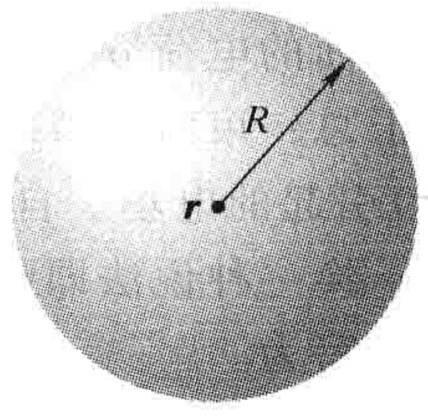


图　4.16

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{外} + \boldsymbol{E}_{内}$$

在习题 3.41(d)你们已经证明球体外部电荷产生的平均电场(对整个球体平均)和它们在球心产生的电场是相等的，所以 $\boldsymbol{E}_{外}$ 就是球体外部的偶极子在 $\boldsymbol{r}$ 处的电场。这些偶极子足够远，所以我们可以放心地使用式(4.9)：

$$V_{外} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{外部}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{r^2}\mathrm{d}\tau' \tag{4.17}$$

球体内部的偶极子由于距离太近而不能使用这种形式。但很幸运，我们只需要它们的平均电场，并且根据式(3.105)，这个电场为

$$\boldsymbol{E}_{内} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{R^3}$$

而无须考虑球体内部电荷的分布细节。其中唯一的相关量是总电偶极矩 $\boldsymbol{p} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\boldsymbol{P}$：

$$\boldsymbol{E}_{内} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{P} \tag{4.18}$$

⊖　为了避免你对宏观电场的引入产生怀疑，我需要指出每当你提及材料的密度，你恰好就做了同样的平均。

现在，由假设球是足够的小以至于在整个球内 $\boldsymbol{P}$ 没有显著的变化，所以式(4.17)中的积分若对球内体积积分则对应于均匀极化球在球心产生的电场，即：$-(-1/3\varepsilon_0)\boldsymbol{P}$(式(4.14))。但这正是 $\boldsymbol{E}_{内}$(式(4.18))，所以宏观电场可以用以下电势求出：

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{P}(\hat{\boldsymbol{r}})}{r^2}\mathrm{d}\tau' \tag{4.19}$$

式中积分现在是遍布电介质的整个体积。当然，这是在 4.2.1 小节中我们使用过的，虽然那时没有详细解释，用这个公式可以正确地计算电介质内部某点的平均宏观电场。

你也许不得不重新阅读关于这个论证的最后两段以加深理解。可以注意到，任何球体的平均电场(归结于内部电荷)总是和一个带有相同总电偶极矩的均匀极化球的中心电场相等，我们的论证总是反复围绕着上述事实展开。这也就是说不管真实的微观电荷结构如何不可想象，如果我们只想知道它的宏观(平均)电场，那么总可以很好地用一个理想偶极子的平稳分布来代替它。顺便提及，在以上的论证中我用了球体来求平均，实际上宏观电场并不依赖于用何种几何形状，这反映在式(4.19)的最终结果上。也许，可用立方体、椭圆球或者其他任意形状来重复以上的论证——计算也许会更困难，但是结论仍然相同。

4.3 电位移矢量

4.3.1 有电介质时的高斯定理

在 4.2 节中我们发现极化效应会产生积累的束缚电荷，包括电介质内部的电荷 $\rho_b = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$ 和表面的电荷 $\sigma_b = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$。介质的极化引起的电场就是束缚电荷的电场。现在我们准备把它进行汇总：束缚电荷对电场的贡献加上其他任何电荷(为了有一个好的称呼，我们称为**自由电荷**)引起的电场。自由电荷可能包括导体中的电子、嵌入电介质材料的离子或者其他任何电荷；换一种说法即那些不是由极化产生的其他任何电荷。这样，在电介质内部的总电荷密度可以写为

$$\rho = \rho_b + \rho_f \tag{4.20}$$

所以高斯定理可以改写为

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} + \rho_f$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 是总电场，而不仅仅是由极化产生的部分电场。

将两个散度项合并起来会比较方便：

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho_f$$

将括号中的表达式用字母 $\boldsymbol{D}$ 表示，

$$\boxed{\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}} \tag{4.21}$$

这称为**电位移矢量**。用 $\boldsymbol{D}$ 可以把高斯定理写为

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f} \tag{4.22}$$

或者，用积分的形式，

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = Q_{f_{enc}} \tag{4.23}$$

式中 $Q_{f_{enc}}$ 表示包含在体积内的总的自由电荷。当研究电介质时，这种形式的高斯定理特别有用，因为它仅涉及自由电荷，并且自由电荷是我们可以控制的。束缚电荷在如下过程中产生：根据 4.1 节，当我们把自由电荷放到某处，一个确定的极化会自发产生，并且这个极化将产生束缚电

荷。因而，在实际的问题中，我们知道 ρ_f，但是(最初)不知道 ρ_b；式(4.23)刚好就可以帮助我们使用这些信息进行计算。特别地，只要满足必备的对称性，我们就可以马上运用标准的高斯定理计算出 $\boldsymbol{D}$。

例题 4.4

一长直带电线，载有均匀的电荷线密度为 λ 的电荷，包裹着半径为 a 的橡胶绝缘体(见图 4.17)。求出电位移矢量。

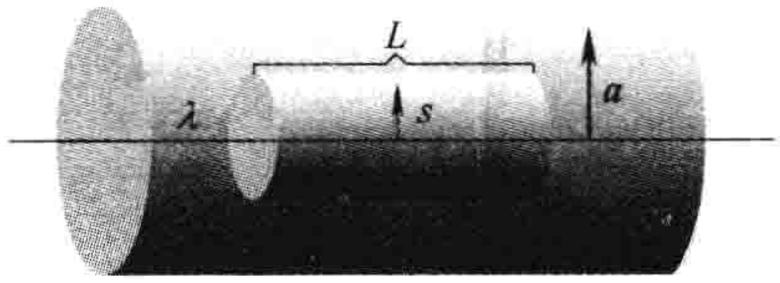


图　4.17

解： 作半径为 s 且长为 L 的圆柱形高斯面，由式(4.23)得

$$D(2\pi sL) = \lambda L$$

因而，

$$\boldsymbol{D} = \frac{\lambda}{2\pi s}\hat{\boldsymbol{s}} \tag{4.24}$$

注意，这个公式对绝缘体的内部和外部都满足。在外部，$\boldsymbol{P}=0$，所以对于

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 s}\hat{\boldsymbol{s}}, \quad s > a$$

由于我们不知道橡胶内部的 $\boldsymbol{P}$，所以无法决定其电场。

你可能已经发现在导出式(4.22)时我忽略了表面电荷 σ_b，也的确如此。我们不能把高斯定理精确地应用到一个电介质的表面，此处的 ρ_b 是无限大的，导致 E 的散度也如此。但是在其他任何地方是合理的，事实上如果我们把电介质的边缘描绘成在有限厚度内极化逐渐减小到零的薄层(这或许是一个比突然中断更真实的模型)，就不存在所谓的表面束缚电荷了；在这个“薄层”内 ρ_b 迅速但光滑地改变，高斯定理在任何地方的应用都是可靠的。无论何种情况，式(4.23)的积分形式不会受到这个“缺陷”的影响。

习题 4.15　一个由电介质材料做成的厚球壳(内径为 a，外径为 b)存在“冻结”的极化强度

$$\boldsymbol{P}(r) = \frac{k}{r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

式中，k 是常量；r 是到球心的距离(见图 4.18)。(此习题中没有自由电荷。)用两种不同方法求出全部三个区域的电场：

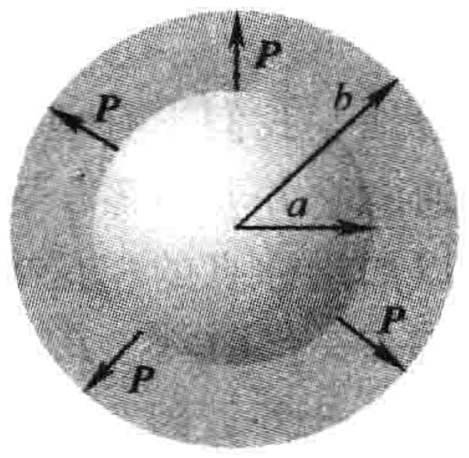


图　4.18

(a) 确定所有的束缚电荷的位置，用高斯定理(式(2.13))计算其产生的电场。

(b) 用式(4.23)求出 $\boldsymbol{D}$，然后由式(4.21)求出 $\boldsymbol{E}$。(注意第二种方法更快捷，而且避免了任何形式的束缚电荷的直接使用。)

习题 4.16　假设一大块电介质内部的电场为 $\boldsymbol{E}_0$，所以其电位移矢量为 $\boldsymbol{D}_0 \equiv \varepsilon_0\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{P}$。

(a) 现在在此材料中挖出一个小的球形空腔(见图 4.19a)，根据 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{P}$ 求出空腔中心的电场。再根据 $\boldsymbol{D}_0$ 和 $\boldsymbol{P}$ 求出空腔中心的电位移矢量。

(b) 对于一个与 $\boldsymbol{P}$ 平行的长针形空腔(见图 4.19b)，同样求出上述问题。

(c) 对于一个与 $\boldsymbol{P}$ 垂直的圆盘形空腔(见图 4.19c),同样求出上述问题。

[假设这些空腔足够小以至于 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{D}_0$ 基本是均匀的。提示:挖一个空腔和叠加一个相同形状但极化方向相反的物体的效果是一样的。]

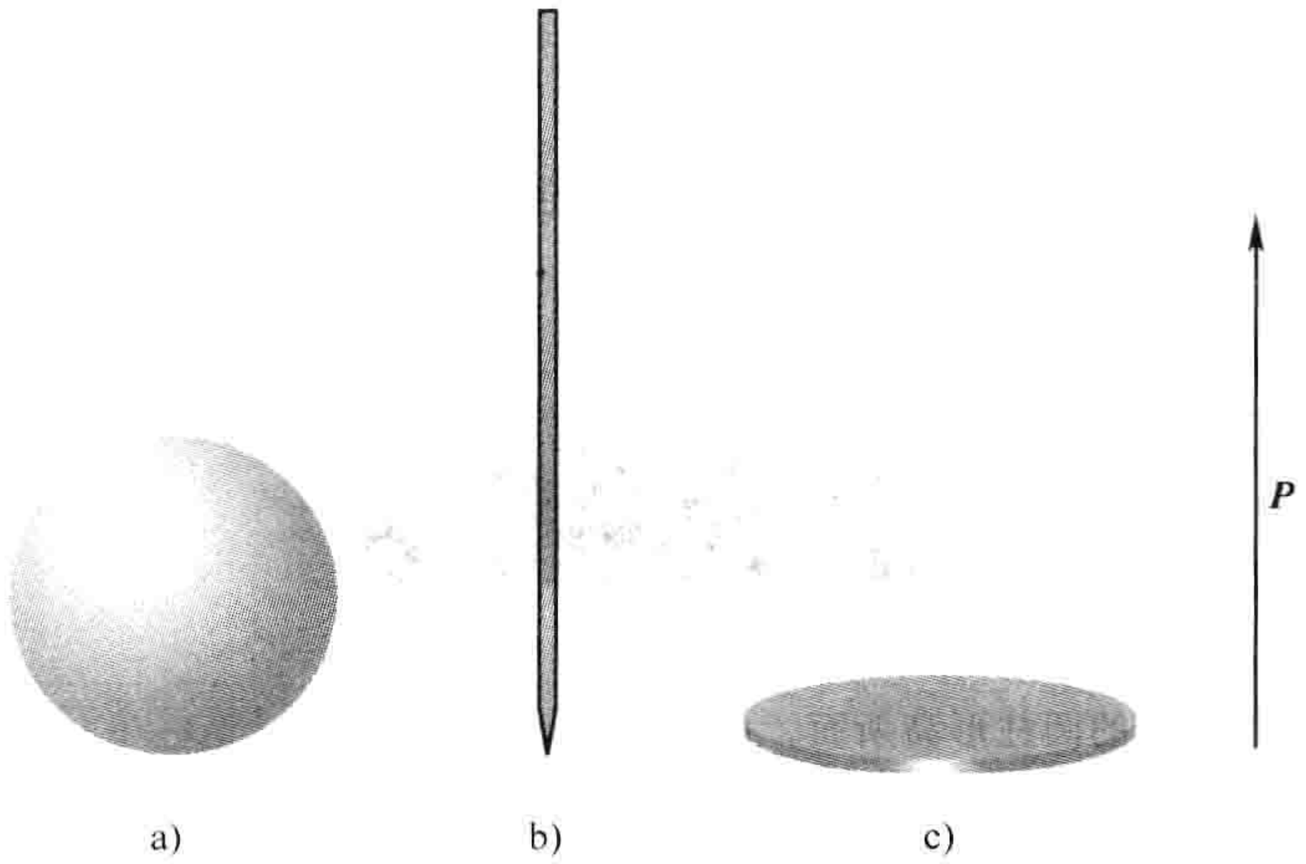


图 4.19

a)球形空腔 b)长针形空腔 c)圆盘形空腔

4.3.2 易误解的类似性

式(4.22)看起来很像高斯定理,仅仅是总电荷密度 ρ 被自由电荷密度 ρ_f 替代且 $\boldsymbol{D}$ 取代了 $\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 而已。由于这个原因,你或许会推断 $\boldsymbol{D}$"宛如" $\boldsymbol{E}$(除了因子 ε_0)一样,只是它的来源 ρ 替换成了 ρ_f:"解决关于电介质的问题时,完全可以不考虑束缚电荷——计算电场时和通常的做法一样,仅仅是在调用答案时用 $\boldsymbol{D}$ 替换掉 $\boldsymbol{E}$。"这个论证很有诱惑力,但是这样的结论是错误的;特别地,对于 $\boldsymbol{D}$ 是没有"库仑定律"的:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \neq \frac{1}{4\pi}\int \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\rho_f(\boldsymbol{r}')\,d\tau'$$

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 之间的对比比这更微妙。

仅用一个散度是不足以确定一个矢量场的;你还需要知道它的旋度。因为 $\boldsymbol{E}$ 的旋度总是等于零,对于静电场,人们容易忘记这一点。但是 $\boldsymbol{D}$ 的旋度并不总是为零。

$$\nabla \times \boldsymbol{D} = \varepsilon_0(\nabla \times \boldsymbol{E}) + (\nabla \times \boldsymbol{P}) = \nabla \times \boldsymbol{P} \tag{4.25}$$

一般地,我们没有理由假定 $\boldsymbol{P}$ 的旋度为零。有时候它确实为零,比如例题 4.4 和习题 4.15,但是通常它并非为零。习题 4.11 的条形极化体就是相关的实例:这里任何地方都没有自由电荷,所以如果你真的相信 $\boldsymbol{D}$ 仅仅来源于 ρ_f,你就会被迫得出结论"在任何地方 $\boldsymbol{D}=0$,因此在电介质内部 $\boldsymbol{E}=(-1/\varepsilon_0)\boldsymbol{P}$ 且外部 $\boldsymbol{E}=0$",这显然是错误的。(我把那里 $\nabla\times\boldsymbol{P}\neq 0$ 的问题留给你们自己解决。)此外,因为 $\nabla\times\boldsymbol{D}\neq 0$,$\boldsymbol{D}$ 不能表示成标量的梯度——对 $\boldsymbol{D}$ 没有"电势"。

建议:当你们被要求计算电位移矢量时,首先要寻找对称性。如果问题中出现球体、圆柱体或者平面的对称性,你就可以用一般的高斯定理方法,从式(4.23)直接得到 $\boldsymbol{D}$。(显然在这种情况下 $\nabla\times\boldsymbol{P}$ 自动为零,由于仅用对称性求出了结论,实际上你不必担心它的旋度。)如果所需的对称性不存在,你将不得不考虑其他的方法,特别地,你绝不能假定 $\boldsymbol{D}$ 是由自由电荷唯一决定的。

4.3.3 边界条件

在 2.3.5 小节中的静电场边界条件可以用 $\boldsymbol{D}$ 重写,式(4.23)告诉我们垂直界面的分量不连

续：

$$D_{\text{上}}^{\perp} - D_{\text{下}}^{\perp} = \sigma_{\text{f}} \tag{4.26}$$

而式(4.25)给出了平行分量的不连续：

$$\boldsymbol{D}_{\text{上}}^{\parallel} - \boldsymbol{D}_{\text{下}}^{\parallel} = \boldsymbol{P}_{\text{上}}^{\parallel} - \boldsymbol{P}_{\text{下}}^{\parallel} \tag{4.27}$$

在电介质存在时，这些方程比关于 $\boldsymbol{E}$ 的相应的边界条件(式(2.31)和式(2.23))：

$$E_{\text{上}}^{\perp} - E_{\text{下}}^{\perp} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma \tag{4.28}$$

和

$$\boldsymbol{E}_{\text{上}}^{\parallel} - \boldsymbol{E}_{\text{下}}^{\parallel} = 0 \tag{4.29}$$

更有用。你可以尝试着运用它们，例如，去解答习题 4.16 和习题 4.17。

习题 4.17　对于习题 4.11 中的条形极化体，作三张细节图：一个关于 $\boldsymbol{P}$，一个关于 $\boldsymbol{E}$，另一个关于 $\boldsymbol{D}$。假设 L 大约为 $2a$。[提示：$\boldsymbol{E}$ 线终止于电荷；$\boldsymbol{D}$ 线终止于自由电荷。]

4.4　线性电介质

4.4.1　电极化率、介电常数和相对介电常数

在 4.2 和 4.3 节中我们并没有关注 $\boldsymbol{P}$ 的起因；我们仅仅关注于极化的效应。尽管从 4.1 节的定性讨论中我们知道一个电介质的极化通常是由电场引起的，它将原子或分子中的偶极子排列起来。事实上，对于很多物质，只要 $\boldsymbol{E}$ 不是特别强，极化强度和电场是成正比的：

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \tag{4.30}$$

式中的比例系数 χ_e 称为介质的**电极化率**(因子 ε_0 已经被提取出来以获得量纲为一的 χ_e)。χ_e 的值依赖于问题中材料的微观结构(也和外界的条件有关，比如温度)。我们称满足式(4.30)的材料为**线性电介质**。[⊖]

注意，式(4.30)中的 $\boldsymbol{E}$ 是总电场；它可能一部分是由自由电荷引起的，而另一部分由自身的极化引起。例如，如果我们把一块电介质放在外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，我们不能直接从式(4.30)计算出 $\boldsymbol{P}$；这个外电场将极化此材料，并且这个极化会产生自身的电场，然后会对总电场有贡献，而且这个电场反过来又会改变材料的极化，同时……打破这种无休止的重复并不总是容易的。你们很快就会看到一些例子。最简单的方法是从电位移矢量开始，至少在那些情况下 $\boldsymbol{D}$ 可以从自由电荷分布直接导出。

在线性介质中我们有

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \boldsymbol{E} \tag{4.31}$$

所以 $\boldsymbol{D}$ 也和 $\boldsymbol{E}$ 成比例：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{4.32}$$

式中

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \tag{4.33}$$

这个新常数 ε 称为材料的**介电常数**。(真空中无论怎样极化，电极化率都是零，所以介电常数为

⊖ 特别是在现代光学的应用中，非线性材料已经变得越来越重要。这些材料中 $\boldsymbol{E}$ 的函数 $\boldsymbol{P}$ 中会有第二项——典型的是一个立方项。一般地，当用 $\boldsymbol{E}$ 把 $\boldsymbol{P}$ 泰勒展开时，式(4.30)可以看成展开式的第一项(非零项)。

ε_0，这就是为什么 ε_0 被称为**真空介电常数**。我不喜欢这个称呼，因为它暗示着真空仅仅是一种特殊的线性电介质，其介电常数恰好为 $8.85\times10^{-12}\mathrm{C}^2/(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)$。）如果你去掉因子 ε_0，则剩下的量纲为一的量

$$\varepsilon_r \equiv 1+\chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{4.34}$$

称为材料的**相对介电常数**。一些常见物质的相对介电常数在表 4.2 中列出。当然，除了从电极化率中已经得到的信息，介电常数并没有传达任何其他的知识，在式(4.32)中并没有任何实质的新东西；式(4.30)已经包含了线性电介质的所有物理本质。[⊖]

表 4.2　相对介电常数(除非有特殊说明，都是在 1atm，20℃时给出的值)

材料	相对介电常数	材料	相对介电常数
真空	1	苯	2.28
氦	1.000 065	金刚石	5.7
氖	1.000 13	盐	5.9
氢	1.000 25	硅	11.8
氩	1.000 52	甲醇	33.0
空气(干燥)	1.000 54	水	80.1
氮	1.000 55	冰(−30℃)	99
水蒸气(100℃)	1.005 87	$KTaNbO_3$(0℃)	34 000

来源：物理化学手册，第 78 版(Boca Raton：CRC Press，Inc.，1997)。

例题 4.5

半径为 a 的金属球带电荷量为 Q(见图 4.20)。它被一个介电常数为 ε 且外径为 b 的线性电介质包裹。求中心的电势(相对于无穷远处)。

解：为了计算 V，我们需要知道 $\boldsymbol{E}$；为了求出 $\boldsymbol{E}$，我们可以首先尝试确定束缚电荷的位置；我们能够从 $\boldsymbol{P}$ 得到束缚电荷，但是我们不能计算 $\boldsymbol{P}$，除非我们能够知道 $\boldsymbol{E}$(式(4.30))。我们似乎陷入了困境。我们已经知道的是自由电荷 Q，并且幸运的是，它是球对称分布的，所以让我们从计算 $\boldsymbol{D}$ 开始，由式(4.23)：

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \quad (\text{对 } r > a \text{ 的所有点})$$

(当然，在金属球体内部，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}=0$。)只要我们知道 $\boldsymbol{D}$，就可以很容易得到 $\boldsymbol{E}$，利用式(4.32)：

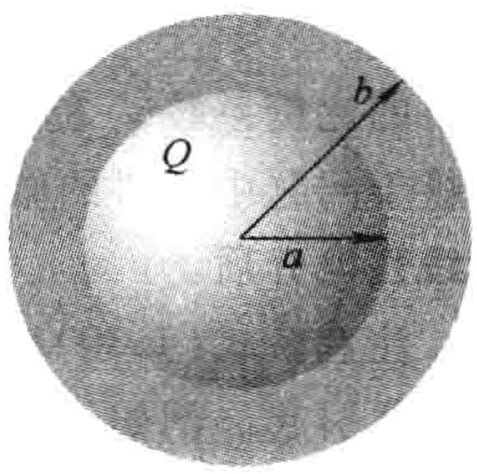


图　4.20

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, & a < r < b \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, & r > b \end{cases}$$

显然中心电势为

$$V = -\int_\infty^0 \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_\infty^b \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)dr - \int_b^a \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\right)dr - \int_a^0 (0)\,dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_0 b} + \frac{1}{\varepsilon a} - \frac{1}{\varepsilon b}\right)$$

如上述过程所示，我们没有必要明确地计算极化强度或者束缚电荷，尽管这可以轻松地做到：

⊖ 当我们参与这个没有必要的术语和符号的狂欢时，我也应该提到 $\boldsymbol{D}$ 关于 $\boldsymbol{E}$ 的公式(式(4.32)，关于线性电介质的)被称为**构成关系**。

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

因此在电介质内部

$$\rho_b = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} = 0$$

而束缚电荷面密度为

$$\sigma_b = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\varepsilon b^2}, & \text{外表面} \\ \dfrac{-\varepsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\varepsilon a^2}, & \text{内表面} \end{cases}$$

注意，在 a 处的表面上的束缚电荷是负的($\hat{\boldsymbol{n}}$ 指向电介质的外部，在 b 处为 $+\hat{\boldsymbol{r}}$，但在 a 处为 $-\hat{\boldsymbol{r}}$)。这是很自然的，因为金属球上的电荷吸引电介质中与它异号的电荷。这个负电荷层降低了电介质中的电场：从$(1/4\pi\varepsilon_0)(Q/r^2)\hat{\boldsymbol{r}}$ 变为$(1/4\pi\varepsilon)(Q/r^2)\hat{\boldsymbol{r}}$。从这个方面来说电介质很像一个非完全导体：在导体壳中的表面感应电荷会完全消除 $a<r<b$ 范围内 Q 的电场；可是虽然电介质已经尽了最大努力，但仍然只能部分地消除。

你或许会猜想线性电介质不会存在 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 对比时的缺陷。既然此时 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 都是成比例的，那么它们的旋度为什么不能像 $\boldsymbol{E}$ 一样也是零？很遗憾，并非如此，$\boldsymbol{P}$ 在跨过两种材料边界的闭合曲线上的线积分不必为零，即使 $\boldsymbol{E}$ 在同样回路上的积分一定为零。原因在于两边的比例因子 $\varepsilon_0\chi_e$ 是不同的。例如，在极化电介质和真空的界面(见图 4.21)，$\boldsymbol{P}$ 在一侧为零，可另一侧不为零。在这个回路上 $\oint \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{l} \neq 0$，因此，由斯托克斯定理可以知道，在这个回路内 $\boldsymbol{P}$ 的旋度不可能在任何地方都为零(事实上，在边界上它为无穷大)。

当然，如果空间都被均匀[⊖]线性电介质填充，就可以避免这个问题；在这个相当特殊的环境里

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f \text{ 且 } \nabla \times \boldsymbol{D} = 0$$

所以 $\boldsymbol{D}$ 可以由自由电荷导出，就好像那里没有电介质一样：

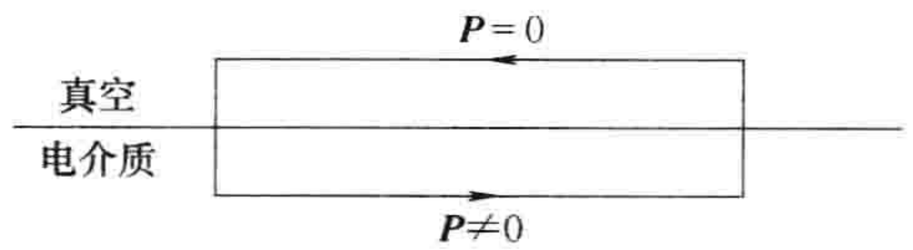


图　4.21

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_{vac}$$

式中，$\boldsymbol{E}_{vac}$是在没有任何电介质存在时由同样的自由电荷分布产生的电场。根据式(4.32)和式(4.34)，则

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{D} = \frac{1}{\varepsilon_r}\boldsymbol{E}_{vac} \tag{4.35}$$

结论：当所有空间都被均匀线性电介质填充，各处的电场就会减小为原来的 $1/\varepsilon_r$。(事实上，没有必要在所有空间都填充：在任何电场为零的地方，电介质存在与否就没有任何影响，因为在任何情况下那里都不会存在极化。)

例如，如果将自由电荷 q 嵌入一大块电介质中，它产生的电场为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{4.36}$$

(式中是 ε 而不是 ε_0)，并且作用在近邻电荷上的力也相应地减小。但是库仑定律并没有任何错误；准确地说，自由电荷被介质中有相反符号的束缚电荷包裹起来，即介质的极化部分地“屏蔽”了这个电荷(见图 4.22)。[⊖]

⊖ 一个**均匀**介质就是它的性质(此时是指电极化率)不随位置改变。

⊖ 在量子电动力学中真空是可以极化的，这也就是电子的有效(或者“重整”)电荷，由于你可以在实验室测量，但不是它的真实(“裸”)数值，事实上还稍微依赖于你的测量距离。

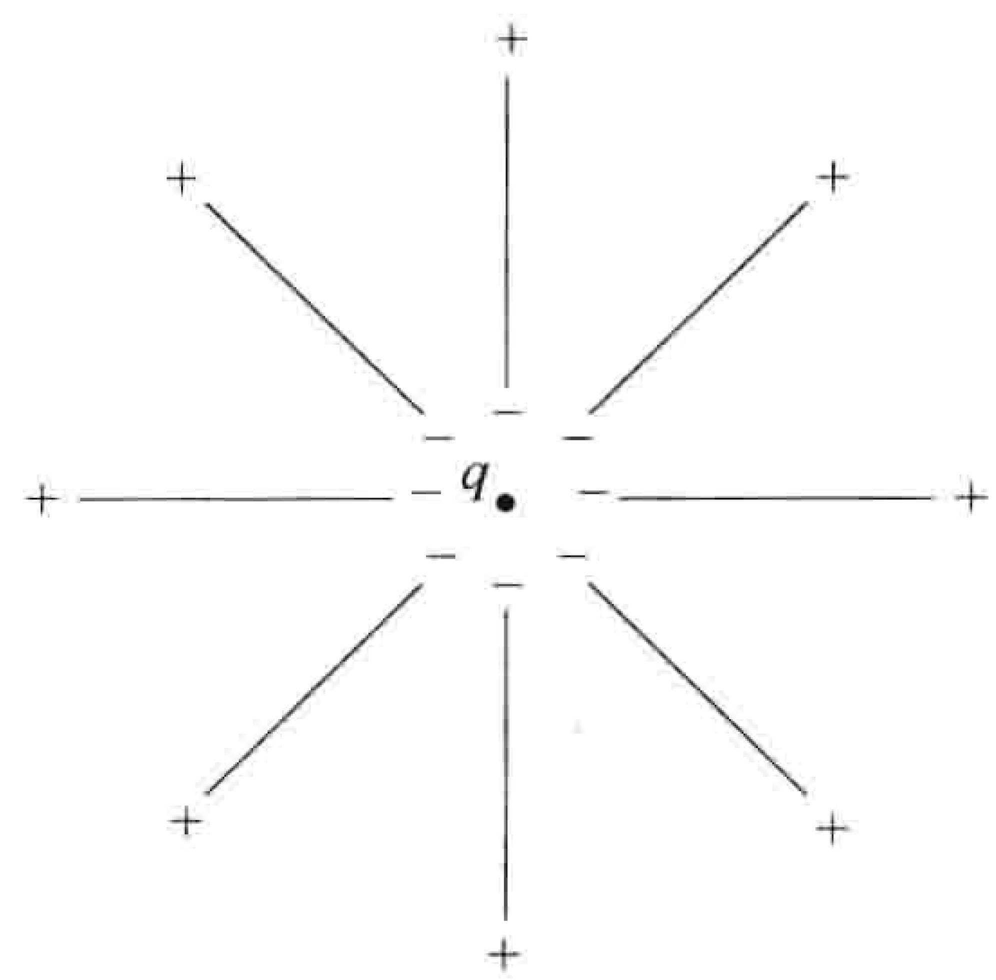


图　4.22

例题 4.6

在一个平行板电容器（见图 4.23）中充满了相对介电常数为 ε_r 的绝缘材料。这会对它的电容产生什么影响？

图　4.23

解： 由于电场被限制在金属板之间，通过因子 $1/\varepsilon_r$，电介质会降低 $\boldsymbol{E}$，同时也会对电势差 V 产生影响。相应地，电容 $C=Q/V$ 会增大 ε_r 倍。

$$C = \varepsilon_r C_{vac} \tag{4.37}$$[1]

事实上，这是一个增强电容的通常做法。

顺便指出，通常晶体中的一些方向会比其他方向更容易极化，[2]在这种情况下，式(4.30)要被更普遍的线性关系替代

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0(\chi_{e_{xx}}E_x + \chi_{e_{xy}}E_y + \chi_{e_{xz}}E_z) \\ P_y &= \varepsilon_0(\chi_{e_{yx}}E_x + \chi_{e_{yy}}E_y + \chi_{e_{yz}}E_z) \\ P_z &= \varepsilon_0(\chi_{e_{zx}}E_x + \chi_{e_{zy}}E_y + \chi_{e_{zz}}E_z) \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

就像对非对称分子用式(4.3)时取代式(4.1)一样。这九个系数 $\chi_{e_{xx}}$，$\chi_{e_{xy}}$，…，构成了极化率张量。

习题 4.18　一个平行板电容器的平板之间（见图 4.24）充满了两块线性电介质板。每块的厚度为 a，所以电容器平板之间的距离为 $2a$。板 1 和板 2 的相对介电常数分别为 2 和 1.5。上部金属板的自由电荷面密度为 σ，下部的为 $-\sigma$。

（a）求板 1 和板 2 中的电位移矢量 $\boldsymbol{D}$。

（b）求板 1 和板 2 中的电场 $\boldsymbol{E}$。

（c）求板 1 和板 2 中的极化强度 $\boldsymbol{P}$。

（d）求两平板间的电势差。

---

[1] C_{vac} 为没有任何电介质存在时的电容。

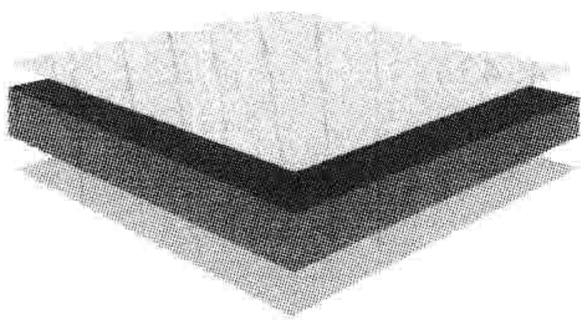
[2] 如果一种介质的性质（比如说电极化率）在所有方向上都相同，我们就说它各向同性。因此，式(4.30)是式(4.38)的特殊情况，并且适用于各向同性的介质。物理学家对他们的语言很容易马虎，除非另作指明，“线性电介质”必定就是“各向同性线性电介质”，或者是“均匀的各向同性线性电介质”。

(e) 求所有束缚电荷的位置和数量。

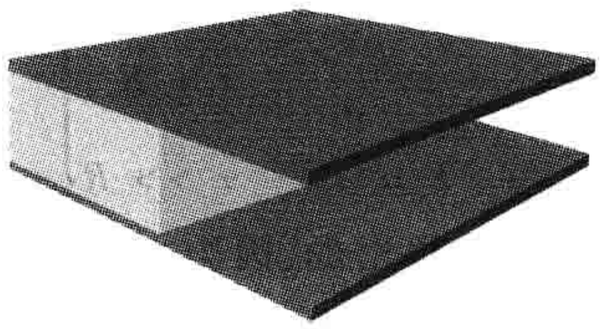
(f) 现在你知道了所有的电荷(自由的和束缚的)，重新计算每一块电介质的电场，用你的答案证实(b)。

习题 4.19

如图 4.25 所示，假设有足够填充一个电容器两个极板之间一半空间容量的电介质材料，其相对介电常数为 ε_r。对图 4.25a 和图 4.25b 两种情况分别求电容器电容增加的百分比。如果极板之间电势差为 V，求两种情况下的 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{P}$，以及所有表面的束缚电荷和自由电荷。



a)



b)

图　4.25

习题 4.20

对于一个半径为 R，相对介电常数为 ε_r 的球形电介质，如果其中均匀分布有密度为 ρ 的自由电荷，求球心位置的电势(相对于无穷远处)。

习题 4.21

如图 4.26 所示，一个同轴电缆由半径为 a 的铜线和同轴的内径为 c 的铜环组成。两者之间部分填充有电介质材料(从铜环内壁 $r=c$ 填充至 $r=b$ 处)，相对介电常数为 ε_r，求单位长度的电容。

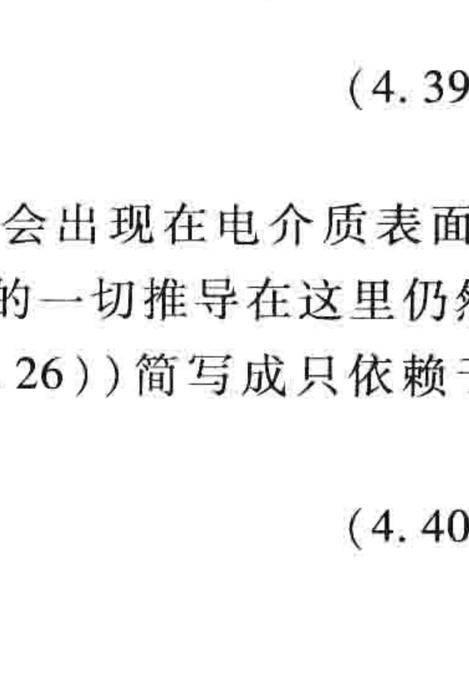


图　4.26

4.4.2　线性电介质的边界值问题

在线性均匀电介质中，束缚电荷密度 ρ_b 正比于自由电荷密度 ρ_f：[⊖]

$$\rho_b = -\nabla\cdot\boldsymbol{P} = -\nabla\cdot\left(\varepsilon_0\frac{\chi_e}{\varepsilon}\boldsymbol{D}\right) = -\left(\frac{\chi_e}{1+\chi_e}\right)\rho_f \tag{4.39}$$

特别地，除非自由电荷镶嵌于电介质材料中，$\rho=0$，否则净剩余电荷一定会出现在电介质表面。在这样的电介质中，电势遵循第 3 章中描述的拉普拉斯方程，其中所用到的一切推导在这里仍然适用。不过根据电荷密度与自由电荷的关系，我们可以把边值关系(式(4.26))简写成只依赖于自由电荷的函数：

$$\varepsilon_{上}E^{\perp}_{上} - \varepsilon_{下}E^{\perp}_{下} = \sigma_f \tag{4.40}$$

或者(以电势表示)：

$$\varepsilon_{上}\frac{\partial V_{上}}{\partial n} - \varepsilon_{下}\frac{\partial V_{下}}{\partial n} = -\sigma_f \tag{4.41}$$

其中电势在边界是连续的(式(2.34))：

$$V_{上} = V_{下} \tag{4.42}$$

⊖ 这对于表面电荷(σ_b)并不成立，显然的，边界处的电极化率 χ_e 并不是和位置无关的。

例题 4.7

如图 4.27 所示，一个线性均匀的球形电介质材料放置于一个均匀的外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中。求球内部的电场强度。

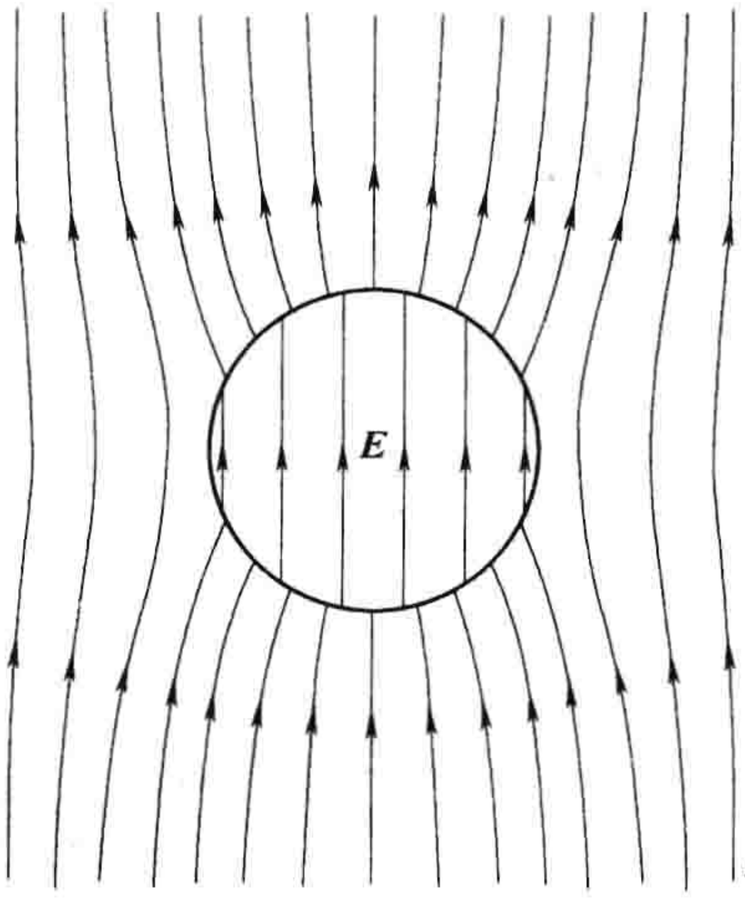


图 4.27

解：本题和例题 3.8 类似。在例题 3.8 中，一个不带电的导体球放置于一个均匀的外电场中，在这种情况下，在导体球内部由诱导电荷产生的电场与外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 完全抵消。对于一个球形电介质，束缚电荷产生的诱导电场只能部分抵消外电场。

我们的任务是根据拉普拉斯方程求出满足边界条件的 $V_{内}(r,\theta)$，$(r\leqslant R)$ 和 $V_{外}(r,\theta)$，$(r\geqslant R)$，边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)}\ V_{内} = V_{外}, && r = R \\ &\text{(ii)}\ \varepsilon\frac{\partial V_{内}}{\partial r} = \varepsilon_0\frac{\partial V_{外}}{\partial r}, && r = R \\ &\text{(iii)}\ V_{外} \to -E_0 r\cos\theta, && r >> R \end{aligned}\right\} \tag{4.43}$$

（第二个式子是根据式(4.41)得出的，因为在电介质表面没有自由电荷。）在电介质球内部，由式(3.65)有

$$V_{内}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{4.44}$$

在电介质球外部，由边界条件(iii)有

$$V_{外}(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{4.45}$$

边界条件(i)要求：

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) = -E_0 R\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{R^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

所以[⊖]

$$\left.\begin{aligned} A_l R^l &= \frac{B_l}{R^{l+1}}, l \neq 1 \\ A_1 R &= -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.46}$$

同时，由边界条件(ii)可得

$$\varepsilon_r \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1}\mathrm{P}_l(\cos\theta) = -E_0\cos\theta - \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}}\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

所以有

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r l A_l R^{l-1} &= -\frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}}, l \neq 1 \\ \varepsilon_r A_1 &= -E_0 - \frac{2B_1}{R^3} \end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$

解得

$$\left.\begin{aligned} &A_l = B_l = 0, l \neq 1 \\ &A_1 = -\frac{3}{\varepsilon_r + 2}E_0, B_1 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}R^3 E_0 \end{aligned}\right\} \tag{4.48}$$

⊖ 想到 $\mathrm{P}_1(\cos\theta) = \cos\theta$，每一个 l 前的系数都必须相等，因为可由乘以 $\mathrm{P}_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$，然后从 0 到 π 作积分，利用勒让德多项式的正交性证明之。

显然有

$$V_{内}(r,\theta) = -\frac{3E_0}{\varepsilon_r+2}r\cos\theta = -\frac{3E_0}{\varepsilon_r+2}z$$

因此,介质球内部的电场(令人惊奇的)为一个均匀电场:

$$\boldsymbol{E} = \frac{3}{\varepsilon_r+2}\boldsymbol{E}_0 \tag{4.49}$$

例题 4.8

如图 4.28 所示,假设 $z=0$ 平面以下充满电极化率为 χ_e 的均匀线性电介质材料。求在原点正上方距离为 d 处一个正电荷 q 所受到的力。

解:电介质表面即 xy 平面所产生的束缚电荷符号和 q 相反,所以电荷 q 所受的力应该为引力。(根据式(4.39),不存在体束缚电荷。)首先根据式(4.11)和式(4.30)我们可以计算出表面电荷密度:

$$\sigma_b = \boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = P_z = \varepsilon_0\chi_e E_z$$

式中,在 $z=0$ 处,E_z 为电介质内部总电场的 z 方向分量。这个电场是由电荷 q 产生的电场和束缚电荷产生的电场之和。根据库仑定律,电荷 q 产生的电场为

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r^2+d^2)}\cos\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

式中,$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 为距原点的距离。束缚电荷产生的电场的 z 分量为 $-\sigma_b/(2\varepsilon_0)$(参见 58 页脚注㊀)。这样我们得到

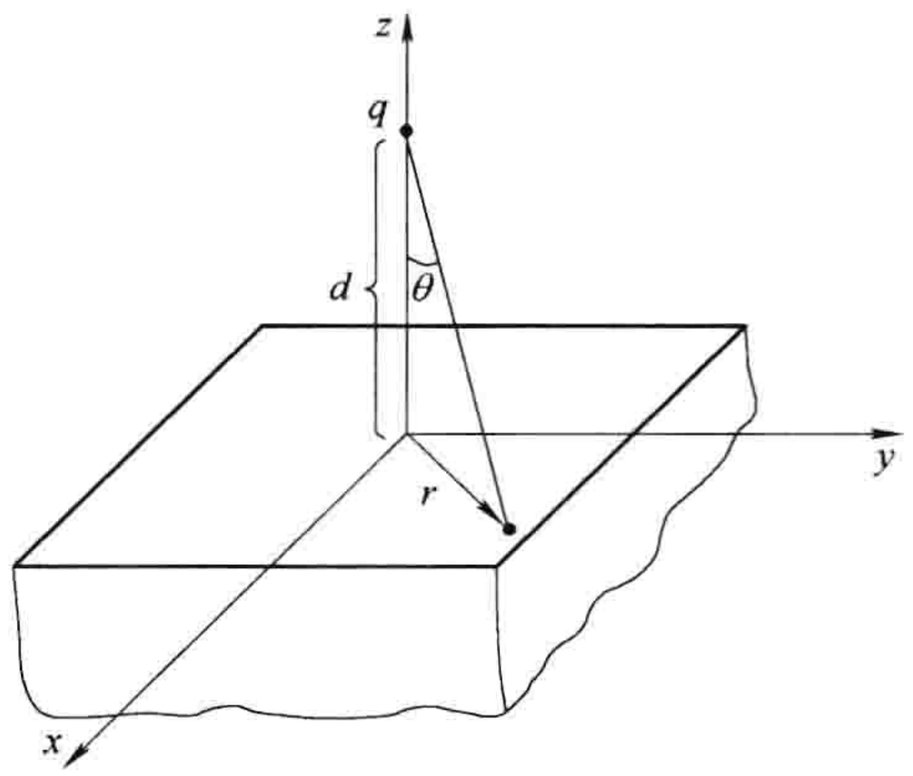


图　4.28

$$\sigma_b = \varepsilon_0\chi_e\left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{(r^2+d^2)^{3/2}} - \frac{\sigma_b}{2\varepsilon_0}\right]$$

解方程可以得出 σ_b:

$$\sigma_b = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)\frac{qd}{(r^2+d^2)^{3/2}} \tag{4.50}$$

除去因子 $\chi_e/(\chi_e+2)$,剩余的部分和一个无限大的导体平面在相同的条件下的结果一样(见(式(3.10))。[㊀]显然,总束缚电荷为

$$q_b = -\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+2}\right)q \tag{4.51}$$

当然,我们也可以直接积分求出 σ_b

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left(\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\right)\sigma_b\,da$$

但是,在导体平面的情况下,可用更简洁的镜像法来求解。的确,如果把电介质用一个在 $(0,0,-d)$ 处的镜像点电荷(q_b)替换掉的话,在 $z>0$ 的区域我们得到

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q_b}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right] \tag{4.52}$$

同时,在 $(0,0,d)$ 处的 $(q+q_b)$ 点电荷会在 $z<0$ 的区域产生电势:

㊀ 导体可以看做是一种 $\chi_e\to\infty$ 极限情况下的电介质。这可以用来检验一些公式,试着将它应用于式(4.5),式(4.6)和式(4.7)。

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q + q_b}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}}\right] \tag{4.53}$$

结合在一起，式(4.52)和式(4.53)表示的电势函数，满足(0,0,d)处点电荷 q 所满足的泊松方程，并在无穷远处趋近于零，在边界 $z=0$ 处连续，电势能的法向导数在边界处的不连续对应 $z=0$ 处的面电荷 σ_b：

$$-\varepsilon_0\left(\frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=0+} - \frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=0-}\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2}\right)\frac{qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

因此，这个电势就是满足我们问题要求的电势。特别地，电荷 q 所受的力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_b}{(2d)^2}\hat{\boldsymbol{z}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e + 2}\right)\frac{q^2}{4d^2}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{4.54}$$

在这里，我并不是想强调必须使用式(4.52)和式(4.53)，和其他镜像情况一样，我们用到这两个式子只是因为它们在这里可以很好地解决问题：它们满足泊松方程及边界条件。需要指出的是，找出一个问题的镜像解并不是一个单纯的依靠猜测的过程。至少有两个可以遵循的法则：(1)不能把镜像电荷放在要计算电势的区域里。((式4.52)描述 $z>0$ 区域的电势，镜像电荷放置在 $z=-d$；当计算 $z<0$ 区域的电势时，镜像电荷($q+q_b$)放置在 $z=d$。)(2)镜像电荷的电荷量必须与区域里的总电荷量相等。(这也是为什么我们用 q_b 代替 $z\leqslant 0$ 区域里的电荷，用($q+q_b$)代替 $z\geqslant 0$ 区域里的电荷)。

习题 4.22 一个非常长的圆柱形线性电介质材料放置在一个均匀的外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，求圆柱内部的电场强度。(圆柱半径为 a，电极化率为 χ_e，圆柱的轴线与 $\boldsymbol{E}_0$ 垂直。)

习题 4.23 按照以下近似步骤求处在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中的线性均匀介质球内部的电场强度(例题4.7)：第一步，假设电介质球内部的电场为 $\boldsymbol{E}_0$，利用式(4.30)得出这种假设下的极化强度 $\boldsymbol{P}_0$。$\boldsymbol{P}_0$ 生成它自己的电场 $\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_1$ 又使电介质产生极化强度 $\boldsymbol{P}_1$，进而又产生电场 $\boldsymbol{E}_2$，以此类推。这样最终电场强度为 $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots$，求和得出最终场强并与式(4.49)作比较。

习题 4.24 在一个半径为 a 的不带电导体球外面覆盖着很厚一层绝缘外壳(相对介电常数为 ε_r)，外壳半径为 b。将它们放置在一个均匀外场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，求绝缘电介质球壳内部的电场。

! **习题 4.25** 假设在例题 4.8 中 xy 平面上方充满电极化率为 χ_e' 的均匀电介质，求空间各处的电势。

4.4.3 介电系统的能量

对一个电容充电所需的功(式(2.55))为

$$W = \frac{1}{2}CV^2$$

如果电容极板之间充满电介质，电容会超过极板间为真空时的电容，根据例题 4.6，将增加一个相对介电常数的因子，

$$C = \varepsilon_r C_{vac}$$

显然，此时充电所需的功也增加相同的因子。理由非常清楚：为了达到给定的电势，极板上必须充以更多的(自由)电子，因为束缚电荷会部分抵消电容极板产生的电场。

在第 2 章我们推导出了任意静电荷系统的能量表达(式(2.45))：

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\,\mathrm{d}\tau \tag{4.55}$$

在由线性均匀电介质填充电容的情况下，能量式需要相应地变为

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \varepsilon_r E^2 \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau$$

为了证明此式，我们假设电介质材料位置固定，然后一点点地增加自由电荷。当 ρ_f 增加了 $\Delta\rho_f$ 时，电极化强度会改变，束缚电荷也随之改变。但是我们只需要计算自由电荷的增加所需要做的功：

$$\Delta W = \int (\Delta\rho_f) V \mathrm{d}\tau \tag{4.56}$$

因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_f$，$\Delta\rho_f=\nabla\cdot(\Delta\boldsymbol{D})$，其中 $\Delta\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{D}$ 的改变量，因此

$$\Delta W = \int [\nabla\cdot(\Delta\boldsymbol{D})] V \mathrm{d}\tau$$

由于

$$\nabla\cdot[(\Delta D)V] = [\nabla\cdot(\Delta\boldsymbol{D})]V + \Delta\boldsymbol{D}\cdot(\nabla V)$$

所以（分部积分）

$$\Delta W = \int \nabla\cdot[(\Delta\boldsymbol{D})V]\mathrm{d}\tau + \int(\Delta\boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau$$

上式第一项根据散度定理可化为一项面积分，对整个空间积分时为零可以略去。因此，所做的功为

$$\Delta W = \int(\Delta\boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau。 \tag{4.57}$$

到目前为止，我们的推导适用于任何电介质。现在，如果电容极板之间为线性电介质，即 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，对于无限小的电荷增量有

$$\frac{1}{2}\Delta(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\Delta(\varepsilon E^2) = \varepsilon(\Delta\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E} = (\Delta\boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{E}$$

所需做的功为

$$\Delta W = \Delta\left(\frac{1}{2}\int \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau\right)$$

当电荷量从零增加到最终电荷量，如预期的一样，做的总功是[㊀]

$$W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau \tag{4.58}$$

或许你会感到疑惑，为什么我们在第 2 章推导出的普适公式在有电介质存在的情况下会不适用，而需要用式(4.58)来替换呢？事实上，并不是说这两个式子里有一个是错的，而是因为这两个式子是针对不同的问题。区别是微妙的，为清楚起见，让我们先回到问题的出发点：系统的能量代表的是什么？答：它是构建系统所需要做的功。非常正确——但是在涉及电介质的情况下，我们有两个相当不同的方法来构建这样的过程：(1)我们用镊子把全部的电荷(自由电荷和束缚电荷)一个一个地放入它们的最终适当的位置。如果这就是所说的“构建系统”的话，那么式(4.55)就是系统存储的能量。但是注意，这个能量并不包括延伸和扭转电介质的分子所做的功(如果我们把正电荷和负电荷看做是由微小的弹簧连接起来的，那么就没有包括让正负电荷极化所引起的位移变化中需要做的功$\frac{1}{2}kx^2$)。[㊁](2)一开始电介质没有发生极化，然后我们一个一个引

㊀ 为什么我们不采用 2.4.3 小节中的简单方法，由公式 $W=\frac{1}{2}\int\rho_f V\mathrm{d}\tau$ 开始计算呢？这是因为一般情况下，这个公式是不真实的。对式(2.42)求导就会发现，这个公式只对总电荷适用。对于线性电介质，只能应用于自由电荷，这样做显然不是一个优势解法，事实上，从式(4.58)出发倒着推导会更简单。

㊁ “弹簧”本身可以是电中性的，但是如果 $\boldsymbol{E}$ 取为宏观电场的话，它仍然没有被包括到式(4.55)中。

入自由电荷，同时允许电介质随所引入的电荷而发生变化。如果“构建系统”指的是这样的过程（通常是这样的过程，因为自由电荷才是我们实际能摆布的东西），那么式(4.58)才是我们所需要的公式。在这种情形下，弹簧存储的能量也被包括进去，虽然不是直接的。因为对自由电子所施加的力会根据束缚电荷而变化。在我们放入自由电荷的过程中，自动地伸长了那些弹簧。也就是说，第二种过程中，系统的总能量包括三部分：自由电荷的静电能，束缚电荷的静电能，还有弹簧的能量，即

$$W_{总} = W_{自由} + W_{束缚} + W_{弹簧}$$

后两项大小相等，符号相反(在第二种过程中，束缚电荷一直处于平衡状态，因此对它们所做的净功为零)。这样，在第二种过程中，计算对自由电荷做的功 $W_{自由}$ 确实等于所做的总功 $W_{总}$。而在第一种过程中，因为只计算了 $W_{自由} + W_{束缚}$，就遗漏了 $W_{弹簧}$ 这一项。

顺便提及，有人会说式(4.58)也可以用来计算非线性电介质系统的总能量，但是这是错误的：在式(4.57)之后的推导必须作出线性电介质的假设。事实上，对于耗散系统，“系统存储的能量”这一个概念没有意义，因为所做的功不仅与最终状态有关，而且也与系统是如何到达最终状态有关。例如，如果分子弹簧有一定的摩擦，我们可以让弹簧伸长和收缩许多次后才达到系统的最终电荷分布状态，这样 $W_{弹簧}$ 就可以是任意大。特别是，如果把式(4.58)应用于极化冻结的驻极体，会得到完全没有意义的结果(见习题(4.27))。

习题 4.26 如图 4.29 所示，一个半径为 a，带电荷 Q 的导体球被一个电极化率为 χ_e 的线性电介质包裹，电介质的最大半径为 b。求这个系统的总能量(式(4.58))。

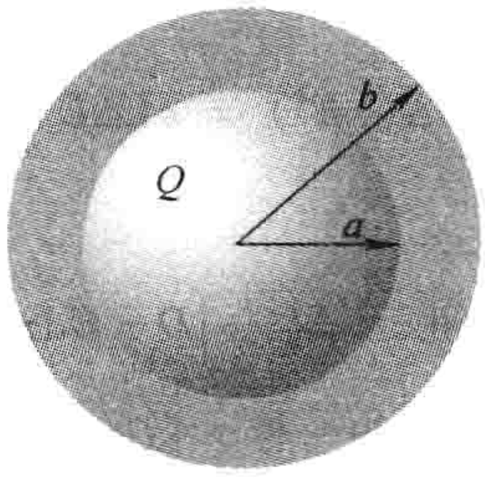


图 4.29

习题 4.27 分别用式(4.55)和式(4.58)计算一个有冻结的、均匀的极化强度为 $\boldsymbol{P}$ 的、半径为 R 的球体的能量 W(例题 4.2)。讨论两者的不同，并且说明哪一个(如果两者都是)才是系统真正的总能量。

4.4.4 作用在电介质上的力

像导体在外电场中会受到吸引一样(式(2.51))，电介质也同样——原因本质上是一样的：束缚电荷倾向于聚集在与其反号的自由电荷附近。但是计算电介质所受到的力却比较艰难。例如，考虑一个例子，一个线性电介质平板，部分地插入一个与其平行的电容器极板之间(见图 4.30)。一般情况下我们总是假设在电容极板之间电场为一个均匀的电场，外部电场为零。如果这假设合理的话，电介质所受的合力为零，因为每一处的电场都垂直于电介质平板。然而，事实上，在电容极板边缘的地方会有一个“**边缘电场**”存在，尽管它在多数情况下可以忽略，可是现在，起作用的正是这个边缘电场。(电场并不能在电容极板的边界处突变为零，如果是这样的话，图 4.31 中所示的闭合回路对 $\boldsymbol{E}$ 进行线积分将不等于零)。正是这个不均匀的边缘电场会把电介质往电容器内部牵引。

边缘电场的计算非常复杂，幸运的是，通过一个非常精巧的方法，我们无须进行这种计算。

假设系统的总能量为 W——当然，它与电介质板和电容器极板的重叠程度有关。如果将电介质板向外拉动一个无限小的距离 $\mathrm{d}x$，系统的能量改变即为这个移动所需要做的功：

$$\mathrm{d}W = F_{me}\mathrm{d}x \tag{4.59}$$

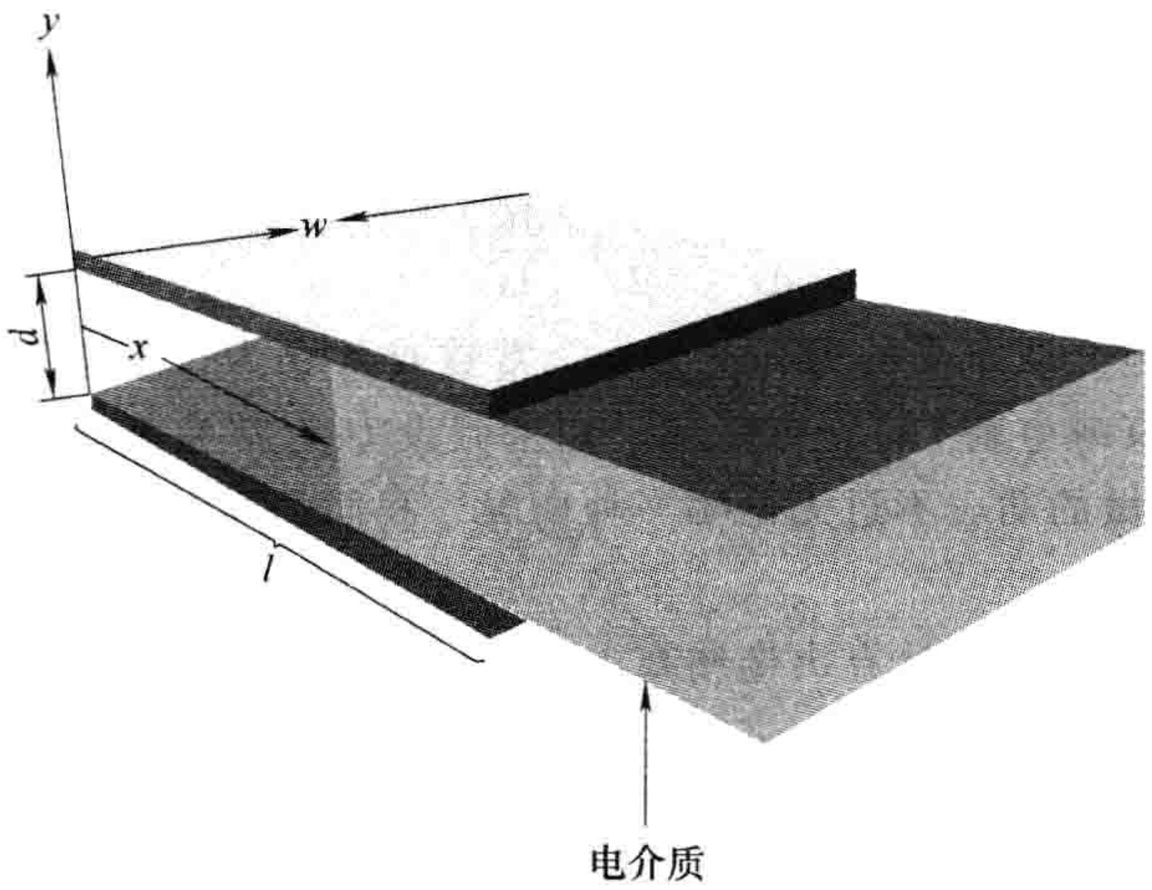


图　4.30

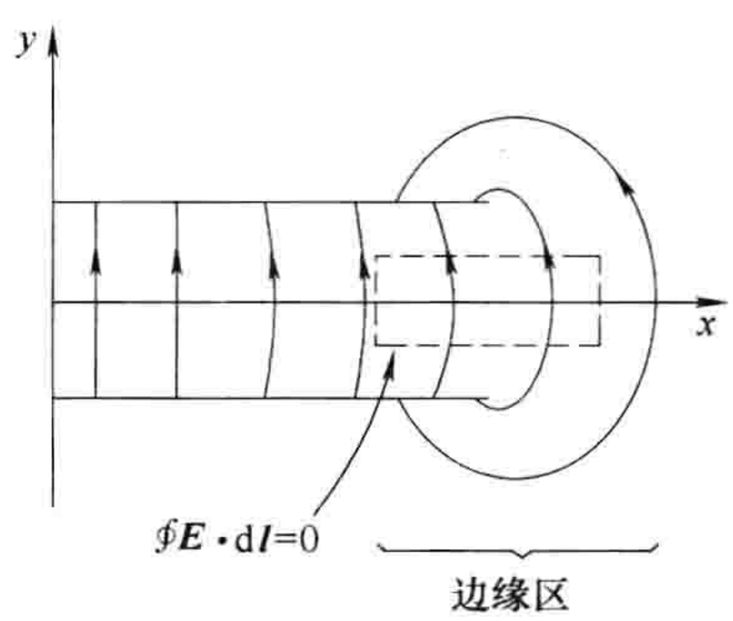


图　4.31

式中，F_{me}是用来抵消作用在电介质上的电场力的力：$F_{me} = -F$。因此，作用在电介质板上的电场力为

$$F = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} \tag{4.60}$$

已知，电容器所储存的总能量为

$$W = \frac{1}{2}CV^2 \tag{4.61}$$

在这个问题中，电容为

$$C = \frac{\varepsilon_0 w}{d}(\varepsilon_r l - \chi_e x) \tag{4.62}$$

式中，l 为电容极板的长度(见图 4.30)。假设在移动过程中电容极板上的总电荷量保持为常数($Q = CV$)。依照 Q 来计算我们有

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{4.63}$$

所以

$$F = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}V^2\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} \tag{4.64}$$

但是

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = -\frac{\varepsilon_0\chi_e w}{d}$$

因此

$$F = -\frac{\varepsilon_0\chi_e w}{2d}V^2 \tag{4.65}$$

(负号表示力沿着 x 轴的负方向，也就是说电介质被拉入电容器里边。)

在计算电介质所受的力时，一个常见的错误是使用式(4.61)(V 为常数)，而不是使用的式(4.63)(Q 为常数)。这样会得到

$$F = -\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx}$$

这错了一个负号。当然，我们可以给电容器接上电池使它维持一个恒定的电势。但是，在这种情况下，在电介质板的移动过程中，电池也会做功。代替式(4.59)，这时我们有

$$dW = F_{me}dx + VdQ \tag{4.66}$$

式中，VdQ 为电池所做的功。这样

$$F = -\frac{dW}{dx} + V\frac{dQ}{dx} = -\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} + V^2\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} \tag{4.67}$$

这与之前的式(4.64)完全一样。(请注意，电介质所受的力和 V 为一个常数或者 Q 为一个常数没有关系——它完全依赖于电荷(自由电荷和束缚电荷)的分布情况。如果假设 Q 为常数则会使计算过程更为简单，这时我们不用计算电池所做的功。不过无论哪一种情况，我们都可以计算出正确的力。)

注意，我们可以在完全不了解边缘电场的情况下计算出作用在电介质上的力，而这个边缘电场正是这个力的终极施加者。当然，整个计算是在静电场中进行的，$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$，因此边缘电场一定存在。我们并不是从完全的一无所知得出这些结论——只是聪明地利用了静电场理论的内在自洽。边缘电场中所存储的能量(计算中我们没有考虑)在电介质板的移动过程中保持不变；真正改变的是电容极板内部的能量，其中电场是均匀的。

习题 4.28 两个同轴金属圆柱管(内径为 a，外径为 b)竖直放置在一个充满油性电介质(电极化率为 χ_e，质量密度为 ρ)的桶中。如图 4.32 所示，内部的金属管电势恒为 V，外管接地。求在两管之间，油会上升的高度 h。

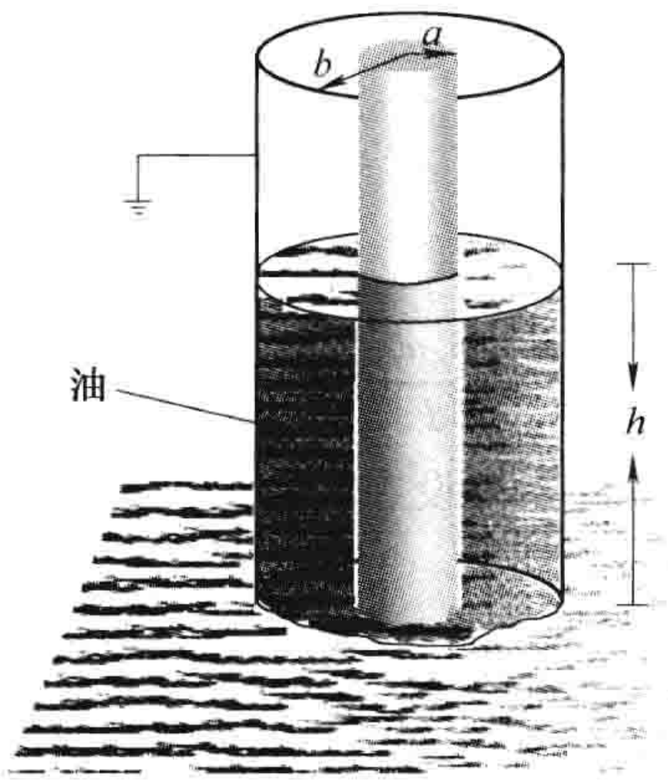


图 4.32

第 4 章补充习题

习题 4.29

(a) 对于习题 4.5 中的构型，计算 $\boldsymbol{p}_1$ 作用在 $\boldsymbol{p}_2$ 上的力和 $\boldsymbol{p}_2$ 作用在 $\boldsymbol{p}_1$ 上的力。结果与牛顿第三定律一致吗？

(b) 求作用在 $\boldsymbol{p}_2$ 上关于 $\boldsymbol{p}_1$ 的中心的总力矩。并与作用在 $\boldsymbol{p}_1$ 上关于相同点的总力矩相比较。[提示：将从(a)得到的答案与习题 4.5 结合起来计算。]

习题 4.30 如图 4.33 所示，一个沿 y 方向的电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 放置在两个很大的导体板的中间位置。每一个板与 x 轴有微小的夹角 θ，两板的电势保持为 $\pm V$。作用在 $\boldsymbol{p}$ 上的合力是什么方向？(这里无须计算，只

需给出一个定性的解释。）

习题 4.31　一个边长为 a 的立方体电介质中心位于原点，具有“冻结”的极化强度 $\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{r}$，式中 k 为常数。求出所有的束缚电荷，并且验证它们的和为零。

习题 4.32　点电荷 q 镶嵌在一个线性均匀介电球（电极化率为 χ_e，半径为 R）的中心。求电场强度、极化强度和束缚电荷 ρ_b，σ_b。球表面的总束缚电荷为多少？补偿负束缚电荷位于哪里？

习题 4.33　在两个不同介电常数的电介质的表面，电场线会发生弯折（见图 4.34）。如果在边界没有自由电荷，证明

$$\tan\theta_2/\tan\theta_1 = \varepsilon_2/\varepsilon_1 \tag{4.68}$$

[评注：式(4.68)类似于光学中的斯涅耳(Snell)折射定律。一个介电材料“凹透镜”会使电场会聚还是发散？]

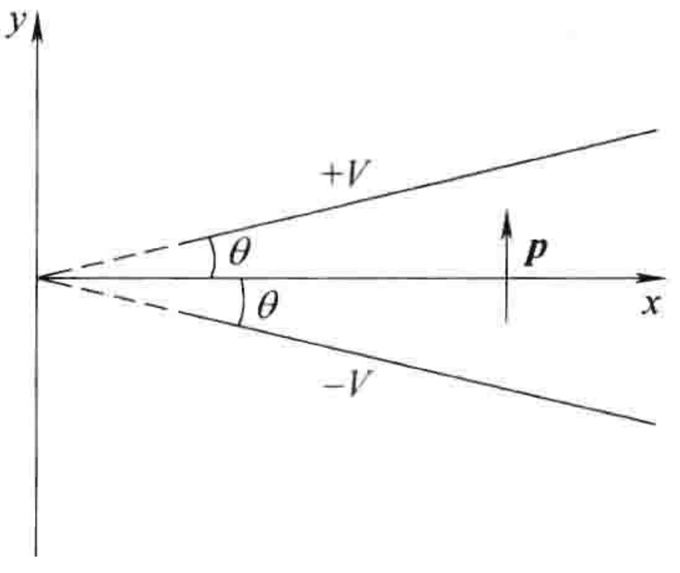


图　4.33

！ **习题 4.34**　一个点电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 镶嵌在一个线性均匀介电球（电极化率为 χ_e，半径为 R）的中心。求在球体内部和外部的电势能。

[答案：$\dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}\left(1+2\dfrac{r^3}{R^3}\dfrac{(\varepsilon_r-1)}{(\varepsilon_r+2)}\right)$，$(r\leqslant R)$；$\dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\dfrac{3}{\varepsilon_r+2}\right)$，$(r\geqslant R)$]

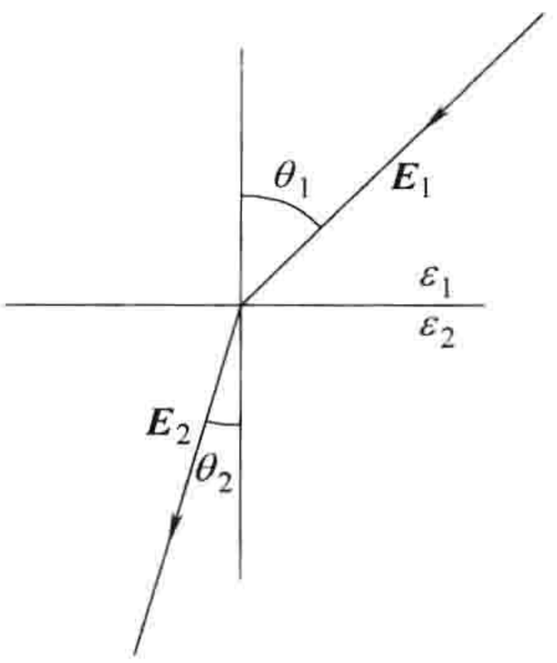


图　4.34

习题 4.35　证明下述唯一性定理：体积 v 内部有确定的自由电荷分布和一些介电材料，每一个电介质的介电常数给定。如果在 v 的边界 s 上的电势给定（在无穷远处，$V=0$ 是适当的），则体积 v 中每一处的电势可以唯一确定。[提示：$\nabla\cdot(V_3\boldsymbol{D}_3)$ 对整个体积 v 积分]

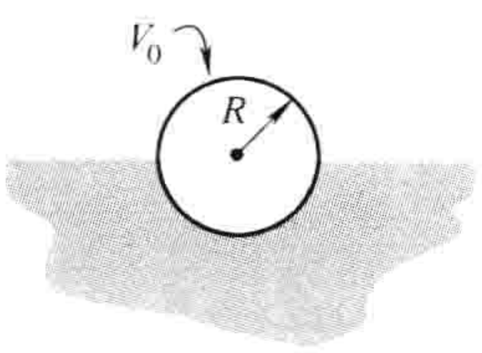
习题 4.36　如图 4.35 所示，一个导体球电势为 V，球体的一半镶嵌在电极化率为 χ_e 的充满 $z<0$ 区域的电介质中。验证每一处的电势和没有电介质时一样。步骤如下：

（a）作为 V_0，r，R 的函数，写出空间各处的电势 $V(r)$。然后求出电场强度、极化强度，束缚电荷以及球体表面的自由电荷分布。

（b）证明整体的电荷分布确实会产生电势 $V(r)$。

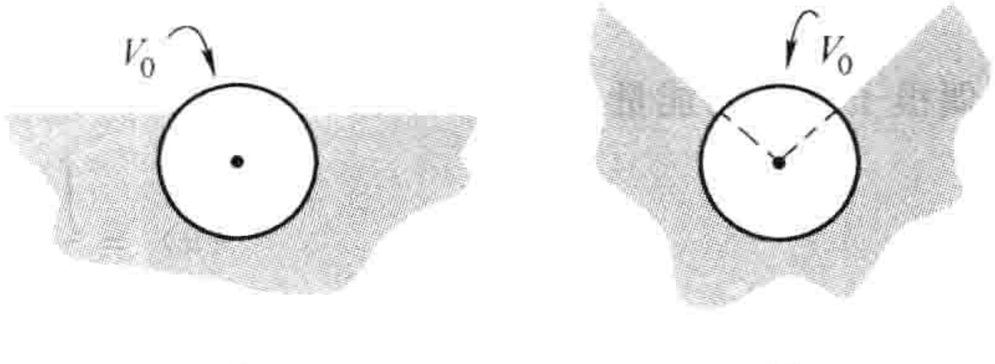
（c）引用习题 4.35 中的唯一性定理来证实这个结论。

（d）图 4.36 中所示的情况是否会产生同样的电势？如果不会请解释原因。



a)

图　4.35



b)

图　4.36

习题 4.37　根据式(4.5)，作用在一个电偶极子上的力为 $(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}$，所以作用在一个电介质物体上的合力为

$$\boldsymbol{F}=\int(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_{\text{ext}}\,\mathrm{d}\tau \tag{4.69}$$

[式中，$\boldsymbol{E}_{\text{ext}}$ 为除了电介质以外的所有物体产生的电场。或许你们会觉得即使采用总电场也是可以的，毕竟电介质不会对自己施加力。但是，因为电介质产生的电场在任何表面束缚电荷存在的地方都是不连续的，推导中会出现一个 δ 函数项。所以要么增加一个表面补偿电荷项或者就直接用 $\boldsymbol{E}_{\text{ext}}$，这样不会产生电场的不连续。]利用式(4.69)计算作用在一个很小的半径为 R、电极化率为 χ_e 的球形电介质上的力。小球放置在距离一个均匀的电荷线密度为 λ 的细线为 s 的位置。

！ **习题 4.38** 在线性的电介质中，极化密度矢量是和电场成比例的：$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}$。如果材料由原子组成(或者非极化分子)，那么每一个原子的感应偶极矩和电场的比例关系为 $\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E}$。问题：原子极化率 α 和电极化率 χ_e 的关系是什么？

由于 $\boldsymbol{P}$(单位体积内的偶极矩)是 $\boldsymbol{p}$(每个原子的偶极矩)的 N(单位体积内原子的数目)倍，$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = N\alpha\boldsymbol{E}$，你们可能会认为

$$\chi_e = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0} \tag{4.70}$$

事实上，如果密度很低，这个式子和实际相差得不是很大。但是仔细的研究会发现一些很微妙的问题，式(4.30)中的电场 $\boldsymbol{E}$ 是介质中总的宏观电场，然而，式(4.1)($\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{E}$)中的电场是除了这个原子自身以外所有的电场(孤立原子的极化率是在指定的外电场下定义的)；称这个场为 $\boldsymbol{E}_{\text{其他}}$。设想每一个原子占据的空间体积为半径为 R 的球，证明

$$\boldsymbol{E} = \left(1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}\right)\boldsymbol{E}_{\text{其他}} \tag{4.71}$$

利用上式推导出

$$\chi_e = \frac{N\alpha/\varepsilon_0}{1 - N\alpha/3\varepsilon_0}$$

或者

$$\alpha = \frac{3\varepsilon_0}{N}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right) \tag{4.72}$$

式(4.72)称为**克劳修斯-马苏锑**(Clausius-Mossotti)公式，或者，当它在光学中应用时，称为**洛伦兹-洛伦茨**(Lorentz-Lorenz)方程。

习题 4.39 对表 4.1 中的气体数据验证克劳修斯-马苏锑公式(式(4.72))(相对介电常数在表 4.2 中给出)(这里密度非常小，所以式(4.70)和式(4.72)几乎没有区别。对于实验数据验证克劳修斯-马苏锑公式的修正项，参见，例如，Purcell 编写的《电磁学》第一版，习题 9.28)[⊖]

！ **习题 4.40** 克劳修斯-马苏锑公式(习题 4.38)告诉你们怎样依照原子极化率 α 计算非极化物质的电极化率 χ_e。郎之万(Langevin)方程告诉你们怎样依据永久性分子偶极矩 p 去计算极化物质的电极化率。这里给出步骤：

(a) 外场 $\boldsymbol{E}$ 中偶极子的能量 $u = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$(式(4.6))；根据指向，范围从 $-pE$ 到 $+pE$。统计力学告诉我们当材料处于温度为 T 的平衡态时，一个分子具有能量 u 的概率正比于玻耳兹曼因子

$$\exp(-u/kT)$$

因此，偶极子的平均能量为

$$\langle u\rangle = \frac{\int u e^{-(u/kT)}\,du}{\int e^{-(u/kT)}\,du},$$

式中，积分从 $-pE$ 到 $+pE$。利用这种方法证明，单位体积内包含 N 个极化分子的极化强度矢量大小为

$$P = Np[\coth(pE/kT) - (kT/pE)] \tag{4.73}$$

这就是郎之万方程。作为 pE/kT 的函数草画出 P/Np。

(b) 注意在强场/低温情况下，实际上几乎所有的分子都成线状排列，而材料为非线性的。然而，一般情况下，kT 要比 pE 大得多。证明在这种情况下材料为线性的，根据 N，p，T 和 k(玻耳兹曼常数)计算材料的电极化率。计算 20℃水的电极化率，并和表 4.2 中的实验值进行对比。(水的偶极矩为 6.1×10^{-30}C·m) 这样的结果相差是比较大的，因为我们忽略了 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}_{\text{其他}}$ 的区别。对低密度气体符合得比较好，这是因为 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}_{\text{其他}}$ 的区别可以忽略。试着计算 100℃ 1atm 压强下的水蒸气。

⊖ E. M. Purcell, Electricity and Magnetism (Berkeley Physics Course, Vol. 2), (New York: McGraw-Hill, 1963).

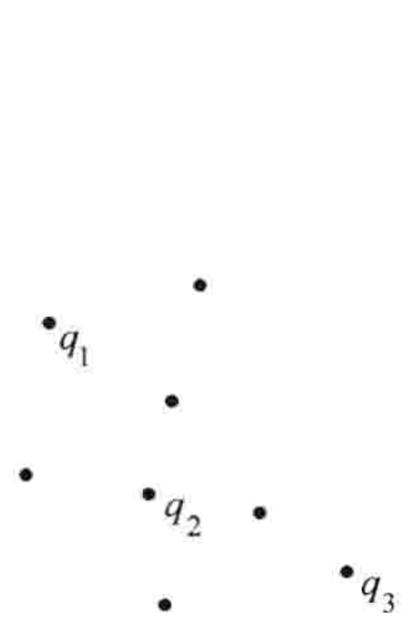
第5章　静　磁　学

5.1　洛伦兹力定律

5.1.1　磁场

回想经典电动力学的基本问题：我们有一个电荷的集合 q_1，q_2，q_3，…（“源”电荷），要计算这些电荷作用在另外一个电荷 Q（“检验”电荷）上的力（见图 5.1）。根据叠加原理，只需求出单个源电荷所施加的力，则总的力是所有个别力的矢量和。到现在为止，我们仅关注了其中最简单的问题——静电学，即源电荷是不动的（尽管检验电荷不必如此）。现在该考虑运动电荷之间的作用力了。

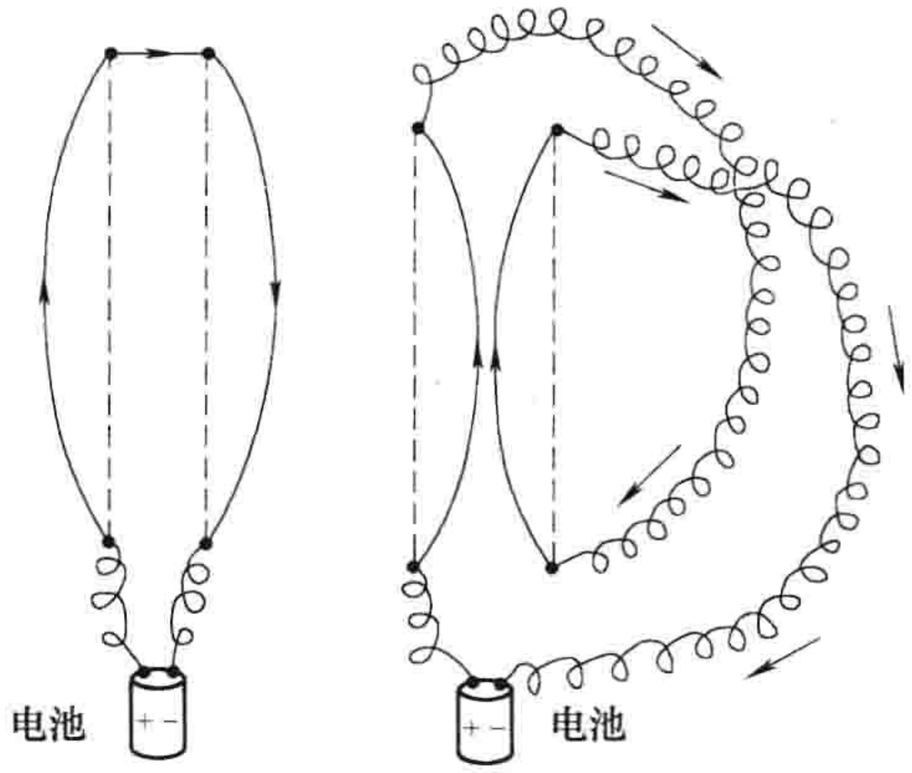
为了让你对将要讲的内容有点感知，假想我演示如下实验：两根导线挂在天花板上，相距几厘米；当通上电流时，电流由一根导线向上，再经另一根导线向下，这时两导线跳动远离——它们相互排斥（见图 5.2a）。你们如何解释这个现象？你们也许会认为是电池（或者其他驱动电流的设备）使导线带上电荷，力简单地起因于同类电荷间的排斥作用。但是这个解释是不正确的。我可以放一个检验电荷在这些导线附近，不会有力对它作用，因为导线实际上是电中性的。（电子的确沿导线运动——这也是电流的含义——但是在任一导线截段中静止的正电荷与运动的负电荷一样多）。而且，我还可以改变实验设置使两根导线中的电流都向上流动（见图 5.2b）。此时两导线是相互吸引的！



源电荷

检验电荷

图　5.1



a)　　b)

图　5.2

a）反向电流相互排斥　b）同向电流相互吸引

无论是平行电流的相互吸引，还是反平行电流的相互排斥，本质上都不是静电力。它是我们首次遇到的磁力。尽管一个静止电荷在它的周围只产生电场 $\boldsymbol{E}$，但运动的电荷还会另外产生磁场 $\boldsymbol{B}$。事实上，磁场更容易探测，在实际中——你所需要的仅是一个指南针。这些设备是如何工作的此时与我们的话题无关；只需知道指南针尖所指的方向就是所处局域磁场的方向就足够了。一般情况，它指向地球北极，是对地球磁场的反映。但在实验室内，典型的磁场可能会比地球磁场强几百倍，指南针确定的是这个磁场的方向。

现在如果你拿着一个小磁针并将其放在带电流的导线附近，你会发现一个很奇特的现象：磁场方向不是指向导线，也不是背离它，而是环绕着导线。实际上，如果你用右手握住导线，大拇指指向电流方向，其余四指环绕的方向即为磁场方向（见图 5.3）；这个磁场是如何对它附近的平行电流产生一个吸引力的呢？图 5.4 中第二根导线所处之处的磁场方向指向纸内，电荷运动的方向向上，而产生的力的方向向左。一个奇异的规则将用来解释这些方向问题。我将在下一节介绍这个规则。稍后，在 5.2 节，我们将先研究逻辑上的第一个问题，即怎样计算第一根导线的磁场。

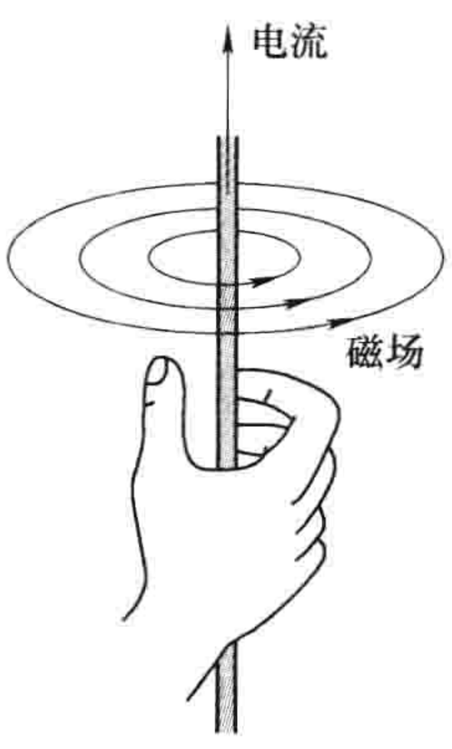


图 5.3

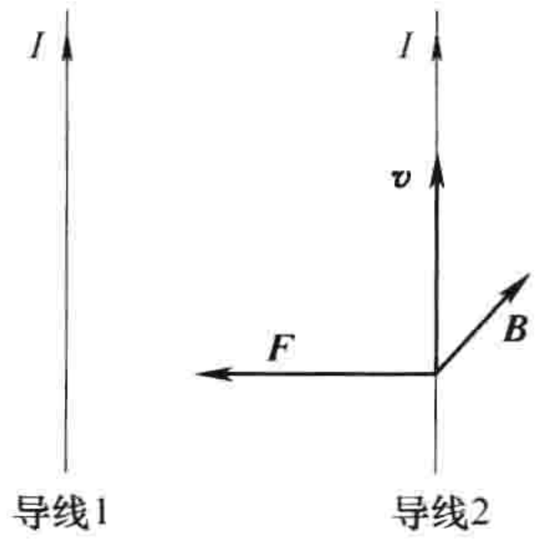


图 5.4

5.1.2 磁力

也许你们由图 5.4 已经感到，所给的方向符合叉积（矢量积）规则。事实上，作用在以速度$\boldsymbol{v}$在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动的电荷 Q 上的力为[⊖]

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{\text{mag}} = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})} \tag{5.1}$$

这就是洛伦兹力定律。在电场和磁场都存在的情况下，作用在 Q 上的总力为

$$\boxed{\boldsymbol{F} = Q[\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})]} \tag{5.2}$$

当然，我并没有试图推导出式(5.1)，它是理论的一个基本原理。它的正确性可由实验验证，例如在 5.1.1 小节里所描述的实验。从现在开始我们的主要工作就是计算磁场 $\boldsymbol{B}$(为此还涉及电场 $\boldsymbol{E}$，当源电荷运动时问题更加复杂)。在我们继续之前，很值得仔细研究一下洛伦兹力定律，它是一个独特的定律，会导致一些奇特的粒子轨道。

例题 5.1　回旋运动

带电粒子在磁场中的典型运动是圆轨道，磁力提供向心加速度。在图 5.5 中，一均匀磁场的方向指向纸面内；如果带电荷为 Q 的粒子，以速率 v 在磁场中作半径为 R 的逆时针圆周运动。由式(5.1)，磁力方向指向圆心，其量值大小恒定，为 QvB——正好维持粒子作匀速圆周运动：

$$QvB = m\frac{v^2}{R} \quad \text{或} \quad p = QBR \tag{5.3}$$

式中，m 是粒子质量；$p = mv$ 是它的动量。式(5.3)称为**回旋方程**，因为它描述了粒子的回旋运动—— 这是第一个近代粒子加速器的基础。它也是一种测量粒子动量的简单实验装置：把粒子放在给定的磁场中，测量粒子的轨道半径。事实上，这是一种标准的测量基本粒子动量的方法。顺便提及，我假设了带电粒子

⊖ 由于 $\boldsymbol{F}$ 和$\boldsymbol{v}$ 是矢量，$\boldsymbol{B}$ 实际上是一个赝（轴）矢量。

在磁场内的运动在垂直于磁场 $\boldsymbol{B}$ 的平面内，如果初始速度中有平行于磁场 $\boldsymbol{B}$ 方向的分量 $v_{\parallel}$，它不受磁场影响，粒子的运动将是一个螺旋线(见图 5.6)。半径依然由式(5.3)给出，但是其中的速度应是垂直于磁场 $\boldsymbol{B}$ 的分量 $v_{\perp}$。

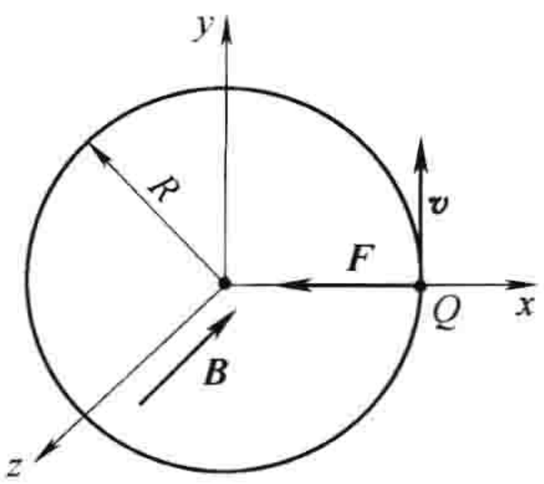


图　5.5

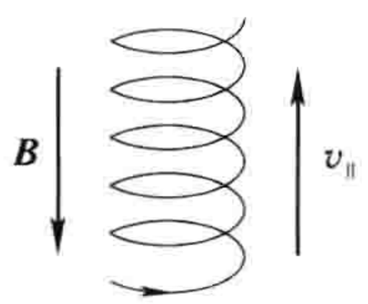


图　5.6

例题 5.2　圆滚线运动

如果我们引入一个均匀电场，其方向垂直于磁场，则粒子的轨迹更奇特。例如，设 $\boldsymbol{B}$ 沿 x 轴方向，$\boldsymbol{E}$ 沿 z 轴方向，如图 5.7 所示。让一个粒子由原点从静止开始释放，它的轨迹是什么?

解： 首先让我们定性地来考虑一下这个问题。起初，粒子是静止的，因此，磁场对它没有作用力，电场在 z 轴方向上提供电荷的加速度。当粒子有了速度，磁力使电荷弯曲向右运动。速度越快，磁力 F_{mag} 越大；最终，粒子的运动轨迹将弯向 y 轴方向。从这一点开始，电荷运动与电场力反向，它将开始减速——因此磁力也将减小，电场力再次起主导作用使粒子静止到 a 点，如图 5.7 所示。此后整个运动就是重复上面的过程，使粒子运动到 b，如此继续下去。

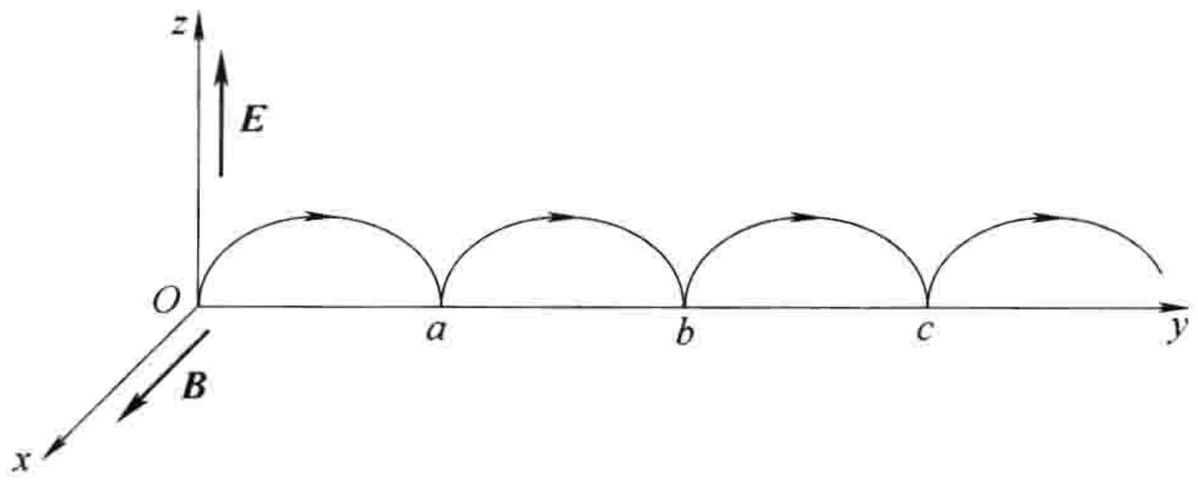


图　5.7

现在让我们定量地来计算一下。沿 x 轴方向上没有力，粒子在任意时刻 t 的位置可由矢量(0，$y(t)$，$z(t)$)描述；因此速度是

$$\boldsymbol{v} = (0, \dot{y}, \dot{z})$$

点号表示对时间的导数。这样

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{\boldsymbol{y}} - B\dot{y}\hat{\boldsymbol{z}}$$

应用牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = Q(E\hat{\boldsymbol{z}} + B\dot{z}\hat{\boldsymbol{y}} - B\dot{y}\hat{\boldsymbol{z}}) = m\boldsymbol{a} = m(\ddot{y}\hat{\boldsymbol{y}} + \ddot{z}\hat{\boldsymbol{z}})$$

或者，将 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 的分量分开处理，

$$QB\dot{z} = m\ddot{y}, QE - QB\dot{y} = m\ddot{z}$$

为方便起见，令

$$\omega \equiv \frac{QB}{m} \tag{5.4}$$

(这称为**回旋频率**，即在没有电场的情况下粒子以这个频率作圆周运动。)则运动方程可写为

$$\ddot{y} = \omega \dot{z}, \ddot{z} = \omega\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right) \tag{5.5}$$

它们的一般解为[⊖]

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + (E/B)t + C_3 \\ z(t) &= C_2 \cos\omega t - C_1 \sin\omega t + C_4 \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

粒子从初始速度($\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$)，初始位置($y(0) = z(0) = 0$)开始运动；这四个条件决定了常数 C_1，C_2，C_3 和 C_4：

$$y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin\omega t),\ z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos\omega t) \tag{5.7}$$

这个形式的答案意义不太明显，但是如果我们令

$$R \equiv \frac{E}{\omega B} \tag{5.8}$$

再通过三角函数关系 $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$ 消去正弦和余弦，我们发现

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2 \tag{5.9}$$

这是一个半径为 R 的圆的方程，圆心$(0,\ R\omega t,\ R)$以一个恒定速度

$$v = \omega R = \frac{E}{B} \tag{5.10}$$

沿 y 轴方向运动。粒子的运动就像一个以速度 v 运动的圆轮边缘上的一点的运动，此点的运动曲线称为**圆摆线**。注意：综合后的运动不是沿着 $\boldsymbol{E}$ 的方向，而是垂直于 $\boldsymbol{E}$ 的方向。

洛伦兹力定律式(5.1)的一个特点值得特别注意：

磁力不做功。

例如，如果带电粒子 Q 运动了 $d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v}dt$，那么它所做的功为

$$dW_{mag} = \boldsymbol{F}_{mag} \cdot d\boldsymbol{l} = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v}dt = 0 \tag{5.11}$$

这是因为$(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$的方向与$\boldsymbol{v}$ 的方向垂直，因此$(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$。磁力可以改变粒子运动的方向，但并不使其速度增加或减小。事实上，磁力不做功是洛伦兹力最基本、最直接的结论，但是在很多情况下，看起来显然是错误的结论，很多人还是犹豫不决。例如，磁力吊车从垃圾车吊起垃圾箱，显然某种东西在做功，似乎否定磁力做功是荒谬的。但是，不管荒谬与否，我们必须否定这种观点。在这种情况下，什么在做功是非常微妙的。后面将给出几个例子。

习题 5.1 一个带电为 q 的粒子入射到均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中(方向指向纸内)，磁场使粒子偏离原来的入射轨道，偏离距离为 d，如图 5.8 所示。粒子带正电荷还是负电荷？用参数 a、d、B 和 q 表示出粒子的动量。

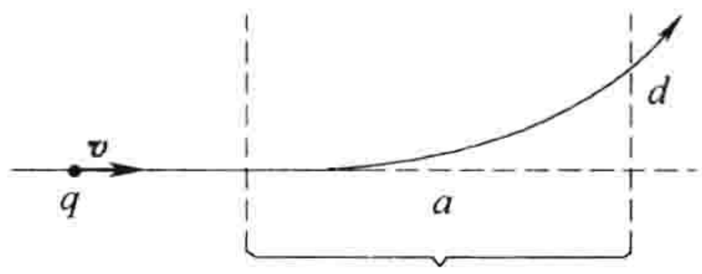


图 5.8

习题 5.2 求出并草画出例题 5.2 中粒子的轨迹，如果粒子从原点出发且初始速度为

⊖ 作为耦合的微分方程，很容易由对第一个方程求导一次，再用第二个消去 $\ddot{z}$ 的方法求解。

$$\text{(a)}\quad \boldsymbol{v}(0) = (E/B)\,\hat{\boldsymbol{y}},$$

$$\text{(b)}\quad \boldsymbol{v}(0) = (E/2B)\,\hat{\boldsymbol{y}},$$

$$\text{(c)}\quad \boldsymbol{v}(0) = (E/B)(\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}})$$

习题 5.3　在 1897 年，汤姆孙(Thomson)通过测量阴极射线的荷质比发现了电子(实际上为带电为 q，质量为 m 的电子束)，其方法如下：

(a) 首先他使粒子束通过均匀的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$(它们是相互垂直的而且都垂直于电子束)。调整电场直到粒子束无偏转，那么粒子的速度为多少呢？(用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 来表示)。

(b) 然后他撤掉电场，在磁场的单独作用下使粒子束偏转，测量轨道半径 R。若用参数 E、B 和 R 表示，那么粒子的荷质比(q/m)是什么？

5.1.3　电流

导线中的电流为单位时间内通过给定点的电荷。根据定义，向左运动的负电荷等价于向右运动的正电荷。这个规定反映了这样的物理事实，几乎所有涉及运动电荷的物理现象都依赖于电荷和速度的乘积——如果你同时改变 q 和 $\boldsymbol{v}$ 的正负号，你还是会得到同样的结果，因此，电流中的电荷是正还是负无关紧要。(洛伦兹力定律就是这样的例子，而霍尔效应(习题 5.39)则是一个著名的例外。)实际中，通常是带负电的电子在运动——与电流的流动方向相反。为了避免这些繁琐的小问题，我通常假设为正电荷在运动，事实上这种假设已经延续了一个世纪，或者是富兰克林(Franklin)建立了他不幸的惯例之后。[⊖]电流用库仑每秒来量度，或者**安培**(A)：

$$1\text{A} = 1\text{C/s} \tag{5.12}$$

一个线电荷 λ 在导线中以速度 v 运动，则导线电流为

$$I = \lambda v \tag{5.13}$$

因为长度为 $v\Delta t$ 的一段导线上，所带电荷为 $\lambda v\Delta t$，它在 Δt 的时间内通过导线中某点 P(见图 5.9)。电流实际上是一个矢量：

$$\boldsymbol{I} = \lambda \boldsymbol{v} \tag{5.14}$$

由于电流是沿导线流动的，所以人们并不在意电流的矢量特性。但是在描述电流在导线表面和体内的流动时，就必须留心了，为了术语的连贯性我们最好在开始就引入电流的矢量性。一个中性的导线，它含有与运动的负电荷同样多的静止正电荷，这些静止正电荷对电流是没有贡献的——式(5.1)中的电荷线密度 λ 仅对运动电荷而言。在正负电荷都参与运动的特别情况下，$\boldsymbol{I} = \lambda_+ \boldsymbol{v}_+ + \lambda_- \boldsymbol{v}_-$。

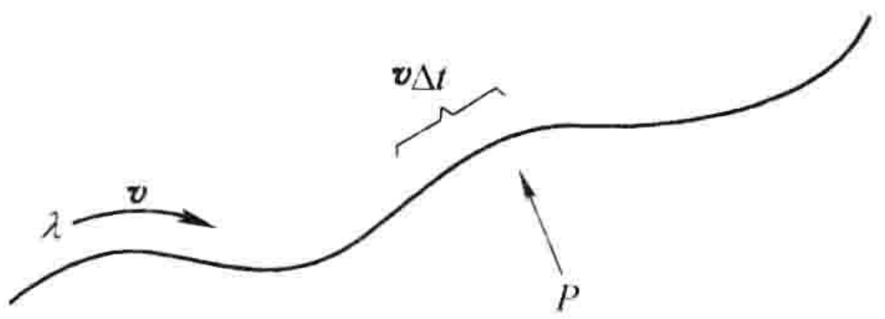


图　5.9

作用在一段载流导线上的磁力可表示为

$$\boldsymbol{F}_{\text{mag}} = \int (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,\mathrm{d}q = \int (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\lambda\,\mathrm{d}l = \int (\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B})\,\mathrm{d}l \tag{5.15}$$

只要 $\boldsymbol{I}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向相同，上式可写为

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{\text{mag}} = \int I(\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})} \tag{5.16}$$

通常情况下，电流 I 沿导线为常量，可以提到积分号外面：

⊖ 如果我们称电子为正电而质子为负电，就不会有这个问题。在富兰克林皮毛和玻璃棒的实验中，正负完全是任意的。

$$\boldsymbol{F}_{\text{mag}} = I\int(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}) \tag{5.17}$$

例题 5.3

一个矩形导线框，线框平面垂直于地面，下框边挂着一个质量为 m 的物体，上框边处在垂直纸面向里的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，如图 5.10 所示。问：在线圈中通入多大的电流 I，才能使向上的磁力与重力平衡(线框质量不计)？

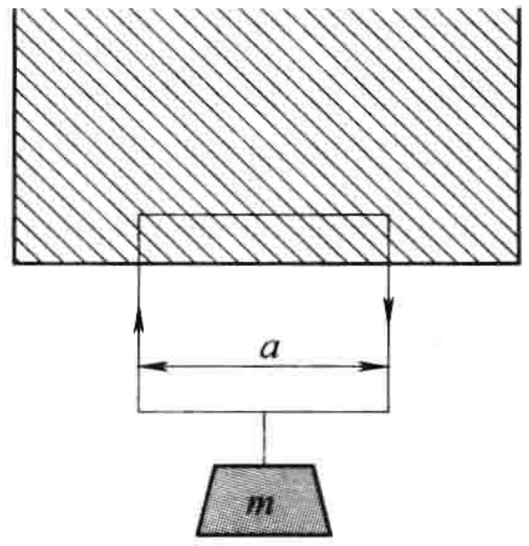


图 5.10

解： 首先电流必须顺时针流动，上框边所受磁力方向($\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$)才能向上。磁力大小为

$$F_{\text{mag}} = IBa$$

式中，a 为线圈的宽度。(两竖直边的磁力相互抵消。)为了使磁力 F_{mag} 平衡重力(mg)，我们必须使

$$I = \frac{mg}{Ba} \tag{5.18}$$

这样重物就可以悬挂在空中了。

如果我们增大电流将会发生什么？此时向上的磁力会超过向下的重力，线框会提着重物向上运动。某个事物做功了，认为是磁力做功似乎是很合理的。确实，我们可以写出

$$W_{\text{mag}} = F_{\text{mag}}h = IBah \tag{5.19}$$

式中，h 是线圈升高的距离。但是我们知道磁力是不做功的。这该如何解释呢？

实际上，当线圈开始上升时，导线中的电荷不再水平运动，除了与电流有关的水平分量 $w(I=\lambda\omega)$，它的速度中有一个向上的分量 u，即线框的速度(见图 5.11)。磁力总是垂直于速度的，现在不再竖直向上，而是向左偏转。磁力垂直于电荷的净位移(沿 $\boldsymbol{v}$ 的方向)，因此不对电荷 q 做功。它的确有一个竖直分量 qwB；作用在上边框电荷 λa 上的竖直力是

$$F_{\text{竖直}} = \lambda awB = IBa \tag{5.20}$$

(符号同前)；但现在它还有一个水平分量 quB，它与电流的方向相反。因此要维持电流的流动必须克服使电荷向后的磁力。

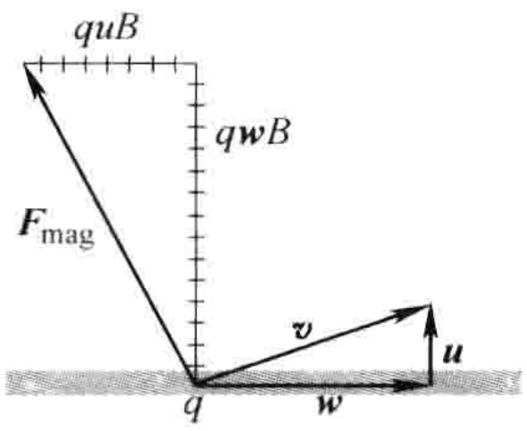


图 5.11

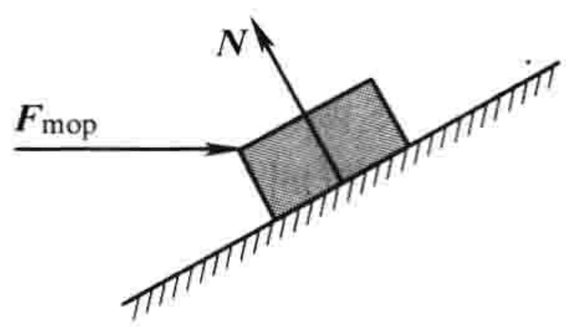


图 5.12

作用在线框上水平方向的合力显然为

$$F_{\text{水平}} = \lambda auB \tag{5.21}$$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内，电荷移动的距离(水平方向)为 $w\mathrm{d}t$，因此，外界(电池或发电机)对它所做的功为

$$W_{\text{电池}} = \lambda aB\int uw\mathrm{d}t = IBah$$

这就是我们在式(式 5.19)中想象成磁力做功所得到的精确结果。做功是在这个过程中吗？当然是的！那么是谁做的功呢？电池！那么磁力在这里的角色是什么呢？它使电池提供的水平力转变为线框和重物的竖直运动。

考虑一个力学类比也许是有帮助的。假设你在无摩擦的斜坡上用水平力推着一个木箱向上(见图 5.12)。支持力($\boldsymbol{N}$)不做功，因为它垂直于斜面。但是它确实有一个向上的竖直分量(事实上使木箱上升的

力），还有一个向后的水平分量（通过推力来克服）。是什么在做功？当然是你自己，然而你的力（水平推力）并不使木箱上升（至少不是直接的）。这里支持力扮演着同例题 5.3 中磁力同样的（关键）被动角色：尽管它本身不做功，它改变了主动作用（你或电池）的作用效果，从水平方向到竖直方向。

当电荷在面上流动时，我们用**面电流密度 $\boldsymbol{K}$** 来描述，定义如下：考虑一个宽度为 $\mathrm{d}l_\perp$、与电流平行的无限窄宽带（见图 5.13），如果带中的电流为 $\mathrm{d}\boldsymbol{I}$，则面电流密度为

$$\boldsymbol{K} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}}{\mathrm{d}l_\perp} \tag{5.22}$$

换句话说，$\boldsymbol{K}$ 就是垂直电流方向单位宽度上流过的电流。特别地，如果面电流密度为 σ，速度为 $\boldsymbol{v}$，则

$$\boldsymbol{K} = \sigma\boldsymbol{v} \tag{5.23}$$

一般地，$\boldsymbol{K}$ 是逐点变化的，反映 σ 和 $\boldsymbol{v}$ 的变化。面电流所受的磁力是

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{mag}} = \int(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\sigma\,\mathrm{d}a = \int(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}a \tag{5.24}$$

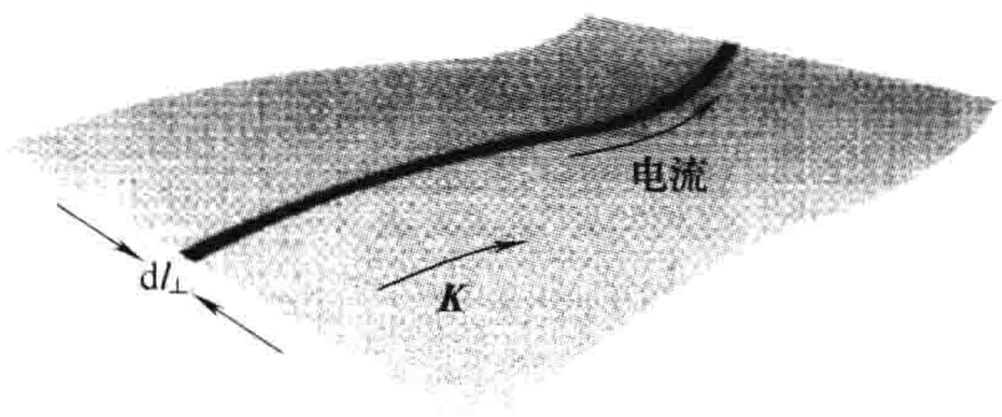


图　5.13

注意：正如 $\boldsymbol{E}$ 在有表面电荷时是不连续的，$\boldsymbol{B}$ 在有表面电流时也是不连续的。在式（5.24）中，要十分小心地使用平均场，如我们在 2.5.3 小节所做的那样。

当电荷的流动分布在三维空间时，我们用**体电流密度 $\boldsymbol{J}$** 来描述，其定义如下：考虑一个与电流方向平行、横截面为 $\mathrm{d}a_\perp$ 的无限小细管，管中电流为 $\mathrm{d}\boldsymbol{I}$（见图 5.14），则体电流密度为

$$\boldsymbol{J} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}}{\mathrm{d}a_\perp} \tag{5.25}$$

换言之，J 是垂直于电流方向上单位面积上流过的电流。如果电荷体密度为 ρ，速度为 $\boldsymbol{v}$，则

$$\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{v} \tag{5.26}$$

因此作用在它上的磁力为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{mag}} = \int(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\rho\,\mathrm{d}\tau = \int(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\,\mathrm{d}\tau \tag{5.27}$$

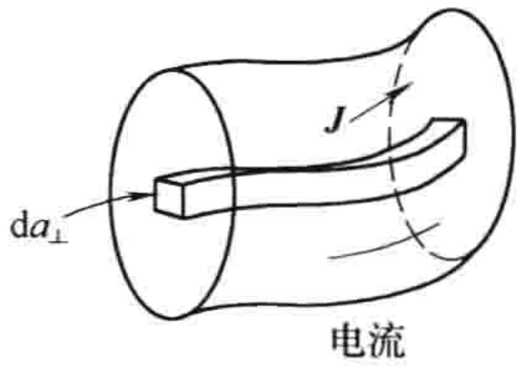


图　5.14

例题 5.4

（a）如图 5.15 所示，在横截面上均匀分布的电流 I 流过半径为 a 的圆柱导线，求体电流密度 J。

解： 垂直于电流方向的横截面为 πa^2，因此

$$J = \frac{I}{\pi a^2}$$

这很简单，因为电流密度是均匀的。

（b）假设导线中的电流密度正比于到中心轴的距离 s，

$$J = ks$$

（式中，k 为常数），求出导线中的总电流 I。

解： 因为 J 随 s 而变化，我们必须按式（5.25）进行积分。如图 5.16 所示，阴影部分的电流为 $J\mathrm{d}a_\perp$，$\mathrm{d}a_\perp = s\mathrm{d}s\mathrm{d}\phi$，因此

$$I = \int(ks)(s\mathrm{d}s\mathrm{d}\phi) = 2\pi k\int_0^a s^2\,\mathrm{d}s = \frac{2\pi k}{3}a^3$$

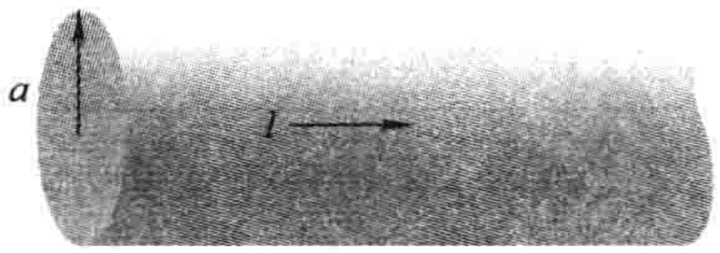


图 5.15

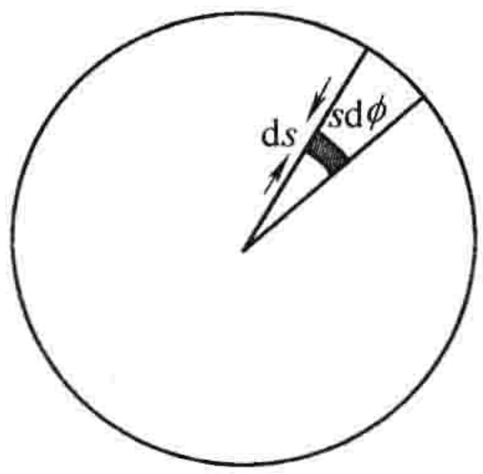


图 5.16

根据式(5.25)，通过表面 S 的电流为

$$I = \int_S J \mathrm{d}a_\perp = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{5.28}$$

(点积在这里比较巧妙地选出了 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的适当分量)，特别地，单位时间内流出体积 V 的总电荷为

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{J})\, \mathrm{d}\tau$$

因为电荷是守恒的，有多少电荷从表面流出(流入)，内部就有相应的电荷减少(增加)：

$$\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{J})\, \mathrm{d}\tau = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}\tau = -\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \mathrm{d}\tau$$

(负号表示电荷的流出对应 V 内电荷的减少。)由于它对任何体积都成立，所以

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \tag{5.29}$$

这就是局域电荷守恒的精确数学表达式，称为**连续性方程**。

为了以后查阅方便，我们总结一下在把方程写作点、线、面和体的电流时所发展起来的“词汇”。

$$\sum_{i=1}^{n} (\quad) q_i \boldsymbol{v}_i \sim \int_{线} (\quad) \boldsymbol{I} \mathrm{d}l \sim \int_{面} (\quad) \boldsymbol{K} \mathrm{d}a \sim \int_{体} (\quad) \boldsymbol{J} \mathrm{d}\tau \tag{5.30}$$

类似于 $q \sim \lambda \mathrm{d}l \sim \sigma \mathrm{d}a \sim \rho \mathrm{d}\tau$ 对应各种电荷分布，这对应从最初的洛伦兹力定律生成的式(5.15)、式(5.24)、式(5.27)。

习题 5.4 假设在某个区域磁场形式为

$$\boldsymbol{B} = kz\hat{\boldsymbol{x}}$$

(式中，k 为常数)。一个边长为 a 的方形线框，处在 yz 平面内，中心在原点，如果通入逆时针的电流 I(沿 x 轴向下)。求作用在线框的力。

习题 5.5 电流 I 沿半径为 a 的导线流动，

(a) 如果电流均匀分布在导线表面上，那么面电流密度 K 为多少？

(b) 如果体电流密度分布反比于到中心轴的距离，那么 J 为什么？

习题 5.6

(a) 一个留声机唱片表面有均匀的电荷面密度 σ。如果它以角速度 ω 旋转，那么离中心距离为 r 处的面电流密度 K 为多少？

(b) 电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的固体球内，中心在原点，并以恒定角速度 ω 绕 z 轴旋转。求出球内任意点 (r,θ,ϕ) 处的电流密度 $\boldsymbol{J}$。

习题 5.7 对空间体积 V 内的电荷和电流分布，证明

$$\int_V \boldsymbol{J} \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$$

式中 $\boldsymbol{p}$ 是总电偶极矩[提示:计算 $\int_V \nabla \cdot (x\boldsymbol{J})\,d\tau$]。

5.2 毕奥-萨伐尔定律

5.2.1 稳恒电流

静止的电荷可以产生不随时间变化的恒定电场,因此命名为静电学。[⊖]稳恒电流产生不随时间变化的恒定磁场;稳恒电流的理论称为**静磁学**。

静止电荷⇒静电场:静电学
稳恒电流⇒静磁场:静磁学

说到**稳恒电流**,我的意思是连续不息的流动,没有电流的改变,也没有电荷在任何地方的积累(有人称其为静电流,以我的看法这有点矛盾)。当然在实际情况中并没有恒定不变的电流,也没有静止不动的电荷。在这个意义上,静电学和静磁学描述的仅是存在于书本中的人造世界。但是,只要实际的涨落十分缓慢,它们就代表合适的近似。事实上,大部分通用的静磁学可以很好地应用于频率为 60Hz 的家庭电路。

注意,一个运动的点电荷不可能形成稳恒电流,如果它这一时刻在这里,那么它下一时刻会在别处。这在你们看来可能是一个小问题,但对于我而言却是一个十分头痛的问题。在静电学中,我可由静止点电荷这种简单情况,开始每个课题的讨论。然后,通过叠加原理,推广到任意分布的电荷体系。这个方法并不适用于静磁学,因为运动的点电荷不可能形成一个静场。我们不得不去处理扩展的电流分布,从开始到结束的过程会变得更加的复杂。

当导线通入稳恒电流时,它的大小 I 在导线中必须始终是一样的;否则,电荷必将在某处积累,那它将不再是稳恒电流。也就是说在静磁学中 $\partial\rho/\partial t = 0$,因此,连续性方程(式(5.29))变为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{5.31}$$

5.2.2 稳恒电流的磁场

一个稳恒线电流的磁场由**毕奥-萨伐尔定律**给出:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{I}\times\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}d\boldsymbol{l}' = \frac{\mu_0}{4\pi} I\int \frac{d\boldsymbol{l}'\times\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} \tag{5.32}$$

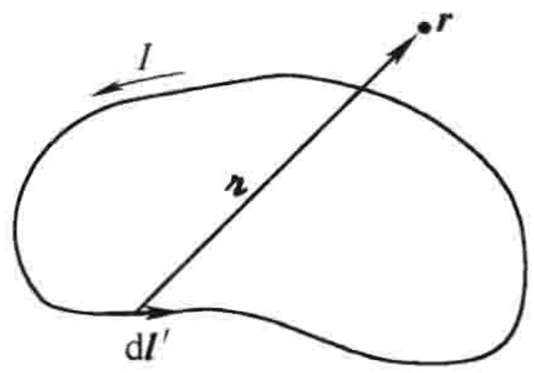


图 5.17

积分沿电流的路径,方向按电流流动的方向;$d\boldsymbol{l}'$是沿导线的长度元,同前一样,$\boldsymbol{\imath}$是由源指向点 $\boldsymbol{r}$ 的矢量(见图 5.17)。常数 μ_0 称为**真空磁导率**。[⊜]

$$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2} \tag{5.33}$$

$\boldsymbol{B}$ 的单位是牛顿每安培米(由洛伦兹力定律)或特斯拉(T):[⊝]

$$1\mathrm{T} = 1\mathrm{N/(A\cdot m)} \tag{5.34}$$

⊖ 实际上,电荷也不必一定是静止的,只要每一点处的电荷密度是常数就可以。例如,习题 5.6(b)中的球体产生的电场是 $(1/4\pi\varepsilon_0)(Q/r^2)\hat{\boldsymbol{r}}$,虽然球是转动的,但是 ρ 不依赖时间。

⊜ 这是一个精确的数,不是一个经验常数。它可用来(通过式(5.37))定义安培,安培又可定义库仑。

⊝ 同样的原因,在这种情况 CGS 单位(高斯)比 SI 单位更经常使用;$1\mathrm{T} = 10^4\,\mathrm{Gs}$。地球的磁场大约是 0.5Gs,一个十分强的实验室磁场,可达 10 000Gs。

作为静磁学的起点，毕奥-萨伐尔定律的地位相当于静电学中的库仑定律。的确，两个定律都有 $1/r^2$ 的依赖关系。

例题 5.5 一个长直导线，通有稳恒电流 I，求距离导线为 s 处的磁场(见图 5.18)。

解： 由图知($\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \hat{\boldsymbol{r}}$)指向纸面外，大小为

$$\mathrm{d}l'\sin\alpha = \mathrm{d}l'\cos\theta$$

由 $l' = s\tan\theta$，所以

$$\mathrm{d}l' = \frac{s}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

由 $s = r\cos\theta$，所以

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{s^2}$$

这样

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\frac{\cos^2\theta}{s^2}\right)\left(\frac{s}{\cos^2\theta}\right)\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \tag{5.35}$$

依据初角度 θ_1 和末角度 θ_2，式(5.35)给出了距一段直导线某点处的磁场(见图 5.19)。当然有限的一段导线自身并不能维持稳恒电流(当电荷到达顶端时，它将会流向哪里呢?)，但它可以是一个闭合电路的一段。式(5.35)只代表这段导线对整个磁场的贡献。在无限长直导线的情况下，$\theta_1 = -\pi/2$ 和 $\theta_2 = \pi/2$，我们得到

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \tag{5.36}$$

注意，B 是反比于到导线的距离的——正如无限长线电荷产生的电场一样。在导线下方的区域 $\boldsymbol{B}$ 的方向指向纸内，一般讲，磁场是“环绕”着导线的，符合右手螺旋定则(见图 5.3)。

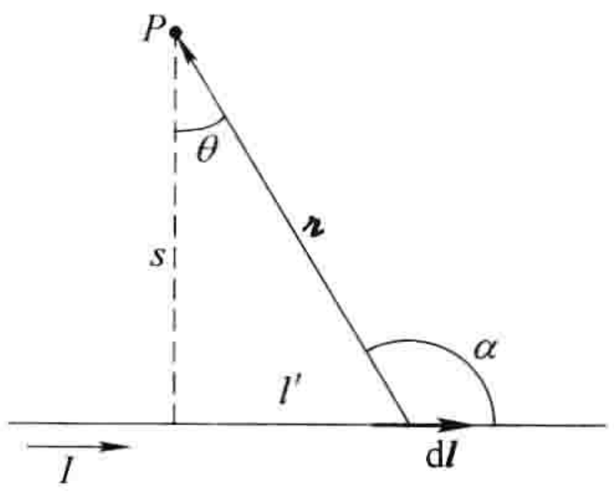


图 5.18

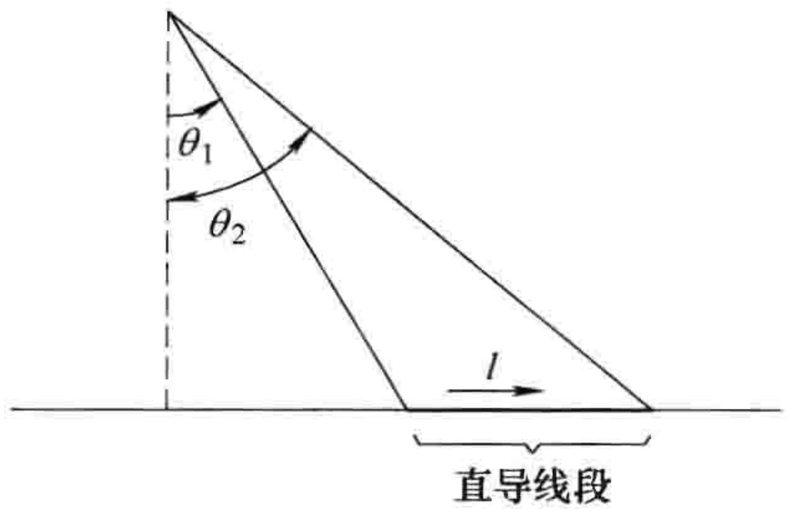


图 5.19

作为一个应用，让我们求出两根分别通有电流 I_1 和 I_2，相距为 d 的长直导线之间的吸引力(见图 5.20)。导线(1)在导线(2)处产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

它的方向指向纸内。洛伦兹力定律(适合线电流的形式，式(5.17)表明，导线(2)受到的力是指向导线(1)的，大小等于

$$F = I_2\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\right)\int \mathrm{d}l$$

不用惊奇，合力是无穷大的。但是单位长度的力为

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d} \tag{5.37}$$

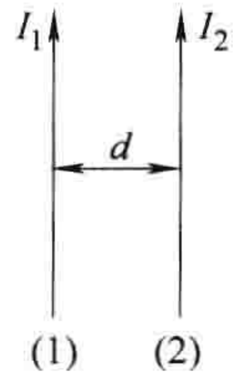


图 5.20

如果电流方向是反平行的(一个向上，另一个向下)，它们之间是相互排斥力——与 5.1.1 小节中的定性观察一致。

例题 5.6

半径为 R 的线圈，通有稳恒电流 I，找出距离其中心距离为 z 处的磁场。(见图 5.21)

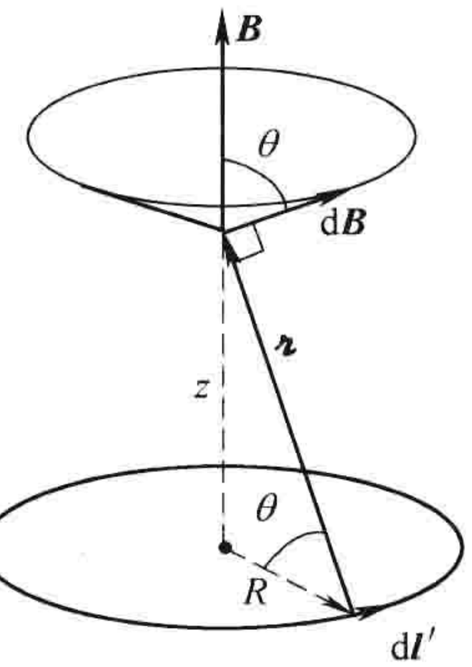


图　5.21

解： $d\boldsymbol{l}'$对磁场贡献 $d\boldsymbol{B}$，如图 5.21 所示。当对 $d\boldsymbol{l}'$沿线圈进行积分，$d\boldsymbol{B}$ 扫过一个圆锥面，故水平分量相互抵消，竖直分量之和为

$$B(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dl'}{r^2}\cos\theta$$

(注意，在本题中 $d\boldsymbol{l}'$和 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 是相互垂直的；$\cos\theta$ 因子投影出竖直分量。)现在，$\cos\theta$ 和 r^2 都为常数，$\int dl'$ 就是一个简单的圆周，$2\pi R$，所以

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \tag{5.38}$$

对于面电流和体电流，毕奥-萨伐尔定律分别为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}')\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}da' \text{ 和 } \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}d\tau' \tag{5.39}$$

由“词汇”式(5.30)，你可能会试图写出运动点电荷的相应公式：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \tag{5.40}$$

但这是错误的，[⊖]正如我前面提到的，点电荷不能形成稳恒电流，毕奥-萨伐尔定律仅仅适用于稳恒电流，而不能确定运动点电荷的磁场。

顺便提及，对磁场也可应用叠加原理，就像对电场一样。如果你有一个源电流的集合，那么总场就是各电流所产生场的矢量和。

习题 5.8

(a) 求出通有稳恒电流 I 的方形线框中心的磁场，设 R 为中心到边的距离。(见图 5.22)

(b) 求出通有稳恒电流 I 的 n 边规则多边形线框中心的磁场，同样 R 为中心到边的距离。

(c) 用 $n\to\infty$ 验证圆形线圈的情况。

习题 5.9　对图 5.23 所示的每个稳恒电流构型，求出 P 点处的磁场。

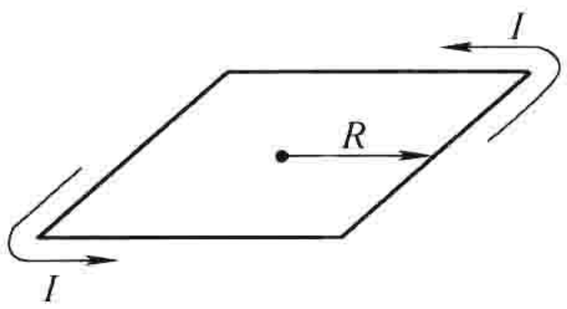


图　5.22

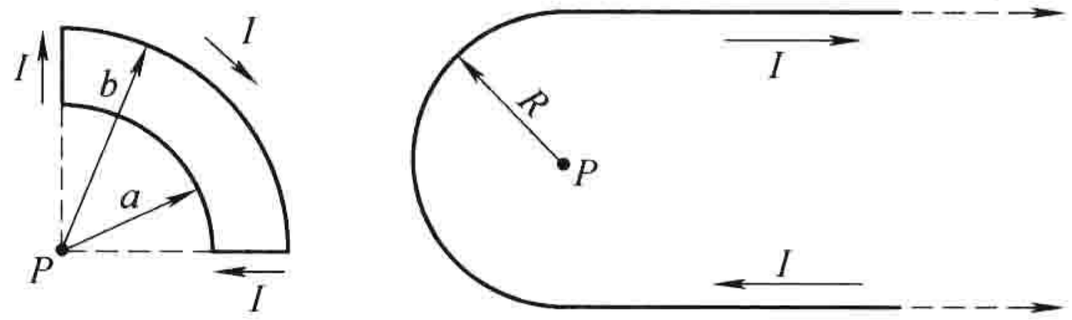


图　5.23

⊖　我大声清楚地强调要点：实际上，在辐射可以忽略的情况下(见例题 10.4)，式(5.40)对非相对论电荷($v << c$)近似成立。

应用矢量积规则(6)

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} \times \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{J}) - \boldsymbol{J} \cdot \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) \tag{5.47}$$

但是$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$，因为$\boldsymbol{J}$与不带撇的坐标$(x, y, z)$无关，而且$\nabla \times (\hat{\boldsymbol{r}}/r^2) = 0$(见习题1.62)，所以

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0} \tag{5.48}$$

显然，磁场的散度为零。

对式(5.45)求旋度，可以得到

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\boldsymbol{J} \times \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) \mathrm{d}\tau' \tag{5.49}$$

同样，我们的方法是应用适当的矢量积规则把被积函数展开——现在是积规则(8)：

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{J} \times \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) = \boldsymbol{J} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) - (\boldsymbol{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \tag{5.50}$$

(我已经去掉了含有$\boldsymbol{J}$的散度的项，因为$\boldsymbol{J}$不依赖于x，y，z)如我们将在下面看到的那样，式(5.50)右边的第二项的积分为零，第一项涉及我们在第1章遇到的散度问题(式(1.100))：

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{5.51}$$

这样

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') 4\pi \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau' = \mu_0 \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$$

这证实了式(5.44)并不仅局限于直线电流，而在静磁学中普遍成立。

不过，要使我们的推导完整，我们还必须验证式(5.50)中右边第二项的积分为零。因为散度算子仅作用在$\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$上，我们可将∇转换为∇'，代价是一个负号的出现[㊀]

$$-(\boldsymbol{J} \cdot \nabla) \left(\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) = (\boldsymbol{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \tag{5.52}$$

考虑x坐标分量

$$(\boldsymbol{J} \cdot \nabla') \left(\frac{x - x'}{r^3} \right) = \nabla' \cdot \left[\frac{(x - x')}{r^3} \boldsymbol{J} \right] - \left(\frac{x - x'}{r^3} \right) (\nabla' \cdot \boldsymbol{J})$$

(利用了积规则(5))。由于对稳恒电流的$\boldsymbol{J}$的散度为零(式(5.31))，因此

$$\left[-(\boldsymbol{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right]_x = \nabla' \cdot \left[\frac{(x - x')}{r^3} \boldsymbol{J} \right]$$

所以此项对积分式(5.49)的贡献可以写为

$$\int_V \nabla' \cdot \left[\frac{(x - x')}{r^3} \boldsymbol{J} \right] \mathrm{d}\tau' = \oint_S \frac{(x - x')}{r^3} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}' \tag{5.53}$$

(∇向∇'的转换使得我们可进行分部积分)，但是我们应对哪个区域进行积分呢？它是毕奥-萨伐尔定律中出现的空间区域——它足够大，以包括所有的电流。如果你愿意，可以以一个更大的空间；只不过在外面的区域$\boldsymbol{J} = 0$，因此它对积分是没有贡献的。很关键的一点是：边界上的电流为零(所有电流都安全地处在内部)，因此，对表面的积分式(5.53)为零[㊁]。

㊀ 这里要点是$\boldsymbol{r}$仅依赖于坐标差，而$(\partial/\partial x) f(x - x') = -(\partial/\partial x') f(x - x')$。

㊁ 如果$\boldsymbol{J}$扩展到无限远(如在无限长直导线情况下)，面积分仍然为零，不过分析时需要小心仔细。

以上假设了积分路径只环绕导线一周；如果它环绕两周，ϕ 角度将从 0 到 4π，如果积分路径不包含电流，从 ϕ_1 到 ϕ_2，然后再从 ϕ_2 到 ϕ_1，则 $\int d\phi = 0$（见图 5.28）。

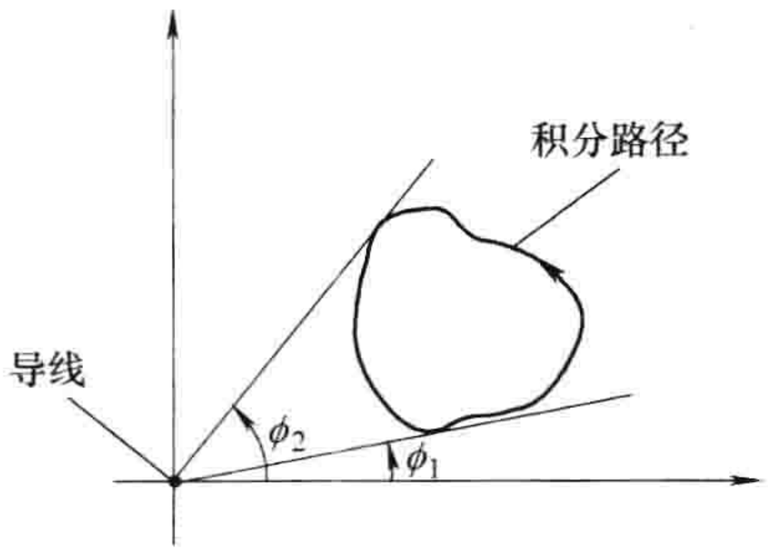


图　5.28

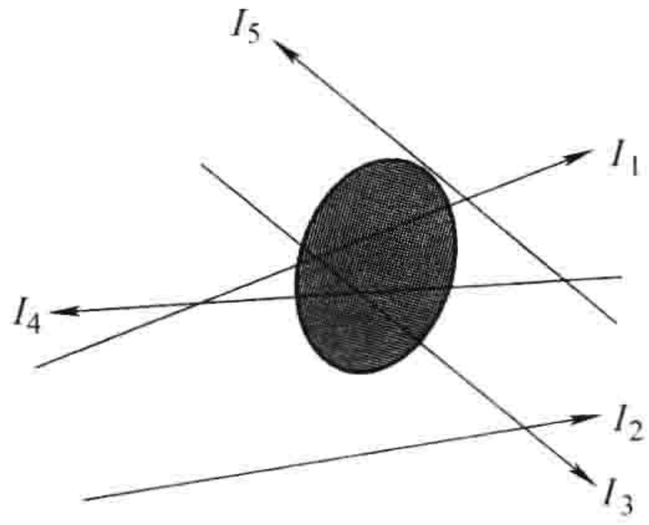


图　5.29

现在假设我们有许多直导线，穿过积分路径的电流贡献为 $\mu_0 I$，路径外面的导线贡献为零，如图 5.29 所示，则积分结果为

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{enc} \tag{5.42}$$

式中，I_{enc} 表示所有被积分路径环绕着的电流之和。如果流动电荷用体电流密度 $\boldsymbol{J}$ 来表示，则

$$I_{enc} = \int \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{a} \tag{5.43}$$

积分是对闭合路径所围成的面积进行的。利用斯托克斯定理，式(5.42)可写为

$$\int (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{a} = \mu_0 \int \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{a}$$

因此

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{5.44}$$

我们用最简单的方法得到了 $\boldsymbol{B}$ 的旋度的一般表示式。但是一个严重缺陷是我们的推导是基于无限长直电流及它们的组合。大多数的电流构型不能由无限长直电流组合而成，我们也没有依据认为式(5.44)可应用于它们。因此，下一小节将从毕奥-萨伐尔定律出发给出 $\boldsymbol{B}$ 的散度和旋度的一个严格推导。

5.3.2　$\boldsymbol{B}$ 的散度与旋度

对一般情况下的体电流，毕奥-萨伐尔定律给出

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} d\tau' \tag{5.45}$$

它通过对电流 $\boldsymbol{J}(x', y', z')$ 分布的积分给出 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ 点处的磁场（见图 5.30）。我们最好把出现的每个物理量搞清楚。

$\boldsymbol{B}$ 是 (x, y, z) 的函数

$\boldsymbol{J}$ 是 (x', y', z') 的函数

$$\boldsymbol{\imath} = (x - x')\hat{\boldsymbol{x}} + (y - y')\hat{\boldsymbol{y}} + (z - z')\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$d\tau' = dx'dy'dz'$$

积分是对带撇的坐标进行的；而计算散度和旋度只考虑不带撇的坐标。

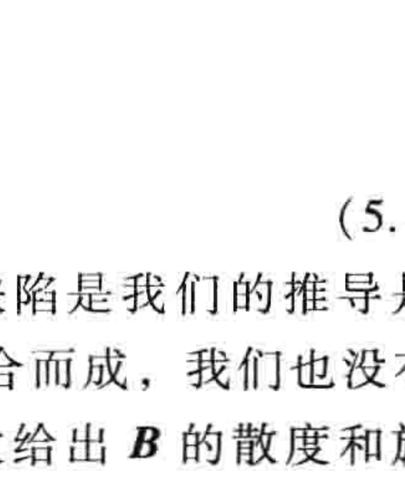


图　5.30

对式(5.45)求散度，我们得到

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} \times \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\right) d\tau' \tag{5.46}$$

应用矢量积规则(6)

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{J} \times \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{J}) - \boldsymbol{J} \cdot \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) \tag{5.47}$$

但是$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$，因为$\boldsymbol{J}$与不带撇的坐标$(x, y, z)$无关，而且$\nabla \times (\hat{\boldsymbol{r}}/r^2) = 0$(见习题1.62)，所以

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0} \tag{5.48}$$

显然，磁场的散度为零。

对式(5.45)求旋度，可以得到

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\boldsymbol{J} \times \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) \mathrm{d}\tau' \tag{5.49}$$

同样，我们的方法是应用适当的矢量积规则把被积函数展开——现在是积规则(8)：

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{J} \times \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) = \boldsymbol{J} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) - (\boldsymbol{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \tag{5.50}$$

(我已经去掉了含有$\boldsymbol{J}$的散度的项，因为$\boldsymbol{J}$不依赖于x，y，z)如我们将在下面看到的那样，式(5.50)右边的第二项的积分为零，第一项涉及我们在第1章遇到的散度问题(式(1.100))：

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{5.51}$$

这样

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') 4\pi \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau' = \mu_0 \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$$

这证实了式(5.44)并不仅局限于直线电流，而在静磁学中普遍成立。

不过，要使我们的推导完整，我们还必须验证式(5.50)中右边第二项的积分为零。因为散度算子仅作用在$\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$上，我们可将∇转换为∇'，代价是一个负号的出现[⊖]

$$-(\boldsymbol{J} \cdot \nabla) \left(\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right) = (\boldsymbol{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \tag{5.52}$$

考虑x坐标分量

$$(\boldsymbol{J} \cdot \nabla') \left(\frac{x - x'}{r^3} \right) = \nabla' \cdot \left[\frac{(x - x')}{r^3} \boldsymbol{J} \right] - \left(\frac{x - x'}{r^3} \right) (\nabla' \cdot \boldsymbol{J})$$

(利用了积规则(5))。由于对稳恒电流的$\boldsymbol{J}$的散度为零(式(5.31))，因此

$$\left[-(\boldsymbol{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \right]_x = \nabla' \cdot \left[\frac{(x - x')}{r^3} \boldsymbol{J} \right]$$

所以此项对积分式(5.49)的贡献可以写为

$$\int_V \nabla' \cdot \left[\frac{(x - x')}{r^3} \boldsymbol{J} \right] \mathrm{d}\tau' = \oint_S \frac{(x - x')}{r^3} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}' \tag{5.53}$$

(∇向∇'的转换使得我们可进行分部积分)，但是我们应对哪个区域进行积分呢？它是毕奥-萨伐尔定律中出现的空间区域——它足够大，以包括所有的电流。如果你愿意，可以以一个更大的空间；只不过在外面的区域$\boldsymbol{J} = 0$，因此它对积分是没有贡献的。很关键的一点是：边界上的电流为零(所有电流都安全地处在内部)，因此，对表面的积分式(5.53)为零[⊖]。

⊖ 这里要点是$\boldsymbol{r}$仅依赖于坐标差，而$(\partial/\partial x) f(x - x') = -(\partial/\partial x') f(x - x')$。

⊖ 如果$\boldsymbol{J}$扩展到无限远(如在无限长直导线情况下)，面积分仍然为零，不过分析时需要小心仔细。

5.3.3　安培定理的应用

磁场 $\boldsymbol{B}$ 的旋度为

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}} \tag{5.54}$$

这称为**安培定理**(微分形式)。通过应用斯托克斯定理，可以将它转化为积分形式

$$\int (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \int \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

现在，$\int \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 是所有流过所围面的电流(见图 5.31)，叫做 I_{enc}(**安培闭合回路包围的电流**)。因此

$$\boxed{\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\mathrm{enc}}} \tag{5.55}$$

这就是安培定理的积分形式；它把式(5.42)推广到适用于任何稳恒电流。注意式(5.55)继承了斯托克斯定理中正负号的不确定性(见 1.3.5 小节)：积分路径是沿哪个方向？通过表面哪个方向代表“正”电流方向？其答案还是右手螺旋定则：如果你右手四指环绕的方向为积分路径的方向，则大拇指的方向为正电流的方向。

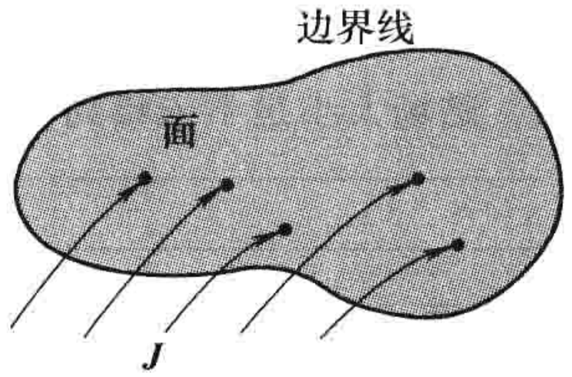


图　5.31

正如毕奥-萨伐尔定律在静磁学中的地位类似于库仑定律在静电学中的地位，安培定理的地位相当于高斯定理：

$$\begin{cases} \text{静电学：库仑} \rightarrow \text{高斯} \\ \text{静磁学：毕奥 - 萨伐尔} \rightarrow \text{安培} \end{cases}$$

特别是，当电流具有适当的对称性时，安培定理的积分形式提供了一种非常简洁有效的方法来计算磁场。

例题 5.7

一长直导线通有稳恒电流 I，求距离导线 s 处的磁场(见图 5.32)。(我们在例题 5.5 中用毕奥-萨伐尔定律求解过同样的问题。)

解： 由右手螺旋定则，我们知道 $\boldsymbol{B}$ 的方向是环绕着导线的。由对称性，在一个半径为 s、环绕电流的安培闭合回路上磁场 $\boldsymbol{B}$ 为常数。因此安培定理给出

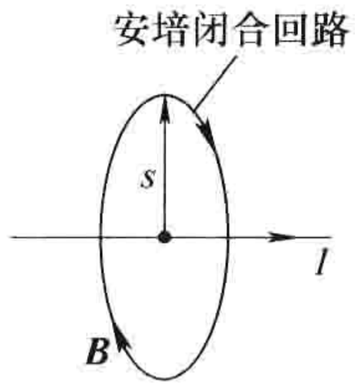


图　5.32

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B \oint \mathrm{d}l = B 2\pi s = \mu_0 I_{\mathrm{enc}} = \mu_0 I$$

或者

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

这和我们在前面(式(5.36))所得结果一样，但是现在的方法更加简洁。

例题 5.8

无限大的薄平板处于 xy 平面上，其面电流密度为 $\boldsymbol{K} = K\hat{\boldsymbol{x}}$(见图 5.33)，求出它的磁场。

解： 首先，$\boldsymbol{B}$ 的方向是什么？它有任何 x 方向的分量吗？否，毕奥-萨伐尔定律(式(5.39))告诉我们 $\boldsymbol{B}$ 是垂直于 $\boldsymbol{K}$ 的。那么 $\boldsymbol{B}$ 有 z 分量吗？同样是否。这可以这样证明，来自于 $+y$ 一边的窄带对 z 方向的贡献与来自相应的 $-y$ 一边的窄带对 z 方向的贡献相互抵消。但是有一个更好的论证：假设磁场方向背向平面，通过反转电流方向，我们可以使它指向平面(在毕奥-萨伐尔定律中，改变电流的正负号，可以改变磁场方

向)。但 $\boldsymbol{B}$ 的 z 分量不可能依赖于 xy 平面上的电流方向。(仔细考虑它!)因此 $\boldsymbol{B}$ 仅能有 y 分量，用你的右手检验一下能很快使你确信，磁场在平面上方指向左，而在平面下方指向右。

基于以上考虑，我们可以画一个矩形安培闭合回路，如图 5.33 所示。它平行于 yz 平面，上下两边离 xy 平面有相同的距离。应用安培定理，我们得到

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2Bl = \mu_0 I_{\mathrm{enc}} = \mu_0 K l$$

(一个 Bl 来自于上边，另一个 Bl 来自于下边)，因此 $B = (\mu_0/2)K$，或者，更严格地：

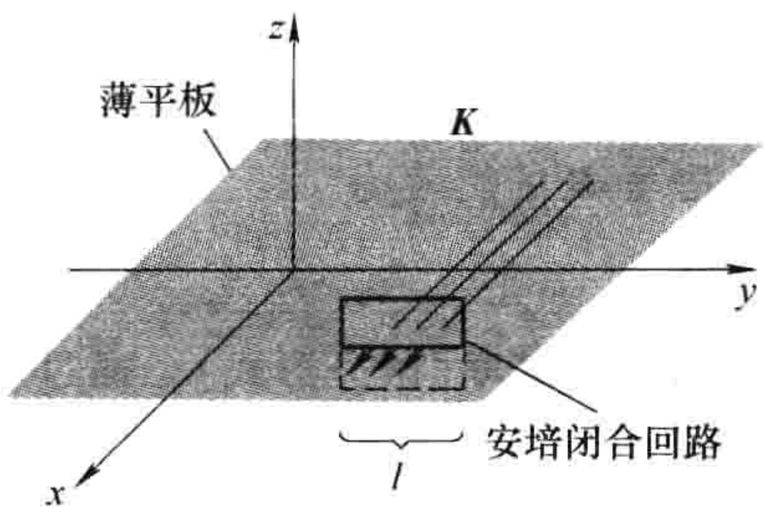


图 5.33

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} +(\mu_0/2)K\hat{\boldsymbol{y}}, & z < 0 \\ -(\mu_0/2)K\hat{\boldsymbol{y}}, & z > 0 \end{cases} \tag{5.56}$$

注意，磁场大小是不依赖到平面的距离的，这同均匀面电荷的电场一样(例题 2.4)。

例题 5.9

半径为 R 的密绕长螺线管线圈，单位长度上的匝数为 n，通有稳恒电流 I(见图 5.34)[密绕的要点是可以将每一匝都看做是一个圆线圈。如果这样使你感到不解(毕竟，无论线圈多么紧密，沿着螺线管轴线方向都有净电流 I)，将一片铝箔包裹在柱体外面来代替线圈，通入等价的均匀面电流 $K = nI$(见图 5.35)。或者做一个双向的缠绕，当线圈绕一段后——保持绕向不变——再原路返回，这样就消除了净纵向电流。但是，事实上，没有必要这样繁琐，因为螺线管内部的磁场很大(相对来说)，纵向电流的磁场至多是一个微小的修正。]

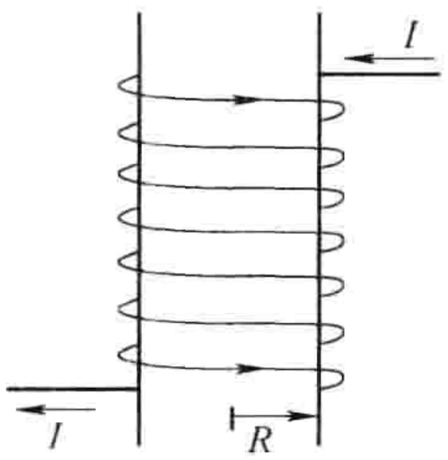


图 5.34

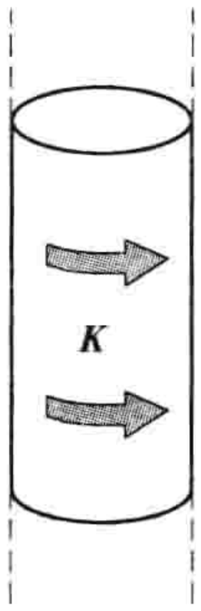


图 5.35

解： 首先，$\boldsymbol{B}$ 的方向是什么？它有径向分量吗？否，因为设 B_s 是正向的；当我们改变电流的方向，则 B_s 会变成负向的。但是转变电流 I 在物理上等价于使螺线管的上下颠倒，这显然不会改变径向磁场方向。那么“环绕”分量如何？否，因为在螺线管内部以轴线为圆心的一个圆上 B_ϕ 是常量(见图 5.36)，这样

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B_\phi(2\pi s) = \mu_0 I_{\mathrm{enc}} = 0$$

因为闭合回路内没有电流。

所以，密绕无限长螺线管内的磁场方向平行于中心轴线。由右手定则，我们预期在螺线管内部它的方向向上，在外部它的方向向下。另外，在很远处它将趋于零。根据这种考虑，我们对图 5.37 中的两个矩形闭合回路应用安培定理，路径 1 完全在螺线管外，它的一条边距离中心轴线为 a，另一条边距离中心轴线为 b。

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = [B(a) - B(b)]L = \mu_0 I_{\mathrm{enc}} = 0$$

因此

$$B(a) = B(b)$$

很显然，外部磁场并不依赖于离中心轴线的距离。但是我们知道当距离 s 足够大时磁场将为 0。因此在外部它必须在每处都为零。（这个令人惊讶的结论也可以由毕奥-萨伐尔定律得出，但计算较难，见习题 5.44。）

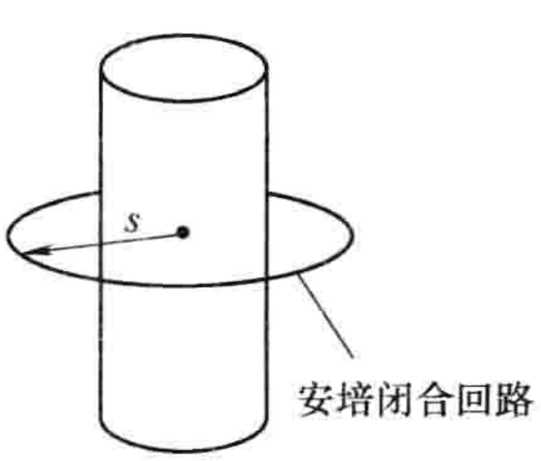


图　5.36

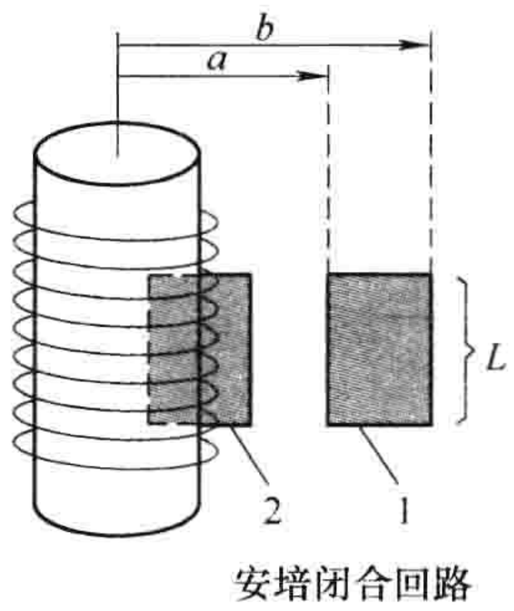


图　5.37

对路径 2，它的一半在螺线管内部，另一半在外部，安培定理给出

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = BL = \mu_0 I_{\mathrm{enc}} = \mu_0 nIL$$

式中，B 为螺线管内部的磁场。（由于外部磁场 $B=0$，右边的路径没有贡献。）结论：

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} \mu_0 nI\hat{\boldsymbol{z}}, & \text{螺线管内部} \\ 0, & \text{螺线管外部} \end{cases} \tag{5.57}$$

注意，内部的磁场是均匀的；在这个意义上，静磁学中的螺线管相当于静电学中的平行板电容器，一个简单产生强均匀场的装置。

像高斯定理一样，安培定理也总是正确的（对于稳恒电流），但并不总是很有用。仅当问题具有对称性时，可以将 $\boldsymbol{B}$ 拿到积分 $\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 外面时，才能根据安培定理来计算磁场。如果能这样做，这将是最简单的方法；当行不通时，你将不得不回到毕奥-萨伐尔定律。可应用安培定理的电流构型有

1. 无限长直电流（范例：例题 5.7）。
2. 无限大平面（范例：例题 5.8）。
3. 无限长螺线管（范例：例题 5.9）。
4. 环形线圈（范例：例题 5.10）。

其中最后一个构型安培定理应用得最奇妙和优美；下一个例题将讨论它。如在例题 5.8 和例题 5.9 看到的那样，难点在于找出磁场的方向（我们对这四个几何形状进行的，这是一劳永逸的事）；而实际使用安培定理的内容仅有一行。

例题 5.10

如图 5.38 所示，一个环形密绕螺线管线圈，每匝都可以认为是一个闭合圈。线圈的横截面形状无关紧要，为了简单我将其作为矩形，但它也可为圆形，或其他没有对称性的奇特形状，如图 5.39 所示。只要横截面形状沿环保持一样。这样的环产生的磁场方向无论在线圈内部还是外部都是沿环绕方向的。

证明： 根据毕奥-萨伐尔定律，$\boldsymbol{r}'$处的电流元对 $\boldsymbol{r}$ 处的磁场的贡献为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{\imath}}{\imath^3}\mathrm{d}l'$$

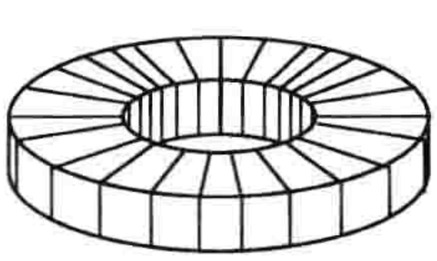


图 5.38

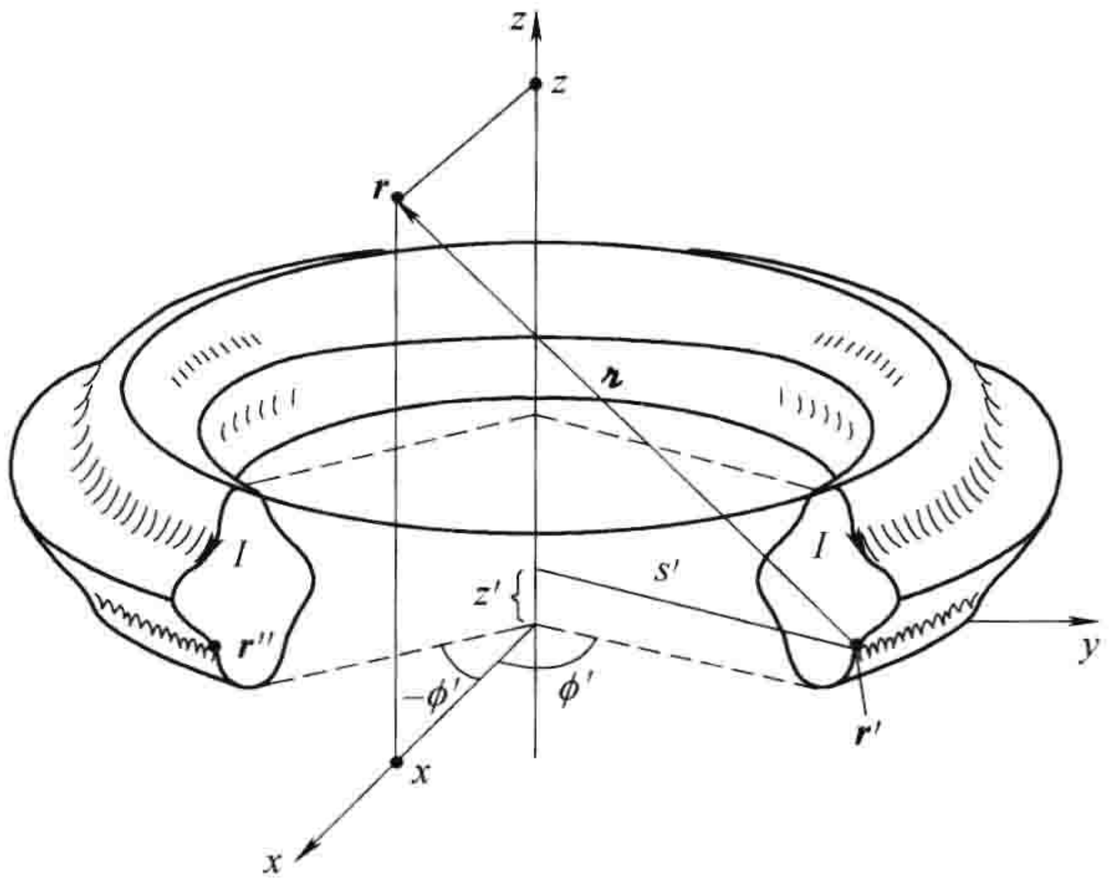


图 5.39

我们可将 $\boldsymbol{r}$ 取在 xz 平面内(见图 5.39),因此,它的直角坐标为$(x,\ 0,\ z)$,电流元的坐标为

$$\boldsymbol{r}' = (s'\cos\phi', s'\sin\phi', z')$$

则有

$$\boldsymbol{\imath} = (x - s'\cos\phi',\ -s'\sin\phi', z - z')$$

由于电流没有 ϕ 分量,所以 $\boldsymbol{I} = I_s\hat{\boldsymbol{s}} + I_z\hat{\boldsymbol{z}}$,或者(在直角坐标系)

$$\boldsymbol{I} = (I_s\cos\phi', I_s\sin\phi', I_z)$$

这样有

$$\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{\imath} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ I_s\cos\phi' & I_s\sin\phi' & I_z \\ (x - s'\cos\phi') & (-s'\sin\phi') & (z - z') \end{vmatrix}$$

$$= [\sin\phi'(I_s(z - z') + s'I_z)]\hat{\boldsymbol{x}} +$$

$$[I_z(x - s'\cos\phi') - I_s\cos\phi'(z - z')]\hat{\boldsymbol{y}} + [-I_s x\sin\phi']\hat{\boldsymbol{z}}$$

可以看出有一个对称的位置 $\boldsymbol{r}''$(见图 5.39),它与 $\boldsymbol{r}'$有着同样的 s', $\boldsymbol{\imath}$, $\mathrm{d}l'$, I_s 和 I_z,但 ϕ'变成负的。因为 $\sin\phi'$改变了符号,来自于 $\boldsymbol{r}'$和 $\boldsymbol{r}''$点处的电流元在 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向对磁场的贡献相互抵消,仅有 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 分量。因此,在 $\boldsymbol{r}$ 处的磁场是沿 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 方向的,在一般情况下,磁场是沿 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 方向的。证毕。

现在我们知道磁场是沿 $\boldsymbol{\phi}$ 方向的,其大小十分容易计算。将安培定理应用到以环中心轴为圆心、半径为 s 的圆:

$$B2\pi s = \mu_0 I_{\mathrm{enc}}$$

因此

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi s}\hat{\boldsymbol{\phi}}, & \text{圆环内部} \\ 0, & \text{圆环外部} \end{cases} \tag{5.58}$$

式中 N 为环上线圈的总匝数。

习题 5.13 半径为 a 的柱形导体内通有稳恒电流 I(见图 5.40),求出柱体内部和外部的磁场。如果:

(a) 电流均匀分布在导体的外表面。

(b) 电流密度 $\boldsymbol{J}$ 正比于距中心轴线的距离 s。

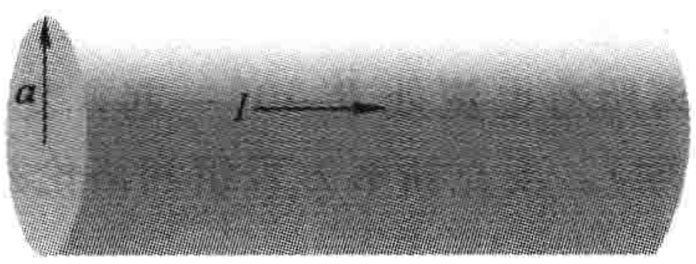


图　5.40

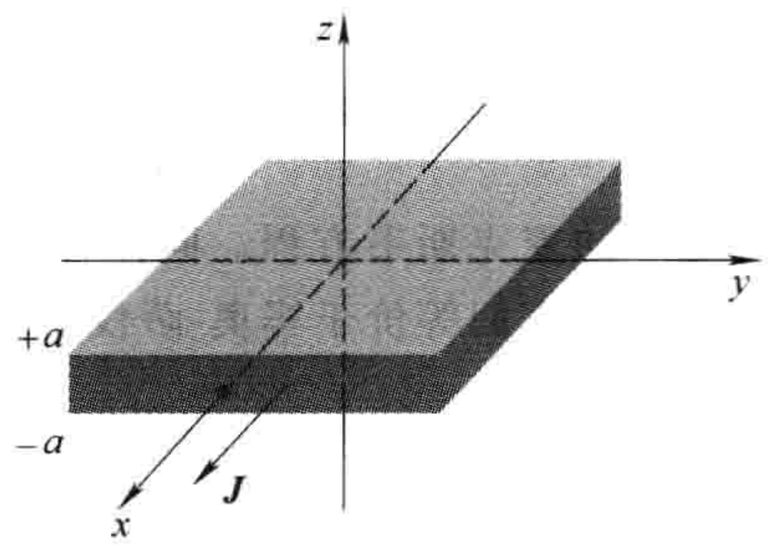


图　5.41

习题 5.14　一个大平板的厚度从 $z=-a$ 到 $z=a$，它的电流密度为 $\boldsymbol{J}=J\hat{\boldsymbol{x}}$（见图 5.41）。作为 z 的函数，求出平板内外的磁场。

习题 5.15　如图 5.42 所示，两个载有稳恒电流 I 的同轴螺线管中电流方向相反。里面的细螺线管（半径为 a）单位长度上有 n_1 匝线圈，外面的粗螺线管（半径为 b）单位长度上有 n_2 匝线圈，求出下列区域内的磁场：(i)细螺线管的内部，(ii)两螺线管之间的部分，(iii)粗螺线管的外部。

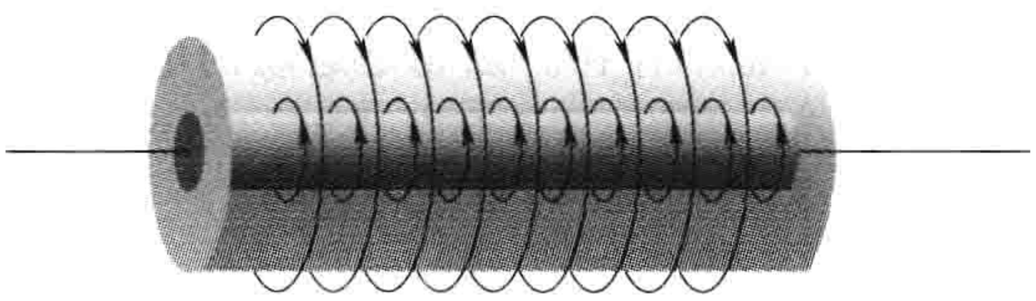


图　5.42

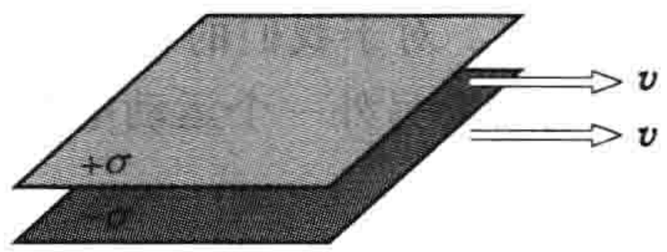


图　5.43

习题 5.16　如图 5.43 所示，一个大平行板电容器，上极板有均匀电荷 σ，下极板有均匀电荷 $-\sigma$，两极板以恒定速度 v 运动，

(a) 求出两极板间及两极板外区域的磁场。

(b) 求出作用在上极板单位面积上的磁力及其方向。

(c) 为了使磁力和电场力平衡，速度 v 应为多大？[⊖]

习题 5.17　证明无论无限长螺线管的横截面为什么形状，只要该形状沿着螺线管是不变的，则磁场方向总是平行于螺线管中心轴线。这样的螺线管线圈内部和外部的磁场为多大？证明当环形螺线管的半径为无限大时，它的一部分可以看做直螺线管，环形螺线管内的磁场式(5.58)变为直螺线管内的磁场。

习题 5.18　当计算一个安培闭合回路包围的电流时，一般情况下，需计算积分

$$I_{\text{enc}}=\int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

棘手的是，会有无穷多个表面共用这样一个边界线，我们应该选用哪一个？

5.3.4　静磁学与静电学的比较

静电场的散度和旋度分别是

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho, & \text{（高斯定理）}\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=0, & \text{（没有名字）}\end{cases}$$

⊖　见第 140 页脚标⊖。

它们是静电学的**麦克斯韦方程**。与边界条件“在远离所有电荷处 $\boldsymbol{E}\to 0$”一起，如果源电荷密度 ρ 给定，麦克斯韦方程组决定了电场；本质上，它们与库仑定律加上叠加原理包含相同信息。静磁学的散度和旋度为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, & \text{（没有名字）} \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}, & \text{（安培定理）} \end{cases}$$

它们是静磁学的麦克斯韦方程。同样，与边界条件“在远离所有电流处 $\boldsymbol{B}\to 0$”一起，麦克斯韦方程决定了磁场；它们等价于毕奥-萨伐尔定律(加上叠加原理)。麦克斯韦方程组和洛伦兹力定律

$$\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

构成了静电学和静磁学优美的框架。

一个正电荷的电场方向背离源电荷；磁场环绕着产生它的电流(见图 5.44)。电场线起始于正电荷终止于负电荷；磁场线无头无尾，如果有的话，那么它的散度就不为零了。磁场线要么为封闭的，要么延伸到无穷远处。换一种角度来说，与电场 $\boldsymbol{E}$ 不同，不存在产生 $\boldsymbol{B}$ 的点源；磁现象不存在电荷的类比。这就是 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 的物理含义。库仑和其他一些人相信磁场来源于**磁荷**(也就是现在所称的**磁单极子**)，在一些老的书中，你依然可以发现磁场库仑定律翻本，并给出它们之间的吸引力和排斥力。安培首先推测所有的磁现象都应归因于运动着的电荷(电流)。到目前为止，安培还是正确的；不过依然还存在着一个未解的实验上的问题，磁单极子是否真的存在于自然界(它们显然十分的稀有，或许有人曾偶然发现过[⊖])，事实上，某些现代的基本粒子理论需要它们的存在。对于我们的目的，$\boldsymbol{B}$ 是无散的，磁单极子也不存在。磁场是运动的电荷产生的，“感知”磁场需要另外一个运动电荷。

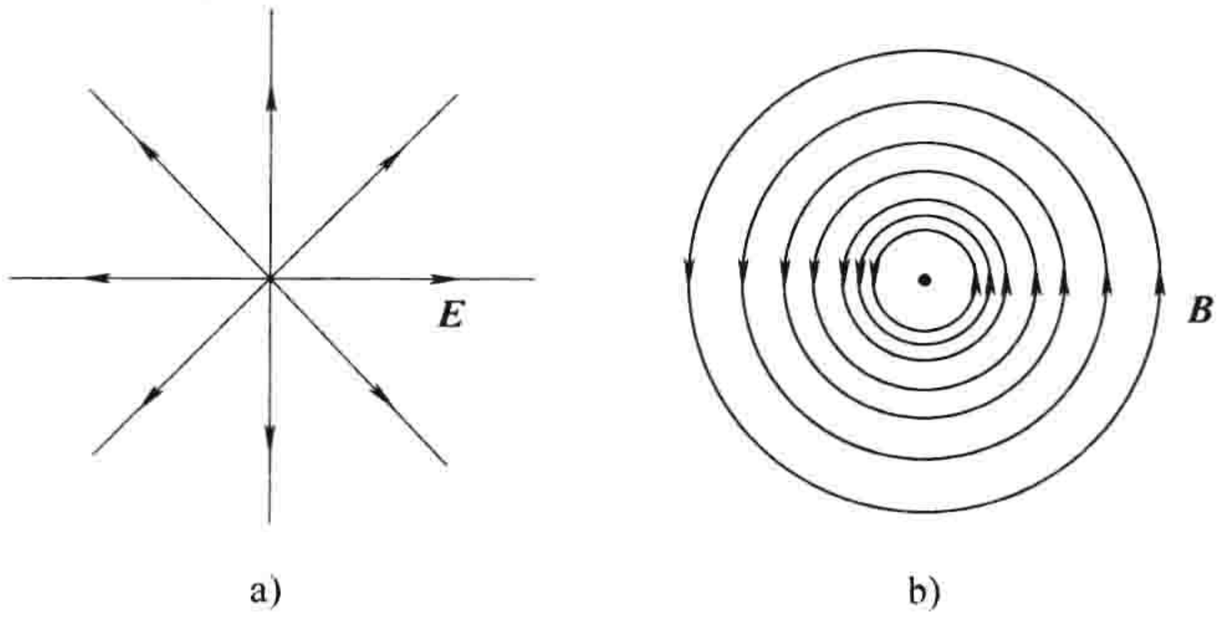


图 5.44

a)点电荷的电场 b)长导线的磁场

一般来讲，电场力要比磁力大得多。这不是从理论上就能辨别出的事情；需要从基本常数 ε_0 和 μ_0 的大小来判断。仅当源电荷和测试电荷都以接近光速运动时，磁力才可能与电场力的大小相当(习题 5.12 和习题 5.16 可用来阐明这个)。为什么会是这样，难道我们从没观察到磁的效应？答案是，无论是产生磁场(毕奥-萨伐尔定律)，还是探测磁场(洛伦兹力定律)，涉及的量是电流(电荷乘以速度)，对很小的速度我们可以用大量的电荷来弥补。通常，这些电荷会同时产生电场力而掩盖磁力。但是如果我们使导线保持电中性，电场力被相互抵消，仅剩下磁场效应。

⊖ 一个曾报道的探测(B. Cabrera, Phys. Rev. Lett. 48, 1378(1982))从没被重复过——也没人想再试试。有关磁思想的历史的一个简洁有趣味的回顾，见 D. C. Mattis,《磁学理论》，第一章(New York: Harper and Row, 1965)。

这听起来有点煞费苦心，但是对普通的载流导线它们的确如此。

习题 5.19

(a) 设每个原子贡献一个自由电子，求出铜的电荷密度 ρ(查阅必要的物理常数)。

(b) 计算直径为 1mm，带有电流 1A 的铜导线中的平均电子速度。[注意：这是一个相当慢的速度。那么如何解释打长途电话的情况呢?]

(c) 相距为 1cm 的这样两根载流导线的吸引力为多少?

(d) 如果你能用某种方法移走导线中静止的正离子，那么电场排斥力将为多少? 它为磁力的多少倍?

习题 5.20　安培定理满足旋度的散度等于零的普遍规则(式(1.46))吗? 证明，一般来讲，安培定理对非静磁学不成立。另外的三个麦克斯韦方程中有这样的“缺陷”吗?

习题 5.21　假设真的存在磁单极子。你将如何修正麦克斯韦方程和洛伦兹力定律去反映它们的存在? 如果你有几个可行的方案，列举它们，并设想如何从实验上判定哪一个是正确的。

5.4　磁矢势

5.4.1　矢势

正如在静电学中，$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 允许我们引入一个标势(V)，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V,$$

那么在静磁学中，$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 可使我们引入一个矢(量)势 $\boldsymbol{A}$：

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}} \tag{5.59}$$

前者是由定理 1(1.6.2 小节)所允许的，后者是由定理 2(证明见习题 5.30)所允许的。矢势的这种形式自动满足$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$(因为旋度的散度总是 0)；至于安培定理：

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{5.60}$$

现在，电势还有某些不确定；你可以在 V 上加上任何函数，只要它的梯度为 0(也就是说任何常数)，而不改变物理量 $\boldsymbol{E}$。同样地，你可以给磁矢势加上任何函数，只要它的旋度为 0(也就是说任何标量函数的梯度)，这也不改变 $\boldsymbol{B}$。我们可以利用这种选择自由性，使 $\boldsymbol{A}$ 的散度为零：

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0} \tag{5.61}$$

为了证实这总是可行的，假设初始的 $\boldsymbol{A}_0$ 其散度不为零。如果我们给它增加上 λ 的梯度($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \nabla \lambda$)，新矢势的散度就是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}_0 + \nabla^2 \lambda$$

如果函数 λ 满足

$$\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \boldsymbol{A}_0$$

新的矢势就满足式(5.61)。函数 λ 满足的方程在数学上等同于泊松方程，式(2.24)：

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

不过现在$\nabla \cdot \boldsymbol{A}_0$ 替代了 ρ/ε_0 作为的“源”，我们已经知道怎样解泊松方程——这是静电学的主要内容(给定电荷分布求出电势)。特别有，如果在无限远处 ρ 为零，式(2.29)的解为

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho}{\mathscr{r}} \mathrm{d}\tau'$$

基于同样的考虑，如果无限远处$\nabla \cdot \boldsymbol{A}_0$ 为零，则

$$\lambda = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{A}_0}{\imath} d\tau'$$

如果在无限远处$\nabla \cdot \boldsymbol{A}_0$不为零，那么我们将不得不用其他方法找出合适的$\lambda$，就如当电荷分布扩展到无限远，我们通过其他方法找出电势一样。但要点是：使矢势的散度为零总是可能的。用另外的说法：当用$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$确定$\boldsymbol{A}$的旋度时，这对$\boldsymbol{A}$的散度并没有限定——我们可自由地选择我们认为合适的形式，0 当然是最简单的选择。

根据$\boldsymbol{A}$的这种选择，安培定理式(5.60)变为

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}} \tag{5.62}$$

这不是别的，也是泊松方程——或者三个泊松方程，每一个直角分量为一个[㊀]。设在无限远处$\boldsymbol{J}$为零，我们可以写出解：

$$\boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{\imath} d\tau'} \tag{5.63}$$

对于线电流和面电流

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{I}}{\imath} dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{1}{\imath} dl'; \quad \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{K}}{\imath} da' \tag{5.64}$$

(如果电流在无限远处不为零，那么我们不得不用其他的方法得到$\boldsymbol{A}$；这将在例题 5.12 和本小节习题中探讨。)

必须说明的是，$\boldsymbol{A}$并不像V那样的有用，首先，它仍旧是一个矢量，尽管式(5.63)和式(5.64)计算起来要比毕奥-萨伐尔定律简单，你仍然需要麻烦地去处理分量。如果我们能有一个标量势，使得

$$\boldsymbol{B} = -\nabla U \tag{5.65}$$

那再好不过了。但这和安培定理是不相容的，因为梯度的旋度总是零。(如果你考虑一个无电流的单连通区域，磁标势也许是可用的，但是作为一个理论工具则对它的兴趣有限，见习题 5.28。)进一步讲，由于磁力是不做功的，$\boldsymbol{A}$不能简单地赋予如同单位荷子的势能这样的物理意义。(在某种意义上，它可解释为单位荷子的动量[㊁]。)尽管如此，在第 10 章中我们将会看到，磁矢势有重要的理论意义。

例题 5.11

一半径为R的球壳，表面带有均匀电荷，电荷面密度为σ，当它以恒定角速度ω旋转时，求出它在$\boldsymbol{r}$点产生的矢势(见图 5.45)。

解： 看起来很自然地应当选取沿ω旋转的轴为极轴，但事实上，如果我们让$\boldsymbol{r}$点在z轴上，积分会更容易，这样ω轴与z轴的夹角为ψ。我们也可以设置x轴，使$\boldsymbol{\omega}$在xz平面内，如图 5.46 所示。根据式(5.64)，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}')}{\imath} da'$$

㊀ 在直角系，$\nabla^2 \boldsymbol{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\boldsymbol{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\boldsymbol{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\boldsymbol{z}}$，所以式(5.62)约化为$(\nabla^2 A_x) = -\mu_0 J_x$，$(\nabla^2 A_y) = -\mu_0 J_y$，$(\nabla^2 A_z) = -\mu_0 J_z$。在曲线坐标系中，单位矢量本身是位置的函数，也必须求导。所以，例如，不会有$(\nabla^2 A_r) = -\mu_0 J_r$这种情况。在曲线坐标系中，安全计算一个矢量的拉普拉斯算子是利用$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$。不过要记住，即便你要在曲线坐标系中计算类如式(5.63)的积分，你也要先把$\boldsymbol{J}$表示成它的直角分量(见 1.4.1 小节)。

㊁ M. D. Semon and J. R. Taylor, Am. J. Phys. 64, 1361(1996)。

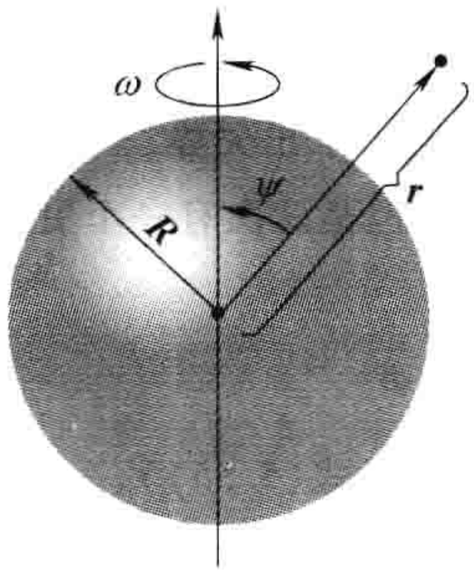


图　5.45

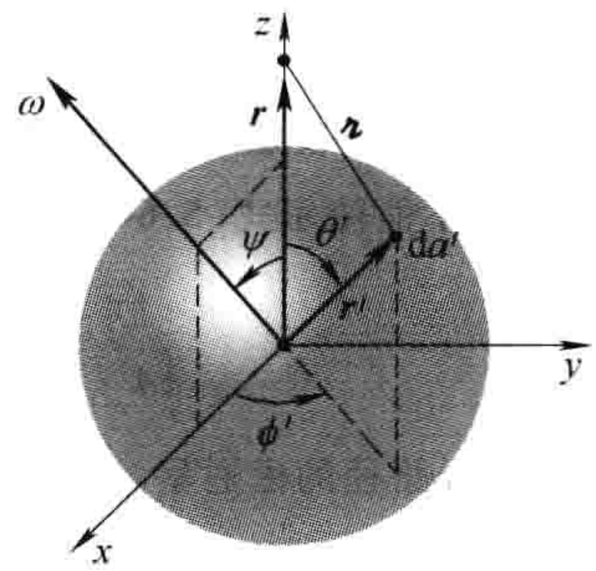


图　5.46

式中 $\boldsymbol{K}=\sigma\boldsymbol{v}$；$\imath=\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta'}$；$\mathrm{d}a'=R^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$。旋转刚体上 $\boldsymbol{r}'$ 处的速度由 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$ 给出；对本题，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ \omega\sin\psi & 0 & \omega\cos\psi\\ R\sin\theta'\cos\phi' & R\sin\theta'\sin\phi' & R\cos\theta'\end{vmatrix}$$

$$=R\omega[-(\cos\psi\sin\theta'\sin\phi')\hat{\boldsymbol{x}}+(\cos\psi\sin\theta'\cos\phi'-\sin\psi\cos\theta')\hat{\boldsymbol{y}}+(\sin\psi\sin\theta'\sin\phi')\hat{\boldsymbol{z}}]。$$

注意，上式中除一项之外每一项都含有一个 $\sin\phi'$ 或 $\cos\phi'$，由于

$$\int_0^{2\pi}\sin\phi'\mathrm{d}\phi'=\int_0^{2\pi}\cos\phi'\mathrm{d}\phi'=0$$

像这样的项对积分没有贡献。剩余的一项为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=-\frac{\mu_0R^3\sigma\omega\sin\psi}{2}\left(\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta'\sin\theta'}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta'}}\mathrm{d}\theta'\right)\hat{\boldsymbol{y}}$$

令 $u\equiv\cos\theta'$，积分变为

$$\int_{-1}^{+1}\frac{u}{\sqrt{R^2+r^2-2Rru}}\mathrm{d}u=-\frac{(R^2+r^2+Rru)}{3R^2r^2}\sqrt{R^2+r^2-2Rru}\Bigg|_{-1}^{+1}$$

$$=-\frac{1}{3R^2r^2}[(R^2+r^2+Rr)\mid R-r\mid-(R^2+r^2-Rr)(R+r)]$$

如果 $\boldsymbol{r}$ 在球内，则 $R>r$，上面的表达式变为 $(2r/3R^2)$；如果 $\boldsymbol{r}$ 在球外，则 $R<r$，上面的表达式变为 $(2R/3r^2)$。注意，$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=-\omega r\sin\psi\hat{\boldsymbol{y}}$，我们最后得到

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\begin{cases}\dfrac{\mu_0R\sigma}{3}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}), & \text{球内}\\ \dfrac{\mu_0R^4\sigma}{3r^3}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}), & \text{球外}\end{cases}\tag{5.66}$$

计算出积分式后，我们再回到图 5.45 的“自然选取”坐标，ω 转动轴为 z 轴，$\boldsymbol{r}$ 点的坐标为 (r,θ,ϕ)：

$$\boldsymbol{A}(r,\theta,\phi)=\begin{cases}\dfrac{\mu_0R\omega\sigma}{3}r\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}, & (r\leqslant R)\\ \dfrac{\mu_0R^4\omega\sigma}{3}\dfrac{\sin\theta}{r^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}, & (r\geqslant R)\end{cases}\tag{5.67}$$

奇特的是，球壳内的磁场是均匀的：

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{2\mu_0R\omega\sigma}{3}(\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}-\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})=\frac{2}{3}\mu_0\sigma R\boldsymbol{\omega}\hat{\boldsymbol{z}}=\frac{2}{3}\mu_0\sigma R\boldsymbol{\omega}\tag{5.68}$$

例题 5.12

一个半径为 R 的无限长螺线管，单位长度内有 n 匝线圈，通有电流 I，求出矢势。

解： 这次我们不能使用式(5.64)，因为电流本身延伸到无限远处。但是这次有一个更漂亮的方法。注意到

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \Phi \tag{5.69}$$

式中，Φ 为通过闭合路径的磁通量。这使我们回想起安培定理的积分形式(式(5.55))，

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\mathrm{enc}}$$

事实上，如果作代换，$\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$，$\mu_0 I_{\mathrm{enc}} \to \Phi$，它们是同样的方程。如果对称性合适，我们可由 5.3.3 小节中从 I_{enc} 得到 $\boldsymbol{B}$ 的同样的方法由 Φ 得到 $\boldsymbol{A}$。目前的问题(螺线管内有均匀磁场 $\mu_0 nI$，外部无磁场)可类比于粗导线带有均匀分布电流的安培定理问题。磁矢势是“环形的”(模拟导线的磁场)；在螺线管内作一个半径为 s 的圆形“安培闭合回路”，我们有

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = A(2\pi s) = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \mu_0 nI(\pi s^2)$$

所以

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 nI}{2} s\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad s < R \tag{5.70}$$

对螺线管外部的圆形闭合回路，通量为

$$\int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \mu_0 nI(\pi R^2)$$

由于磁场只延伸到半径为 R 处，所以

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 nI}{2} \frac{R^2}{s} \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad s > R \tag{5.71}$$

如果你对此结果有什么疑问，检验一下 $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ 是否成立，如果成立，我们的方法就是正确的。

一般地，$\boldsymbol{A}$ 的方向将和电流的方向一致。例如，在例题 5.11 和例题 5.12 中两者的方向都沿方位角。的确，如果所有的电流都沿一个方向，那么式(5.63)表明 $\boldsymbol{A}$ 也必将指向那个方向。因此有限长直导线的磁矢势方向为其电流方向。当然，如果电流延伸到无限远处，你将不能先使用式(5.63)(见习题 5.25 和习题 5.26)。另外，你还总可以对 $\boldsymbol{A}$ 增加一个任意常矢量——这类似于改变 V 的参考点，这不会影响到 $\boldsymbol{A}$ 的散度和旋度(在式(5.63)中，我们已经选择了常矢量，使无限远处 $\boldsymbol{A}$ 为零)。原则上，你甚至可以选一个散度不为零的磁矢势，对这种情况我们所说的都不再成立。尽管有这么多漏洞，但基本要点不变：一般地，$\boldsymbol{A}$ 的方向将匹配电流的方向。

习题 5.22 一段有限长直导线通有电流 I，它所产生的磁矢势为多少？[使导线沿 z 轴，从 z_1 到 z_2，利用式(5.64)] 验证你的结果是与式(5.35)一致的。

习题 5.23 用柱坐标表示，电流密度为多大才能产生磁矢势 $\boldsymbol{A} = k\hat{\boldsymbol{\phi}}$(其中 k 为常量)？

习题 5.24 如果 $\boldsymbol{B}$ 是均匀的，证明 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B})$，即验证 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$，$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。这结果唯一吗？是否还有其他磁矢势也具有同样的散度和旋度？

习题 5.25

(a) 通过任何你能想到的方法(尽量简短)，求出距离带电流 I 的无限长直导线 s 处的磁矢势，验证 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

(b) 求出导线内部的磁势，设导线半径为 R 且电流分布均匀。

习题 5.26　求出例题 5.8 中平面电流板上下表面的磁矢势。

习题 5.27

(a) 应用散度公式，验证式(5.63)与式(5.61)一致。

(b) 应用旋度公式，验证式(5.63)与式(5.45)一致。

(c) 应用拉普拉斯算子，验证式(5.63)和式(5.62)一致。

习题 5.28　假设你想定义一个载流导线附近的磁标势 U(式(5.65))。首先，你必须是在离开导线的区域(导线内$\nabla \times \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$)；但这还不充分。如图 5.47 所示，对一条从 a 点开始环绕导线到 b 点的闭合路径($a = b$)应用安培定理，发现磁标势不是单值(即 $U(a) \neq U(b)$，虽然它们代表同一物理点)。作为一个例子，求出一个无限长直导线的磁标势。(为了避免磁标势的多值情况，你必须限制在没有导线穿过的单连通区域，从而不可能有环绕电线的闭合回路)。

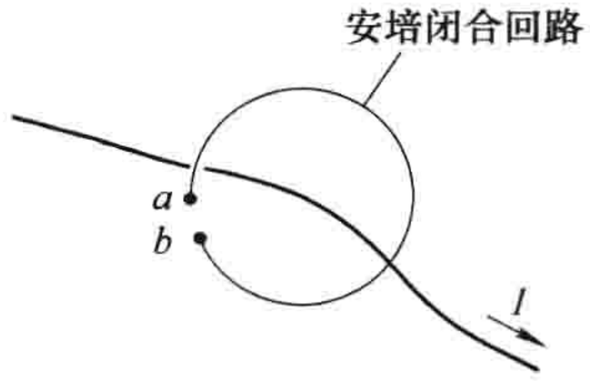


图　5.47

习题 5.29　应用例题 5.11 中的结果，对总电荷为 Q，电荷均匀分布，且以恒定角速度 ω 旋转的半径为 R 的球，求出球内磁场。

习题 5.30

(a) 完成 1.6.2 小节中定理 2 的证明。该定理为：任何散度为零的矢量场 $\boldsymbol{F}$ 都可以表示为一个矢势 $\boldsymbol{A}$ 的旋度。你所要做的就是找出 A_x，A_y，A_z，使得：(i) $\partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z = F_x$；(ii) $\partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x = F_y$；(iii) $\partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y = F_z$。这里有一种方法：选择 $A_x = 0$，解出(ii)和(iii)中的 A_y 和 A_z。注意所得的“积分常数”本身现在是 y 和 z 的函数——所谓常数仅是对于 x 而言的。现在把所得到的 A_y 和 A_z 代入(i)，并利用 $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$ 可以得到

$$A_y = \int_0^x F_z(x', y, z)\,dx'; \quad A_z = \int_0^y F_x(0, y', z)\,dy' - \int_0^x F_y(x', y, z)\,dx'$$

(b) 通过直接求导，验证你在(a)中得到的 $\boldsymbol{A}$ 满足$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}$。$\boldsymbol{A}$ 是无散的吗？[这是一个非常不对称的结构，如果真是那样，这很令人吃惊——尽管我们知道存在一个矢量，它的旋度为 $\boldsymbol{F}$，散度为零。]

(c) 作为一个例子，设 $\boldsymbol{F} = y\hat{\boldsymbol{x}} + z\hat{\boldsymbol{y}} + x\hat{\boldsymbol{z}}$。计算 $\boldsymbol{A}$，并证明$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}$(进一步的讨论见习题 5.51)。

5.4.2　总结　静磁学的边界条件

在第 2 章中，我画了一个三角图去总结静电学中三个基本量之间的关系：电荷密度 ρ，电场 $\boldsymbol{E}$ 和电势 V。对静磁学也可构建一个类似的图(见图 5.48)，它把电流密度 $\boldsymbol{J}$，磁场 $\boldsymbol{B}$ 和磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 联系了起来。在图中还少一个“连接”：用 $\boldsymbol{B}$ 来表示出 $\boldsymbol{A}$ 的式子。你也许从不需要这个式子，但如果你感兴趣，可参见习题 5.50 和习题 5.51。

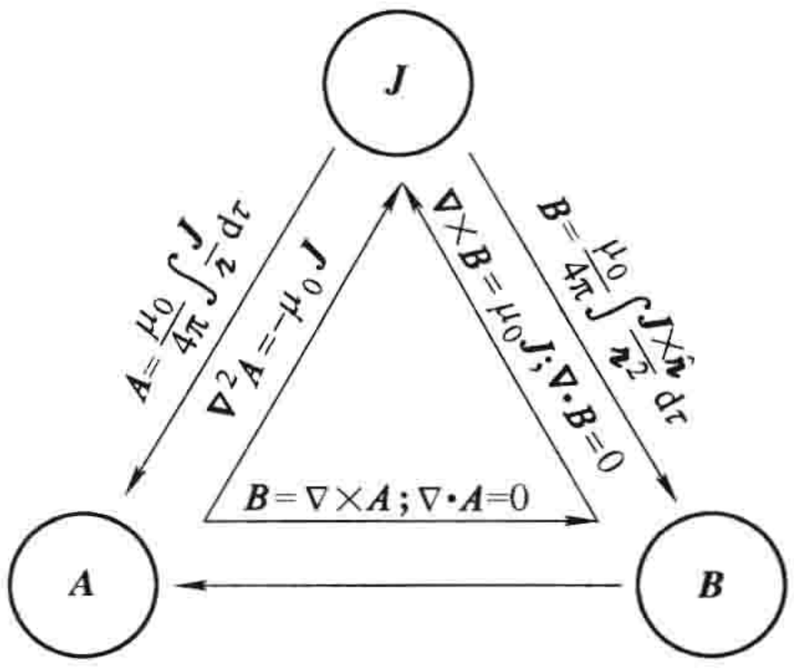


图　5.48

正如电场在表面电荷存在处不连续一样，磁场在有表面电流处也是不连续的。只是现在是磁场的切线分量发生了改变。因为如果对一个扁盒子所围的表面应用式(5.48)的积分形式(见图 5.49)

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{a} = 0$$

可以得到

$$B_{\text{上}}^{\perp} = B_{\text{下}}^{\perp} \tag{5.72}$$

对于切线分量，作一个垂直于电流方向的安培闭合回路(见图 5.50)，有

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = (B_{\text{上}}^{\parallel} - B_{\text{下}}^{\parallel}) l = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 K l$$

或者

$$B_{\text{上}}^{\parallel} - B_{\text{下}}^{\parallel} = \mu_0 K \tag{5.73}$$

因此，$\boldsymbol{B}$ 平行于表面且垂直于电流的分量是不连续的，变化量为 $\mu_0 K$。对一个平行于电流方向的安培闭合回路，同样的考虑可以得出 $\boldsymbol{B}$ 平行于表面且平行于电流的分量是连续的。以上结果可以总结为一个公式：

$$\boldsymbol{B}_{\text{上}} - \boldsymbol{B}_{\text{下}} = \mu_0 (\boldsymbol{K} \times \hat{\boldsymbol{n}}) \tag{5.74}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是垂直于表面，方向“向上”的单位矢量。

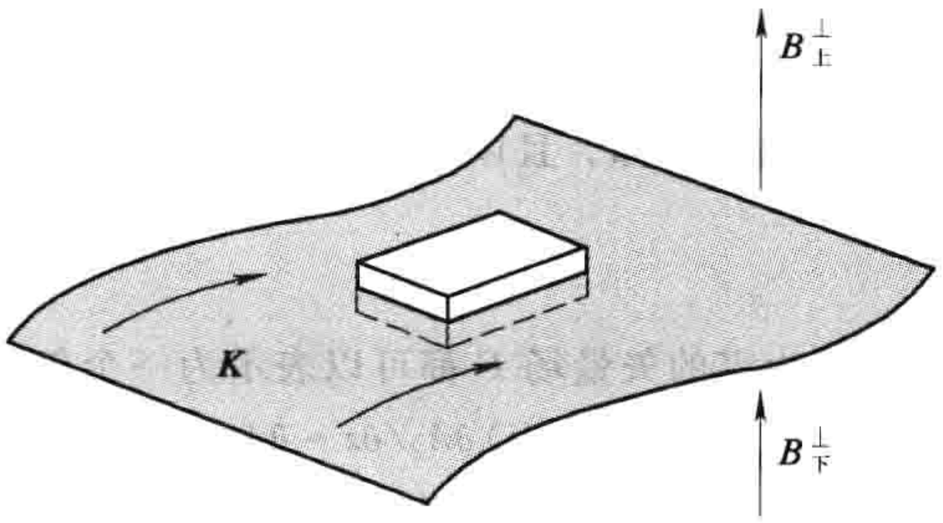


图 5.49

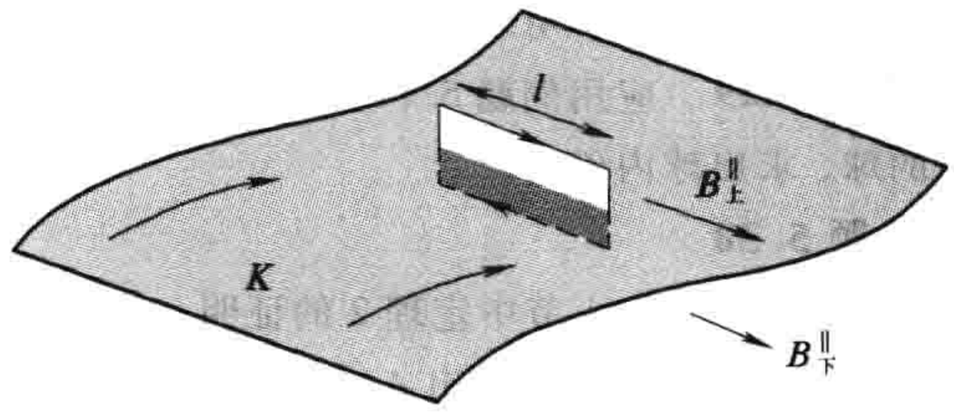


图 5.50

如同静电学中的标势，磁矢势在任何边界上都是连续的：

$$\boldsymbol{A}_{\text{上}} = \boldsymbol{A}_{\text{下}}, \tag{5.75}$$

因为 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ 保证了法线分量的连续[⊖]，而 $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，以

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \Phi$$

的形式保证了切向分量的连续(通过厚度趋于零的安培闭合回路中的磁通量为零)。但是 $\boldsymbol{A}$ 的散度继承了 $\boldsymbol{B}$ 的不连续性。

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}_{\text{上}}}{\partial n} - \frac{\partial \boldsymbol{A}_{\text{下}}}{\partial n} = -\mu_0 \boldsymbol{K} \tag{5.76}$$

习题 5.31

(a) 对例题 5.9 中的电流构型，验证式(5.74)。

(b) 对例题 5.11 中的电流构型，验证式(5.75)和式(5.76)。

习题 5.32 利用式(5.61)，式(5.74)和式(5.75)证明式(5.76)。[建议：在表面建立直角坐标系并使 z 轴垂直于表面，x 轴平行于电流。]

5.4.3 矢势的多极展开

如果你想得到局域电流分布在远处的近似磁矢势，可利用多极展开。记住：多极展开的思想就是将磁矢势表示成 $1/r$ 的幂级数，这里 r 是指问题中所涉及点间的距离(见图 5.51)；如果 r 足够大，级数中起主要作用的是最低阶的非零项，而高阶项可以被忽略。正如我们在 3.4.1 小节中

⊖ 注意式(5.75)和式(5.76)预先假设了 $\boldsymbol{A}$ 是无散的。

所得到的那样(式(3.94)),

$$\frac{1}{\mathcal{r}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\theta'}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n \mathrm{P}_n(\cos\theta') \tag{5.77}$$

类似地,一个闭合电流圈的磁矢势可以写成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{1}{\mathcal{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\oint (r')^n \mathrm{P}_n(\cos\theta')\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \tag{5.78}$$

或者,更明显地:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\oint \mathrm{d}\boldsymbol{l}' + \frac{1}{r^2}\oint r'\cos\theta'\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}' + \frac{1}{r^3}\oint (r')^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{l}' + \cdots\right] \tag{5.79}$$

同在 V 的多极展开中一样,我们称第一项($1/r$ 项)为**单极项**,第二项($1/r^2$ 项)为**偶极项**,第三项为**四极项**,依次类推。

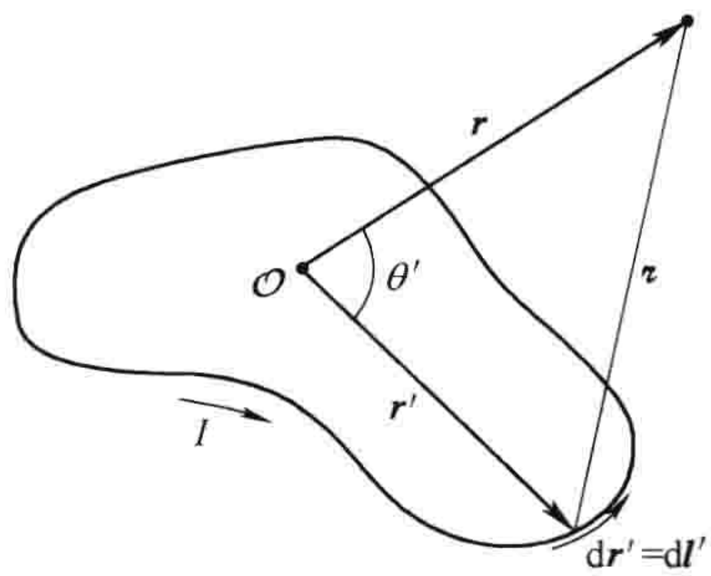


图　5.51

现在,我们发现磁单极子总是为 0,因为积分沿着一个封闭回路总的矢量位移为

$$\oint \mathrm{d}\boldsymbol{l}' = 0 \tag{5.80}$$

这反映了一个事实:(看起来)在自然界中不存在磁单极子(这是包含于麦克斯韦方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 中的一个假设,而整个磁矢势理论正是基于此点)。

若单极项为零,那么起主要作用的就是偶极项(除了一些很罕见的例子外,它也为零):

$$\boldsymbol{A}_{\text{偶极}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\oint r'\cos\theta'\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\oint (\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \tag{5.81}$$

如果利用式(1.108),并让 $\boldsymbol{c}=\hat{\boldsymbol{r}}$,我们可把这个积分写得更加明了:

$$\oint (\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = -\hat{\boldsymbol{r}}\times\int \mathrm{d}\boldsymbol{a}' \tag{5.82}$$

则有

$$\boxed{\boldsymbol{A}_{\text{偶极}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}} \tag{5.83}$$

式中,$\boldsymbol{m}$ 是**磁偶极矩**:

$$\boxed{\boldsymbol{m} \equiv I\int \mathrm{d}\boldsymbol{a} = I\boldsymbol{a}} \tag{5.84}$$

这里 $\boldsymbol{a}$ 是一个闭合回路的“面积矢量”(见习题 1.61);如果闭合回路是平面路径,$\boldsymbol{a}$ 就是闭合回路所围的普通面积,其方向由右手定则确定(四指环绕电流方向,大拇指为 $\boldsymbol{a}$ 的方向)。

例题 5.13

如图 5.52 所示,有“书页形”闭合线路,每边边长都为 w,通有电流 I,求它的磁偶极矩。

解：这个闭合线路可以看做是两个平面上正方形线框的叠加(见图 5.53)，“额外”边(AB)中的电流流向相反，它们所产生的磁场相互抵消。总磁偶极矩为

$$\boldsymbol{m} = Iw^2\hat{\boldsymbol{y}} + Iw^2\hat{\boldsymbol{z}}$$

它的大小为$\sqrt{2}Iw^2$，方向沿 $z=y$ 的 45°角线。

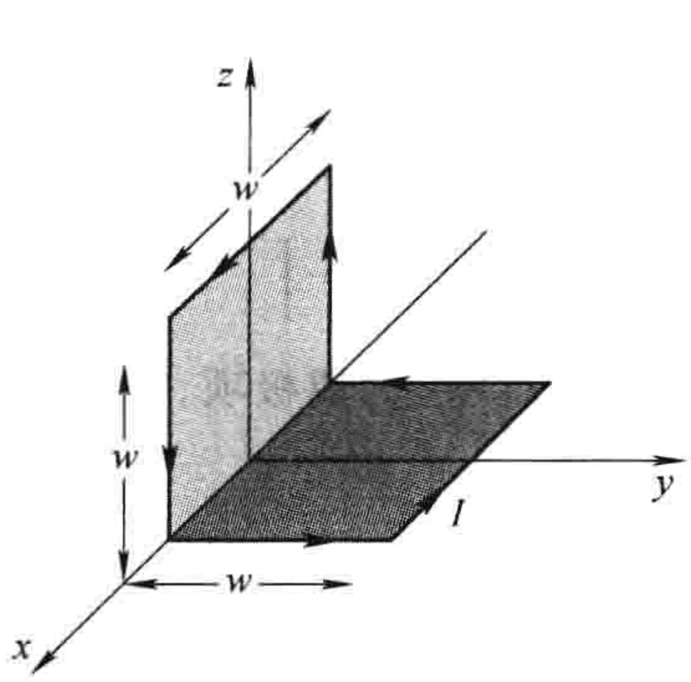
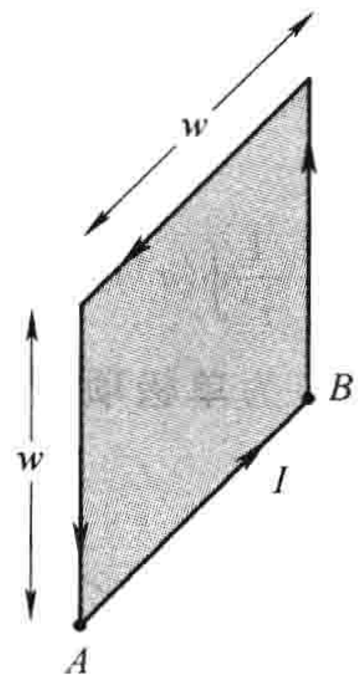


图 5.52



+

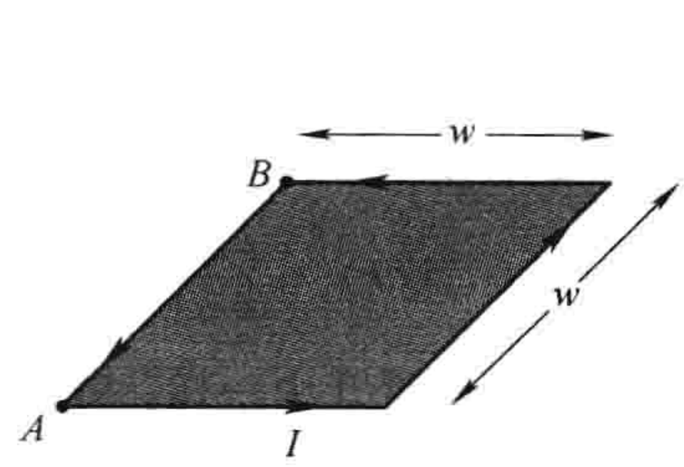


图 5.53

从式(5.84)可以清楚看出，磁偶极矩是不依赖于原点的选择的。你们可能还记得，仅当总电荷为零时，电偶极矩才与原点的选择无关(3.4.3 小节)。由于磁单极矩总是为零，所以很易理解，磁偶极矩不依赖于原点的选择。

尽管在多极展开中的偶极项起主要作用(除非 $\boldsymbol{m}=0$)，因此它提供了真实磁势的一个很好的近似，但通常它不是一个严格磁势；还有四极项、八极项和更高项的贡献。你可能会问，是否设计一个电流分布，使它的磁势为“纯”偶极项——使式(5.83)成为精确的？也许可以，也许不可以：和电场的情况类比，是可以的，但模型有些不自然。开始，你必须在原点做一个无限小的闭合电流，但是为了得到有限的磁偶极矩，你不得不使电流趋于无限大，使乘积 $m=Ia$ 保持恒定。在实际当中，只要距离 r 远远超出闭合电流的大小，磁偶极势就是一个合理的近似。

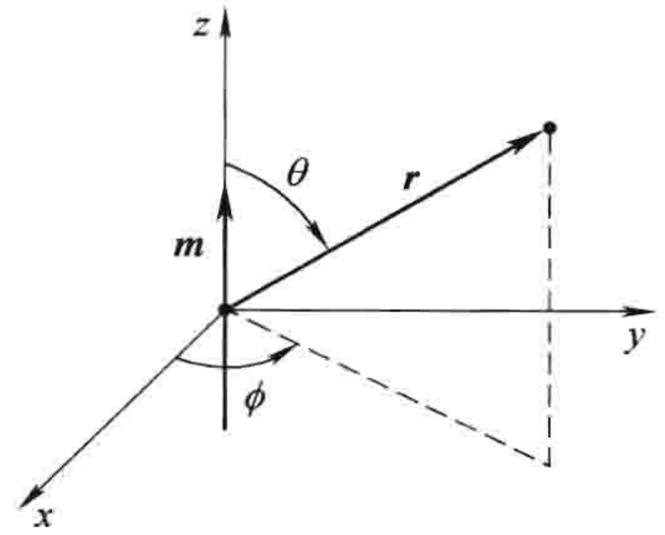


图 5.54

如果我们把 $\boldsymbol{m}$ 放在原点，方向指向 z 轴方向(见图 5.54)，磁偶极矩的磁场很容易计算。由式(5.83)，在点(r，θ，ϕ)处的磁势为

$$\boldsymbol{A}_{\text{偶极}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^2}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{5.85}$$

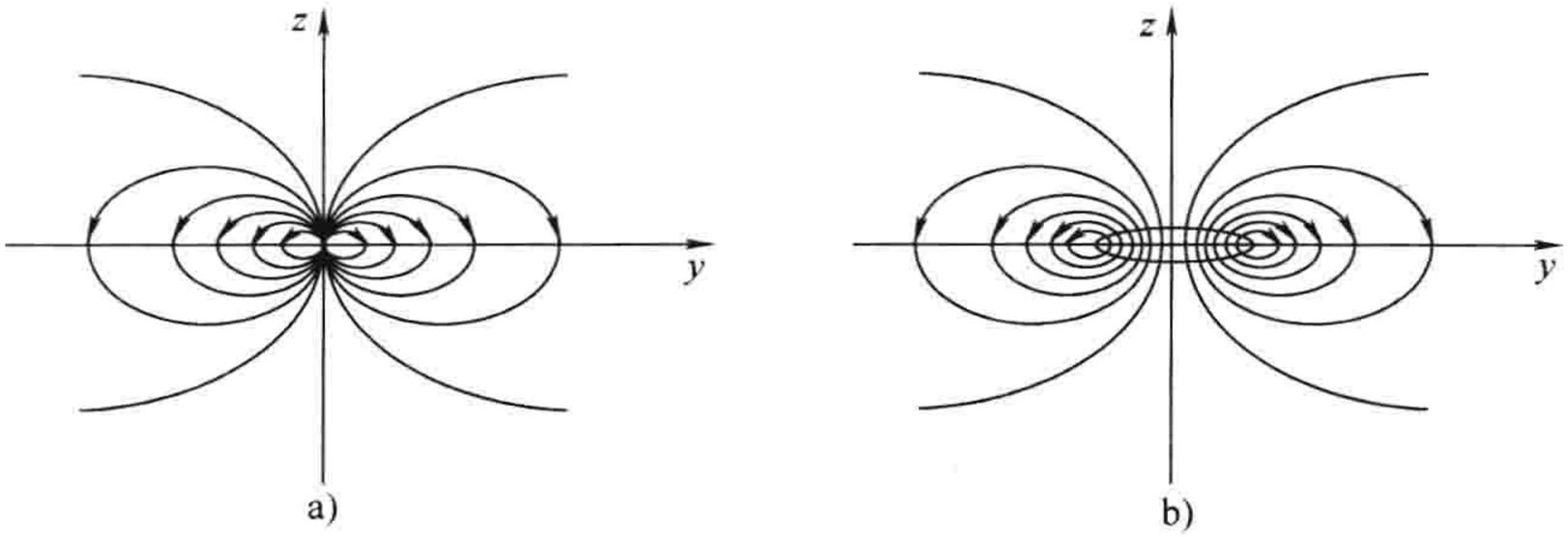


图 5.55

a)“纯粹”磁偶极子的磁场　b)“物理”磁偶极子的磁场

因此

$$\boldsymbol{B}_{\text{偶极}}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{5.86}$$

令人很惊讶的是，这在结构上同电偶极子的电场是一样的(式(3.103))！(不过仔细观察，物理上的磁偶极矩的磁场——一个小的闭合电流的磁场——与物理上的电偶极子的电场——相距很近的正负电荷的电场，看起来还是非常不同的。比较图 5.55 和图 3.37。)

· **习题 5.33**　证明一个磁偶极子的磁场可以写为不依赖坐标系的形式

$$\boxed{\boldsymbol{B}_{\text{偶极}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}[3(\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{m}]} \tag{5.87}$$

习题 5.34　一个半径为 R 的圆形线框，处于 xy 平面内，圆心在原点，通有电流 I，其方向从 z 轴正方向看为逆时针方向。

(a) 它的磁偶极矩为多少?

(b) 远离原点处的磁场(近似)为多少?

(c) 证明对于 z 轴上的点，当 $z >> R$ 时，你的答案与精确解一致(例题 5.6)。

习题 5.35　一个半径为 R 的留声机唱片，带有均匀的面电荷 σ，以恒定角速度 ω 旋转，求出它的磁偶极矩。

习题 5.36　对例题 5.11 中的旋转球壳，求出它的磁偶极矩。证明对于 $r > R$ 点处的矢势是理想磁偶极矩的势。

习题 5.37　边长为 w、带有电流 I 的方形线框，求其中心轴上 z 点处的磁场。证明：当 $z >> w$ 时，用磁偶极矩近似，它约化为磁偶极矩的磁场。

第 5 章补充习题

习题 5.38　可能你们已注意到，既然平行电流相互吸引，单根导线中的电流将收缩到沿着中心轴线的一条细束上。然而在实际中，电流一般将均匀地分布于导线中，你们如何解释这个? 如果正电荷(密度 ρ_+)是静止的，负电荷(密度 ρ_-)以速度 v 运动(这些都与距离轴线的远近无关)，证明 $\rho_- = -\rho_+\gamma^2$，其中 $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$，$c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$。如果导线整体上是中性的，那么补偿电荷处在什么地方?[⊖] [注意，对于通常的速度(见习题 5.19)，电流基本上不会改变两种电荷的密度(因为 $\gamma \approx 1$)。但是，在**等离子体**中，正电荷也可自由运动，这种所谓的**收缩效应**是显著的。]

习题 5.39　如图 5.56 所示，处在方向指向纸外的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的矩形导体，通有向右流动的电流 I。

(a) 如果运动电荷为正电荷，磁场将使它们向哪个方向偏移? 偏移将导致电荷在上下表面的积累，它将反过来产生一个电场力去平衡磁力，当两个力抵消时将处于平衡状态。(这个现象叫做**霍尔效应**。)

(b) 求出导体上下面的电势差(**霍尔电压**)，用 $\boldsymbol{B}$，v(电荷速度)以及导体相关尺寸表示。[⊜]

(c) 如果运动电荷为负电荷，那么你又将如何分析? [霍尔效应是检测材料中运动电荷正负的典型方法。]

习题 5.40　一形状不规则的平面导线(见图 5.57)，一部分处于均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，磁场如阴影区域所示，方向垂直于导线所在平面。导线通有电流 I。证明作用在导线上的磁力为 $F = IBw$，其中 w 为弦宽。把此结果推广到磁场区域本身形状是不规则的情况，力的方向朝哪?

习题 5.41　一个圆对称磁场($\boldsymbol{B}$ 仅依赖于到中心轴的距离)，方向垂直于纸面，处在图 5.58 阴影区域

⊖ 进一步的讨论见 D. C. Gabuzda, Am. J. Phys. 61, 360(1993)。

⊜ 条形导体内的势引起一个有趣的边界-值问题. 见 M. J. Moelter, J. Evans, and G. Elliot, Am. J. Phys. 66, 668 (1998)。

内。如果总磁通量($\int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$)为零，证明一个从磁场中心出发的带电粒子将沿径向从边缘射出(只要它能逃脱磁场区——如果初始速度太大，它也许永远作简单的圆周运动。)反过来，一个粒子瞄准圆心从外面入射，它将击中圆心，尽管粒子可能走过一条弯曲的路径才到达圆心。[提示：用洛伦兹力定律计算粒子获得的总角动量。]

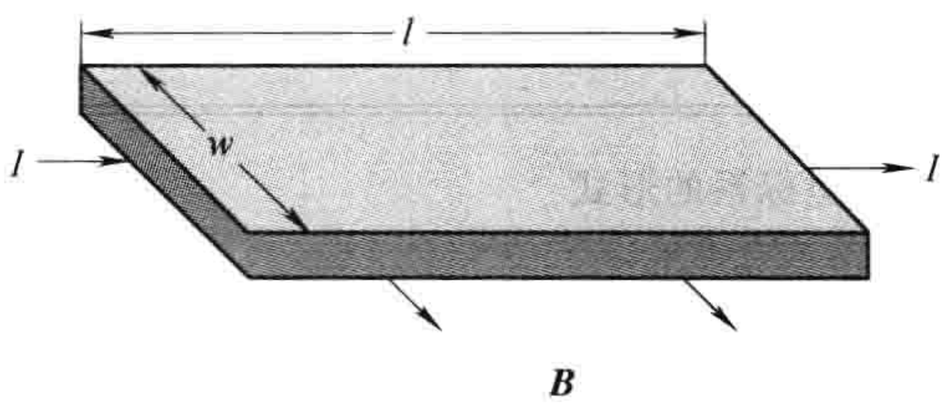


图 5.56

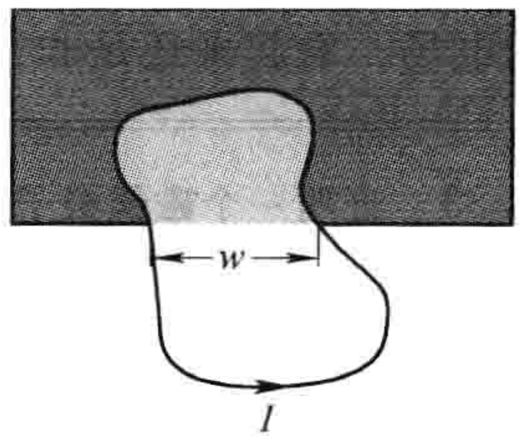


图 5.57

习题 5.42 对一个半径为 R，面电荷密度为 σ，以角速度 ω 自转的带电球壳(例题 5.11)，计算南北半球之间的相互吸引磁力。[答案：$(\pi/4)\mu_0\sigma^2\omega^2R^4$。]

习题 5.43 质量为 m，带电荷量为 q_e 的粒子在一个(假想的)静止在原点的磁单极子 q_m 所产生的磁场

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

中运动。

(a) 求出该粒子的加速度，用 q_eq_m，m，$\boldsymbol{r}$(该粒子的位置)和 $\boldsymbol{v}$(它的速度)来表示你的答案。

(b) 证明速度 $v = |\boldsymbol{v}|$ 是一个运动常量。

(c) 证明矢量

$$\boldsymbol{Q} \equiv m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) - \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi}\hat{\boldsymbol{r}}$$

是一个运动恒量。[提示：把它对时间进行求导——利用(a)中所得的运动方程——证明导数为零。]

(d) 选择球坐标(r，θ，ϕ)并让 z 轴沿 $\boldsymbol{Q}$ 方向。

(i) 计算 $\boldsymbol{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}$，证明 θ 是一个运动恒量(所以 q_e 在一个锥形表面运动——Poincaré 在 1896 年首次发现这个现象)[⊖]；

(ii) 计算 $\boldsymbol{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}$，证明 $\boldsymbol{Q}$ 的大小为

$$Q = \frac{\mu_0}{4\pi}\left|\frac{q_eq_m}{\cos\theta}\right|$$

(iii) 计算 $\boldsymbol{Q} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}$，证明

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{r^2}$$

并确定常数 k。

(e) 在球坐标中表示出 v^2，得出下列形式的轨迹方程

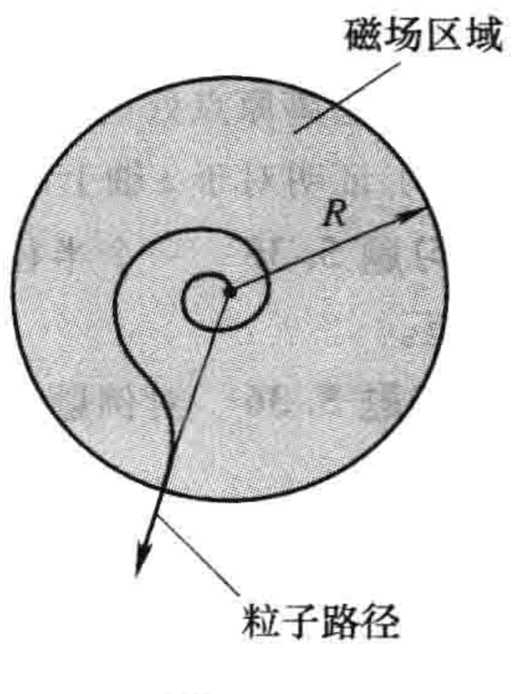


图 5.58

⊖ 事实上电荷在圆锥面上的轨迹是测地线(曲面上两点之间距离最短的线)。最初的文献见 H. Poincaré, Comptes rendus de l'Academie des Sciences 123, 530(1896)；一个更现代的处理见 B. Rossi and S. Olbert, Introduction to the Physics of Space(New York: McGraw-Hill, 1970)。

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = f(r)$$

(即确定函数 $f(r)$)。

(f) 对这个方程求 $r(\phi)$。

！习题 5.44　半径为 R 的无限长螺线管，单位长度绕有 n 匝线圈，通有电流 I。用毕奥-萨伐尔定律(更方便的是用适用于面电流的式(5.39))求出螺线管内外的磁场。

习题 5.45　一个半圆形导线带有稳恒电流 I(它必须与其他导线连接形成完整电流回路，但是这里我们不用考虑这个)，求在另一半圆上 P 点的磁场(见图 5.59)。[答案：$(\mu_0 I/8\pi R)\ln\left\{\tan\left(\frac{\theta+\pi}{4}\right)/\tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\right\}$]

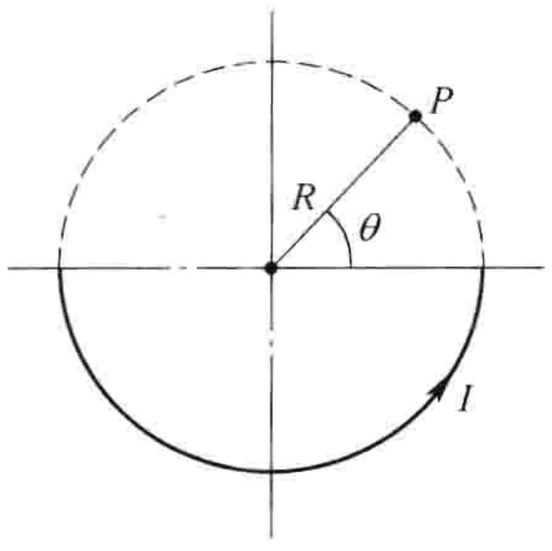


图　5.59

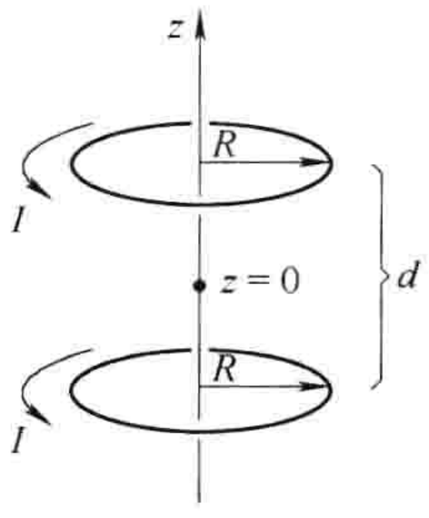


图　5.60

习题 5.46　圆形电流中心轴线上的磁场是非常不均匀的(随着距中心点距离的增加而迅速减小)。你可以用两个相距为 d 的同样的圆电流来产生一个非常接近均匀的磁场(见图 5.60)。

(a) 作为 z 的函数求出磁场 $\boldsymbol{B}$，证明在两圆电流之间的中点($z=0$ 处)$\partial B/\partial z$ 为零。现在，如果你把 d 选取得正好使 B 的二阶导数在中点也为零，这种安排就是**亥姆霍兹线圈**，是一种在实验室中产生相对均匀的磁场非常有效的方法。

(b) 在中点处用 $\partial^2 B/\partial z^2 = 0$ 来决定 d，找出中心处的磁场[答案：$8\mu_0 I/5\sqrt{5}R$]。

！习题 5.47　对习题 5.6 中的(a)转动圆盘，(b)转动球，求出轴线上 $z > R$ 处的磁场。

习题 5.48　假设你想求出距离一个圆电流中心为 $\boldsymbol{r}$ 处的磁场，这点并不在圆心的正上方(见图 5.61)。你可能会选择坐标方向使 $\boldsymbol{r}$ 处在 yz 平面内的$(0, y, z)$处。源点为$(R\cos\phi', R\sin\phi', 0)$，$\phi'$从 0 变化到 2π。给出用来计算 B_x，B_y，B_z 的积分式并计算出 B_x。

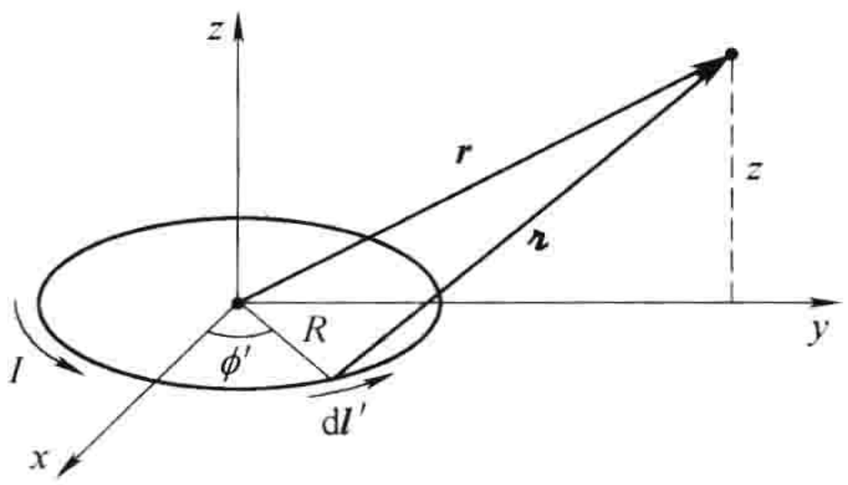


图　5.61

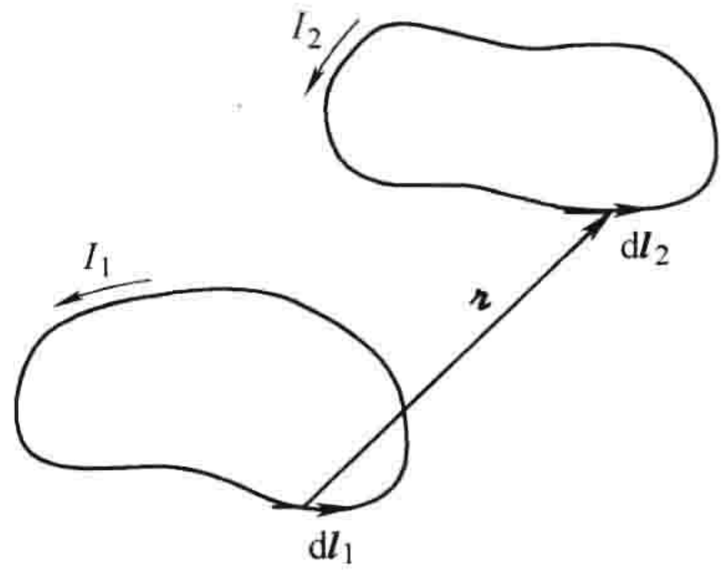


图　5.62

习题 5.49　在静磁学处理中“源电流”(产生磁场的电流)和“接收电流”(感受磁力的电流)是非对称的，这使得两电流之间的相互作用磁力符合牛顿第三定律的表现不是很明显。证明：由毕奥-萨伐尔定律式(5.32)和洛伦兹力定律式(5.16)，线圈 1 作用在线圈 2 上的磁力(见图 5.62)可以写为

$$\boldsymbol{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \tag{5.88}$$

从这种形式可以清晰看出 $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$，因为当 1 和 2 的角色互换时，$\hat{\boldsymbol{r}}$ 的方向反向。(如果你似乎得到一个

"额外"项，注意，$d\boldsymbol{l}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = dr$ 是有帮助的。）

习题 5.50

（a）有一种方法可弥补图 5.48 中的"缺失联系"，就是去探讨 $\boldsymbol{A}$ 的定义方程（$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$，$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$）和 $\boldsymbol{B}$ 的麦克斯韦方程（$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$，$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$）之间的类比。显然，$\boldsymbol{A}$ 对 $\boldsymbol{B}$ 的依赖与 $\boldsymbol{B}$ 对 $\mu_0 \boldsymbol{J}$ 的依赖（即毕奥-萨伐尔定律）是以同样的方式。基于这个观察，写出用 $\boldsymbol{B}$ 来表示 $\boldsymbol{A}$ 的公式。

（b）对你（a）中所得结果的电场类比是：

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \cdot \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} d\tau'$$

通过分析类似性求出这个式子。

习题 5.51 另一种去填补图 5.48 中的"缺失联系"的方法是找出一个相应于式（2.21）的静磁学类比，一个显然的候选是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathcal{O}}^{r} (\boldsymbol{B} \times d\boldsymbol{l})$$

（a）对最简单的可能情况——均匀磁场 $\boldsymbol{B}$，验证这个公式（以原点作为参考点 $\mathcal{O}$）。这个结果与习题 5.24 一致吗？你可以在公式前引入因子 $\frac{1}{2}$ 来消除这个问题，但是方程的缺陷会更加明显。

（b）通过对图 5.63 所示的矩形闭合回路计算 $\oint(\boldsymbol{B} \times d\boldsymbol{l})$，去证明 $\int(\boldsymbol{B} \times d\boldsymbol{l})$ 不是独立于路径的。

就我所知[⊖]，沿着这些路径我们可做的最好的是下面一对方程：

（i）$V(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{r} \cdot \int_0^1 \boldsymbol{E}(\lambda \boldsymbol{r}) d\lambda$，

（ii）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{r} \times \int_0^1 \lambda \boldsymbol{B}(\lambda \boldsymbol{r}) d\lambda$。

（方程（i）相当于在式（2.21）中为积分选择了一个径向路径，方程（ii）为习题 5.30 构造了一个更"对称"的解。）

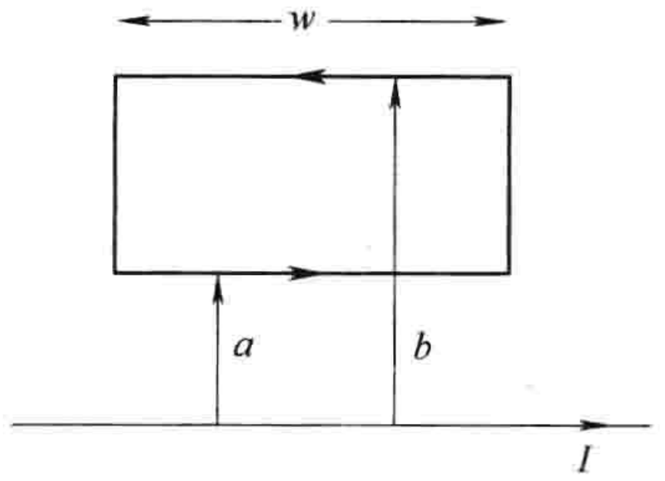


图 5.63

（c）利用（ii）求出均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 的矢势。

（d）用（ii）求出载流 I 的无限长直导线的矢势。（ii）是否自动满足 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$？［答案：$(\mu_0 I/2\pi s)(z\hat{\boldsymbol{s}} - s\hat{\boldsymbol{z}})$］

习题 5.52

（a）对"纯粹"磁偶极子构造它的磁标势 $U(\boldsymbol{r})$。

（b）对旋转的球壳（例题 5.11）构造它的磁标势。［提示：对 $r > R$，这是个"纯粹"的磁偶极子的磁场，你可以通过比较式（5.67）和式（5.85）看出。］

（c）试着对一个旋转球内部作同样的探讨。［提示：如果你解答了习题 5.29，你就已经知道了磁场；让它等于 $-\nabla U$，并求解 U，麻烦是什么？］

习题 5.53 正如 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 可使我们通过矢势的旋度表示 $\boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$）。因此 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ 可使我们将 $\boldsymbol{A}$ 自身作为"更高"势的旋度：$\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{W}$（这种传承可以无限地扩展下去。）。

（a）求出 $\boldsymbol{W}$ 的一般方程形式（作为对 $\boldsymbol{B}$ 的积分），当在 ∞ 处 $\boldsymbol{B} \to 0$ 它也成立。

（b）求出均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 的 $\boldsymbol{W}$。［提示：见习题 5.24。］

（c）求出无限长直螺线管内部和外部的 $\boldsymbol{W}$。［见例题 5.12。］

习题 5.54 证明下面的唯一性定理：如果在一个体积 V 内指定了电流密度 $\boldsymbol{J}$，以及磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 或磁场 $\boldsymbol{B}$ 在 V 的表面 S 上的值，则在体积 V 内磁场本身被唯一地确定。［提示：首先用散度定理去证明

$$\int \{(\nabla \times \boldsymbol{U}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{V}) - \boldsymbol{U} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{V})]\} d\tau = \oint [\boldsymbol{U} \times (\nabla \times \boldsymbol{V})] \cdot d\boldsymbol{a}$$

⊖ R. L. Bishop and S. I. Goldberg，流形上的张量分析，4.5 节（New York：Macmillan，1968）。

式中，$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 为任意矢量函数。]

习题 5.55　一个磁偶极矩 $\boldsymbol{m} = -m_0\hat{\boldsymbol{z}}$ 放置在原点并处于另一个均匀磁场 $\boldsymbol{B} = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$ 中，证明：存在一个中心 在原点的球面，没有磁场线穿过它。求出球的半径，描绘出球内和球外的磁场线。

习题 5.56　如图 5.64 所示，一个质量为 M 环形圈，带有均匀分布的电荷 Q，绕着它的轴线旋转。

(a) 找出磁偶极矩与角动量之比，这叫做**旋磁比**。

(b) 对于一个均匀旋转球，它的旋磁比为多少？[这不需要新的计算；仅仅将球分解为无限多的环状，再应用(a)的结果。]

(c) 根据量子力学，电子的自旋角动量为 $\frac{1}{2}\hbar$，其中 $\hbar$ 为普朗克常量。以 $\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$ 为单位，电子的磁偶极矩为多少？[这个半经典的值比实际值小了几乎为 2 的一个因子；Dirac 的相对论的电子理论获得了正确的 2 因子，Peynman，Schwinger 和 Tomonaga 后来计算了更进一步的精细修正，电子的磁偶极矩的确定依然是量子电动力学中最出色的成就，在所有的物理学领域中展示了理论和实验的最令人惊奇的一致的结果。顺便提及，量 $(e\hbar/2m)$，其中 e 为电子电荷量，m 是它的质量，称为**玻尔磁子**。]

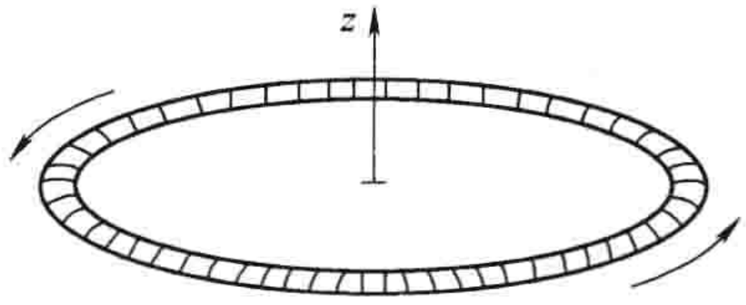


图　5.64

习题 5.57

(a) 证明，一个半径为 R 的球，由球内稳恒电流产生的磁场对球的平均值为

$$\boldsymbol{B}_{\text{平均}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\boldsymbol{m}}{R^3} \tag{5.89}$$

式中，$\boldsymbol{m}$ 为球的总磁偶极矩。与静电学的结果式(3.105)相比较。[这有点难，因此我将给你们一个开端：

$$\boldsymbol{B}_{\text{平均}} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\tau$$

用 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 来表示 $\boldsymbol{B}$ 并应用习题 1.60(b)。现在代入式(5.63)，首先进行表面积分：

$$\int \frac{1}{\imath}\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{4}{3}\pi\boldsymbol{r}'$$

(见图 5.65)，如果你喜欢，可以用式(5.91)。]

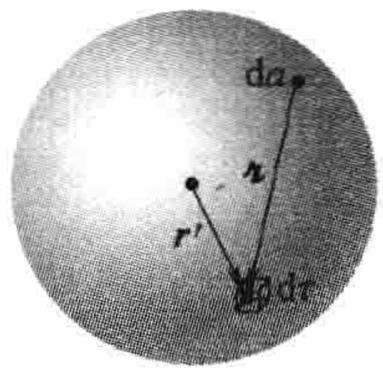


图　5.65

(b) 证明由球外部稳恒电流产生的平均磁场与它们在球心处产生的磁场是一样的。

习题 5.58　一个半径为 R 的均匀带电球，总电荷量为 Q，球绕着 z 轴以角速度 ω 旋转。

(a) 球的磁偶极矩为多少？

(b) 求出球内部的平均磁场(见习题 5.57)。

(c) 对 $r >> R$，求出点 $(r,\ \theta)$ 处的近似磁矢势。

(d) 求出球外部一点 $(r,\ \theta)$ 处的精确磁矢势，验证它与(c)的结果一致。[提示：参考例题 5.11。]

(e) 求出球内部一点 $(r,\ \theta)$ 处的磁场，验证它与(b)的结果一致。

习题 5.59　利用式(5.86)，对一个中心在原点，半径为 R 的球，计算一个磁偶极子的平均磁场。首先进行对角度的积分。将你的结果与习题 5.57 中的一般定理进行比较。解释差异，说明式(5.87)怎样能够被修正去解决在 $r=0$ 处的不确定。(如果你进展不顺利，参考习题 3.42。)

明显地，磁偶极子的真实场为

$$\boldsymbol{B}_{\text{偶极}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}[3(\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{m}] + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{m}\delta^2(\boldsymbol{r}) \tag{5.90}$$

比较静电学中的类似式(3.106)。[顺便提及，δ 函数项与原子光谱中超精细结构有关——例如，见 D. J. Griffiths，Am. J. Phys. 50，698(1982)。]

习题 5.60 我做出了一个线电流矢势的多极展开，因为这是最普通的类型，在某些方面，这也是最容易处理的。对体电流密度 $\boldsymbol{J}$：

(a) 写出类似于式(5.78)的多极展开。

(b) 写出磁单极子的磁矢势，证明它为零。

(c) 应用式(1.107)和式(5.84)，证明磁偶极矩可以写为

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{J})\, \mathrm{d}\tau \tag{5.91}$$

习题 5.61 一个半径为 R，长为 L 的细玻璃棒，表面有均匀电荷 σ。它关于其中心轴线以角速度 ω 旋转，找出距离棒中心轴线为 s 处的磁场，$s >> R$，(见图 5.66)。[提示：将它看成许多磁偶极子来处理。][答案：$\mu_0 \omega \sigma L R^3 / 4[s^2 + (L/2)^2]^{3/2}$]

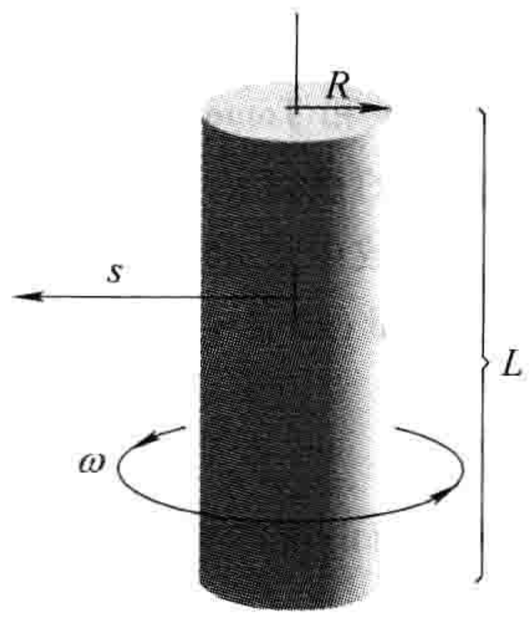


图 5.66

第 6 章　物质中的磁场

6.1　磁化

6.1.1　抗磁体、顺磁体和铁磁体

如果你问平常人“磁性”是什么，你可能会被告知一些马蹄形磁铁、指南针和北极这样的事——这其中没有一样与运动电荷或者载流导线有任何明显的联系。然而，所有磁现象都是由运动电荷所产生的，事实上，如果你可以在原子级别仔细观察一块磁性材料，你也许就可以在其中发现微小的电流：围绕原子核旋转的电子和电子的自旋。对宏观效果来说，这些环形电流是如此之小以至于我们可以把它们当做磁偶极子对待。通常，这些环形电流由于原子的随机取向会相互抵消。但是，当施加外磁场后这些磁偶极子会出现有序的排列，介质从而呈现磁性，或称为**磁化**。

与极化方向几乎与外电场 $\boldsymbol{E}$ 方向相同的电极化不同，有些物质有与外磁场 $\boldsymbol{B}$ 平行的磁化方向(顺磁体)，而有些有与 $\boldsymbol{B}$ 方向相反的磁化方向(抗磁体)。此外，还有少数物质(出于对于这一类物质最常见例子铁的尊重，我们称之为铁磁体)即使在外磁场撤销之后仍然保持磁性——对这些物质来说，其磁化不仅仅由当时的外场确定，更与其整个磁化“历史”有关。由铁制造的永磁铁是最熟悉的例子，尽管从理论角度考虑它们是最复杂的。我将把对于铁磁体的讨论留在本章的最后，先讨论顺磁体和抗磁体的定性模型。

6.1.2　作用在磁偶极子上的力和力矩

正如电偶极子在电场中受到一个力矩作用一样，磁偶极子在磁场中也受到力矩作用。让我们来计算一下在匀强磁场中一个矩形环形电流受到的力矩。(如图 6.1 所示，由于内边电流相互抵消，任意形状的闭合电流都可以由无限小的矩形环形电流叠加而成，所以利用矩形环形电流进行讨论并不失普遍性；但是如果你更喜欢从一个任意形状的闭合电流开始讨论，可参见习题 6.2)。将矩形的中心置于坐标原点，然后将其从 z 轴向 y 轴倾斜一个角度 θ(见图 6.2)。令 $\boldsymbol{B}$ 沿着 z 轴方向。这样，两个倾斜边上的力相互抵消(这两个力有拉伸线圈的趋势，但是并不会使线圈旋转)。同样的，施加在两个水平边上的力相等并且反向(所以施加在线圈上的合力为零)，但是这一对力产生了一个力矩：

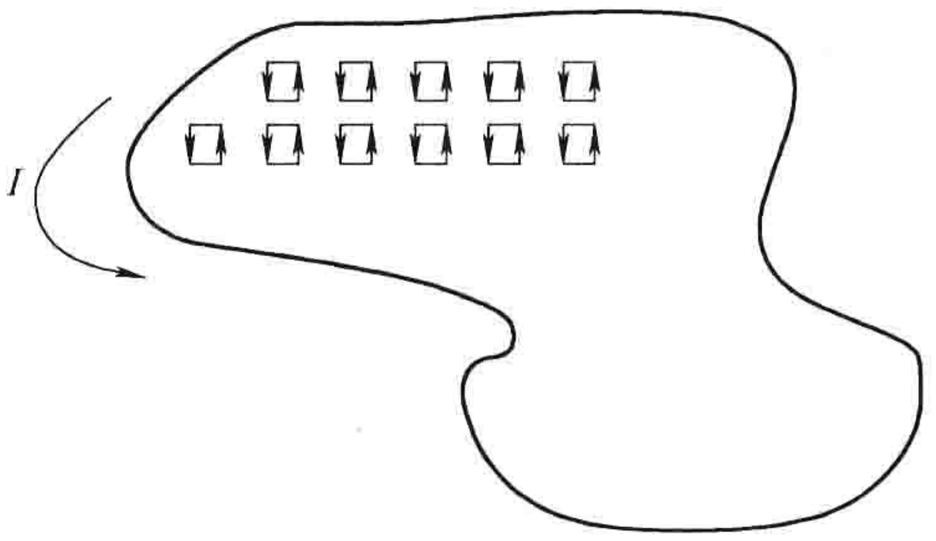


图　6.1

$$\boldsymbol{N} = aF\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}}$$

施加在这两个水平边上的力的大小均为

$$F = IbB$$

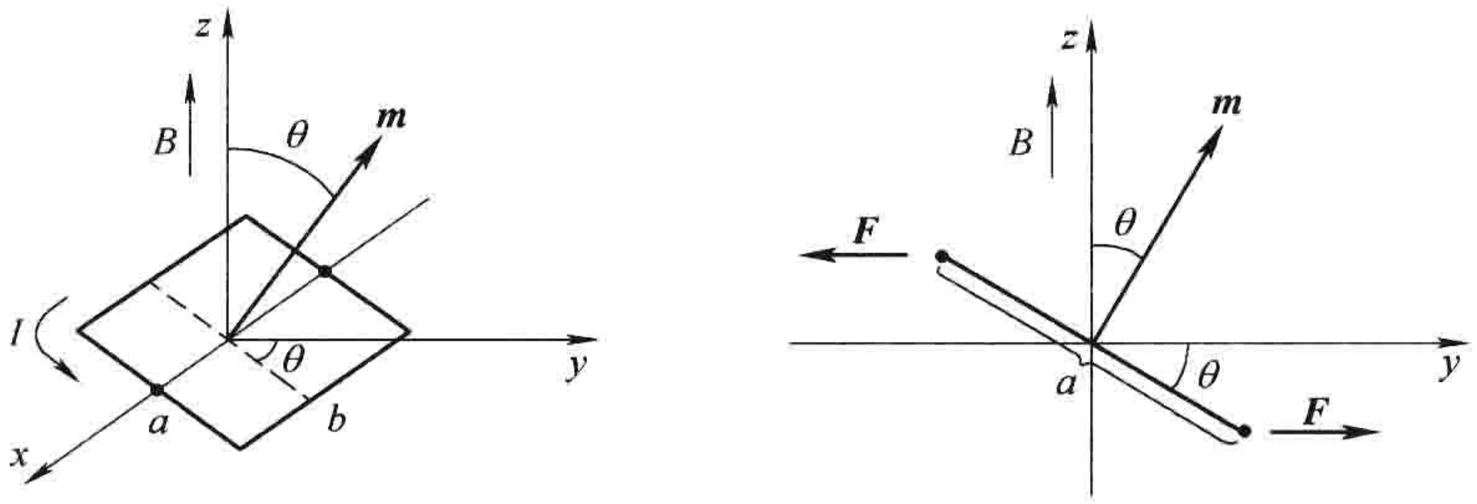
因此

$$\boldsymbol{N} = IabB\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} = mB\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}}$$

或者

$$\boxed{\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}} \tag{6.1}$$

式中，$m = Iab$ 是这个线圈的磁偶极矩。式(6.1)给出了在匀强磁场情形下任意局域电流分布的精确力矩；在非匀强磁场中，该式为一个无限小理想磁偶极子的精确力矩(对磁偶极子中心)。



a) b)

图 6.2

注意，式(6.1)在形式上与电学中的类似式 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$(式(4.4))是相同的。特别是，力矩方向仍然是把偶极子拽向平行于外场的方向。正是这个力矩导致了**顺磁性**。由于每个电子构成一个磁偶极子(想象它，如果你愿意的话，你可以设想其为一个微小的旋转的电荷球)，所以你可以预计顺磁性是一种普遍现象。实际上，量子力学定律(具体来说，泡利不相容原理)要求给定原子中电子成对出现时必须具有相反自旋，这样就有效地降低了总体上的力矩。因此，顺磁效应通常出现在拥有奇数个电子的原子或者分子中，其中“多余”的未配对电子会被磁力矩所影响。即使这样，由于随机热碰撞有消除这种有序的倾向，磁偶极子的同向排列远未完成。

在一个匀强磁场中，一个闭合电流受到的合力为零：

$$\boldsymbol{F} = I\oint(\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}) = I(\oint \mathrm{d}\boldsymbol{l}) \times \boldsymbol{B} = 0$$

这里常数 $\boldsymbol{B}$ 被提到积分号之外，并且环绕闭合回路的总位移 $\oint \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为 0。然而在非匀强磁场中情况并非如此。例如，考虑一个通有电流大小为 I，半径为 R 的环形导线，将其悬挂于一个短螺线管之上的“边缘”区域中(见图 6.3)。这里 $\boldsymbol{B}$ 有径向分量，所以线圈受到一个向下的合力(见图 6.4)：

$$F = 2\pi IRB\cos\theta \tag{6.2}$$

对一个处于磁场 $\boldsymbol{B}$、磁矩为 $\boldsymbol{m}$ 的无限小闭合电流，其受到的力为

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B})} \tag{6.3}$$

(见习题 6.4)。又一次，磁学公式和它的电学“双胞胎”一模一样，只要我们愿意将后者写为 $\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E})$。

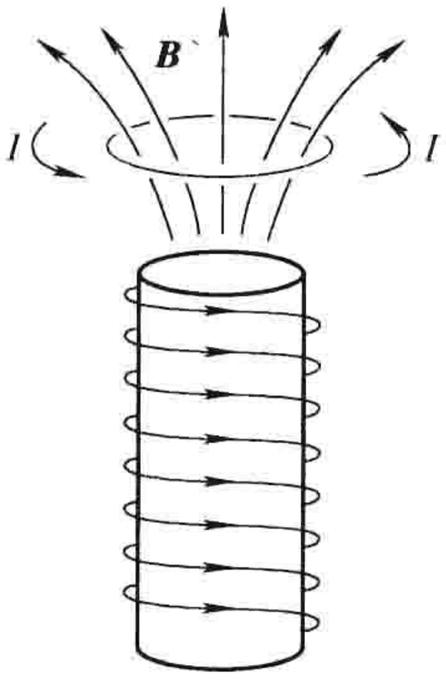


图 6.3

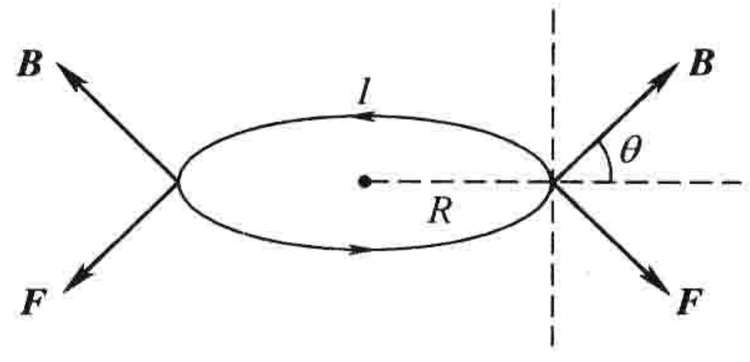


图 6.4

如果你开始有一种似曾相识的感觉的话，也许你就会对早期物理学家感到更加敬佩，他们认为，与电偶极子一样，磁偶极子是由分开了一小段距离的正、负“磁荷”(他们把它们叫做北和南“磁单极子”)构成的。他们写出了关于这些磁单极子之间吸引和排斥作用的“库仑定律”，并且发展了一套与静电学严格类比的完善的静磁学。对很多目的而言，这并不是一个很糟的模型——它给出了一个磁偶极子正确的磁场(至少远离原点时)，以及作用在磁偶极子上的正确力矩(至少在磁偶极子静止时)和外力(至少在不存在外部电流时)。但是这个模型物理上是不正确的，因为单独的磁北极或者磁南极并不存在。如果你把一个条形磁铁从中间掰成两瓣，你并不会得到一只手中是北极而另一只手中是南极的结果；你得到的是两个完整的磁铁。磁现象不是归因于磁单极子，而是电荷的运动；磁偶极子是微小的环形电流(见图 6.5c)，尽管涉及 $\boldsymbol{m}$ 的公式与涉及 $\boldsymbol{p}$ 的相应公式有相似之处，但它是一种极不普通的事物。有些时候按照磁偶极子的“吉尔波特(Gilbert)模型”(分开的磁单极子)比按照物理上正确的“安培模型”(环形电流)思考甚至更为简单。的确，这种图像有时候会提供一种快捷的方法去求解一些棘手的问题(你只需简单复制静电学的对应结果，用 $\boldsymbol{m}$，μ_0，$\boldsymbol{B}$ 替换 $\boldsymbol{p}$，$1/\varepsilon_0$，$\boldsymbol{E}$)。但当靠近磁偶极子时，这两种模型会得出明显不同的答案。我的建议是，如果你乐意，使用吉尔波特模型来获得对一个问题的直观感觉，但是永远不要依靠这种方法来获得定量的结果。

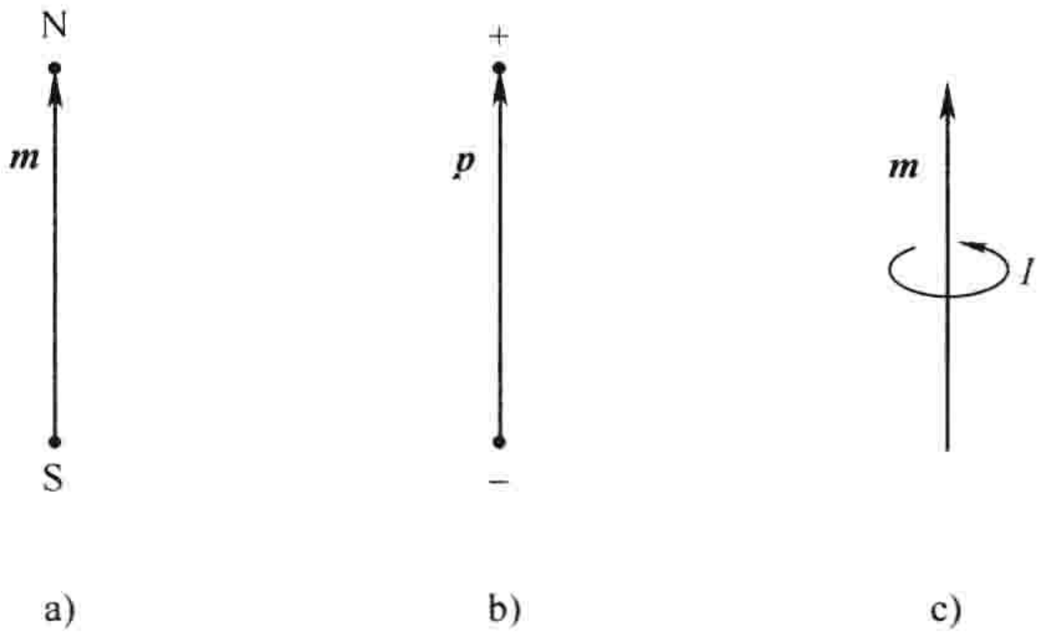


图　6.5

a)磁偶极子　b)电偶极子　c)磁偶极子
(吉尔波特模型)　(安培模型)

习题 6.1　计算图 6.6 中所示的圆形线圈施加在正方形线圈上的力矩(假设 r 远远大于 a 或 b)。如果正方形线圈可以自由转动，线圈的平衡方向是什么?

习题 6.2　从洛伦兹力定律入手，以式(5.16)的形式，证明在匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 中任意具有稳恒电流分布的线圈(不只是方形线圈)受到的力矩为 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$。

习题 6.3　如图 6.7 所示，求出距离为 r 的两个磁偶极子 $\boldsymbol{m}_1$ 和 $\boldsymbol{m}_2$ 之间的吸引力：(a)利用式(6.2)，(b)利用式(6.3)。

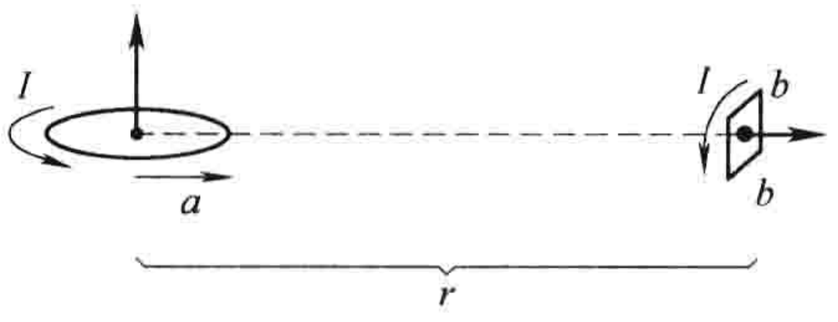


图　6.6

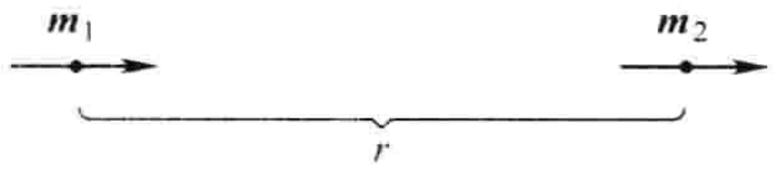


图　6.7

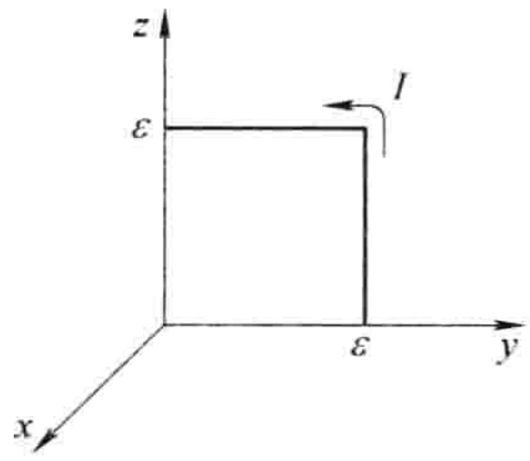


图　6.8

习题 6.4　推导出式(6.3)。[这里给出一种方法：假设一个无穷小的方形磁偶极子，其边长为 ε(如果不是这样，可以将其切割为方形，并且将以下论证应用到每一个方形线圈)。选择如图 6.8 所示的坐标轴，并且沿着这四条边计算 $\boldsymbol{F}=I\int(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})$。将等式右侧的 $\boldsymbol{B}$ 展开为泰勒级数，例如，

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(0,\varepsilon,z) \cong \boldsymbol{B}(0,0,z) + \varepsilon \left.\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\right|_{(0,0,z)}$$

一个更完善的方法，见习题 6.22。]

习题 6.5 一个通有均匀电流 $\boldsymbol{J} = J_0\hat{\boldsymbol{z}}$ 的平板导体板面垂直于 y 轴，板的一边位于 $x = -a$，另一边位于 $x = a$。一个磁偶极矩 $\boldsymbol{m} = m_0\hat{\boldsymbol{x}}$ 位于原点。

(a) 利用式(6.3)求作用在磁偶极矩上的力。

(b) 若磁偶极矩沿 y 轴方向 $\boldsymbol{m} = m_0\hat{\boldsymbol{y}}$，求作用在磁偶极矩上的力。

(c) 在静电学情况下，表示式 $\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})$ 与 $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}$ 是等价的(证明它)，但静磁学中的类比式并非如此(解释为什么)。作为一个例子，用 $(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$ 计算(a)，(b)中的力。

6.1.3 磁场对原子轨道的效应

电子不仅仅有自旋，它们还围绕原子核运动——为了简单起见，我们假定电子的轨道是一个半径为 R 的圆(见图 6.9)。尽管从技术上讲，这种轨道运动无法形成一个稳恒电流，不过实际上运动的周期 $T = 2\pi R/v$ 非常短，除非你眨眼极快，否则完全可以把它看成一个稳恒电流：

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R}$$

因此，轨道磁偶极矩($I\pi R^2$)为

$$\boldsymbol{m} = -\frac{1}{2}evR\hat{\boldsymbol{z}} \tag{6.4}$$

(负号是由于电子为负电荷。)和其他磁偶极子一样，当原子位于磁场中时，这个磁偶极子会受到一个力矩 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$ 的作用。但是，相比起自旋，它使整个轨道倾斜要难得多，所以对于顺磁性，轨道的贡献很小。可是，外磁场对于轨道运动有一个显著得多的效应：取决于 $\boldsymbol{B}$ 取向的电子的加速或减速。尽管正常情形下离心加速度 v^2/R 是由库仑力提供的，[⊖]

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2} = m_e\frac{v^2}{R} \tag{6.5}$$

当存在磁场时还存在一个额外的力，$-e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$。为了论证起来方便(见图 6.10)，让我们假设 $\boldsymbol{B}$ 垂直于轨道平面；这样有

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2} + e\bar{v}B = m_e\frac{\bar{v}^2}{R} \tag{6.6}$$

在这些条件下，新的速度 $\bar{v}$ 比原先的速度 v 要大：

$$e\bar{v}B = \frac{m_e}{R}(\bar{v}^2 - v^2) = \frac{m_e}{R}(\bar{v}+v)(\bar{v}-v)$$

或者，假定速度变化 $\Delta v = \bar{v} - v$ 很小，

$$\Delta v = \frac{eRB}{2m_e} \tag{6.7}$$

当 $\boldsymbol{B}$ 出现时，则电子的速度变大。[⊖]

轨道速度的变化也就意味着偶极矩(式(6.4))的变化：

⊖ 为了避免与磁偶极矩 m 混淆，我将把电子质量写成带有下标的形式：m_e。

⊖ 我之前曾经说过(式(5.11))磁场不做功，所以不能讲一个粒子加速。我坚持这一点。但是，在第 7 章你们将会看到，一个变化的磁场会产生电场，正是后者在这个情形下加速了电子。

$$\Delta \boldsymbol{m} = -\frac{1}{2}e(\Delta v)R\hat{\boldsymbol{z}} = -\frac{e^2R^2}{4m_e}\boldsymbol{B} \tag{6.8}$$

注意，$\boldsymbol{m}$ 的改变量与 $\boldsymbol{B}$ 的方向相反(用另一种方式旋转的电子有一个向上的偶极矩，但是有这种轨道的电子会被减速，所以改变量仍然与 $\boldsymbol{B}$ 方向相反)。通常情况下，电子轨道方向是随机的，所以轨道偶极矩相互抵消。但是当外磁场存在时，每个原子都获得了一个与外场反平行的“额外”的微小磁矩。这就是产生抗磁性的机制。这是一种影响所有原子的普遍现象。不过，通常抗磁性要比顺磁性弱得多，所以抗磁性一般只能在顺磁性通常不存在的具有偶数个电子的原子中观察到。

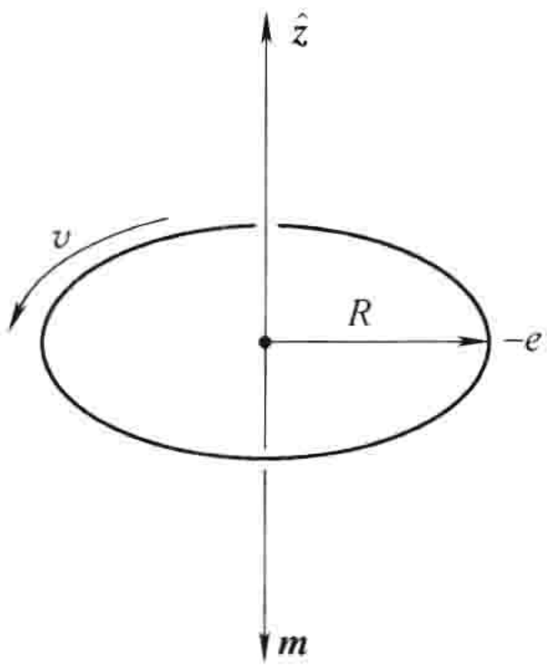


图　6.9

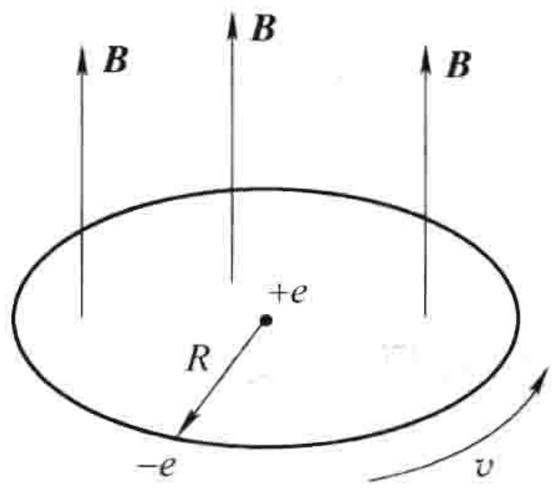


图　6.10

在推导式(6.8)时，我假定了原先半径为 R 的圆轨道仍然被保持。在现阶段，我还不能对此给出证明。如果当加上磁场时原子是静止的，则我的假设就可以得到证明——但是，这种情况不是静磁学，所以证明的细节必须等到第 7 章时才能给出(见习题 7.49)。如果是原子射入磁场的情况，情况就更复杂了。但是别介意——我只是尝试给你们一个抗磁性的定性解释。假设，如果你们愿意的话，当原子半径轨道改变时速度保持不变——$\boldsymbol{m}$ 改变量的式(6.8)就改变了(多一个因子 2)，但是对于我们的结论并没有任何影响。事实是这种经典模型具有根本性的不足(抗磁性其实是一种量子现象)，所以也没有必要来补充更多的细节。[⊖]真正重要的是这种诱导出来的偶极矩和磁场方向相反这样的经验事实。

6.1.4　磁化强度

当存在磁场时，物质被磁化；即，在微观观察之下可以发现这些物质包含很多微小的偶极子，而这些偶极子有沿着某一个方向的净的定向排列。我们已经讨论了这种磁化的两种机制：(1)顺磁性(和未配对电子自旋有关的偶极子受到一个促使它们排列为和外场方向相平行的方向的力矩)和(2)抗磁性(电子的轨道速度被改变，这种原因导致轨道磁矩产生了一个和外场方向相反的改变量)。不论原因是什么，我们都可以利用一个矢量来描述这种磁化

$$\boldsymbol{M} \equiv \text{单位体积内的总磁偶极矩} \tag{6.9}$$

$\boldsymbol{M}$ 称为**磁化强度**；它和电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 在静电学中的作用相似。在接下来的章节中，我们将不再考虑磁化是如何出现的——可以是因为顺磁性、抗磁性，甚至是铁磁性——我们将把 $\boldsymbol{M}$ 当做一个已知量，并且计算磁化本身产生的磁场。

⊖ S. L. O'Dell and R. K. P. Zia, *Am. J. Phys.* 54, 32, (1986); R. Peierls, *Surprises in Theoretical Physics*, Section 4.3 (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1979); R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 2, Sec. 34-36(New York: Addison-Wesley, 1966)。

顺便指出，当知道所有物质都会受到磁场影响，你可能感到惊讶，即便它们不是著名的铁磁三元素(铁，镍，钴)。当然，你不可能用磁铁吸起一块木头或者铝。其原因在于它们的抗磁性和顺磁性都非常弱：需要精心设计的实验和强磁铁才有可能探测到。如果如图 6.3 一样，你将一块顺磁材料置于一个螺线管上，那么诱导的磁化将会是向上的，因此材料会受到向下的力。与此相反，抗磁材料的磁化方向将会是向下的并且受力是向上的。一般来讲，当一个样品被置于非匀强磁场区域时，顺磁体会被吸引到磁场中，而抗磁体会被排斥出去。但是实际上的力却很令人遗憾地小——在典型的实验配置中，类似的铁样品受到的力将会比其大 10^4 或者是 10^5 倍。这也就是为什么我们在第 5 章中计算一条铜线中的磁场的时候可不用考虑磁化的效果的理由。

习题 6.6 在以下材料中，你认为哪些是顺磁材料？哪些是抗磁材料？铝，铜，氯化铜($CuCl_2$)，碳，铅，氮气(N_2)，食盐(NaCl)，钠，硫磺，水。(事实上，铜具有微弱的抗磁性；除此之外，其他材料都和你的预期相同。)

6.2 磁化物体的磁场

6.2.1 束缚电流

假设我们有一磁化物体，其单位体积的磁偶极矩 $\boldsymbol{M}$ 已经给出。那么，这个物体会产生什么样的磁场？我们已知，一个单独的磁偶极子的磁矢势由式(5.83)给出：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \tag{6.10}$$

在磁介质中，每个体积元 $d\tau'$ 带有 $\boldsymbol{M}d\tau'$ 的磁偶极矩，所以总矢势为(见图 6.11)

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}d\tau' \tag{6.11}$$

原则上，情况确实如此。但是，正如电学中的情形一样(4.2.1 小节)，这个积分可以利用

$$\nabla'\frac{1}{r} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

改写为更具有启发性的形式。利用上式，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times\left(\nabla'\frac{1}{r}\right)\right]d\tau'$$

利用矢量积规则 7，将上式进行分部积分，有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\int\frac{1}{r}[\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')]d\tau' - \int\nabla'\times\left[\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{r}\right]d\tau'\right\}$$

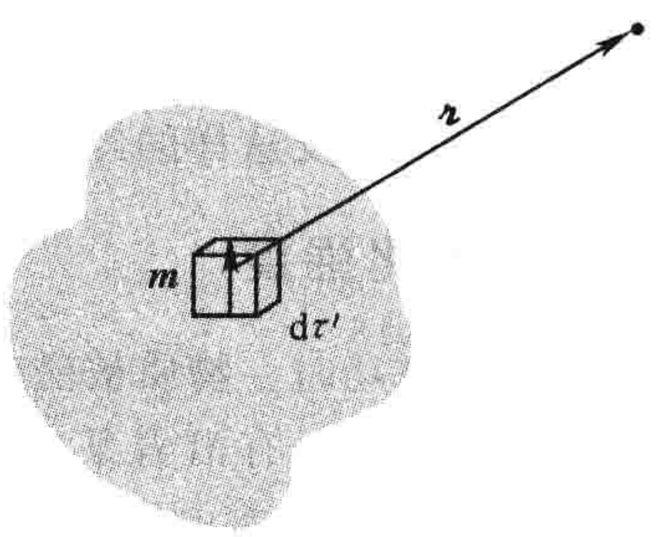


图 6.11

习题 1.60(b)提示我们可将后一项改写为一个面积分，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r}[\nabla'\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')]d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{1}{r}[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\times d\boldsymbol{a}'] \tag{6.12}$$

第一项看起来像是体电流

$$\boxed{\boldsymbol{J}_b = \nabla\times\boldsymbol{M}} \tag{6.13}$$

的势，而第二项看起来像是面电流

$$\boxed{\boldsymbol{K}_b = \boldsymbol{M}\times\hat{\boldsymbol{n}}} \tag{6.14}$$

的势，其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是法向单位矢量。用这些定义，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}_b(\boldsymbol{r}')}{\mathscr{r}}\mathrm{d}\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\boldsymbol{K}_b(\boldsymbol{r}')}{\mathscr{r}}\mathrm{d}a' \tag{6.15}$$

此式表明，一个磁化物体的矢势（因此磁场也是）同样是由整个物体中的体电流 $\boldsymbol{J}_b = \nabla \times \boldsymbol{M}$ 加上边界上的面电流 $\boldsymbol{K}_b = \boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{n}}$ 产生的。我们先不对所有的无穷小偶极子的贡献进行积分计算，如式(6.11)那样，取而代之的，我们首先处理束缚电流，利用计算其他任何体电流和面电流的磁场的同样方法来得到束缚电流产生的磁场。注意其与电学情形的明显相似性：磁场与由体束缚电荷 $\rho_b = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$ 和面束缚电荷 $\sigma_b = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ 产生的极化物体的电场在形式上一样。

例题 6.1　求出一个均匀磁化球的磁场。

解： 选择 z 轴沿着 $\boldsymbol{M}$ 方向（见图 6.12），我们有

$$\boldsymbol{J}_b = \nabla \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{K}_b = \boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{n}} = M\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

一个带有均匀面电荷 σ 的旋转球壳，会产生相似的面电流密度

$$\boldsymbol{K} = \sigma\boldsymbol{v} = \sigma\omega R\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

因此，可以得出一个均匀磁化的球的磁场与一个旋转带电球壳产生的磁场是相同的，只要 $\sigma\omega R \to M$。参考例题 5.11，可推断出球内磁场为

$$\boldsymbol{B} = \frac{2}{3}\mu_0\boldsymbol{M} \tag{6.16}$$

而球外部的磁场和一个纯粹的磁偶极子是一样的，

$$\boldsymbol{m} = \frac{4}{3}\pi R^3\boldsymbol{M}$$

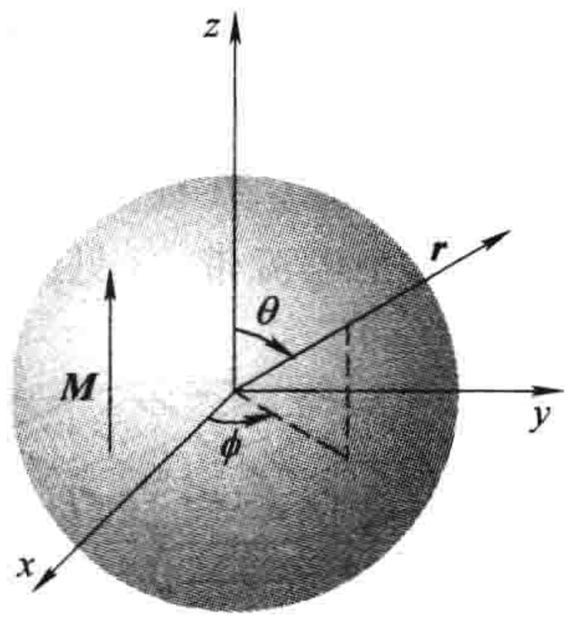


图　6.12

注意，球内的磁场是匀强的，这与均匀极化球内的电场是一样的，尽管两个情形下的实际公式明显不同（$\frac{2}{3}$取代了 $-\frac{1}{3}$的位置）。外部磁场同样也是类似的：两种情况下都是纯偶极子场。

习题 6.7　一个无穷长圆柱体带有与其轴线平行的均匀的磁化强度 $\boldsymbol{M}$。求出圆柱内外（由 $\boldsymbol{M}$ 产生）的磁场。

习题 6.8　一个半径为 R 的长圆柱带有磁化强度 $\boldsymbol{M} = ks^2\hat{\boldsymbol{\phi}}$，其中 k 为常数，s 为到圆柱轴线的距离，而 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 为通常的方位角单位矢量（见图 6.13）。求出由 $\boldsymbol{M}$ 产生的圆柱体内外的磁场。

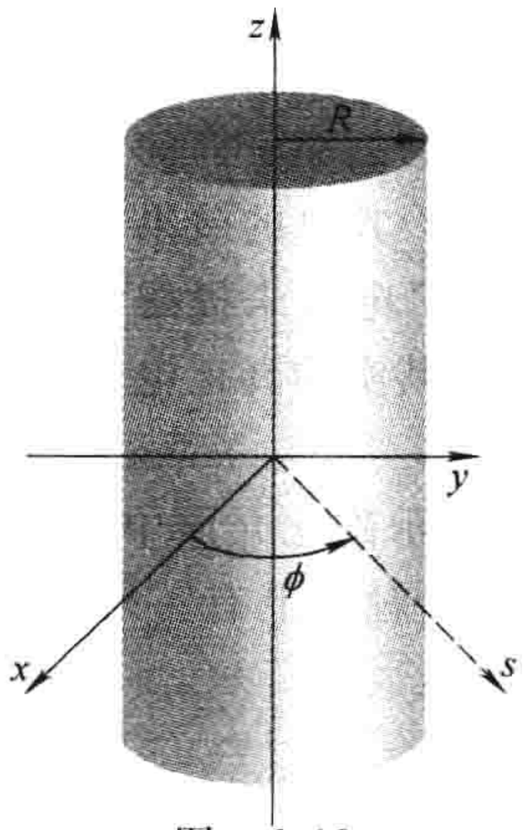


图　6.13

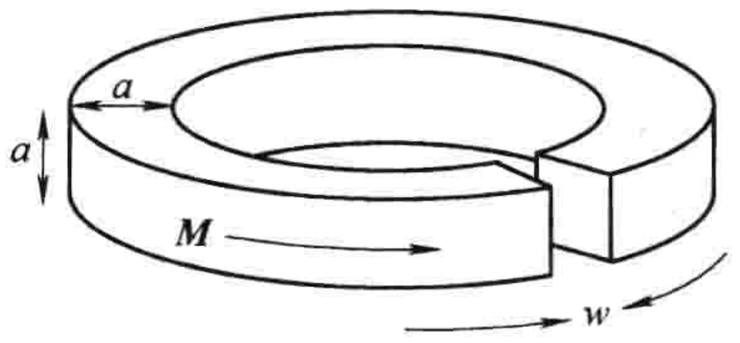


图　6.14

习题 6.9 一个半径为 a，长度为 L 的短圆柱体带有“冻结”在其中的平行于轴线的均匀磁化强度 $\boldsymbol{M}$。求出它的束缚电流，并且草画该圆柱的磁场。（对三种情况画图：一种 $L >> a$，一种 $L << a$，一种 $L \approx a$。）比较这个**条形磁铁**与习题 4.11 中的条形电极化体。

习题 6.10 一个长为 L，横截面为方形（边长为 a）的铁棒，带有一个均匀的纵向磁化强度 $\boldsymbol{M}$，然后（见图 6.14）将其弯成一个有狭窄缺口的圆（缺口宽度为 w）。设 $w << a << L$，求出缺口中心处的磁场。[提示：将其当做一个完整的环和一个电流方向相反的方形线圈的叠加。]

6.2.2 束缚电流的物理解释

在上一小节中我们知道，磁化介质产生的磁场和一个确定的束缚电流分布 $\boldsymbol{J}_b$ 和 $\boldsymbol{K}_b$ 产生的磁场是相同的。我想向你们展示物理上这些束缚电流是如何出现的。这是个启发性的论证——严格的推导在前面已经给出。图 6.15 描绘了一个由均匀磁化介质构成的薄板，其中磁偶极子由微小的环形电流代表。注意所有的内部电流相互抵消：有一个电流流向右边，就有与其相邻的电流流向左边。但是，在板的边缘处并没有毗邻的环形电流来将其抵消。于是，整体等价于一个沿边界流动的单个电流带 I（见图 6.16）。

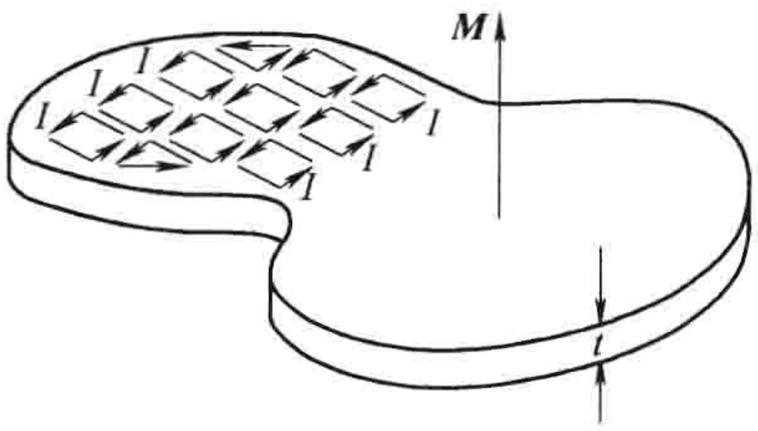


图 6.15

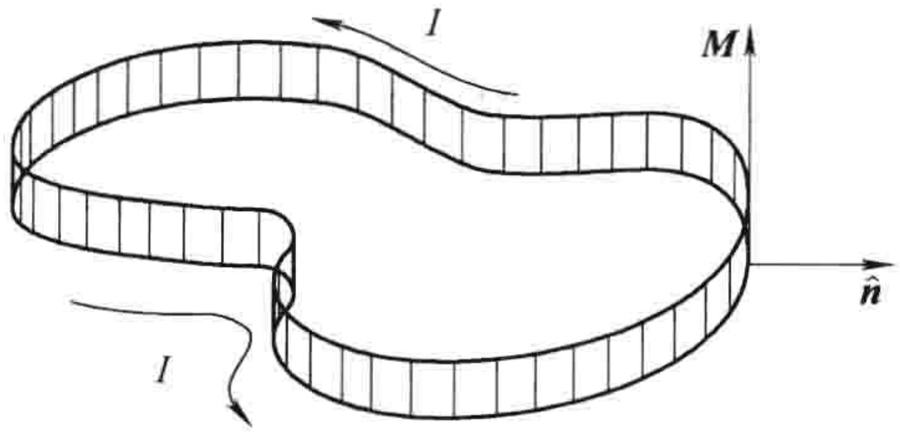


图 6.16

这个和 $\boldsymbol{M}$ 有关的电流是什么？假定每个小环形电流面积为 a，厚度为 t（见图 6.17）。用磁化强度 M 表示，这个电流的磁偶极矩为 $m = Mat$。但是，若以环形电流 I 表示，$m = Ia$。因此 $I = Mt$，所以面电流密度为 $K_b = I/t = M$。用外指的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$（见图 6.16），$\boldsymbol{K}_b$ 的方向可以很方便地由矢积得到：

$$\boldsymbol{K}_b = \boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{n}}$$

（这个式子同样说明了在薄板的顶面和底面没有电流的分布；在顶面和底面上 $\boldsymbol{M}$ 与 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 平行，所以矢积为零。）

这个束缚面电流正是我们在 6.2.1 小节得到的结果。在这种电流中，单一的电荷不可能完成整个旅程——与此相反，每个电荷只在一个单独的原子内的微小的环路中运动，从此意义上说，这是一种奇特的电流。然而，其总的效果是一个宏观的在磁化介质表面流动的电流。我们把它叫做“束缚”电流来提醒我们每个电荷都被一个特定的原子所束缚，但是它又是一个名副其实的真正电流，能够像其他任何电流一样产生磁场。

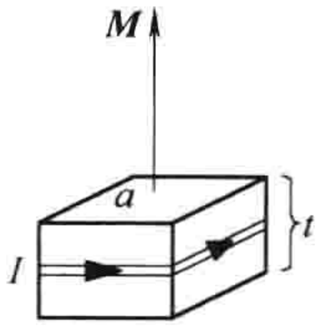


图 6.17

当磁化强度不均匀时，内部电流不再相互抵消。图 6.18a 显示磁化介质中两个毗邻的区域，其中一个大的向右箭头表示在此点磁化强度大。在两个区域的接触面上有一个沿 x 方向的净电流，它由下式给出

$$I_x = [M_z(y + dy) - M_z(y)]dz = \frac{\partial M_z}{\partial y}dydz$$

因此，相应的体电流密度为

$$(J_b)_x = \frac{\partial M_z}{\partial y}$$

同样的考虑，一个在 y 方向不均匀的磁化强度也会贡献一个量 $-\partial M_y/\partial z$（见图 6.18b），所以

$$(J_b)_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

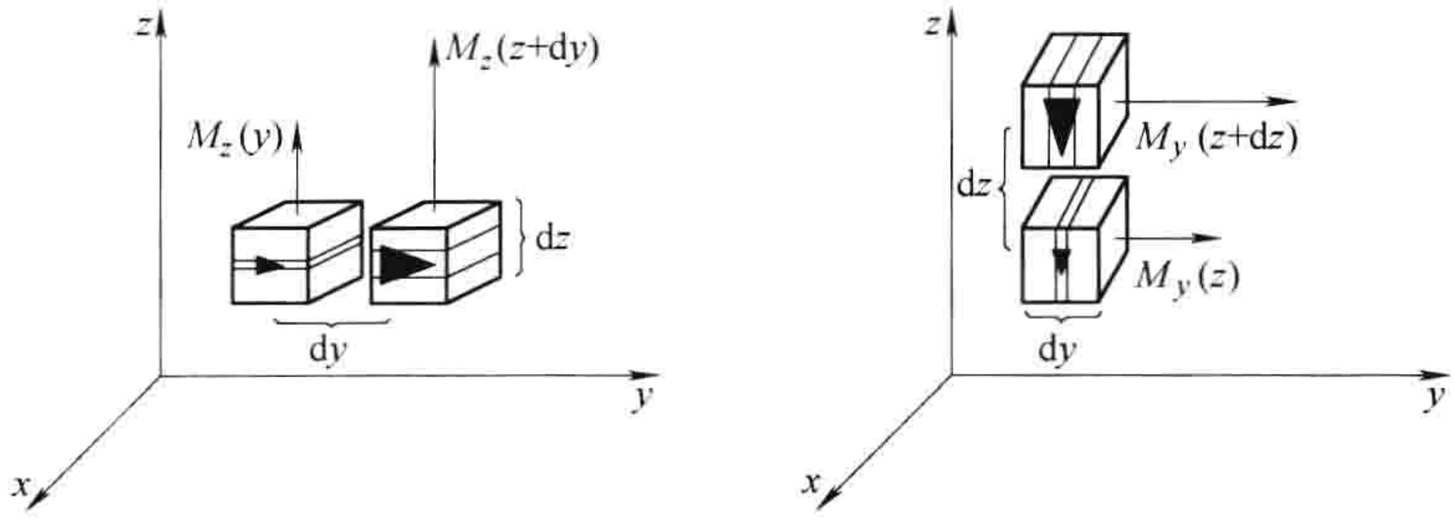
于是，普遍来讲，有

$$\boldsymbol{J}_b = \nabla \times \boldsymbol{M}$$

同样，这与在 6.2.1 小节得到的结果一致。顺便提及，和其他稳恒电流一样，$\boldsymbol{J}_b$ 遵守守恒定律式(5.31)：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}_b = 0$$

确实如此吗？当然，因为一个旋度的散度总是零。



a)　　b)

图　6.18

6.2.3　介质内的磁场

和电场一样，介质内的真实微观磁场对不同地点不同时刻而言存在剧烈的波动。当我们谈到介质内的“那个”磁场时，我们指的是宏观场：一个大到包含很多原子的区域的平均值。（磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 也在相同的意义上被平滑了。）当我们使用 6.2.1 小节的方法得到磁化介质中某一点的磁场时，我们指的是宏观场，正如你在下面的问题中能为自己证明的一样。

习题 6.11　在 6.2.1 小节中，我们是从一个理想磁偶极子的磁势开始的（式(6.10)），然而，在现实中，我们需要处理的是物理磁偶极子。利用 4.2.3 小节中给出的方法，证明我们依然得到正确的宏观磁场。

6.3　辅助场 $\boldsymbol{H}$

6.3.1　磁介质中的安培定理

在 6.2 节中，我们发现，磁化的效果就是在介质内建立体束缚电流 $\boldsymbol{J}_b = \nabla \times \boldsymbol{M}$ 和在表面上建立束缚电流 $\boldsymbol{K}_b = \boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{n}}$。由介质磁化产生的磁场就是这些束缚电流产生的磁场。我们现在可以将所有东西结合起来：束缚电流贡献的磁场，加上其他电流产生的磁场——我把它们称为**自由电流**。自由电流可以流经嵌入磁化物体内部的导线，或者，如果磁化物是一个导体，流经材料本

身。在任何情形下，总电流可以被写为

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_b + \boldsymbol{J}_f \tag{6.17}$$

在式(6.17)中并没有新的物理；将电流分为这两部分只不过是为了方便，因为它们是通过不同的方式得到的：自由电流存在是因为有人将一条导线连到电池上——它涉及实际的电荷转移；束缚电流存在是因为磁化——它是许多定向排列的原子偶极子协同作用的结果。

考虑到式(6.13)和式(6.17)，安培定理可以写为

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_f + \boldsymbol{J}_b = \boldsymbol{J}_f + (\nabla \times \boldsymbol{M})$$

或者，将式中两个旋度合并：

$$\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}\right) = \boldsymbol{J}_f$$

括号中的量用字母 $\boldsymbol{H}$ 表示：

$$\boxed{\boldsymbol{H} \equiv \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}} \tag{6.18}$$

利用 $\boldsymbol{H}$，于是，安培定理可以写作

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f} \tag{6.19}$$

或者，写成积分形式，

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_{f_{enc}} \tag{6.20}$$

式中，$I_{f_{enc}}$ 是流经安培闭合回路的总自由电流。

$\boldsymbol{H}$ 在静磁学中扮演着与静电学中 $\boldsymbol{D}$ 类似的角色：正如 $\boldsymbol{D}$ 允许我们将高斯定理写为只与自由电荷相关一样，$\boldsymbol{H}$ 使得我们可以将安培定理表述为仅与自由电流有关——自由电流是我们可以直接控制的。和束缚电荷一样，束缚电流伴随材料的磁化，磁化产生束缚电流；与自由电流不同，我们不能独立地打开或关闭束缚电流。在应用式(6.20)时，所有我们要关心的是自由电流，我们知道它，是因为它是我们施加的。尤其，当对称性允许时，我们可以直接从式(6.20)利用通常的安培定理计算 $\boldsymbol{H}$。(例如，当注意到 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$ 时，习题 6.7 和习题 6.8 可以只用一行就得到解答。)

例题 6.2

一个半径为 R 的长铜棒上有均匀分布的(自由)电流 I(见图 6.19)。求出棒内和棒外的 H。

解： 铜具有微弱的抗磁性，所以偶极子们会沿着和磁场相反的方向排列。这就导致了一个在导体内部和 I 反平行，而在表面与 I 平行的束缚电流(见图 6.20)。现在还不是说出这些束缚电流的大小的时候——但是为了计算 $\boldsymbol{H}$，知道所有电流都是纵向的就已经足够了，这样 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{M}$，以及 $\boldsymbol{H}$ 都是沿环绕方向的。对 $s < R$ 的安培闭合回路应用式(6.20)

$$H(2\pi s) = I_{f_{enc}} = I\frac{\pi s^2}{\pi R^2}$$

所以导体内

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi R^2} s\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (s \leqslant R) \tag{6.21}$$

在导体外

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi s}\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (s \geqslant R) \tag{6.22}$$

在导体外部(在没有介质的地方，永远如此) $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$，所以

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (s \geqslant R)$$

这和一条未磁化的导线是相同的(例题 5.7)。在导线内部的磁场 $\boldsymbol{B}$ 还不能确定，因为现在我们没办法求出 $\boldsymbol{M}$(尽管实际上铜的磁化强度十分微小，以至于对大多数目的我们可以完全忽略它)。

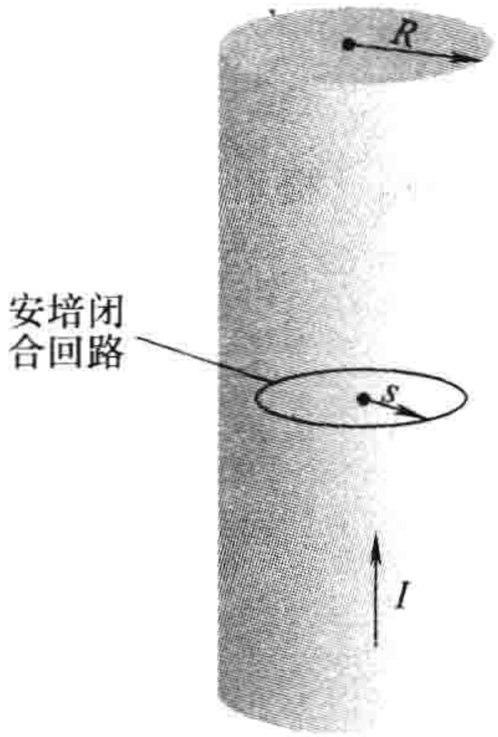


图　6.19

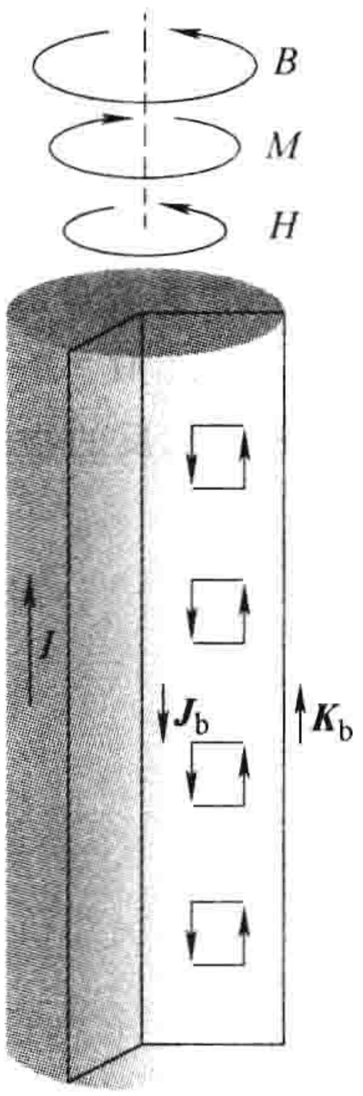


图　6.20

正如上面讨论的，$\boldsymbol{H}$ 是一个比 $\boldsymbol{D}$ 更有用的量。在实验室里你将会经常听到人们谈论 $\boldsymbol{H}$(甚至比谈论 $\boldsymbol{B}$ 更频繁)，但是你可能从未听到任何人讲起 $\boldsymbol{D}$(仅 $\boldsymbol{E}$)。原因是这样的。为了建立一个电磁场你需要在一个线圈中通过一个确定的(自由)电流。这个电流正是你在刻度盘上读到的电流，然后用它决定了 $\boldsymbol{H}$(或者不管什么情况，$\boldsymbol{H}$ 的线积分)。$\boldsymbol{B}$ 则取决于你使用的具体材料，如果是铁的话甚至取决于磁化的历史。从另一方面来说，如果你想要建立一个电场，你不会把已知的自由电荷涂抹在一个平行板电容器的极板上，你会将它连接到一个已知电压的电池上。你在刻度板上读到的是电势差，然后用它决定了 $\boldsymbol{E}$(或者不论什么情况，$\boldsymbol{E}$ 的线积分)。$\boldsymbol{D}$ 依赖于你使用的电介质的详细信息。如果测量电荷很容易，而测量电势很困难，那么你就会发现实验学家们谈论的就是 $\boldsymbol{D}$ 而不是 $\boldsymbol{E}$。所以与对 $\boldsymbol{D}$ 相比，对 $\boldsymbol{H}$ 的相对熟悉完全是由于纯粹的实践考虑产生的；理论上说，它们具有相同的地位。

很多作者将 $\boldsymbol{H}$ 而不是 $\boldsymbol{B}$，称做“磁场”。那么他们不得不为 $\boldsymbol{B}$ 发明一个新名字：“流密度”，或者“磁感应强度”(一个很荒谬的选择，因为这个名字在电动力学中已经有至少两个其他的意义)。无论如何，$\boldsymbol{B}$ 是不可争辩的基础量，所以我会继续将其称为“磁场”，正如每个人在其口语中做的那样。$\boldsymbol{H}$ 没有合理的名字：就称为“$\boldsymbol{H}$”。[⊖]

习题 6.12　一个半径为 R 的无限长圆柱，带有一个平行其轴线的“冻结”磁化强度，

$$\boldsymbol{M} = ks\hat{\boldsymbol{z}}$$

式中，k 为常数；而 s 为到轴线的距离；在任何地方都没有自由电流。利用两种不同的方法得到圆柱内部和

⊖ 对于那些不同意的人，我引用索末菲的《电动力学》(New York：Academic Press，1952)，p.45：“$\boldsymbol{H}$ 的这个令人不快的术语‘磁场’应该被尽可能避免。这个称谓会将除了麦克斯韦本人外的所有人引导到错误之中。”

外部的磁场：

（a）和 6.2 节中一样，定位所有束缚电流，并且计算它们产生的磁场。

（b）使用安培定理（利用式（6.20）的形式）来得到 $\boldsymbol{H}$，然后利用式（6.18）得到 $\boldsymbol{B}$。（注意第二个方法要快捷得多，并且避免了所有对于束缚电流的显式引用。）

习题 6.13 假设一大块磁材料内部的磁场为 $\boldsymbol{B}_0$，所以 $\boldsymbol{H}_0 = (1/\mu_0)\boldsymbol{B}_0 - \boldsymbol{M}$。

（a）现在在材料上掏出一个球形空腔（见图 6.21）。利用 $\boldsymbol{B}_0$ 和 $\boldsymbol{M}$，得到洞中心的磁场。同时利用 $\boldsymbol{H}_0$ 和 $\boldsymbol{M}$ 得到洞中心的 $\boldsymbol{H}$。

（b）对一个平行于 $\boldsymbol{M}$ 的长针形空腔作相同的计算。

（c）对一个垂直于 $\boldsymbol{M}$ 的圆盘形空腔作相同的计算。

假设空腔足够小，所以 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{B}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_0$ 基本不变。与习题 4.16 作比较。[提示：刻出一个空腔与附加一个形状相同但是磁化强度相反的物体的效果是一致的。]

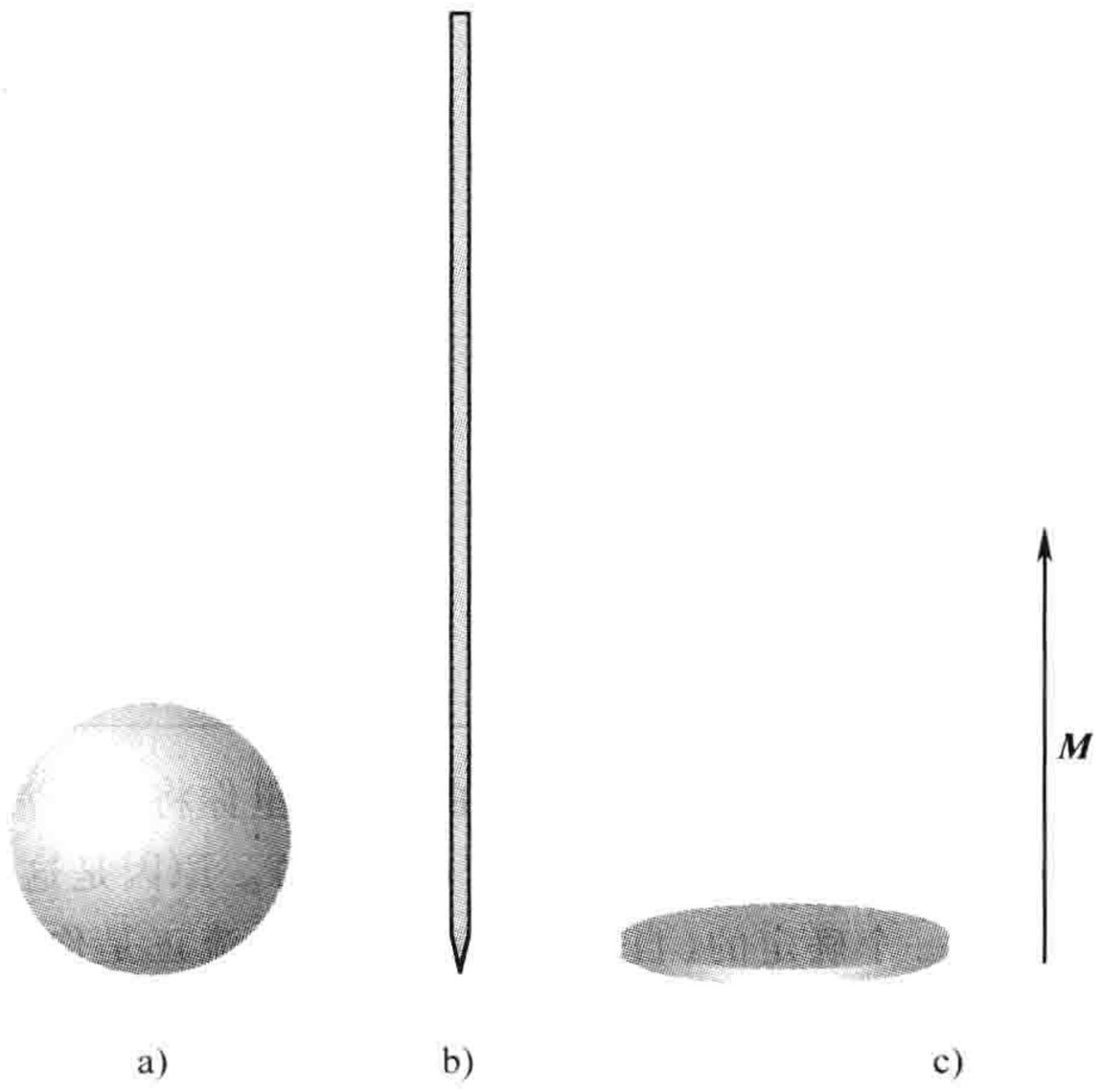


图 6.21

a）球形空腔 b）长针形空腔 c）圆盘形空腔

6.3.2 易误解的类似性

式（6.19）看起来很像原始的安培定理（式（5.54）），只是总电流被替换成了自由电流，而 $\boldsymbol{B}$ 由 $\mu_0\boldsymbol{H}_0$ 代替。但是，正如 $\boldsymbol{D}$ 的情形，我必须提醒你们不要被这种相似性所迷惑。这并不是说 $\mu_0\boldsymbol{H}$ “就像 $\boldsymbol{B}$ 一样，只是它的源是 $\boldsymbol{J}_f$，而不是 $\boldsymbol{J}$。”因为仅仅有旋度并不能决定一个矢量场——还必须知道散度。尽管 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$，$\boldsymbol{H}$ 的散度通常并不是零。事实上，从式（6.18）有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = -\nabla \cdot \boldsymbol{M} \tag{6.23}$$

只有当 $\boldsymbol{M}$ 的散度为零时，$\boldsymbol{B}$ 和 $\mu_0\boldsymbol{H}$ 之间的相似才是可靠的。

如果你们认为我有点学究气，考虑棒状磁场的例子——带有永久均匀平行于它的轴的磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 的一个短铁柱。（见习题 6.9 和习题 6.14。）在这个例子中处处没有自由电流，而且一个自然的式（6.20）的应用可能会导致你支持 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$，因此磁铁内部 $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{M}$ 而外部 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$，但这是不对的。$\boldsymbol{H}$ 的旋度处处为零是正确的，但是散度却不是。（你可以看出哪里的 $\nabla \cdot \boldsymbol{M} \neq 0$ 吗？）建议：当你在一个涉及磁性材料的问题中被要求求出 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{H}$，首先寻找对称性。如果问题中出现圆柱、

平面、螺线管或者环状的对称，然后你就可以利用通常的安培定理从式(6.20)直接得到 $\boldsymbol{H}$。(显而易见地，在这些情形中$\nabla \cdot \boldsymbol{M}$ 自动为零，因为自由电流决定了只有这个答案。)如果没有所要的对称性，你就不得不考虑另一种方法，特别是，你不能仅仅因为你看到没有自由电流就假定 $\boldsymbol{H}$ 为零。

6.3.3　边界条件

5.4.2 小节中的静磁学边界条件可以重新改写为用 $\boldsymbol{H}$ 和自由电流表示的形式。由式(6.23)，有

$$H_{\text{上}}^{\perp} - H_{\text{下}}^{\perp} = -(M_{\text{上}}^{\perp} - M_{\text{下}}^{\perp}) \tag{6.24}$$

而式(6.19)表明

$$\boldsymbol{H}_{\text{上}}^{\parallel} - \boldsymbol{H}_{\text{下}}^{\parallel} = \boldsymbol{K}_{\text{f}} \times \hat{\boldsymbol{n}} \tag{6.25}$$

当磁介质存在时，这些式子比用 $\boldsymbol{B}$ 表示的相应边界条件(式(5.72)和式(5.73))

$$B_{\text{上}}^{\perp} - B_{\text{下}}^{\perp} = 0 \tag{6.26}$$

和

$$\boldsymbol{B}_{\text{上}}^{\parallel} - \boldsymbol{B}_{\text{下}}^{\parallel} = \mu_0(\boldsymbol{K} \times \hat{\boldsymbol{n}}) \tag{6.27}$$

更有用一些。你可以用例题 6.2 或者习题 6.14 来检验它们。

习题 6.14　对于习题 6.9 中的条形磁铁，对 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 作出一个仔细的草图，假设 L 大约为 $2a$。并与习题 4.17 相比较。

习题 6.15　如果处处 $\boldsymbol{J}_{\text{f}} = 0$，并且 $\boldsymbol{H}$ 的旋度为零(式(6.19))，我们就可以将 $\boldsymbol{H}$ 表述为一个标量势 W 的梯度：

$$\boldsymbol{H} = -\nabla W$$

根据式(6.23)，则，

$$\nabla^2 W = (\nabla \cdot \boldsymbol{M})$$

所以 W 满足以$\nabla \cdot \boldsymbol{M}$ 为“源”的泊松方程。这样我们可以充分利用第 3 章的内容。作为一个例子，利用分离变量法求出一个均匀磁化球(例题 6.1)内部的磁场。[提示：除了在表面($r = R$)外，$\nabla \cdot \boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$ 处处成立，所以 W 在 $r < R$ 和 $r > R$ 的区域都满足拉普拉斯方程；利用式(3.65)，并且从式(6.24)得到关于 W 的适当的边界条件。]

6.4　线性与非线性介质

6.4.1　磁化率与磁导率

在顺磁材料与抗磁材料中，磁化是由磁场维持的；当 $\boldsymbol{B}$ 被移去时，$\boldsymbol{M}$ 也会消失。事实上，如果磁场不是很强的话，大多数物质的磁化强度都与磁场成正比。为了与电学情形(式(4.30))保持符号一致，我应该把这种比例关系表示为

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_0}\chi_{\text{m}}\boldsymbol{B}\ (\text{不正确!}) \tag{6.28}$$

但是习惯使我们将其写为与 $\boldsymbol{H}$ 有关，而非 $\boldsymbol{B}$：

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \chi_{\text{m}}\boldsymbol{H}} \tag{6.29}$$

式中，比例系数 χ_m 被称为**磁化率**；它是一个随介质不同而变化的量纲为一的量——对于顺磁物质它是正的，而对抗磁物质它是负的。典型值大约为 10^{-5}（见表 6.1）。

表 6.1 磁化率（除非特别注明，均为在 1atm，20℃ 的值）

材料	磁化率	材料	磁化率
抗磁性：		顺磁性：	
铋	-1.6×10^{-4}	氧	1.9×10^{-6}
金	-3.4×10^{-5}	钠	8.5×10^{-6}
银	-2.4×10^{-5}	铝	2.1×10^{-5}
铜	-9.7×10^{-6}	钨	7.8×10^{-5}
水	-9.0×10^{-6}	铂	2.8×10^{-4}
二氧化碳	-1.2×10^{-8}	液氧（-200℃）	3.9×10^{-3}
氢	-2.2×10^{-9}	钆	4.8×10^{-1}

数据来源：物理化学手册，第 67 版。（Boca Raton：CRC Press，Inc.，1986）。

遵从式(6.29)的材料称为**线性介质**。考虑到式(6.18)，对线性介质有

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}) = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H} \tag{6.30}$$

这样 $\boldsymbol{B}$ 也是与 $\boldsymbol{H}$ 成比例的：[㊀]

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} \tag{6.31}$$

式中

$$\mu \equiv \mu_0(1+\chi_m) \tag{6.32}$$

μ 称为材料的**磁导率**。[㊁]在没有物质可以磁化的真空中，磁化率 χ_m 为零，而磁导率为 μ_0。这就是为什么 μ_0 被称为**真空磁导率**。

例题 6.3

一个无限长螺线管（每单位长度 n 匝，电流 I）中间填有磁化率为 χ_m 的线性材料。求出螺线管内部的磁场。

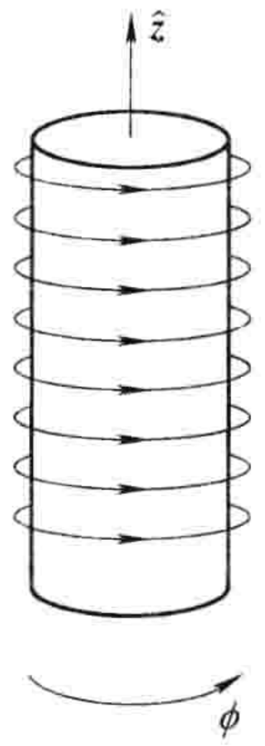


图 6.22

解：因为 $\boldsymbol{B}$ 部分是由束缚电流（我们并不知道）产生的，我们不能直接计算它。但是，本题是那些我们仅从自由电流就可以得到 $\boldsymbol{H}$ 的对称情况之一，利用安培定理的式(6.20)

$$\boldsymbol{H} = nI\hat{\boldsymbol{z}}$$

（见图 6.22）。根据式(6.31)，于是，

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(1+\chi_m)nI\hat{\boldsymbol{z}}$$

如果介质是顺磁的，磁场会被轻微地加强；如果它是抗磁的，磁场会被稍微减弱。这就反映出，在前一个情形（$\chi_m>0$）和后一个相反的情形中（$\chi_m<0$），束缚电流

$$\boldsymbol{K}_b = \boldsymbol{M}\times\hat{\boldsymbol{n}} = \chi_m(\boldsymbol{H}\times\hat{\boldsymbol{n}}) = \chi_m nI\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

是与 I 的方向相同的事实。

你可能认为线性介质会避免 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的相似中所出现的问题：因为现在 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都是与 $\boldsymbol{B}$ 成比

㊀ 因此，从物理上来说，式(6.28)和式(6.29)表述了完全相同的意义，只是常数 χ_m 会有不同的值。式(6.29)稍微方便一些，因为实验物理学家觉得使用 $\boldsymbol{H}$ 比 $\boldsymbol{B}$ 更加方便。

㊁ 如果你将因子 μ_0 提出来，剩下的部分称为**相对磁导率**：$\mu_r \equiv 1+\chi_m = \mu/\mu_0$。顺便提一下，利用 $\boldsymbol{B}$ 写出的 $\boldsymbol{H}$ 的公式（式(6.31)，线性介质的情形）被称为**构成关系**，正如那些用 $\boldsymbol{E}$ 写出的 $\boldsymbol{D}$ 的公式一样。

例的，难道它们的散度不是如 $\boldsymbol{B}$ 的一样，总为零？遗憾的是，确实不是；在两种不同磁化率的材料的交界处，$\boldsymbol{M}$ 的散度事实上可以是无穷大。例如，在一个线性顺磁材料圆柱的末端，$\boldsymbol{M}$ 在一边为零但在另一边不是。对于图 6.23 中的“高斯扁盒”，$\oint \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \neq 0$，因此，由散度定理，$\nabla \cdot \boldsymbol{M}$ 不可能在其内部处处为零。

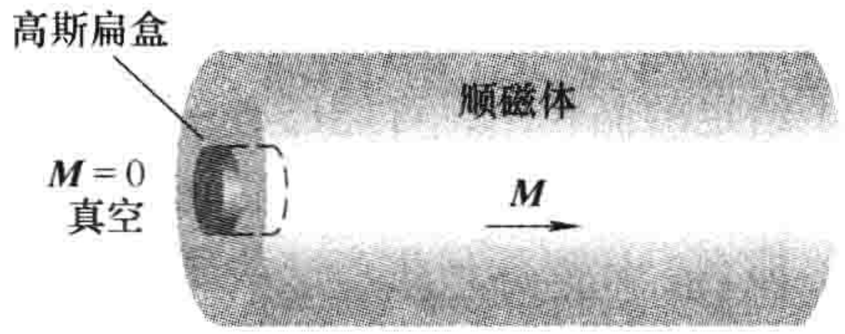


图　6.23

顺便说一下，在各向同性线性材料中的体束缚电流密度是与自由电流密度成比例的：

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{b}} = \nabla \times \boldsymbol{M} = \nabla \times (\chi_{\mathrm{m}} \boldsymbol{H}) = \chi_{\mathrm{m}} \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} \qquad (6.33)$$

特别地，除非自由电流确实流经材料，否则所有的束缚电流都将会在表面上。

习题 6.16　一个同轴电缆由两条非常长的圆柱状的管组成，这两个管之间用磁化率为 χ_{m} 的线性绝缘介质分隔开。一个电流流经内部的导体，然后沿着外面的导体流回；在两个管中电流都是均匀分布在表面上(见图 6.24)。求出两个管之间的区域的磁场。作为一个验证，计算磁化强度和束缚电流，并且确认它们(当然，包括自由电流)产生了正确的磁场。

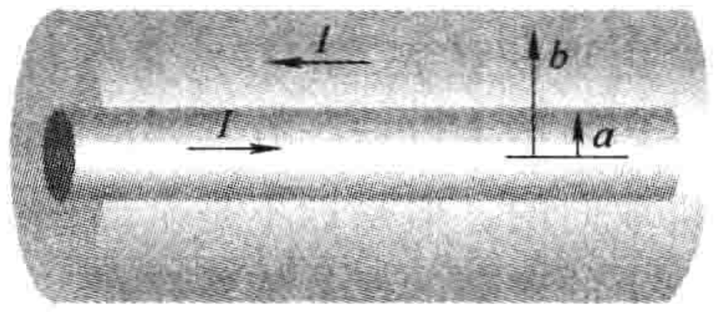


图　6.24

习题 6.17　一个电流 I 流经一个半径为 a 的长直导线。如果导线是由磁化率为 χ_{m} 的线性材料制成的(比如说铜，或者铝)，并且电流是均匀分布的，则距轴线距离为 s 处的磁场是什么？求出所有束缚电流。流经导线的净束缚电流是什么？

习题 6.18　一个线性磁材料制成的球体置于一个均匀外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中。求出球内的磁场。[提示：参见习题 6.15 或习题 4.23。]

习题 6.19　在 6.1.3 小节的初步模型的基础上，估计一个抗磁金属，例如铜的磁化率。将你的答案与表 6.1 中的经验值比较，并且对任何不一致之处作出评价。

6.4.2　铁磁性

在线性介质中，原子偶极子的定向排列是由一个外界强加的磁场维持的。铁磁体——这无疑是非线性的[㊀]——要求不需要外部磁场来维持磁化；同向排列是“被冻结的”。正如顺磁性一样，铁磁性涉及那些与未配对电子的自旋有关的磁偶极子。一个新的特征，使得铁磁性显得与顺磁性如此不同，是相邻的偶极子之间的相互作用：在铁磁体中，每个偶极子“喜欢”指向和它的邻居相同的方向。这种偏好的原因本质上是量子力学的，而我不会在这里尝试解释它；仅仅知道这种关联是如此之强，以至于这些未配对的电子自旋事实上几乎是 100% 的定向排列就足够了。如果你可以用某种方法放大一块铁块，并且“看见”作为微小箭头的单独的偶极子，这就会看起来有些像图 6.25，所有自旋都指向相同的方向。

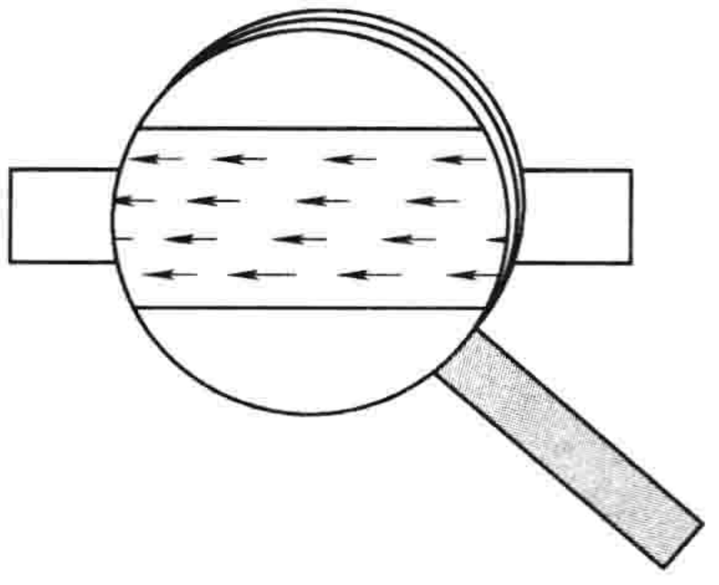


图　6.25

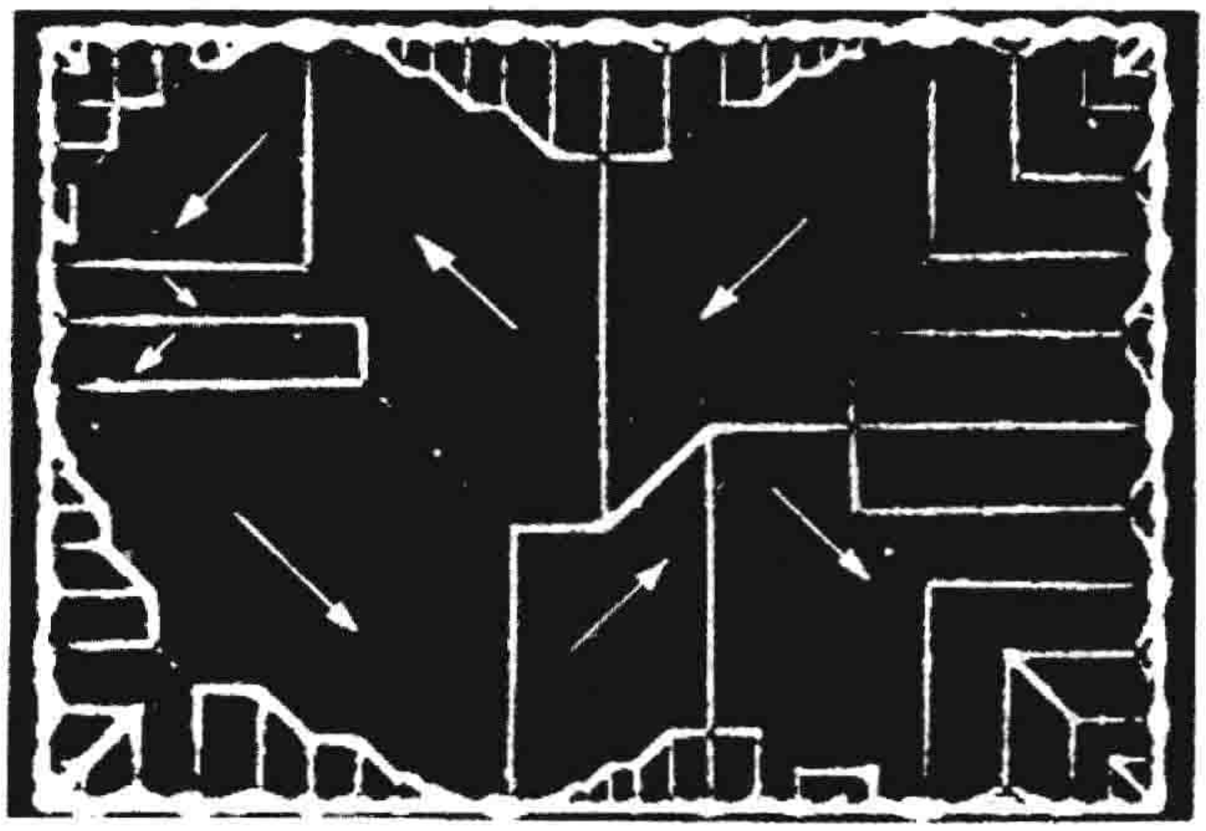
但是如果这是真的，为什么不是每个扳手和钉子都是一个强大的磁铁？答案是这种同向排列只在一个被称为**磁畴**的相对小的区域中发生。每个磁畴包含

㊀　在这种意义上来说，对一个铁磁体谈论磁化率或磁导率是很有误导性的。这些术语也被这些材料使用，但是它们指的是一个 $\boldsymbol{H}$ 的微小增长和由此导致的 $\boldsymbol{M}$(或 $\boldsymbol{B}$)的微小变化的比例因子；此外，它们不是常数，而是 $\boldsymbol{H}$ 的函数。

数十亿个偶极子，所有都是定向排列的(这些磁畴事实上在显微镜下是可以看见的，利用合适的蚀刻工艺——见图 6.26)，但是这些磁畴本身是随机指向的。家用扳手包括很多磁畴，但它们的磁场相互抵消，所以扳手作为整体是未被磁化的。(事实上，磁畴的方向并不是完全随机的；在一个给定的晶粒中，可能已有一些沿着晶轴的排列。但是会有一样多的磁畴指向一个相反的方向，所以还不会有大尺度的磁化。此外，晶粒在一个金属大块中也是随机指向的。)

那么，你要如何生产一块**永磁体**，就像它们在玩具店卖的那样？如果你将一块铁放入一个强磁场中，力矩 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$ 驱使这些偶极子排列成平行于场的方向。因为它们喜欢与它们的邻居保持平行，大多数偶极子将会抵抗这个力矩。但是，在两个磁畴之间的边界处，有相互竞争的邻居，这个力矩对已与磁场高度平行的磁畴有利；这个磁畴会争取到一些转变者，而那些其他方向的磁畴则会减小。于是，这个磁场最终的效果，是移动磁畴边界。平行于磁场的磁畴生长，而其余的收缩。如果磁场足够强，单一磁畴就会生成，而这块铁就被称为是“饱和的”。

这个过程(作为对于外场的响应，磁畴边界的扩张)并不是完全可逆的：当外场被撤去以后，有一些磁畴会变回随机取向的，但是远不是全部——先前方向上的磁畴的优势依然存在。这个物体现在是一个永磁体了。



磁畴(照片承蒙 R. W. DeBlois 的好意)

图 6.26

在实际中要实现这一点，有一个简单的办法是将待磁化的物体包裹在线圈中(见图 6.27)。在线圈上通电流 I；这就提供了外磁场(在图中方向向左)。当你增大电流，磁场增强，磁畴边界移动，而磁化强度变大。最终，达到了饱和点，其中所有的偶极子都同向排列，而进一步的电流增大对 $\boldsymbol{M}$ 不会产生任何影响(见图 6.28，b 点)。

现在假设你减小电流。与原路返回到 $M=0$ 不同，只有部分磁畴恢复为随机方向磁畴。M 减小，但是甚至当电流切断时还是有一些剩余磁化强度(c 点)。这个扳手现在是一个永磁体了。如果你想要消除剩磁，你将不得不在线圈中通一个反向电流(一个负的 I)。现在外磁场方向向右，而随着你增强 I(负的)，M 降低到零(d 点)。如果你把 I 调得更高，你很快就达到另一个方向的饱和——现在所有的偶极子指向右边(e)。在这个阶段关闭电流会留给这个扳手一个向右的永久磁化(f 点)。为了完成这个故事，再次打开正方向的 I：M 回到零(g 点)，而且最终回到向前的饱和点(b)。

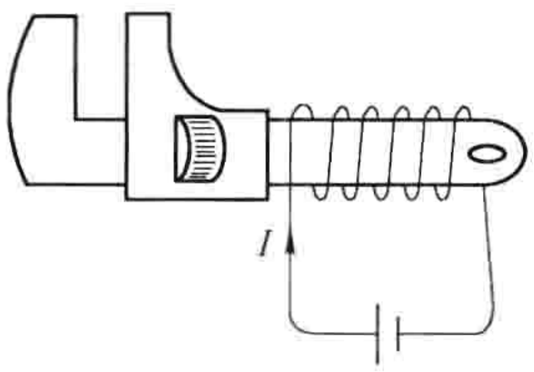


图 6.27

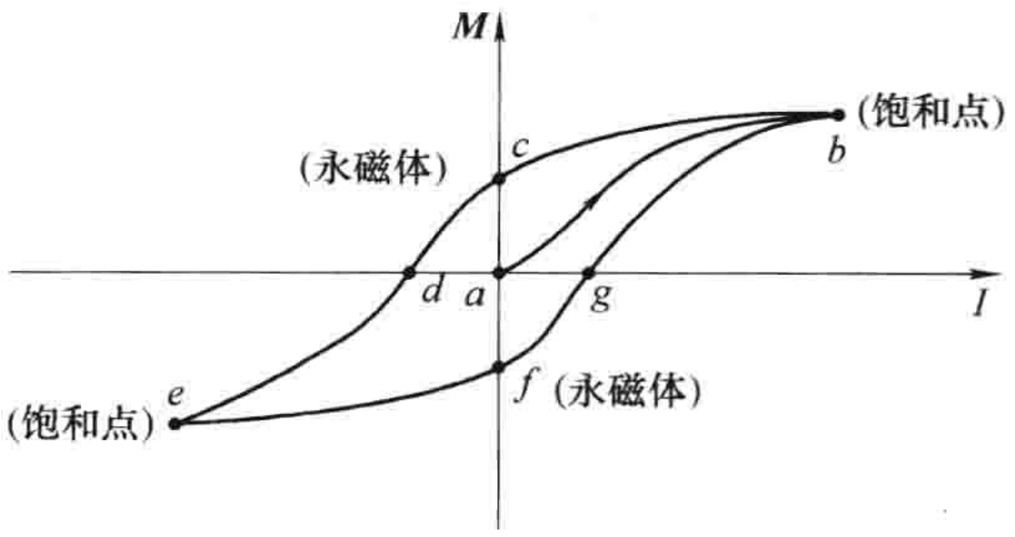


图 6.28

我们描绘的路径被称为**磁滞回线**(hysteresis)。注意扳手的磁化不仅依赖于施加的磁场(也就是，依赖于 I)，而且依赖于它之前的磁“历史”[⊖]。例如，在我们的实验中电流在三个不同的时刻为零(a，c 和 f)，但是它们每一个的磁化强度都不同。实际上，习惯上将磁滞回线画作 B 关于 H 的图，而不是 M 关于 I 的。(如果我们的线圈可近似为一个长螺线管，每单位长度有 n 匝，那么 $H=nI$，所以 H 和 I 是成比例的。同时，$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$，但是实际中 M 与 H 相比很大，所以从我们的意图和目的而言，$\boldsymbol{B}$ 是与 $\boldsymbol{M}$ 成比例的。)

为了使单位一致(特斯拉)，我将($\mu_0 H$)作为水平轴(见图 6.29)，但是，注意竖直刻度要比水平刻度大 10^4 倍。粗略地讲，$\mu_0 H$ 是我们的线圈在没有任何铁的情况下产生的磁场；$\boldsymbol{B}$ 是我们实际得到的，而与 $\mu_0 H$ 相比，它是一个庞然大物。当你有铁磁材料在附近时一个小电流就会产生很强的磁场。这就是为什么任何想要制造一个强大的电磁铁的人都会在线圈里包上一个铁芯。这样并不需要很大的外磁场，就可以移动磁畴边界，只要你这样做了，铁中的所有偶极子都会为你工作。

关于铁磁性的最后一点：请记住，在一个给定磁畴中的偶极子的排列是相互平行的。随机的热运动有损于这种有序性，但是只要温度不是太高，对这些偶极子的定向排列影响不大。非常高的温度确实会摧毁这种定向排列，不过，这并不令人惊奇。令人惊奇的是这种情形发生在一个精确的温度下(对铁来说，为 770℃)。低于这个温度(称为居里点)，铁是铁磁性的；高于这个温度，它是顺磁性的。这个居里点颇有点像沸点或者凝固点，因为在铁磁和顺磁现象之间的转变并不是逐步发生的，正如在水和冰之间的转变一样。这种物质性质的突变，发生在极窄的温度区间，在统计力学中被称做相变。

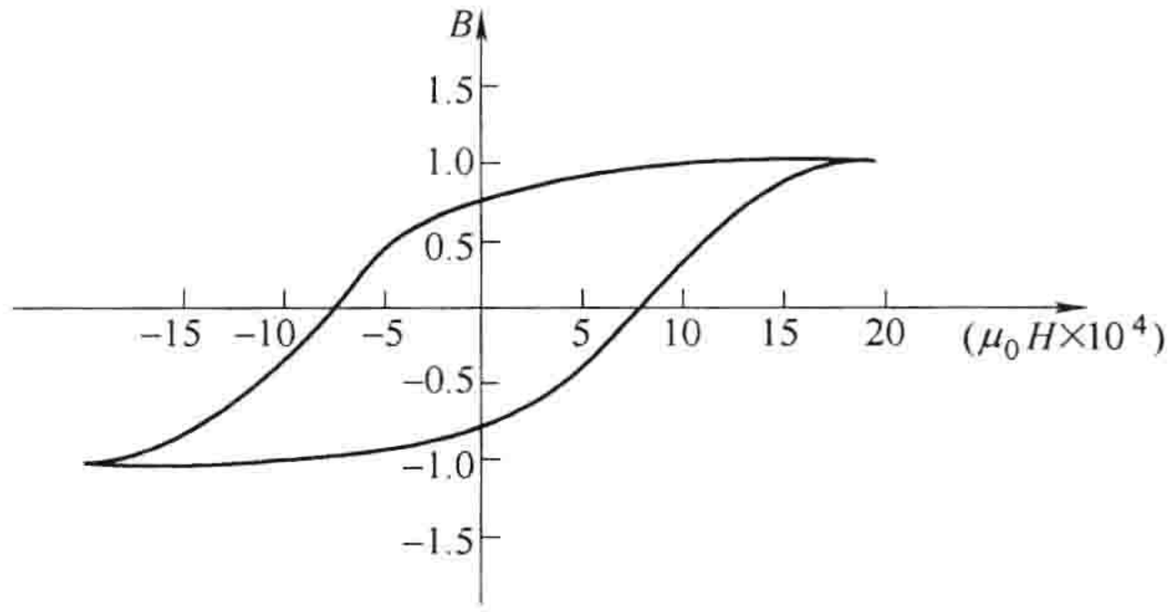


图　6.29

习题 6.20　你会怎么做来给一块永磁体消磁(例如我们刚才一直在讨论的那个扳手，处于磁滞回线的 c 点)？也就是说，你怎么将它恢复到它的原始状态，在 $I=0$ 时 $M=0$？

习题 6.21

(a) 证明一个磁偶极子在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的能量由下式给出

$$\boxed{U=-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}} \tag{6.34}$$

[假定磁偶极矩的大小是固定的，而你所要做的是将其移动到一个地方并将其旋转到它的最终方向。保持电流流动的能量是一个不同的问题，我们将会在第 7 章遇到这个问题。]并把结果与式(4.6)比较。

(b) 证明两个被分开位移为 $\boldsymbol{r}$ 的两个磁偶极子之间的相互作用能由下式给出

$$U=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}[\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2-3(\boldsymbol{m}_1\cdot\hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{m}_2\cdot\hat{\boldsymbol{r}})] \tag{6.35}$$

并把结果与式(4.7)比较。

(c) 用图 6.30 中角 θ_1 和 θ_2 来表示(b)的答案，并利用该结果，求出当两个偶极子之间距离固定但可以自由转动时，两个偶极子的稳定状态。

⊖ 从词源上来说，hysteresis 这个词和 history 这个词没有任何关系——和 hysteria 这个词也没有。它起源于一个希腊语动词，意为“to lag behind”。

(d) 假设你有很多罗盘针，将它们沿一条直线间距固定地排列。它们的指向如何(假设忽略地球磁场)？[一个矩形的罗盘针阵列也会自发地排列，而这有时候被用来作为大规模的“铁磁”现象的演示。但是，这有些诈骗的嫌疑，因为这里的机制是完全经典的，而且比真正导致铁磁性的量子力学的**交换力**要弱得多。]

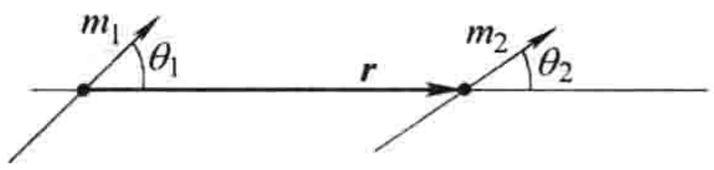


图 6.30

第 6 章补充习题

习题 6.22 在习题 6.4 中你用“蛮力”计算了一个偶极子上的力。这里有一个更加优雅的方法。首先将 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$写为关于线圈中心的泰勒级数：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cong \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0) + [(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \cdot \nabla_0]\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0)$$

式中，$\boldsymbol{r}_0$ 是偶极子的位置，而∇_0 表示微分是关于 $\boldsymbol{r}_0$ 的。将这个式子代入洛伦兹力定律(式(5.16))，得到

$$\boldsymbol{F} = I\oint \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times [(\boldsymbol{r} \cdot \nabla_0)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0)]$$

或者，由 1 到 3 标记直角坐标：

$$F_i = I\sum_{j,k,l=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\left\{\oint r_l \mathrm{d}l_j\right\}[\nabla_{0_l} B_k(\boldsymbol{r}_0)]$$

式中，ε_{ijk}是**勒维-契维塔符号**(+1，如果 $ijk = 123$，231，或 312；−1，如果 $ijk = 132$，213，或 321；0，其他情况)。利用这个符号，矢量积可以被写成 $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_j B_k$。利用式(1.108)计算积分值。注意

$$\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljm} = \delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}$$

式中，δ_{ij}是克罗内克 δ 符号(习题 3.45)。

习题 6.23 注意下述公式的相似处：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \quad \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{P} & \text{(无自由电荷)} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = 0, \quad \mu_0 \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - \mu_0 \boldsymbol{M} & \text{(无自由电流)} \end{cases}$$

这样，替代 $\boldsymbol{D}\to\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{P}\to\mu_0\boldsymbol{M}$，$\varepsilon_0\to\mu_0$将一个静电学问题转化为一个相似的静磁学问题。利用这相似性和静电学结果，重新导出

(a) 一个均匀磁化球内部的磁场(式(6.16))；

(b) 在一个均匀外磁场中线性磁化球内部的磁场(习题 6.18)；

(c) 由球内部的稳恒电流产生的球上的平均磁场(式(5.89))。

习题 6.24 比较式(2.15)，式(4.9)和式(6.11)。注意，如果 ρ，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 是均匀的，这三个式子中都出现了相同的积分：

$$\int \frac{\hat{\boldsymbol{\mathcal{r}}}}{\mathcal{r}^2}\mathrm{d}\tau'$$

因此，如果你碰巧知道一个均匀带电体产生的电场，你就可以立即写出一个同形状均匀极化体的电势和一个同形状均匀磁化体的磁矢势。利用这个事实求出一个均匀极化球内部和外部的 V(例题 4.2)，以及一个均匀磁化球内部和外部的 $\boldsymbol{A}$(例题 6.1)。

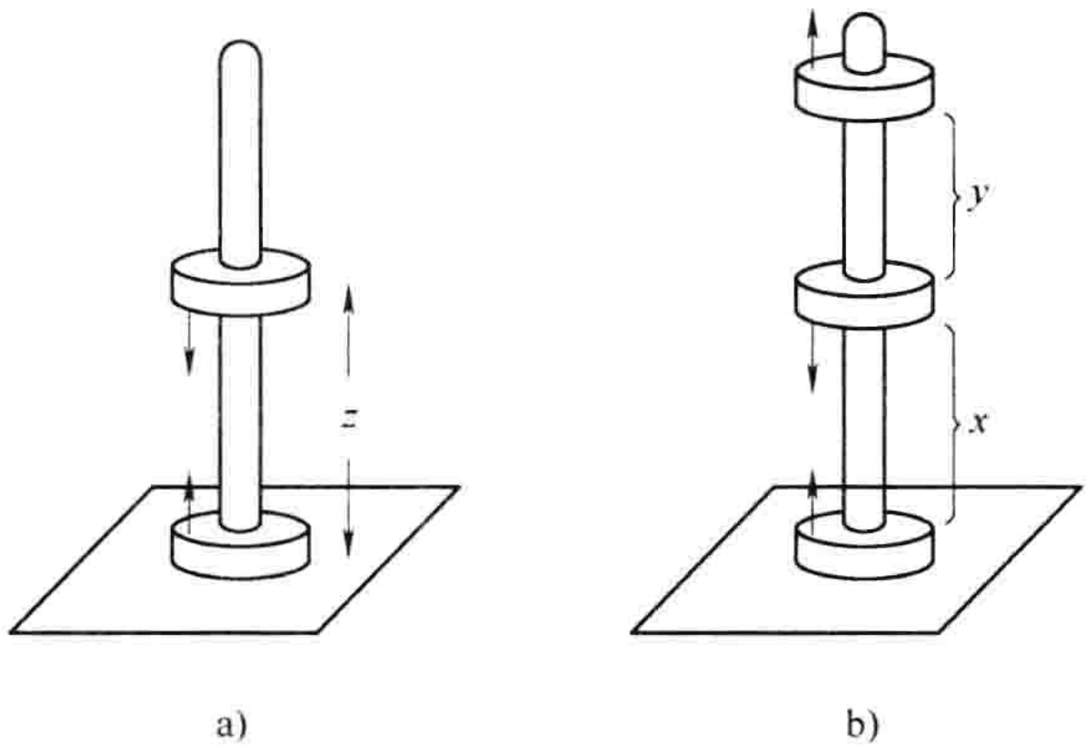
习题 6.25 一个常见玩具含有环状的永磁体(磁化强度与其轴平行)，这些磁体可在一根竖直棒上无摩擦地滑动(见图 6.31)。将这些磁体看做质量为 m_{d}、磁偶极矩为 $\boldsymbol{m}$ 的偶极子。

(a) 如果你放置两个背对背的磁体在棒上，上面的那一个会“浮起”——向上的磁力与向下的重力相平衡。这个磁体浮起的高度是多少(z)？

(b) 如果你在上面增加第三个磁体(与底部的那个方向相同)，两个高度的比例是什么？(求出具体数字，保留三位有效数字。)

习题 6.26 在两个线性磁材料之间的界面上，磁场线会弯折(见图 6.32)。证明 $\tan\theta_2/\tan\theta_1 = \mu_2/\mu_1$，

假设边界处没有自由电流。与式(4.68)比较。



a)　　b)

图　6.31

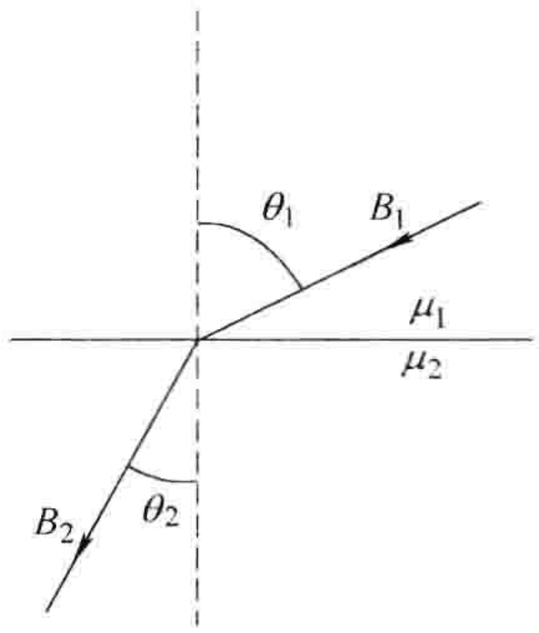


图　6.32

习题 6.27　一个磁偶极子 $\boldsymbol{m}$ 镶嵌在一个线性磁材料(磁导率为 μ)球(半径为 R)的中心。证明球内部($0<r\leqslant R$)的磁场为

$$\frac{\mu}{4\pi}\left\{\frac{1}{r^3}[3(\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{m}]+\frac{2(\mu_0-\mu)\boldsymbol{m}}{(2\mu_0+\mu)R^3}\right\}$$

球外的磁场是什么?

习题 6.28　你被要求审核一个基金申请，该项目打算检测铁的磁化是由“安培”磁偶极子(环形电流)还是“吉尔波特”偶极子(分离的磁单极子)产生的。这个实验将会包括一个沿轴方向均匀磁化的铁圆柱(半径为 R，长度 $L=10R$)。如果这些磁偶极子是安培型的，磁化就等价于一个表面束缚电流 $\boldsymbol{K}_b=M\hat{\boldsymbol{\phi}}$；如果它们是吉尔波特型的，磁化等价于在柱两端表面的磁单极子密度 $\sigma_b=\pm M$。不幸的是，这两种情形在外部都产生相同的磁场。但是，内部磁场却是完全不同的——在第一种情况中 $\boldsymbol{B}$ 的方向总体上和 $\boldsymbol{M}$ 相同，然而在第二种情形中是大致上与 $\boldsymbol{M}$ 相反的。申请人计划在该圆柱上刻出一个小洞并且测量一个置于其中的微小罗盘针所受到的力矩，从而测得内部磁场。

假设明显的技术困难可以被克服，而且问题本身也值得研究，你会建议为这个实验提供资金吗？如果是这样，你会推荐哪种形状的洞？如果不是，这个方案错在哪里？[提示：参考习题 4.11，习题 4.16，习题 6.9 和习题 6.13。]

第7章　电动力学

7.1　电动势

7.1.1　欧姆定律

为了使一个电流流动，你不得不移动电荷。对一个给定的驱动力，这些电子运动的快慢取决于材料的性质。对于大多数物质来说，电流密度 $\boldsymbol{J}$ 与每单位电荷受到的力 $\boldsymbol{f}$ 成正比：

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{f} \tag{7.1}$$

比例因子 σ（不要与面电荷相混淆）是一个经验常数，从一种材料到另一种都会有所不同；它被称为材料的**电导率**。事实上，众多手册上列出的通常是 σ 的倒数：$\rho = 1/\sigma$（不要与电荷密度相混淆——我很抱歉，但是我们几乎用光了希腊字母，而且这是标准记号）。一些典型值在表7.1中给出。注意，即使绝缘体也能轻微地导电，尽管同金属的电导率相比起来如同天文数字——大约有一个 10^{22} 的因子。事实上，对于大多数用途，金属可以被认为是**理想导体**，其 $\sigma = \infty$。

原则上，驱动电荷产生电流的力可以是任何力——化学的，重力的，或者套上微型马具的受过训练的蚂蚁。不过，对于我们的目的来说，通常是电磁力来承担这份工作。在这种情形下式(7.1)变为

$$\boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{7.2}$$

通常，电荷的速度非常小，以至于第二项可以被忽略：

$$\boxed{\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}} \tag{7.3}$$

（但是，例如，在等离子体中，$\boldsymbol{f}$ 中的磁贡献可能会相当大。）式(7.3)称为**欧姆定律**，尽管事实上它背后的物理是包含在式(7.1)中的，式(7.3)只是一个特例。

表7.1　电阻率（所有值都是在1atm，20℃条件下获得的）　（单位：Ω·m）

材料	电阻率	材料	电阻率
导体：		半导体：	
银	1.59×10^{-8}	盐水（饱和）	4.4×10^{-2}
铜	1.68×10^{-8}	锗	4.6×10^{-1}
金	2.21×10^{-8}	钻石	2.7
铝	2.65×10^{-8}	硅	2.5×10^{3}
铁	9.61×10^{-8}	绝缘体：	
水银	9.58×10^{-7}	水（纯净的）	2.5×10^{5}
镍铬合金	1.00×10^{-6}	木头	$10^{8} \sim 10^{11}$
锰	1.44×10^{-6}	玻璃	$10^{10} \sim 10^{14}$
石墨	1.4×10^{-5}	石英（熔融）	$\sim 10^{16}$

来源：物理化学手册，第78版（Boca Raton：CRC Press，Inc.，1997）。

我知道：你们可能感到困惑，因为我说过一个导体内部 $\boldsymbol{E} = 0$（2.5.1小节）。但是那是对静电荷来说的（$\boldsymbol{J} = 0$）。此外，对于理想导体来说，甚至当电流流动时也有 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{J}/\sigma = 0$。在实际中，金属是非常好的导体以至于在导体内部驱动电流所需要的电场是微不足道的。这样，（例如）我

们通常将电路中连接的电线看成等势体。与此相反，**电阻器**是由导电性很差的材料制成的。

例题 7.1

一个横截面积为 A、长度为 L 的圆柱状电阻器是由电导率为 σ 的材料制造的。(见图 7.1；如图所示，横截面并不需要是圆形的，但是我确实需要假定横截面的形状是保持不变的。)如果两端的电势都是常数，而两端之间的电势差是 V，流过的电流为多大？

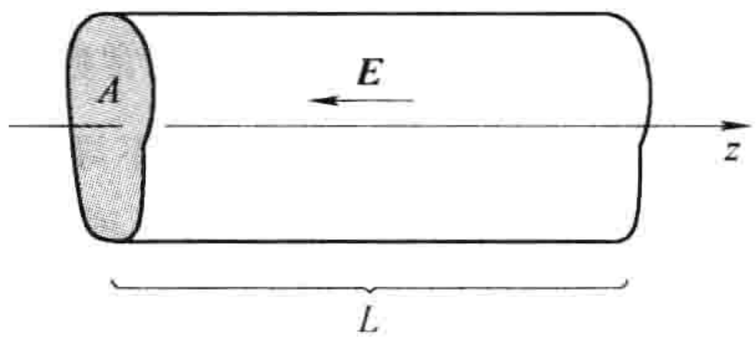


图　7.1

解： 可以证明，导线内部的电场是均匀的(我稍后会证明这一点)。从式(7.3)可以得出电流密度也是均匀的，所以

$$I = JA = \sigma EA = \frac{\sigma A}{L}V$$

例题 7.2

两个同心长圆柱(半径为 a 和 b)被电导率为 σ 的材料分开(见图 7.2)。如果维持这两个圆柱之间的电势差为 V，在长度 L 内，从一个圆柱流向另一个圆柱的电流为多大？

解： 圆柱之间的电场为

$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 s}\hat{\boldsymbol{s}}$$

式中，λ 是内部圆柱上单位长度的电荷。因此电流为

$$I = \int \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \sigma\int \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\lambda L$$

(这个积分是关于包围内部圆柱的任意面的。)同时，圆柱之间的电势差为

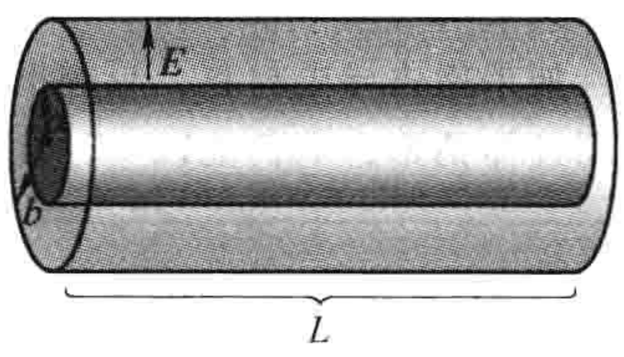


图　7.2

$$V = -\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

所以

$$I = \frac{2\pi\sigma L}{\ln(b/a)}V$$

正如这些例子阐明的，从一个**电极**流向另一个电极的总电流是与两者间的电势差成正比的：

$$\boxed{V = IR} \tag{7.4}$$

当然，这是欧姆定律更加令人熟悉的版本。比例常数 R 被称为**电阻**；它是电极之间介质的分布形状和电导率的函数。(在例题 7.1 中，$R = (L/\sigma A)$；在例题 7.2 中，$R = \ln(b/a)/2\pi\sigma L$。)电阻的单位是**欧姆**(Ω)，$1\Omega = 1\mathrm{V/A}$。注意 V 和 I 之间的正比关系是式(7.3)的直接结果：如果你想要 V 翻倍，你只要将每处的电荷加倍——这加倍了 $\boldsymbol{E}$，也就加倍了 $\boldsymbol{J}$，也就加倍了 I。

对于稳恒电流和均匀电导率来说，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sigma}\nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0 \tag{7.5}$$

式(5.31)，因此电荷密度为零；所有的不平衡电荷都存在于表面上。(我们很久以前就利用 $\boldsymbol{E} = 0$ 的事实对静电荷情形证明了这个结论；显然，当允许电荷运动时这个结论也是正确的。)特别是，由此可得，在一个带有稳恒电流、各向同性的欧姆材料内，拉普拉斯方程仍然成立，所以第 3 章中所有的工具和技巧都可以用来计算电势。

例题 7.3

我曾经断言例题 7.1 中的电场是均匀的，让我们来证明它。

解： 圆柱内的 V 遵守拉普拉斯方程。边界条件是什么？左侧末端，电势是常数——我们可以将它设定为零。在右侧末端，电势同样是常数——我们将它称为 V_0。在圆柱表面上，$\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=0$，否则电荷将会泄漏到周围的空间中(我们将它看做不导电的)。因此 $\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=0$，从而 $\partial V/\partial n=0$。当所有边界面上的 V 或者它的法向导数已经给定时，电势是唯一确定的(习题 3.4)。但是很容易猜到一个既遵守拉普拉斯方程又满足这些边界条件的电势：

$$V(z)=\frac{V_0 z}{L}$$

式中，z 沿圆柱轴线方向。唯一性定理保证这就是解。相应的电场为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V=-\frac{V_0}{L}\hat{\boldsymbol{z}}$$

它确实是均匀的。证毕。

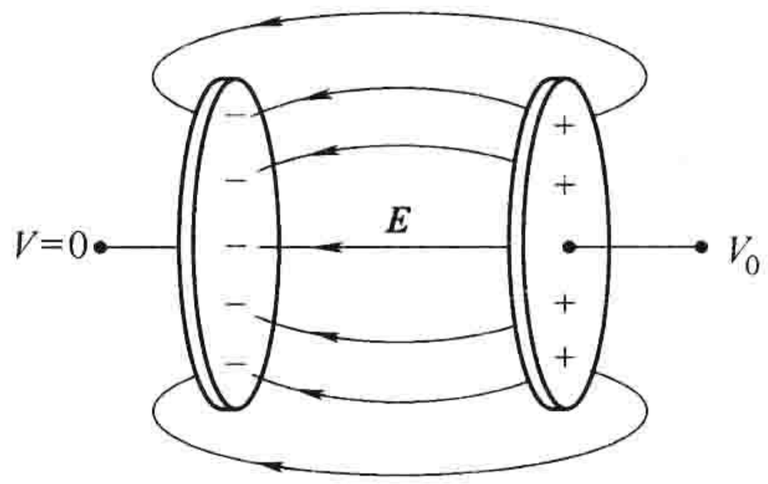


图 7.3

如果撤去导电材料，只剩下两边各一块的金属板(见图 7.3)，与上面相比，问题就要难得多了。显然对圆柱体情形，电荷能以一种优美的在内部产生均匀的电场的方式在导线表面上自行排布。[⊖]

我认为在物理学中不会有比欧姆定律更广为人知的公式了，但是从高斯定理或者安培定理的意义上来说，它确实并不是一个精确的定律，确切地说，它是一条可以很好地适用于很多情况的“经验定律”。你并不会因为找到了反例而获得诺贝尔奖。事实上，当你停下来去考虑它时，你可能有些惊讶，欧姆定律怎么能成立？毕竟，一个给定的电场 $\boldsymbol{E}$ 产生一个力 $q\boldsymbol{E}$(对一个电荷 q)，根据牛顿第二定律，这个电荷会加速运动。但是如果这个电荷速度增加，为什么电流不随时间增大？你维持电场的时间越长电流就增长得越大？与此相反，欧姆定律暗示，一个恒定场会产生一个稳恒电流，这也就暗示了一个不变的速度。这不是违背了牛顿运动定律吗？

不是的，因为我们忘记了当电子通过导线时的频繁碰撞了。这有点像这样：假设你正在开车，途径一条每个路口都有停车标志的街道，所以，尽管你在两个路口之间均匀加速，但是你被迫在每个街区都重新开始加速。于是，你的平均速度就是一个常数，尽管事实上你一直在加速(除了周期性的突然停车)。如果一个街区的长度是 λ，而你的加速度为 a，行驶过一个街区需要的时间就是

$$t=\sqrt{\frac{2\lambda}{a}}$$

因此，平均速度为

$$v_{\text{平均}}=\frac{1}{2}at=\sqrt{\frac{\lambda a}{2}}$$

但是等等！这好像还不能说明问题！上式说明速度与加速度的二次方根成比例，因此电流应该与电场的二次方根成比例！故事还存在另一个曲折：事实是，电荷由于它们的热运动已经在以相当快的速度运动了。但是热运动的速度的方向是随机的，所以平均值为零。我们关心的是净定向**漂移速度**，它非常之小。所以碰撞之间的时间实际上要比我们认为的要短得多；事实上，

⊖ 计算这个面电荷并不简单。例如，参见，J. D. Jackson，Am. J. Phys. 64，855(1996)。得到导线外的电场也同样不是一件简单的事。

$$t = \frac{\lambda}{v_{热}}$$

因此

$$v_{平均} = \frac{1}{2}at = \frac{a\lambda}{2v_{热}}$$

如果每单位体积内有 n 个分子，每个分子中有 f 个自由电子，每个电子电荷量为 q，质量为 m，则电流密度为

$$\boldsymbol{J} = nfq\boldsymbol{v}_{平均} = \frac{nfq\lambda}{2v_{热}}\frac{\boldsymbol{F}}{m} = \left(\frac{nf\lambda q^2}{2mv_{热}}\right)\boldsymbol{E} \tag{7.6}$$

我并没有断言括号中的量是电导率的精确表示式，[⊖]但是它确实给出了基本的组分，而且它正确地预言出电导率是与漂移电荷的密度成正比并且(通常情况下)随着温度升高而降低的。

作为所有这些碰撞的结果，电场力所做的功被转化成电阻器的热。因为每单位电荷所做的功是 V，而每单位时间流过的电荷是 I，传送的功率为

$$\boxed{P = VI = I^2R} \tag{7.7}$$

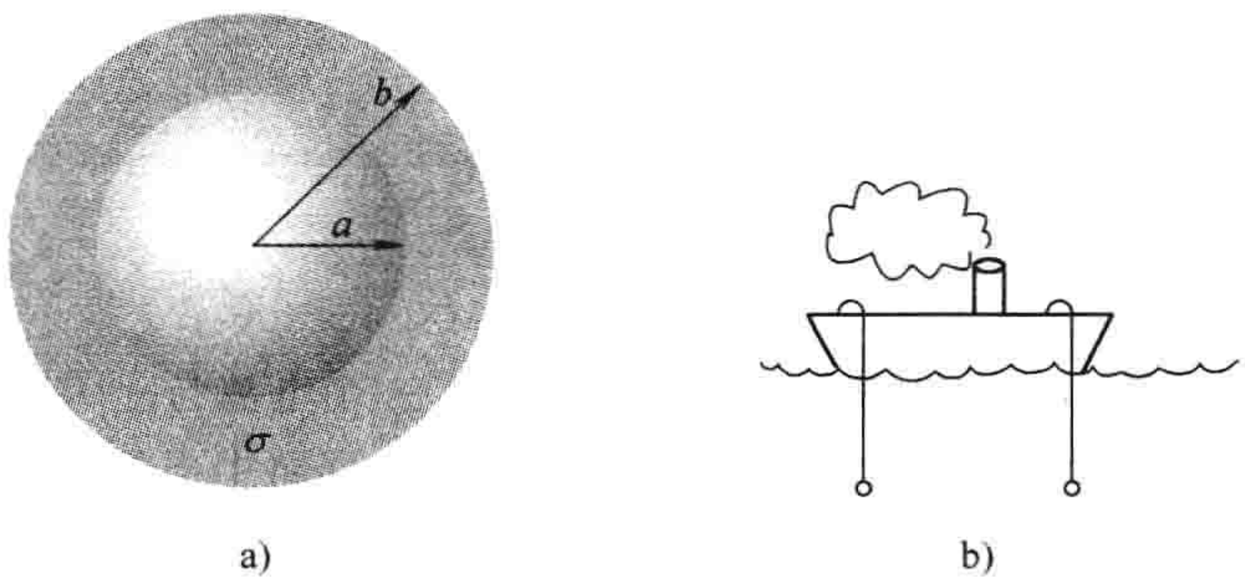
这就是**焦耳热定律**。当 I 以安培为单位，而 R 以欧姆为单位时，得出的 P 以瓦特为单位(焦耳每秒)。

习题 7.1　两个半径分别为 a 和 b 的同心金属球壳，被电导率为 σ 的弱导电材料分开(见图 7.4a)

(a) 如果它们之间保持电势差 V，从一个球壳流向另一个的电流多大？

(b) 球壳之间的电阻多大？

(c) 注意如果 $b \gg a$，外层球壳的半径(b)是无关的。你怎么解释这个事实？利用这个观察结果解决下述问题。设有半径为 a 的两个金属球，被浸没在足够深的海水中并且离得相当远(见图 7.4b)，如果两金属球之间的电势差为 V，求从一个球流向另一个球的电流(这个设置可以用来测量海水的电导率)。



a)　　b)

图　7.4

习题 7.2　一个电容器 C 被充电到电势为 V_0；在 $t=0$ 时刻这个电容器与一个电阻 R 连接，并且开始放电(见图 7.5a)。

(a) 求出电容器极板上的电荷随时间的变化 $Q(t)$ 及流经电阻的电流 $I(t)$。

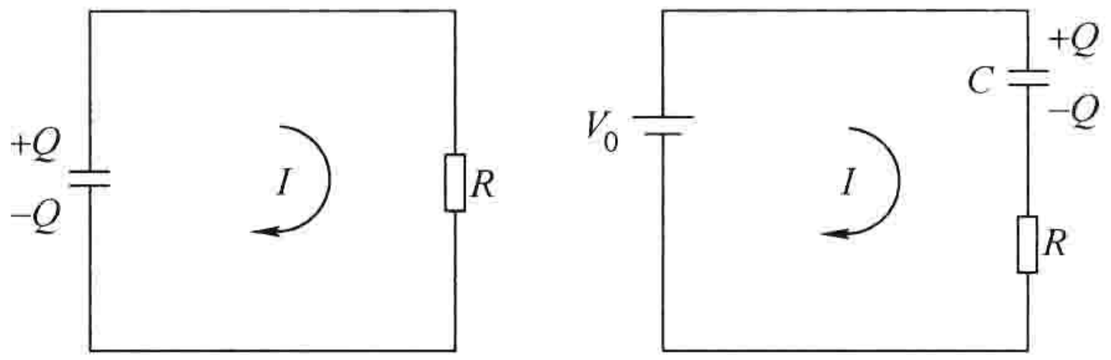
(b) 电容器中最初存储的能量为多少(式(2.55))？通过积分式(7.7)，证实电阻释放的热量与电容器损失的能量相等。

现在设想给电容器充电，将电容器(和电阻)在 $t=0$ 时刻连接到一个固定电压为 V_0 的电池上(见图 7.5b)。

⊖ 这个经典模型(Drude 提出)与电导率的现代量子理论几乎没有相似之处。例如，参见：D. Park 的 Introduction to the Quantum Theory, 3rd ed., Chap. 15 (New York: McGraw-Hill, 1992)。

(c) 计算充电时的 $Q(t)$ 和 $I(t)$。

(d) 求出电池的能量输出($\int V_0 I\mathrm{d}t$)。确定电阻上耗散的热量。最终储存在电容中的能量有多大? 电池所做的功中有多大部分作为电容器中的能量出现? [注意答案与 R 无关!]



a) b)

图 7.5

习题 7.3

(a) 两块金属物体嵌在电导率为 σ 的弱导电材料中(见图 7.6)。证明它们之间的电阻与这种分布的电容有关

$$R = \frac{\varepsilon_0}{\sigma C}$$

(b) 假设你在 1 与 2 之间接上一个电池,并且将它们充电至电势差为 V_0。如果你断开电池,电荷会逐渐泄露。证明 $V(t) = V_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$,并且得到用 ε_0 和 σ 表示的**时间常数** τ。

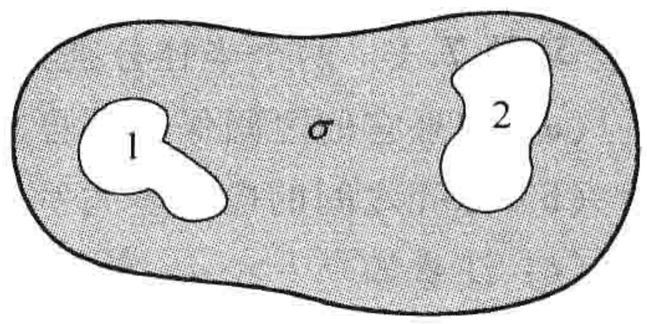


图 7.6

习题 7.4 假设在例题 7.2 中分隔圆柱的材料的电导率不是均匀的;具体来说,$\sigma(s) = k/s$,其中 k 为某个常数。求出两个圆柱之间的电阻。[提示:因为 σ 是位置的函数,式(7.5)不再成立,在这个电阻介质中电流密度不为零,而 $\boldsymbol{E}$ 不会按 $1/s$ 变化。但是我们确实知道对稳恒电流,流经每个柱面的 I 是相同的。从这种途径求出它。]

7.1.2 电动势

如果你考虑一个典型的电路(见图 7.7)——比如说,一个电池与一个灯泡相连——这里有一个令人困惑的问题:实际中,在任意给定时刻,电流在整个回路中都是相同的;当唯一明显的驱动力在电池内部时,情况为什么会是这样? 直观上,你可能会预料在电池内应该产生一个较大的电流而灯中一点电流也没有。那么是谁在其余电路中起着驱动力,而且恰巧这个驱动力在每一段导线中产生完全相同的电流? 进一步讲,考虑到在通常导线中电荷的定向运动速度非常之慢(见习题 5.19),为什么信息到达灯泡不需用半个小时呢? 所有的电荷是如何知道要同时开始运动的呢?

答案: 如果电流在整个电路中不是相同的话(例如,开关闭合后的最初一瞬间),那么在某些地方电荷会累积起来,并且——这里是要点——这些累积电荷的电场是阻碍电流流动的。例如,假设流进图 7.8 中弯折处的电流比流出的大。那么电荷就在“膝盖”累积起来,这样就产生一个方向背离累积电荷的电场。这个电场与流进电流的方向相反(减速电荷),但是增强流出的电流(加速电荷),直到这两个电流相等,此时,电荷不会进一步积累,从而建立起了平衡。这是一个漂亮的系统,可以自动自纠维持电流均匀,而且这个过程进行得非常之快,实际中,你可以放心地假定整个电路中的电流是相同的,甚至在以无线电频率振荡的系统中也可如此。

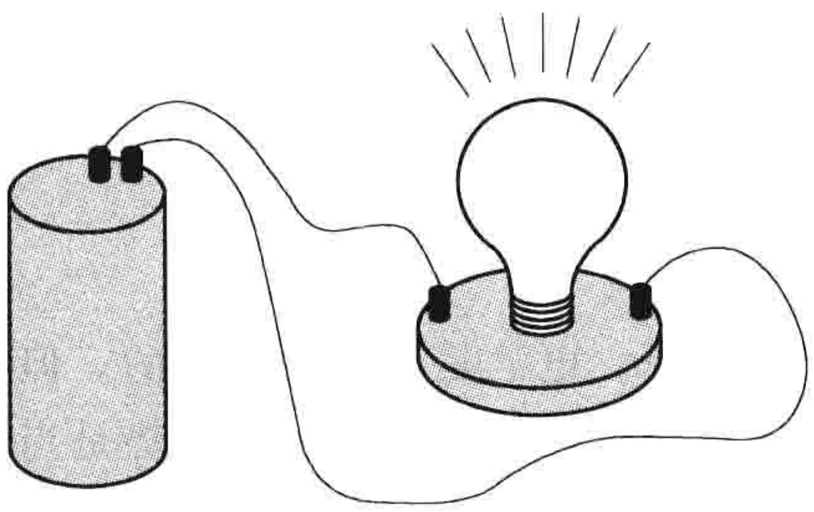


图　7.7

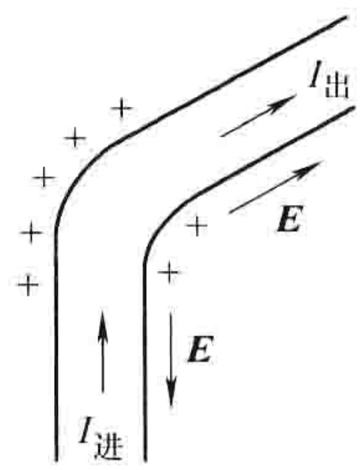


图　7.8

所有这些结果说明在驱动电流遍及电路的过程中其实涉及两个力：电源的 $\boldsymbol{f}_s$，其通常是被限制在回路的一部分中(比如说，一节电池)，和静电力，它促使电流均匀并且将电源的影响传播到电路的远端：

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_s + \boldsymbol{E} \tag{7.8}$$

产生 $\boldsymbol{f}_s$ 的物理原因是多种多样的：可以是电池中的化学力；也可以是压电晶体中机械压力转化成的电脉冲；在热电偶中，是由温度梯度产生的；在光伏电池中是由光照产生的；而在范·德·格若夫(Van de Graaff)发电机中，电子被装载在传送带上然后被移除。不论是什么机制，它总的效果是由遍及电路的对 $\boldsymbol{f}$ 的线积分决定的：

$$\boxed{\mathcal{E} \equiv \oint \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint \boldsymbol{f}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}} \tag{7.9}$$

(因为对于静电场 $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，你使用 $\boldsymbol{f}$ 还是 $\boldsymbol{f}_s$ 都没有关系。)$\mathcal{E}$ 被称为电路的**电动势**，或者 **emf**。这是一个很坏的术语，因为它根本就不是一个力——它是每单位电荷受到的力的积分。有些人更喜欢 electromotance(译者注：中文还是翻译为电动势)这个词，但是 emf 已经如此深入人心以至于我认为我们最好不要改变它。

在一个理想的电动势源中(例如，一节无电阻的电池[㊀])，电荷受到的合力为零($\sigma = \infty$ 代入式(7.1)中)，所以 $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{f}_s$。因此，两电极间电势差为

$$V = -\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{f}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint \boldsymbol{f}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathcal{E} \tag{7.10}$$

(我们可以将积分扩展到整个回路，因为电源之外 $\boldsymbol{f}_s = 0$)。这样，电池的作用就是建立并维持与电动势相等的电势差(例如，一节 6V 电池，保持正极比负极高 6V)。由此产生的静电场驱动电流遍及剩下的电路(但是，注意，在电池内部 $\boldsymbol{f}_s$ 驱使电流以相反于 $\boldsymbol{E}$ 的方向流动)。

由于是 $\boldsymbol{f}_s$ 的线积分，所以 $\mathcal{E}$ 可以被解释为电源对每单位电荷所做的功——的确，在某些书中电动势就是用这种方式定义的。但是，正如你将会在下一小节中所看到的，这种解释之中有一些微妙的问题，所以我更喜欢用式(7.9)。

习题 7.5　一节电动势为 $\mathcal{E}$、内阻为 r 的电池接入一个可变的“负载”电阻 R。如果你想要将尽可能大的功率输送到负载上，你应该选择多大的电阻 R？(当然，你无法改变 $\mathcal{E}$ 和 r。)

习题 7.6　如图 7.9 所示，一个高度为 h 的矩形导线框的一端放入一个平行板电容器的极板之间，线框平面与电场 $\boldsymbol{E}$ 平行。另一

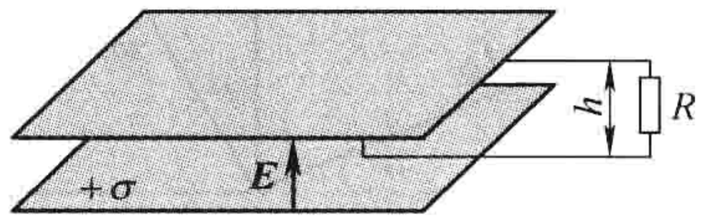


图　7.9

㊀ 实际的电池中有一个不可避免的内阻 r，并且当电流 I 流动时，其两端的电势差为 $\mathcal{E} - Ir$。关于电池工作原理的启发性的讨论，参见 D. Roberts, Am. J. Phys. 51. 829(1983)。

端则放在电场基本为零的相当远的外面。这个回路中电动势多大？如果总电阻为 R，电流为多大？并解释（警告：这是个有陷阱的问题，所以要小心：如果你创造出了一台永动机，肯定有什么地方是错误的。）

7.1.3 动生电动势

在上一小节中我曾经列出了若干电路中电动势可能的来源，电池是其中最熟悉的。但是我没有提到所有这些中最为常见的一种：**发电机**。发电机利用了动生电动势，这种电动势是当你将一根导线移过磁场时产生的。图 7.10 展示了一台发电机的原理模型。在阴影区有垂直纸面向里的匀强磁场 $\boldsymbol{B}$，而电阻器 R 代表任何我们试图驱使电流通过的物体（可能是一个灯泡或一台烤面包机）。如果整个回路以速度 v 被拉向右边，在 ab 段中的电荷会受到一个磁力，其垂直分量 qvB 驱动电流以顺时针方向流过回路。电动势为

$$\mathscr{E} = \oint \boldsymbol{f}_{磁} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = vBh \tag{7.11}$$

式中，h 是线框的宽度。（水平部分 bc 和 ad 无贡献，因为这里的力是与导线垂直的。）

注意，你用来计算 $\mathscr{E}$ 的积分（式(7.9)或式(7.11)）是在某个瞬间进行的——拍了一张线框的“快照”，如果你喜欢，从这个快照得到结果。这样，对于图 7.10 中的 ab 段，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是垂直向上的，尽管线框是在向右移动。你不能对此质疑——电动势就是这样定义的——但是搞清楚这一点很重要。

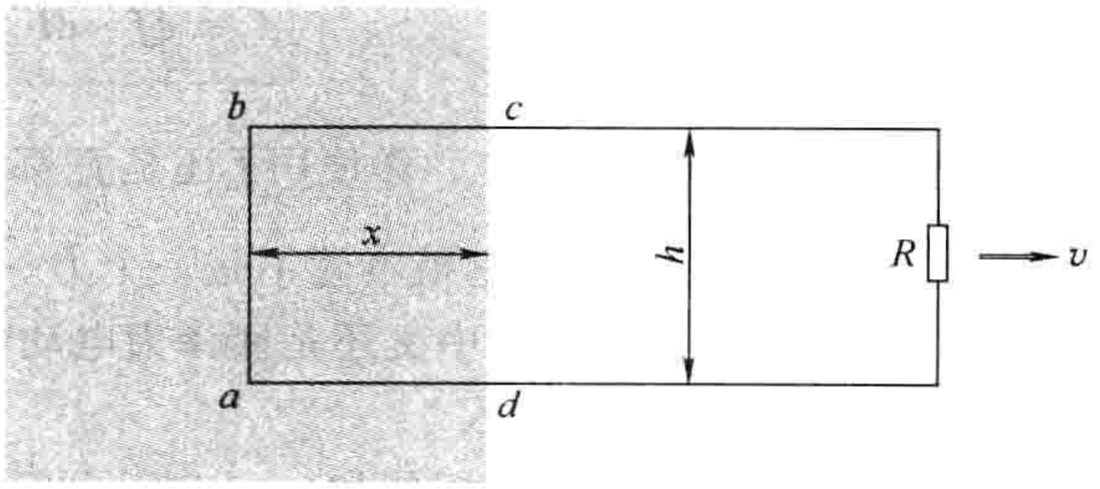


图 7.10

特别是，尽管磁力是建立电动势的原因，但是它确实没有做任何功——磁力永不做功。那么，是谁提供了加热电阻器的能量呢？答案：拉动线圈的那个人！随着电流流动，ab 段的电荷除了它们从线框运动承传过来的水平速度 $\boldsymbol{v}$ 外，还有一个垂直速度（叫它 $\boldsymbol{u}$）。相应地，磁力有一个向左的分量 quB。为了抵消这个力，拉动导线的那个人必须对每单位电荷施加向右的力（见图 7.11）：

$$f_{拉} = uB$$

这个力由导线的结构传递到电荷上。同时，粒子实际上是沿着合速度 $\boldsymbol{w}$ 的方向运动的，而它运动的距离是 $h/\cos\theta$。因此，每单位电荷做的功是

$$\int \boldsymbol{f}_{拉} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = (uB)\left(\frac{h}{\cos\theta}\right)\sin\theta = vBh = \mathscr{E}$$

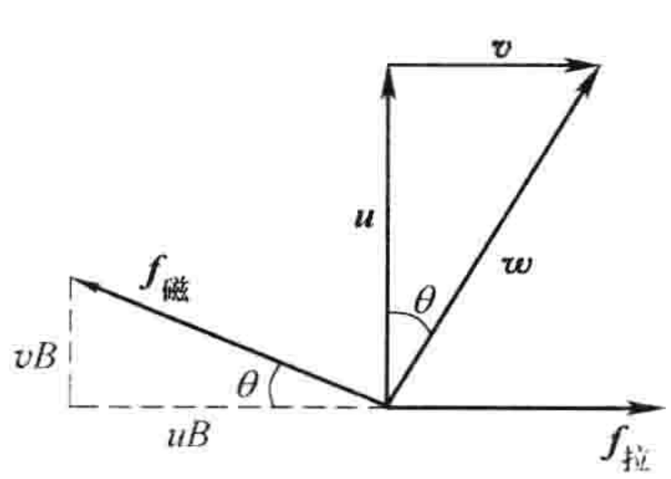


图 7.11

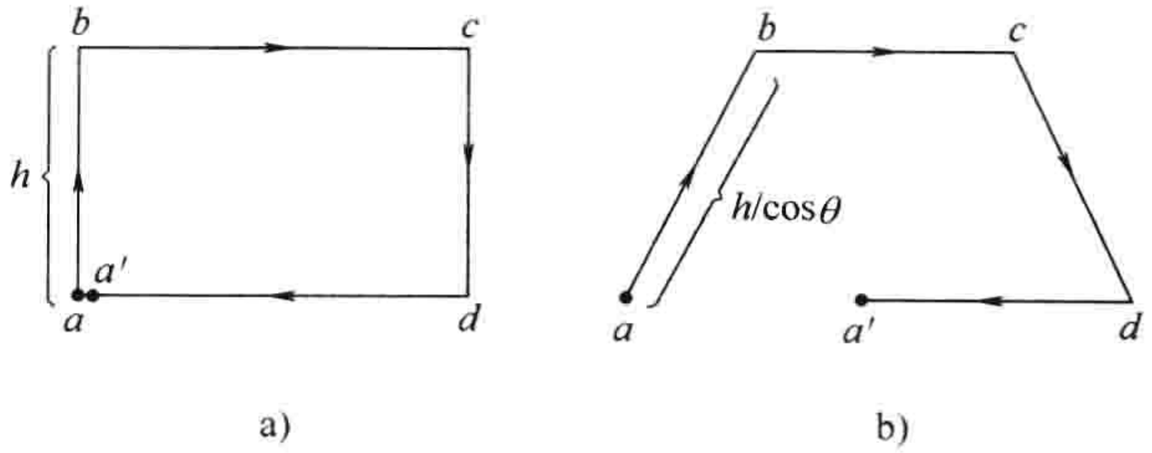


图 7.12

a）计算 $\mathscr{E}$ 的积分（在某时刻沿导线）

b）计算功的积分路径（随电荷沿回路）

式中，$\sin\theta$ 来自于点积。于是，正如上面证明的，每单位电荷所做的功与电动势完全相等，尽管

积分是沿一条完全不同的路径得出的(见图 7.12)，而且是涉及完全不同的力。为了计算电动势你应该在某个时刻沿着回路进行积分，但是为了计算所做的功，你应该跟着一个沿回路运动的电荷；$\boldsymbol{f}_{拉}$ 对电动势无贡献，因为它与导线垂直，然而 $\boldsymbol{f}_{磁}$ 对做功也没有贡献，因为它与电荷的运动垂直。㊀

有一个特别优美的方法来表述运动闭合回路中产生的电动势。令 $\boldsymbol{\Phi}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 通过回路的磁通量：

$$\boldsymbol{\Phi} \equiv \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{7.12}$$

对于图 7.10 中的矩形回路，

$$\boldsymbol{\Phi} = Bhx$$

当线框向右运动时，通量减少：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} = Bh\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Bhv$$

(这里的负号说明了 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 为负的事实。)而这正是电动势的数值(式(7.11))；显然回路中产生的电动势是通过回路磁通量变化率的负值：

$$\boxed{\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t}} \tag{7.13}$$

这就是动生电动势的**磁通量定则**。除了这个式子令人喜欢的简洁性，它还有适用于在非匀强磁场中向任意方向移动的非矩形线框的优点；事实上，线框甚至不需要保持一个固定的形状。

证明： 图 7.13 显示了一个在时刻 t 的线框形状，以及一段很短时间 $\mathrm{d}t$ 之后的形状。假定我们使用面积 S 计算了时刻 t 的磁通量，而对于时刻 $t+\mathrm{d}t$ 的磁通量，使用包括 S 加上连接线框新老位置的“带子”的面积。于是，磁通量的变化为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(t+\mathrm{d}t) - \boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{\Phi}_{带子} = \int_{带子} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

让我们来考虑线框上的一点 P：在 $\mathrm{d}t$ 的时间内它移动到了 P'点。令$\boldsymbol{v}$ 为导线的速度，而 $\boldsymbol{u}$ 为电荷在导线中运动的速度；$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ 为 P 点电荷的合速度。带子上的无限小面元可以写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l})\mathrm{d}t$$

(见图 7.13 中的小图)。因此

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} = \oint \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l})$$

因为 $\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})$且 $\boldsymbol{u}$ 平行于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，我们也可以将其写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} = \oint \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{w} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l})$$

现在，标量三重积可以重写为

$$\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{w} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}) = -(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} = -\oint (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

但是$(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{B})$是每单位电荷受到的磁力 $\boldsymbol{f}_{磁}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} = -\oint \boldsymbol{f}_{磁} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

而这个关于 $\boldsymbol{f}_{磁}$ 的积分就是电动势 $\mathscr{E} = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t}$

㊀ 对于更进一步的讨论，参见 E. P. Mosca, Am. J. Phys. 42, 295(1974)。

证毕。

在电动势的定义式(7.9)中存在符号的模糊性：你应该沿着闭合回路的哪个方向来进行积分？在磁通量的定义式(7.12)中也有类似的模糊性：什么是 $d\boldsymbol{a}$ 的正方向？在应用磁通量定则时，符号的一致性(和往常一样)是由右手定则决定的：如果你的四指方向表示闭合回路的正方向，那么大拇指就表示 $d\boldsymbol{a}$ 的方向。如果计算出的电动势是负的，它表示电流沿着闭合回路的负方向流动。

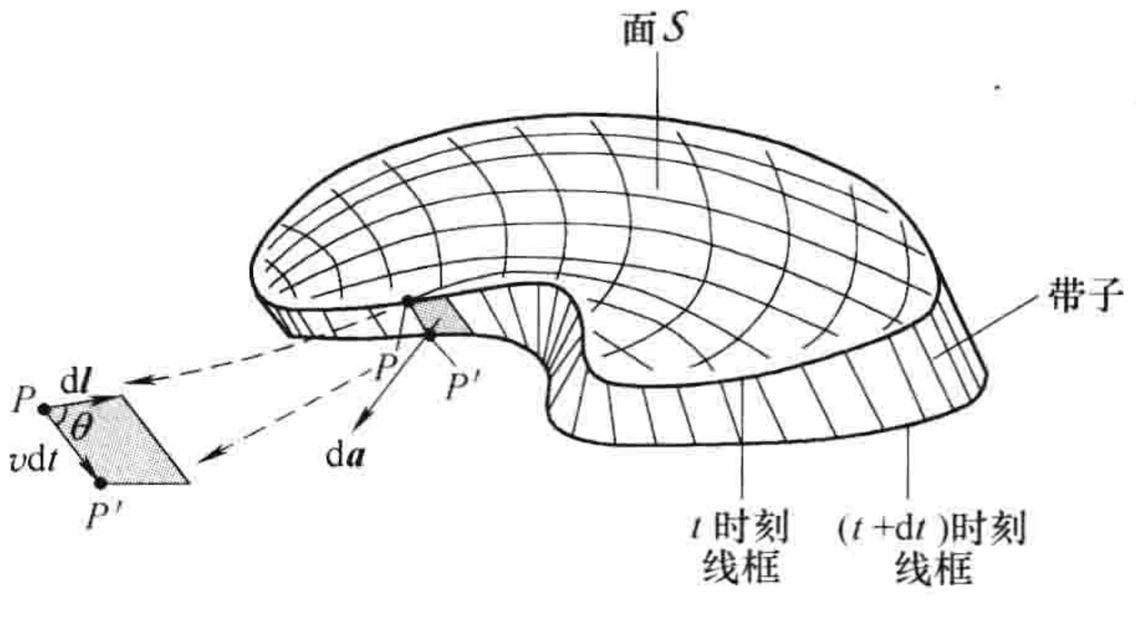


图 7.13

磁通量定则是计算动生电动势的一个有效的捷径。它并未包含任何新的物理。有时你会碰到一些不能用磁通量定则解决的问题；对于这些问题就必须回到洛伦兹力定律本身。

例题 7.4

一个半径为 a 的金属碟以角速度 ω 绕垂直于圆心的轴在一个方向向上的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中转动。一个电阻的一端连接到轴上，另一端通过滑动接头连接到金属碟的外边缘，构成一个回路(见图 7.14)。求电阻中的电流。

解： 碟子上距离轴为 s 的点的速度为 $v=\omega s$，所以每单位电荷受的力为 $\boldsymbol{f}_{磁}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\omega sB\hat{\boldsymbol{s}}$。因此电动势为

$$\mathscr{E}=\int_0^a f_{磁}\,ds=\omega B\int_0^a s\,ds=\frac{\omega Ba^2}{2}$$

而电流为

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{\omega Ba^2}{2R}$$

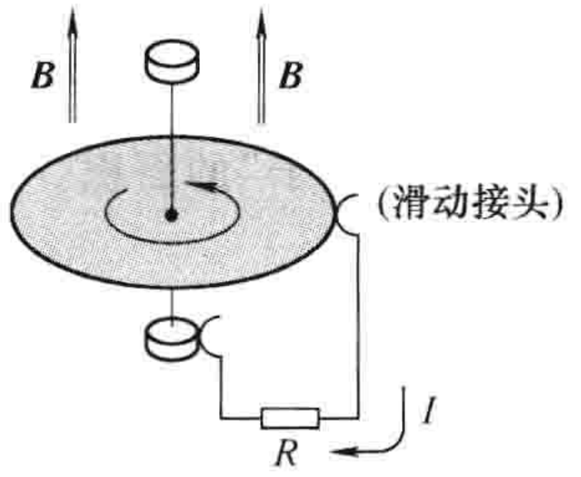
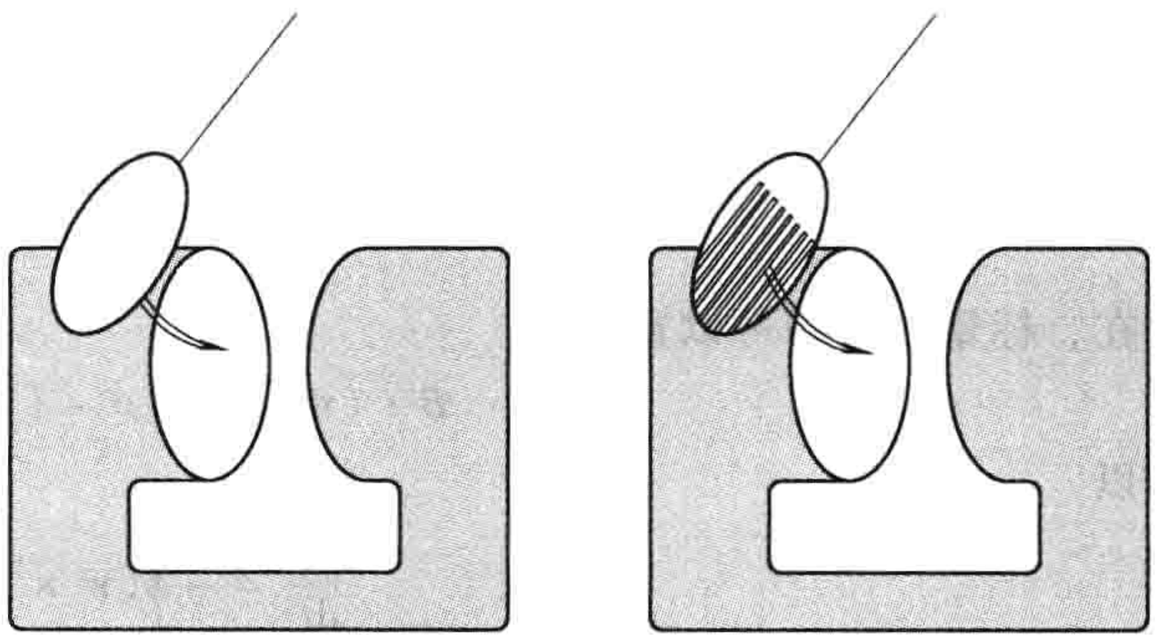


图 7.14

磁通量定则的困难就在于它假定了电流是沿着一个定义明确的路径流动的，然而在本题中电流是分布在整个碟子上的。在这种情况下，“通过电路的磁通量”意味着什么甚至都不是很清楚。更加棘手的是**涡流**的情形。取一大块铝(比如说)，并且在一个非匀强磁场附近摇晃它。在材料中会产生电流，而你会感觉到一种“粘滞力”——就好像你在拉着这块物体穿过糖浆一样(这就是在动生电动势的讨论中我称为 $\boldsymbol{f}_{拉}$ 的力)。涡流是出了名的难以计算的，[一]但是演示起来却很简单且令人印象深刻。你可能已经见过这个典型的实验，一个竖直悬挂的铝盘摆穿过一个磁铁的两极(见图 7.15a)。当其进入磁场区域时，铝盘突然开始持续减速。为了确认这是涡流引起的，重复以上步骤，但这次使用一个上面切有许多狭缝的圆盘，从而防止大尺度的涡流(见图 7.15b)。这次圆盘自由摆动，未被磁场妨碍。



a) b)

图 7.15

[一] 例如，参见 W. M. Saslow, Am. J. Phys., 60, 693(1992)。

习题 7.7　一根质量为 m 的金属棒在两个相距 l 的平行导电导轨上无摩擦地滑动(见图 7.16)。一个电阻 R 连接在两个导轨之间，而一个方向指向纸面的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 充满了整个区域。

(a) 如果该棒以速度 v 向右运动，电阻中的电流有多大？它向哪个方向流动？

(b) 棒上受到的磁力多大？朝哪个方向？

(c) 如果棒在 $t=0$ 时刻开始以速度 v_0 运动，随后自行滑动，在稍后时刻 t 它的速度是多大？

(d) 这根棒的初始动能，毫无疑问，是 $\frac{1}{2}mv_0^2$。验证传递到电阻上的能量恰好为 $\frac{1}{2}mv_0^2$。

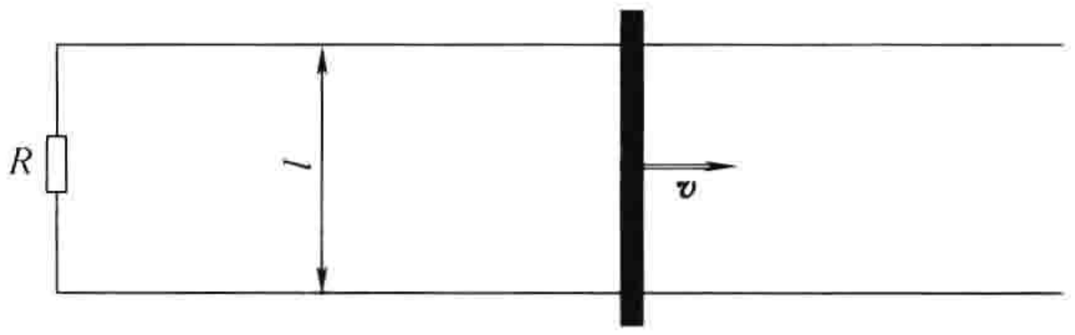


图　7.16

习题 7.8　一个正方形导线框(边长 a)平放在桌子上，它的一边距一条带有电流 I 的长直导线的距离为 s，如图 7.17 所示。

(a) 求出穿过线框的 $\boldsymbol{B}$ 的通量。

(b) 如果现在有人以速度 v 将线框平直拉离导线，产生的电动势多大？电流朝哪个方向(顺时针或逆时针)流动？

(c) 如果线框是以速度 v 被拉向右边，而不是远离呢？

习题 7.9　对一个给定的边界线可有无穷多个不同的面与之相匹配，但是，在定义通过一个闭合回路的磁通量 $\Phi = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 时，我从来没有指定应该使用哪一个具体的面。对这个明显的疏忽进行补证。

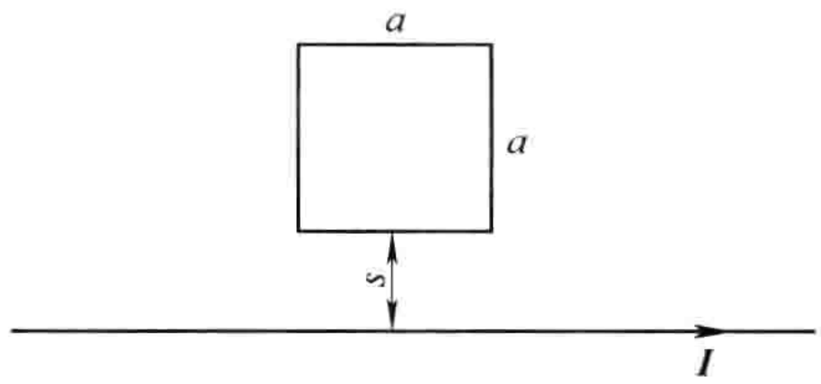


图　7.17

习题 7.10　在方向向右的匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，一个正方形线框(边长 a)绕垂直轴以角速度 ω 旋转(见图 7.18)。求出这个**交流**发电机的 $\mathscr{E}(t)$。

习题 7.11　一个由厚铝板剪成的正方形线框的上半部被放置在一个匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，在重力作用下下落(见图 7.19)。(在这个示意图中，阴影区表示磁场；$\boldsymbol{B}$ 方向指向纸面。)如果磁场为 1T(一个相当标准的实验室中的磁场)，求出线框离开磁场区域时的最终速度(以 m/s 为单位)。求出作为时间函数的线框速度。需要多久(以 s 为单位)来达到，比如说，90% 的最终速度？如果你在这个回路中剪出一个微小的缝隙，从而破坏了电路，会发生什么？[注：线框的尺寸被消去了；以题中所给单位求出具体数值。]

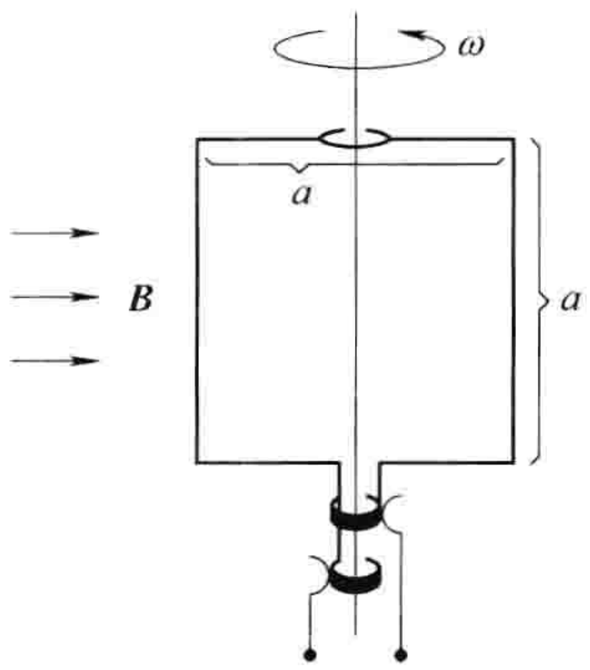


图　7.18

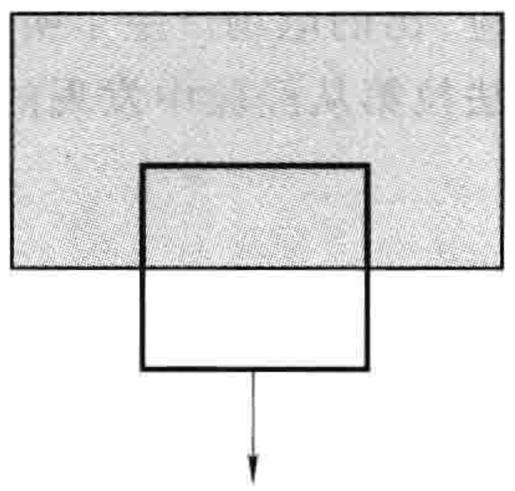


图　7.19

7.2 电磁感应

7.2.1 法拉第定律

1831 年，迈克尔·法拉第报告了一系列的实验，包括如下描述的三个实验(与真实的历史有一些出入)：

实验 1：他向右拉动一个导线框穿过磁场(见图 7.20a)。在回路中有电流流动。

实验 2：他把磁铁向左移动，保持线框静止(见图 7.20b)。回路中仍有电流出现。

实验 3：线框与磁铁均保持静止(见图 7.20c)，但他改变了磁场的强度(他使用了一块电磁铁，改变线圈中的电流)。再一次，回路中出现了电流。

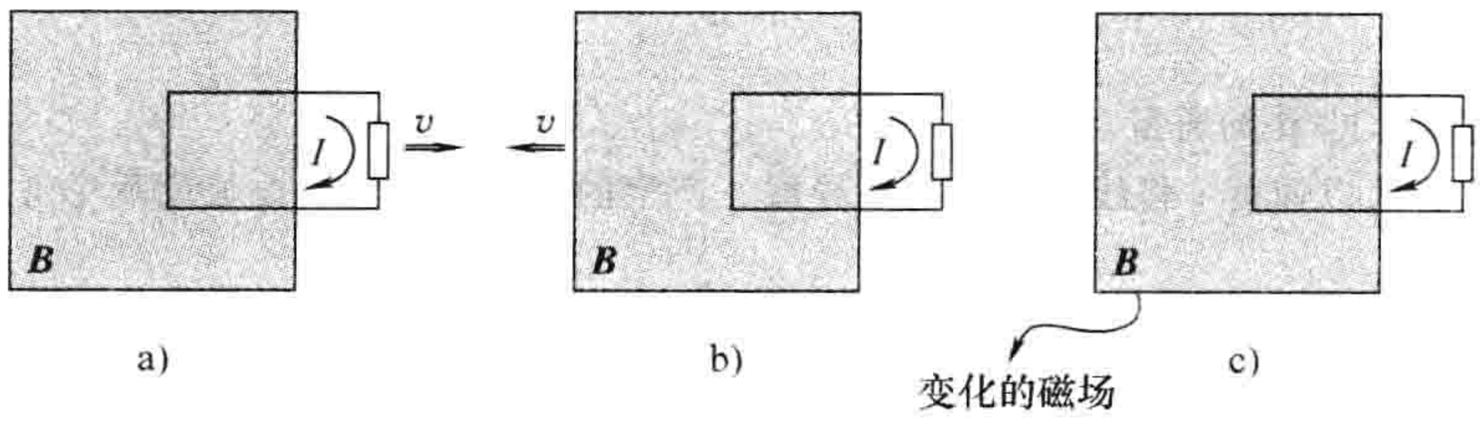


图 7.20

当然，第一个实验是动生电动势的例子，可以很方便地用磁通量定则表示出来：

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

我想实验 2 与实验 1 产生完全相同的电动势不会使你感到惊讶——关键是磁铁与回路之间的相对运动。的确，根据狭义相对论，电动势一定相等。但是法拉第对相对论一无所知，而在经典电动力学中，这只是一种令人寻味的巧合。因为如果是回路在运动，则是磁力建立了电动势，但是如果回路是静止的，这个力就不可能是磁力了——静止的电荷不受磁力作用。在这个情况下，是什么力在起作用呢？是什么场在对静止电荷施加力呢？当然，电场可以，但是在这个情形下，似乎并不存在任何电场。

法拉第产生了一个奇妙的灵感：

一个变化的磁场可以感应出电场。

正是这个“感应”出的电场产生了实验 2 中的电动势。[⊖] 的确，如果电动势同样等于磁通量的变化率的话(正如法拉第从经验中发现的那样)，

$$\mathscr{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{7.14}$$

则 $\boldsymbol{E}$ 就与 $\boldsymbol{B}$ 的变化通过等式

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{7.15}$$

联系了起来。这就是积分形式的**法拉第定律**。我们可以利用斯托克斯定理将其转化为微分形式：

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}} \tag{7.16}$$

⊖ 你可能会主张实验 2 中的磁场并没有真的改变——只是移动了罢了。我的意思是如果你坐在一个固定的位置，当磁铁经过的时候，磁场确实改变了。

注意在静态的情况下($\boldsymbol{B}$ 为常数)，法拉第定律退化为老规则 $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$(或者，用微分形式，$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$)，当然，也必须如此。

在实验 3 中磁场是完全不同的原因引起的变化，但是根据法拉第定律同样会感生出一个电场，从而产生电动势 $-\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$。的确，我们可以将这三种情况(以及对于它们任意组合的情形)全部概括为一种**普适通量定则**：

不论何时(并且不论什么原因)，当通过一个回路的磁通量改变时，都会在回路中出现电动势

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{7.17}$$

很多人将这个称为“法拉第定律”。可能我有点过于挑剔了，但是我发现这容易令人感到困惑。在式(7.17)中，实际上有两种完全不同的机制，而把这两者都认为是“法拉第定律”有点像说因为同卵双胞胎看起来很像，所以我们应该把他们叫做相同的名字。在法拉第的第一个实验中，是洛伦兹力在起作用；电动势是磁力产生的。但是在另外两个实验中是电场(由变化的磁场感应出来的)起的作用。从这点看来，这三个过程都遵守同一个电动势的公式相当令人吃惊。事实上，正是这个“巧合”引导爱因斯坦建立了狭义相对论——他得到了关于经典电动力学中的这个奇妙巧合的更深一层的理解。但这是属于第 12 章的内容。同时，我将会为由于磁场改变而感生出的电场保留“法拉第定律”这个术语，但是我不会将实验 1 视作法拉第定律的一个例子。

例题 7.5

一个长为 L、半径为 a 的长圆柱磁铁带有平行于其轴的均匀磁化强度 $\boldsymbol{M}$。该圆柱以恒定速度 $\boldsymbol{v}$ 穿过直径稍大的圆形导线环(见图 7.21)。将环中感生出来的电动势作为时间的函数画出。

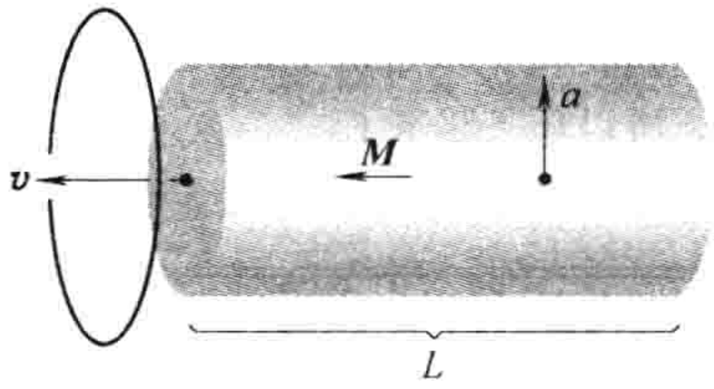


图　7.21

解： 圆柱的磁场与长螺线管的一样，其面电流密度为 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{b}}=M\hat{\boldsymbol{\phi}}$。所以内部的磁场为 $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{M}$，除了在靠近两端处，磁场开始发散。当磁铁远离时，通过环的磁通量为零；当前端通过环时，磁通量逐渐增加到最大值 $\mu_0 M\pi a^2$；而当末端通过后，磁通量减小到零(见图 7.22a)。电动势是(负的)Φ 对时间的导数，所以它包括两个峰值，如图 7.22b 所示。

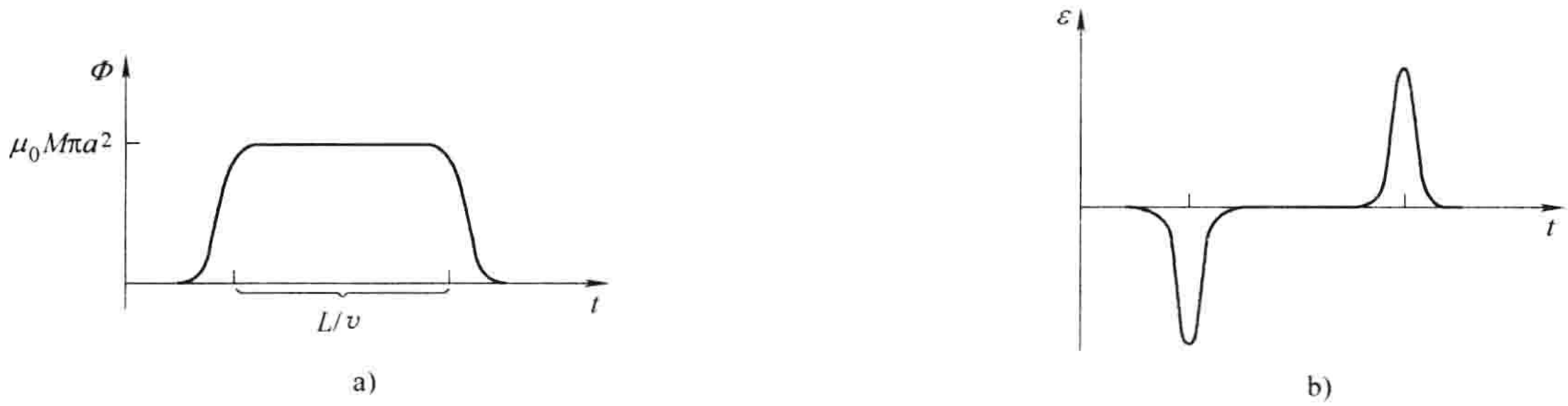


图　7.22

确定法拉第定律中的符号变化很令人头痛。例如，在例题 7.5 中我们想要知道感生电流沿着环的哪个方向流动。原则上，可以利用右手定则来确定(在图 7.21 中，我们将向左的 Φ 称为正

的，所以环中电流的正方向当从左边看时是逆时针方向；因为图 7.22b 中的第一个峰值是负的，第一个电流脉冲以顺时针方向流动，而第二个则为逆时针）。但是有一个方便的规则，叫做**楞次定律**，它的唯一目的是帮助你正确地得到电流方向：[⊖]

自然状态反抗磁通量的改变。

感生电流将以这样的方向流动，它自身产生的磁通量将倾向于抵消磁通量的变化。（正如在例题 7.5 中，磁铁的前端进入环中时，磁通量增加，所以环中电流必须产生一个向右的磁场——因此电流沿顺时针方向流动。）注意，自然状态反抗的是磁通量的变化，而不是磁通量本身（当磁铁的末端离开环，磁通量减少，所以感生电流以逆时针方向流动，试图恢复磁通量）。法拉第感应是一种“惯性”现象：一个导电回路“喜欢”使通过它的磁通量保持恒定；如果你试图改变通过回路的磁通量，回路作为回应，会产生出一个电流，这个电流的方向是沿着能抵消你的努力的方向。（但不会完全抵消；感生电流产生的磁通量通常只是原磁通量的很小一部分。楞次定律告诉你的只是电流的方向。）

例题 7.6

“跳跃的环”演示。如果你在一个铁柱上绕一个螺线管线圈（铁柱在这里是用来加强磁场的），在其顶部放置一个金属环，然后通上电，这个环会在空中跳好几英尺高（见图 7.23）。为什么？

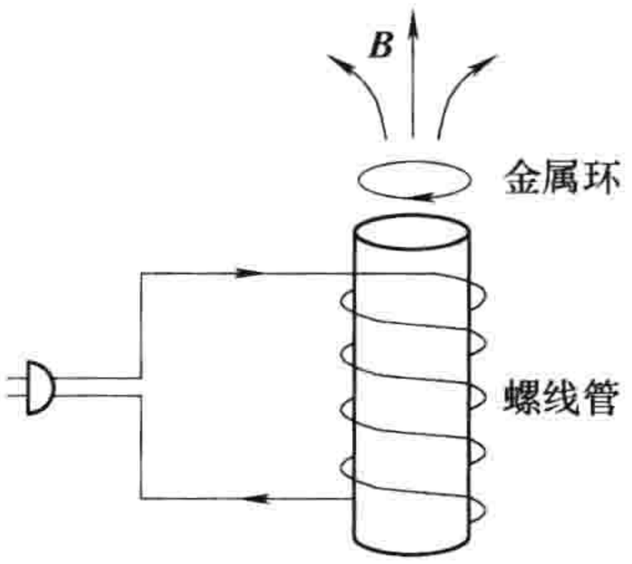


图 7.23

解： 在你通上电流之前，通过环的磁通量为零。通上电流之后出现了磁通量（在图中向上），而环中产生的电动势导致一个电流（在环中），根据楞次定律，它产生的磁场的方向倾向于抵消这个新的磁通量。这意味着环中的电流与螺线管中的电流方向相反。相反的电流相互排斥，所以环飞起来了。[⊜]

习题 7.12 一个半径为 a 的长螺线管，由一个交变电流驱动，所以内部的磁场是正弦函数：$\boldsymbol{B}(t) = B_0\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{z}}$。一个半径为 $a/2$，电阻为 R 的环形导线线圈，被放置于螺线管内部，并与之同轴。求出回路中作为时间函数的感应电流。

习题 7.13 一个边长为 a 的正方形导线线框，置于 xy 平面的第一象限，并且其中一角在原点处。在这个区域中有一个随时间变化的非匀强磁场 $\boldsymbol{B}(y,t) = ky^3t^2\hat{\boldsymbol{z}}$（其中 k 为一个常数）。求出回路中的感应电动势。

习题 7.14 作为一个课堂演示，一个短圆柱棒状磁铁从一个大约 2m 长、半径稍大的垂直铝管中落下。磁铁用了若干秒才到达底部，然而另一个完全一样但未被磁化的铁块只用了不到 1s 就到达了底部。解释为什么磁铁下落要慢得多。

7.2.2 感应电场

法拉第的发现告诉我们的确存在两种不同类型的电场：那些直接归因于电荷的电场和那些与

⊖ 楞次定律也适用于动生电动势的情形，但是对于动生电动势，通过洛伦兹力定律得到电流方向通常更为简便。

⊜ 对于跳跃的环（以及与此相关的“漂浮环”）的进一步的讨论，参见 C. S. Schneider 和 J. P. Ertel. *Am. J. Phys.* 66, 686(1998)。

变化的磁场有关的电场。[⊖]第一项可以利用库仑定律计算(在静止情形中)；后一项可以由法拉第定律

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

以及安培定理

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

之间的相似性得到。当然，仅仅有旋度并不足以确定一个电场——你必须同时指定散度。但是只要 $\boldsymbol{E}$ 是一个纯的法拉第电场，完全是由变化的 $\boldsymbol{B}$ 产生的($\rho = 0$)，高斯定理就表明

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

而对于磁场，当然也总有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

这个对应是完全的，所以法拉第感应电场由 $-(\partial \boldsymbol{B}/\partial t)$ 决定，这同静磁场由 $\mu_0 \boldsymbol{J}$ 决定的方式完全一样。

特别的，如果对称性允许，我们可以利用所有与积分形式的安培定理有关的技巧，

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\mathrm{enc}}$$

只是这次是积分形式的法拉第定律：

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} \tag{7.18}$$

通过安培回路的(磁)通量变化率现在扮演了之前 $\mu_0 I_{\mathrm{enc}}$ 的角色。

例题 7.7

一个方向竖直向上的匀强磁场 $\boldsymbol{B}(t)$，位于图 7.24 的圆形阴影区域中。如果 $\boldsymbol{B}$ 是随时间变化的，感应电场为多大？

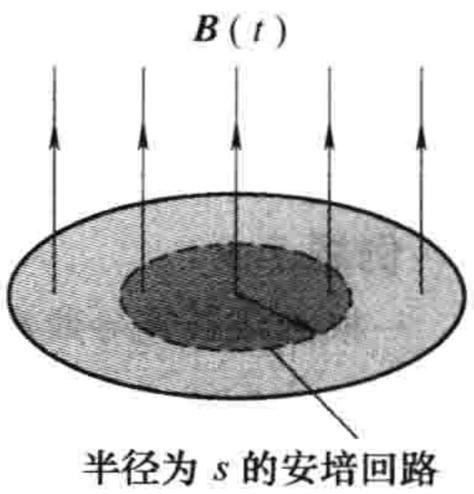


图　7.24

解： $\boldsymbol{E}$ 的方向环绕圆周的切线方向，正如一个带有均匀电流的长直导线内部的磁场一样。取一个半径为 s 的安培回路，并应用法拉第定律：

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = E(2\pi s) = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi s^2 B(t)) = -\pi s^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

因此

$$\boldsymbol{E} = -\frac{s}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

如果 $\boldsymbol{B}$ 增大，$\boldsymbol{E}$ 从上方看就是沿着顺时针方向的。

例题 7.8

电荷线密度为 λ 的线电荷被粘在半径为 b 的轮缘上，该轮随后被水平悬挂，如图 7.25 所示，所以它可以自由转动(那些辐条是用一些不导电物质制作的——可能是木头)。从圆心到半径为 a 的区域中，存在一个方向向上的匀强磁场 $\boldsymbol{B}_0$。现在除去磁场。会发生什么？

解： 变化的磁场会感应出一个电场，方向环绕着轮轴。这个电场施加给轮缘上的电荷一个力，随后轮

⊖ 我认为，你可以引入一个完全新的词汇来表示由变化的 $\boldsymbol{B}$ 产生的电场。电动力学于是就包括了三种场：$\boldsymbol{E}$ 场，由电荷产生[$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = (1/\varepsilon_0)\rho$，$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$]；$\boldsymbol{B}$ 场，由电流产生[$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$，$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$]；以及 $\boldsymbol{G}$ 场，由变化的磁场产生[$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = 0$，$\nabla \times \boldsymbol{G} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$]。因为 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 以相同的方式[$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{G})$]施加作用力，将它们的和视为一个独立的实体并称这个整体为“电场”要更简洁一些。

子开始旋转。根据楞次定律，轮子转动的方向(电流的方向)倾向于恢复原先磁通量的方向。因而，从上方看是逆时针方向。

定量地说，法拉第定律给出

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

现在，一段长度 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 上的力矩为 $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})$，或 $b\lambda E\mathrm{d}l$。因此，作用在轮子上的总力矩为

$$N = b\lambda\oint E\mathrm{d}l = -b\lambda\pi a^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

而施加给轮子的总角动量为

$$\int N\mathrm{d}t = -\lambda\pi a^2 b\int_{B_0}^{0}\mathrm{d}B = \lambda\pi a^2 bB_0$$

你去掉磁场的快慢没有关系；轮子的最终角速度都相同。(如果你发现你自己在奇怪这个角动量是从哪里来的话，你超前了！等下一章吧。)

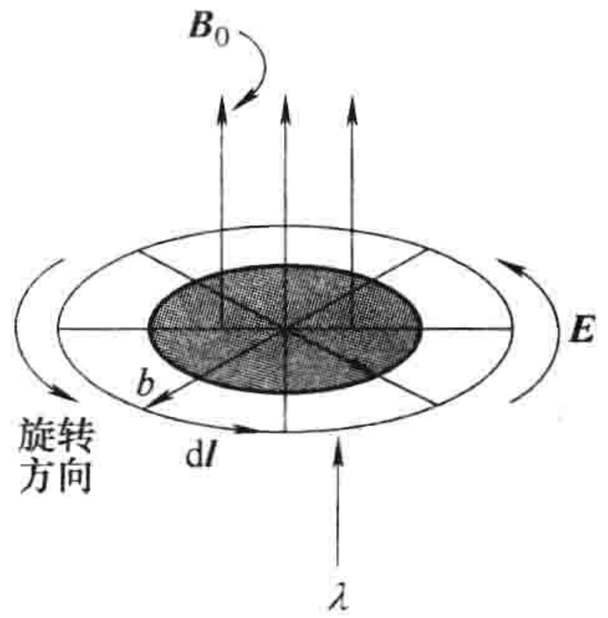


图 7.25

关于这个例子的最后一件事：是电场使轮子旋转起来的。为了使你确信这一点，我故意将情况安排成这样，电荷所处之处(轮缘上)的磁场为零。实验者可能告诉你她从未加入任何电场——她做的所有事只是关掉了磁场。但是当她做这件事的时候，一个电场就自动出现了，而正是电场转动了轮子。

现在，我必须提醒你们一个在运用法拉第定律时的一个小问题：电磁感应，当然，只在磁场变化时才能出现，而我们仍在用静磁学的工具(安培定理，毕奥-萨伐尔定律以及其他)来计算这些磁场。技术上讲，任何用这种方式得出的结果都只是近似正确的。但是在实际中，误差通常都是微不足道的，除非磁场波动得极快，或者是你对离源非常远的场点感兴趣。甚至在一根导线被一把剪子突然剪断的情形(习题 7.18)，也可以认为是静态而应用安培定理。这种情况，其中静磁学定律可以被用来计算法拉第定律右边项中的磁场，被称为**准静态**。一般来说，只有我们谈到电磁波和辐射时，我们才需要认真考虑静磁学定律的失效问题。

例题 7.9

一根无限长直导线载有缓慢变化的电流 $I(t)$。作为距导线距离为 s 的函数，求出感应电场。[⊖]

解： 在准静态近似中，磁场为 $(\mu_0 I/2\pi s)$，方向是环绕导线的。正如一个螺线管的 $\boldsymbol{B}$ 场一样，这里 $\boldsymbol{E}$ 的方向与导线轴平行。对于图 7.26 中的矩形"安培回路"，法拉第定律给出：

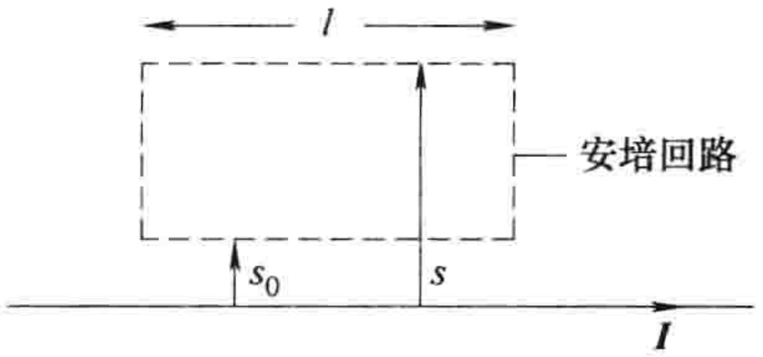


图 7.26

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = E(s_0)l - E(s)l = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\int_{s_0}^{s}\frac{1}{s'}\mathrm{d}s'$$

$$= -\frac{\mu_0 l}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(\ln s - \ln s_0)。$$

这样有

$$\boldsymbol{E}(s) = \left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\ln s + K\right]\hat{\boldsymbol{z}} \tag{7.19}$$

式中，K 是一个常数(这就是说，它与 s 无关——它可能仍然是 t 的函数)。K 的实际值依赖于函数 $I(t)$ 的全

⊖ 这个例子是杜撰的，这并不仅是指在涉及无限长导线时的通常意义下，而是在一个更微妙的方面。它假定电流沿着导线处处相等(在任何给定的时刻)。对通常电路中的短导线来说这是一个安全的假定，但是对于长导线(输电线)来说则不是(在实际中)，除非你提供分布式的而且同时的驱动机制。但是不要介意——这个问题并没有问你怎么产生这样一个电流；它只问如果你这样做了会产生什么样的电场。(M. A. Heald 在 Am. J. Phys. 54, 1142(1986)中讨论了这个问题的变化形式，引用的参考文献也是关于这个问题的。)

部历史——我们会在第 10 章看到一些例子。

式(7.19)有一个奇怪的结论，当 s 趋近于无限大时 E 趋向无限大。这不可能是真的……哪里出错了？答案：我们已经越过了准静态近似的极限。正如我们将在第 9 章中看到的，电磁“信息”以光速传播，而在很远处某时刻的 $\boldsymbol{B}$ 不依赖于此时的电流，而是依赖于某个更早时刻的电流(事实上，是全部早先时刻的电流，因为导线上的不同点离场点有不同的距离。)如果 τ 是 I 充分变化所需要的时间，那么准静态近似仅对

$$s \ll c\tau \tag{7.20}$$

时成立，因此式(7.19)在极大的 s 处不适用。

习题 7.15　一个半径为 a、每单位长度匝数为 n 的长螺线管通有一个沿 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 方向且随时间变化的电流 $I(t)$。在准静态近似下，求出距轴 s 处(螺线管内部和外部)的电场(大小和方向)。

习题 7.16　一个交变电流 $I = I_0\cos(\omega t)$ 流经一个长直导线，然后沿着一个半径为 a 的同轴导电管流回。

(a) 感应电场指向哪个方向(径向、切向还是纵向)？

(b) 假定当 $s \to \infty$ 时电场趋近于零，得到 $\boldsymbol{E}(s, t)$。[顺便提及，由于例题 7.9 中脚注提到的原因，这并不是同轴电缆中电场的完整实际行为。对更加实际的处理，见 9.5.3 小节，或者 J. G. Cherveniak, Am. J. Phys., 54, 946(1986)。]

习题 7.17　一个半径为 a、单位长度带有 n 匝线圈的长螺线管，被一个电阻为 R 的导线框环绕，如图 7.27 所示。

(a) 如果螺线管中的电流以一个固定速率变大($dI/dt = k$)，在线框中流动多大的电流，它从哪个方向(左或右)通过电阻？

(b) 如果螺线管中的电流是固定的，但是将螺线管从线框中抽出，然后以相反的方向重新插入，通过电阻的总电荷量是多少？

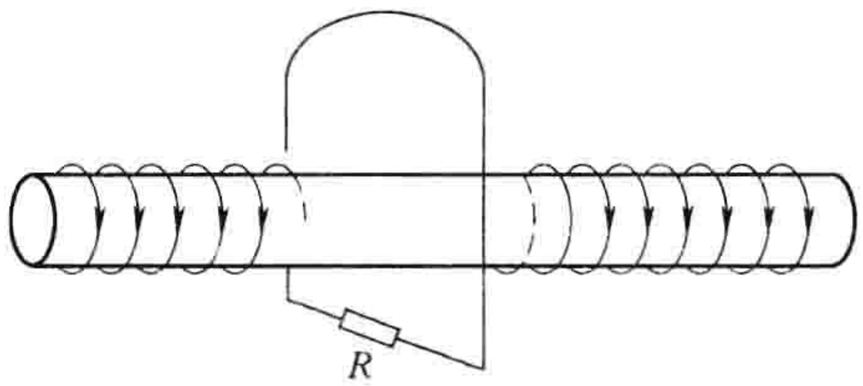


图　7.27

习题 7.18　一个边长为 a、电阻为 R 的正方形线框，位于距离一条带有电流 I 的无限长直导线 s 处(见图 7.28)。现在有人剪断了导线，所以 I 下降到零。在这个正方形线框中感应电流会朝着哪个方向流动？在这个电流流动期间通过线框中的一给定点的总电荷量是多少？如果你不喜欢这个剪刀模型，可逐渐降低电流：

$$I(t) = \begin{cases} (1 - \alpha t)I, & \text{对于 } 0 \leqslant t \leqslant 1/\alpha \\ 0, & \text{对于 } t > 1/\alpha \end{cases}$$

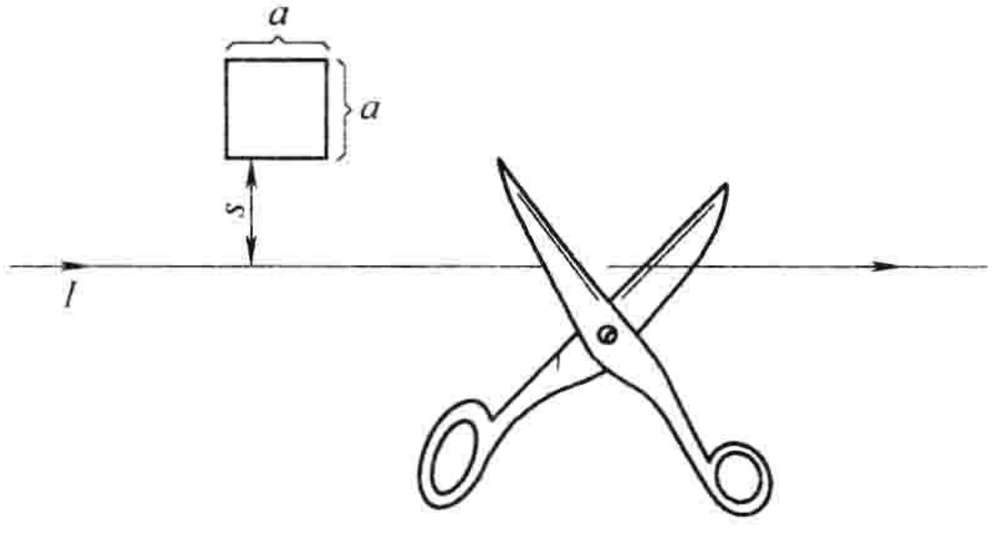


图　7.28

习题 7.19　一个内径为 a、外径为 $a + w$、高为 h 的环形螺线管其横截面为矩形。它共有 N 匝密绕线圈，而电流以固定速率($dI/dt = k$)增长。如果 w 与 h 都远小于 a，求出环形中心上方点 z 的电场。[提示：利用法拉第场与静磁场之间的相似性，并参考例题 5.6。]

7.2.3 电感

假设你有两个静止的导线回路(见图 7.29)。如果你在回路 1 中通上一个稳恒电流 I_1，它产生一个磁场 $\boldsymbol{B}_1$。磁场线的一部分经过回路 2；令 Φ_2 为 $\boldsymbol{B}_1$ 通过 2 的磁通量。实际计算 $\boldsymbol{B}_1$ 是比较困难的，但是注意一下毕奥-萨伐尔定律，

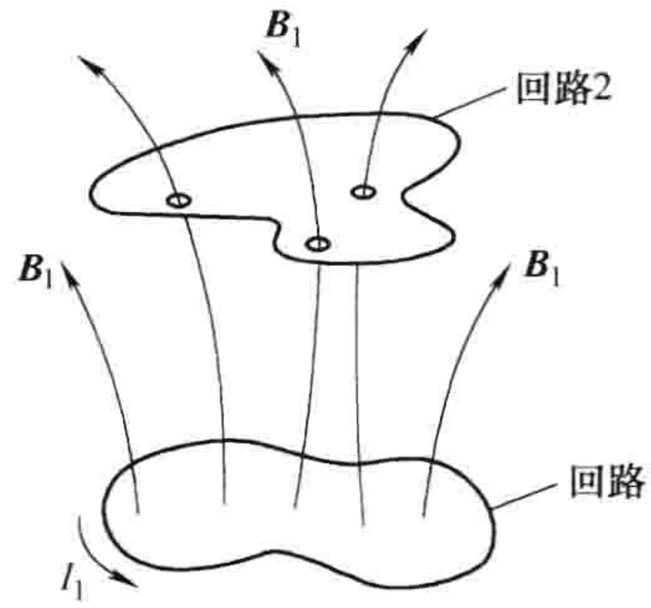


图 7.29

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

揭示出关于这个磁场的一个重要事实：它与电流 I_1 成正比。因此，通过回路 2 的磁通量也是如此：

$$\Phi_2 = \int \boldsymbol{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}_2$$

这样有

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \tag{7.21}$$

式中，M_{21} 为比例系数，它被称为两个回路的互感。

对于互感，有一个简洁的公式，你可以通过将磁通量用磁矢势表示出，然后运用斯托克斯定理得到它：

$$\Phi_2 = \int \boldsymbol{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}_2 = \int (\nabla \times \boldsymbol{A}_1) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}_2 = \oint \boldsymbol{A}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$$

现在，根据式(5.63)，

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r}$$

因此

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$$

显然

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r} \tag{7.22}$$

这就是**纽曼(Neumann)公式**；它涉及一个二重线积分——一个积分沿着回路 1，另一个沿着回路 2(见图 7.30)。它对于实际计算来说并不是非常有用，但是它确实展示出两个关于互感非常重要的事情：

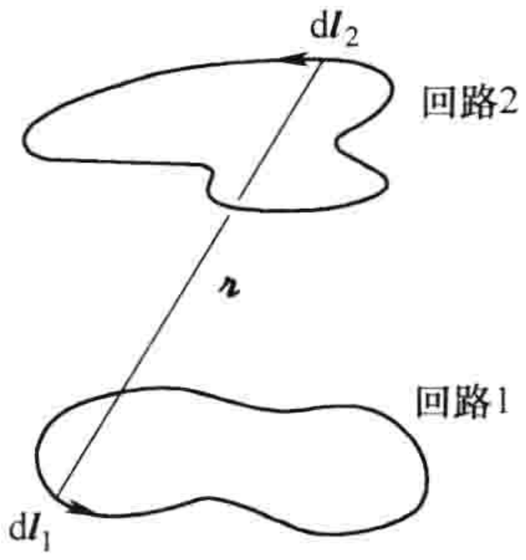


图 7.30

1. M_{21} 完全是一个几何量，仅与两个回路的大小、形状以及相对位置有关。

2. 如果我们交换回路 1 与 2 的角色，式(7.22)中的积分不变；因此得出

$$M_{21} = M_{12} \tag{7.23}$$

这是一个令人吃惊的结论：不论线圈的形状及位置，我们在 1 中通过一个电流 I 时通过 2 的磁通量与当我们在 2 中通过相同的电流 I 时通过 1 的磁通量相同。我们也可以去掉下标，将它们都称为 M。

例题 7.10

一个短螺线管(长度 l，半径 a，每单位长度上有 n_1 匝)位于一个非常长的螺线管的轴上(半径 b，每单位长度上有 n_2 匝)，如图 7.31 所示。在短螺线管中通有电流 I，则通过长螺线管的磁通量有多大?

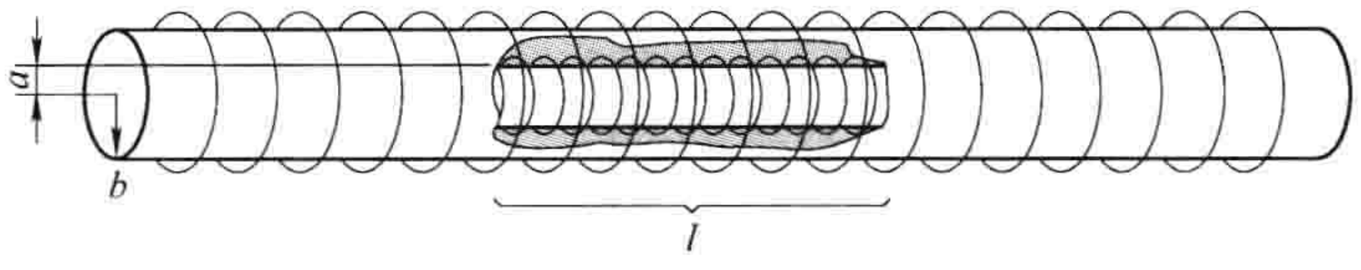


图　7.31

解： 因为内部的螺线管很短，它有一个非常复杂的磁场；另外，它会使得通过外部螺线管每一匝的磁通量都不相同。用这种方法计算总磁通量会是一件非常痛苦的事。但是，如果我们利用互感的相同性，这个问题就变得非常简单了。只用从相反的情形考虑：在外部螺线管中通过电流 I，然后计算通过内部螺线管的磁通量。长螺线管内部的磁场是常数：

$$B = \mu_0 n_2 I$$

式(5.57)，所以通过短螺线管每一个单圈的磁通量为

$$B\pi a^2 = \mu_0 n_2 I \pi a^2$$

总共有 $n_1 l$ 匝，所以通过短螺线管的总磁通量为

$$\Phi = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l I$$

这也就是在短螺线管中通有电流 I 时通过长螺线管的磁通量，也就是我们最开始想要得到的结果。顺便提及，在这个情况下，互感是

$$M = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l$$

现在假设你改变回路 1 中的电流。通过回路 2 的磁通量也会相应改变，而法拉第定律表明这个改变的磁通量会在回路 2 中感应出一个电动势：

$$\mathscr{E}_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{7.24}$$

(在引用式(7.21)时——该式基于毕奥-萨伐尔定律——我不言而喻地假定电流变化得足够慢，所以构型可以被认为是准静态的。)这是一件多么惊人的事情：每当你改变回路 1 中的电流，就会有一个感应电流在回路 2 中流动——尽管并不存在任何导线连接它们！

让我们继续考虑这个，一个改变的电流不仅会在任何附近的回路中感应出电动势，而且会在源回路自身中感应出一个电动势(见图 7.32)。再一次，磁场(而且因此磁通量也是)是与电流成正比的：

$$\Phi = LI \tag{7.25}$$

式中，比例系数 L 被称为回路的**自感**。和 M 一样，它取决于回路的几何性质(大小和形状)。如果电流改变，线圈中感应的电动势就是

$$\mathscr{E} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{7.26}$$

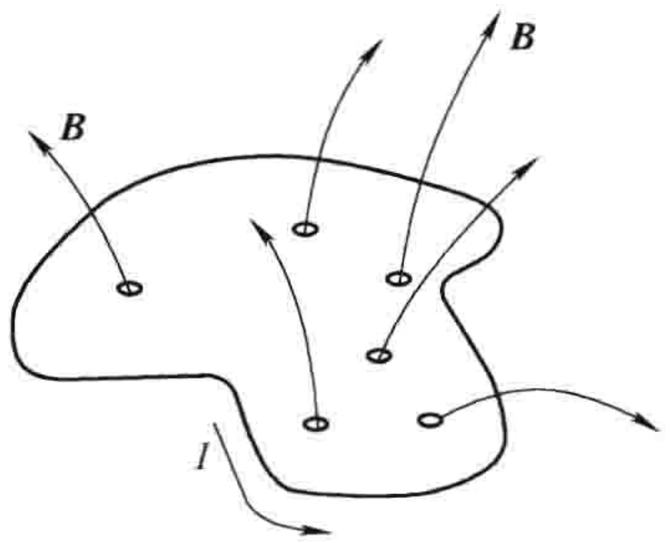


图　7.32

自感是以亨利(H)为单位的；1H 是 1V · s/A。

例题 7.11

求出横截面为矩形的环形螺线管的自感(内径 a，外径 b，高 h)，该螺线管总共有 N 匝线圈。

解： 环内部的磁场是(式(5.58))

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi s}$$

通过一个单匝(见图 7.33)的磁通量为

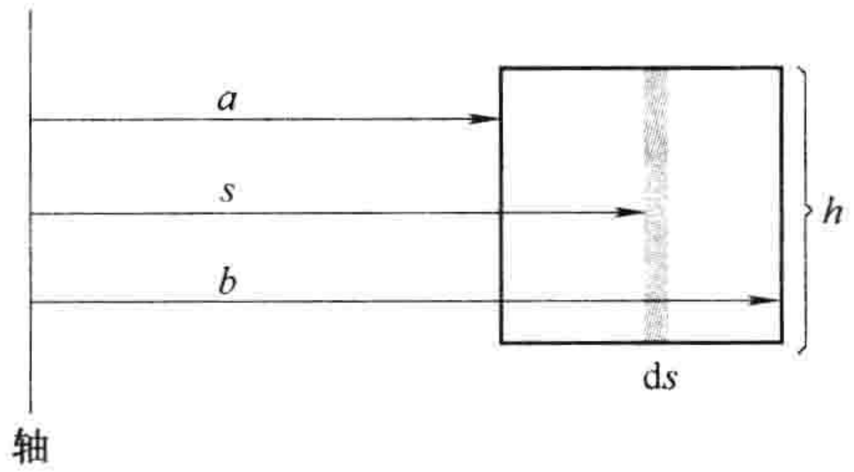


图 7.33

$$\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{a} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}h\int_a^b \frac{1}{s}ds = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

总磁通量为这个的 N 倍，所以自感(式(7.25))为

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{7.27}$$

电感(和电容一样)本质上是一个正值量。楞次定律，由式(7.26)中的负号所要求，使得电动势是朝着反抗电流的任何变化的方向。由于这个原因，它被称为**反电动势**。不论你何时试图改变导线中的电流，你必须克服这个反电动势。这样，电感在电路中扮演的角色与力学系统中的质量有些相似：L 越大，改变电流就越困难，正如质量越大，改变一个物体的速度就越困难一样。

例题 7.12

假设当有人突然剪断导线时在回路中有电流 I 流动。电流“瞬间”降到零。这就产生了一个极大的反电动势，因为尽管 I 可能很小，但是 dI/dt 很大。这就是为什么你拔出电烙铁或者烤面包机的插头时会经常冒出火花——电磁感应拼命地想要维持电流，甚至不得不跳过电路中的间隙。

当你将电烙铁或者烤面包机的插头插入的时候就没有如此戏剧性的事情发生了。在现在的情况下，电感会反抗电流的突然增加，从而产生一个平滑连续的电流增长。例如，假设一节电池(提供一个恒定电动势 $\mathscr{E}_0$)被连入一个电阻为 R、电感为 L 的电路(见图 7.34)。流过的电流是什么?

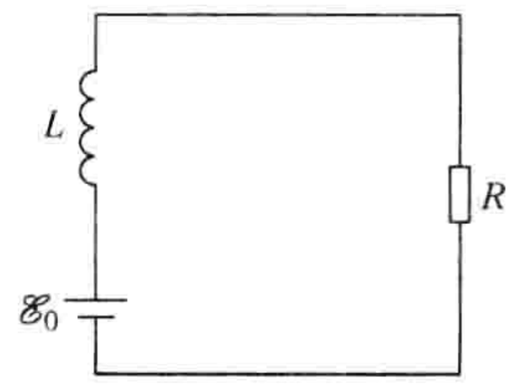


图 7.34

解： 这个电路中的总电动势是由电池加上由此而来的自感提供的。于是，欧姆定律表明[⊖]

$$\mathscr{E}_0 - L\frac{dI}{dt} = IR$$

这是一个 I 关于时间函数的一阶微分方程。方程的通解，正如你们自己可以轻松导出的那样，是

$$I(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{R} + ke^{-(R/L)t}$$

式中，k 为由初始条件决定的一个常数。特别有，如果电路是在时刻 $t=0$“插上插头”的话(所以 $I(0)=0$)，那么 k 的值应为 $-\mathscr{E}_0/R$，则

$$I(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{R}\left[1 - e^{-(R/L)t}\right] \tag{7.28}$$

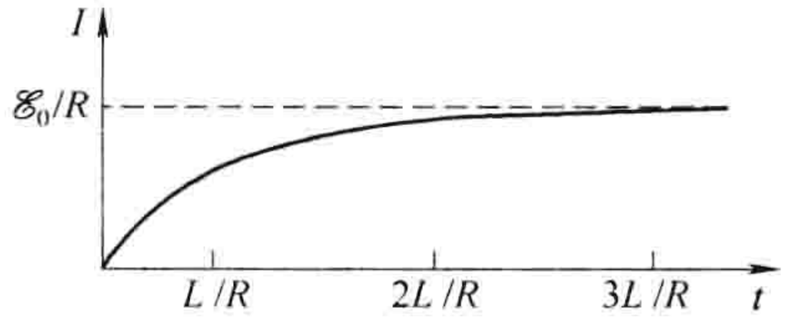


图 7.35

在图 7.35 中画出了这个函数。如果电路没有电感，电流会直接跳跃到 $\mathscr{E}_0/R$。在实际中，每个电路或多或少都有一些自感，而电流会渐近逼近 $\mathscr{E}_0/R$。量 $\tau \equiv L/R$ 被称为时间常数；它告诉你电流要花多长时间才能达到其最终值的相当

⊖ 注意 $-L(dI/dt)$ 出现在等式的左边——它是建立电阻两端电压(式(7.10))的电动势的一部分(和 $\mathscr{E}_0$ 一起)。

一部分(大约 2/3)。

习题 7.20　一个小导线框(半径 a)位于一个大导线框(半径 b)的中心上方距离 z 处，如图 7.36 所示。两个线框平面平行，且垂直于它们的共同轴线。

(a) 假设在大线框中通有电流 I。求出通过小线框的磁通量。(小线框是如此之小，以至于你可以认为大线框的磁场基本上是均匀的。)

(b) 假设在小线框中通有电流 I。求出通过大线框的磁通量。(小线框很小，你可以将其视为磁偶极子。)

(c) 求出互感，并且确认 $M_{12} = M_{21}$。

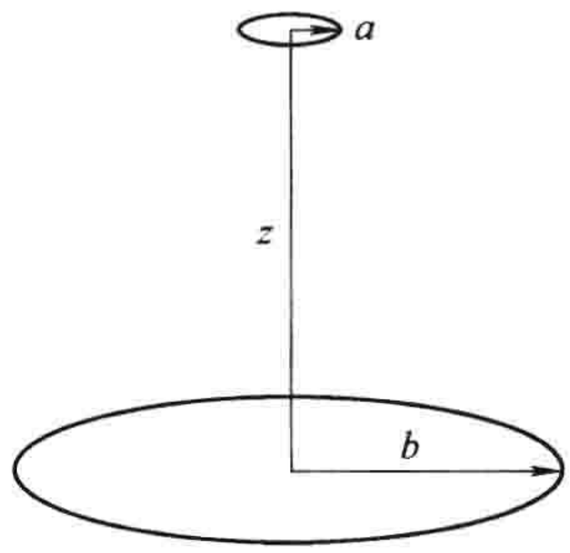


图　7.36

习题 7.21　一个边长为 a 的正方形导线框，位于两个相距 $3a$ 的长直导线的正中间，并且它们位于同一平面。(实际上，这两根长导线可以是一个很大的矩形回路的长边，但是两个短边距离如此之远，以至于可以忽略它们。)在这个正方形线框中的一个顺时针流动的电流 I 正在逐渐增大：$dI/dt = k$(一个常数)。求出大回路中的感应电动势。感应电流会朝哪个方向流动?

习题 7.22　求出一个半径为 R、每单位长度带有 n 匝的长直螺线管每单位长度的自感。

习题 7.23　尝试计算图 7.37 所示的“发夹形”回路的自感。(忽略两端的贡献；磁通量中的绝大部分来自图中的长直部分。)你会碰见一个在很多自感计算中可能出现的典型困难。为了得到确切的答案，假定导线有一个极小的半径 ε，并且忽略通过导线自身的磁通量。

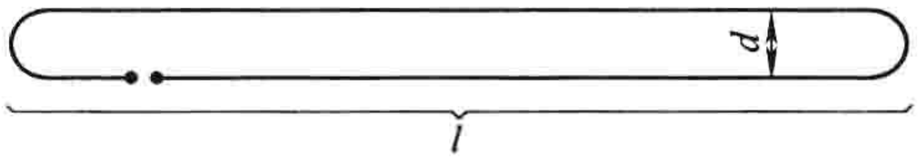


图　7.37

习题 7.24　一个交变电流 $I_0\cos(\omega t)$(振幅为 0.5A，频率为 60Hz)流过一个直导线，该导线沿着一个横截面为矩形的环形螺线管线圈(内径为 1cm，外径为 2cm，高为 1cm，1000 匝)的轴放置。这个环形螺线管线圈连接有一个 500Ω 的电阻。

(a) 在准静态近似下，环形螺线管线圈中会感应出多大的电动势？求出电阻中的电流 $I_r(t)$。

(b) 计算环形螺线管线圈中由电流 $I_r(t)$ 产生的反电动势。这个反电动势与(a)中的“直接”电动势的振幅比为多大?

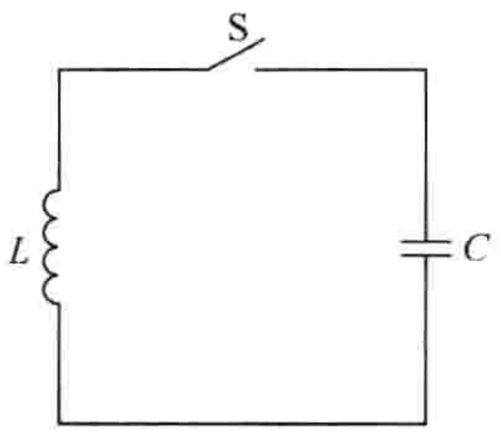


图　7.38

习题 7.25　一个电容 C 被充电到电势为 V，并且连接到一个电感器 L 上，如图 7.38 所示。在 $t = 0$ 时刻合上开关 S。作为时间的函数，求出电路中的电流。如果将一个电阻 R 与 C 和 L 串联起来，你的答案会如何变化?

7.2.4　磁场的能量

在一个电路中建立流动的电流需要消耗一定量的能量。我并不是在讨论传递给电阻然后转化为热的能量——只要与电路有关，这就是不可避免的损耗，而且它可大可小，取决于你让电流流动多长时间。确切地说，我关心的是你克服反电动势从而使电流流动所必须做的功。这是一个固定量，并且它是可逆的：当你关闭电流时就回收了它。同时它代表了潜藏在电路中的能量；正如我们马上就会看到的，它可以被认为是存储在磁场中的能量。

一单位电荷沿着电路运行一周克服反电动势所做的功是 $-\mathcal{E}$(这里的负号表明了这是由你克服这个电动势所做的功，而不是电动势所做的功)。每单位时间内流过导线的电荷量是 I。所以每单位时间所做的总功是

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}I = LI\frac{dI}{dt}$$

如果我们从零开始建立电流并将其增大到最终值 I，所做的功(将刚才的方程对时间进行积分)为

$$\boxed{W = \frac{1}{2}LI^2} \tag{7.29}$$

它不取决于我们加大电流用了多长时间，只与回路的几何形状(以 L 的形式)以及最终电流 I 有关。

有一个更漂亮的方式来写出 W，它具有很容易推广到面电流与体电流的优点。回想通过回路的磁通量 Φ 与 LI 相等的式(7.25)。在另一方面，

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{a} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{a} = \oint_{\mathcal{P}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

式中，$\mathcal{P}$ 为回路的周长；而 S 是以 $\mathcal{P}$ 为边界的任意面。这样，

$$LI = \oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

因此

$$W = \frac{1}{2}I\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

矢量符号也可以转换到 I 上：

$$W = \frac{1}{2}\oint (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I})\,dl \tag{7.30}$$

利用这个形式，到体电流的推广是显而易见的：

$$W = \frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J})\,d\tau \tag{7.31}$$

但是，我们还可以做得更好，将 W 完全用磁场表示：安培定理，$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}$，使我们可以消去 $\boldsymbol{J}$：

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\,d\tau \tag{7.32}$$

分部积分使我们可以将对 $\boldsymbol{B}$ 的求导转变为对 $\boldsymbol{A}$ 的求导；特别有，矢量积规则 6 给出

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

所以

$$\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} - \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

因此

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left[\int B^2\,d\tau - \int \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\,d\tau\right] = \frac{1}{2\mu_0}\left[\int_V B^2\,d\tau - \oint_S (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{a}\right] \tag{7.33}$$

式中，S 为包围体积 V 的面。

现在，式(7.31)中的积分是对电流占据的整个体积进行的。但是比这个体积大的任何区域也是可以的，因为这个体积之外的区域内 $\boldsymbol{J}$ 为零。在式(7.33)中，我们选取的区域越大，体积分的贡献就越大，而因此面积分的贡献就越小(这是合理的：当面离电流越远时，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都会减小)。特别地，如果我们同意在全空间上进行积分，则面积分趋近于零，于是我们就剩下了

$$\boxed{W = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\text{全空间}} B^2\,d\tau} \tag{7.34}$$

从这个结果看，我们说能量以每单位体积($B^2/2\mu_0$)的量被“存储在磁场中”。这是思考它的一个很好方法，尽管考虑到式(7.31)，有些人可能更倾向于说能量是以每单位体积$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J})$的量存储在电流分布中的。两者之间的差别只是写法的差别；最重要的量是总能量 W，而我们将不用担心能量“位于”哪里(可能的任何地方)。

你也许奇怪为什么建立磁场需要能量——毕竟，磁场自身并不做任何功。要点在于在原先并没有磁场的地方建立一个磁场需要磁场的变化，而一个变化的 $\boldsymbol{B}$ 场，根据法拉第定律，会感应出一个电场。后者，当然，可以做功。在开始时不存在 $\boldsymbol{E}$，而在最后也没有 $\boldsymbol{E}$；但是在两者之间，当 $\boldsymbol{B}$ 正在建立时，存在 $\boldsymbol{E}$，而正是为了克服它才需要做功。(你可以明白为什么在第 5 章时我不能计算存储在静磁场中的能量了。)基于此点，磁场能公式与静电能公式形式上高度相似就非常容易理解了：

$$W_{\text{电}} = \frac{1}{2}\int(V\rho)\,d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\,d\tau \qquad (2.43\text{ 及 }2.45)$$

$$W_{\text{磁}} = \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J})\,d\tau = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,d\tau \qquad (7.31\text{ 及 }7.34)$$

例题 7.13

如图 7.39 所示，一个长同轴电缆带有电流 I(电流沿着半径为 a 的内圆柱的表面流出，然后沿着半径为 b 的外柱面流回)。求出存储在一段长为 l 的电缆内的能量。

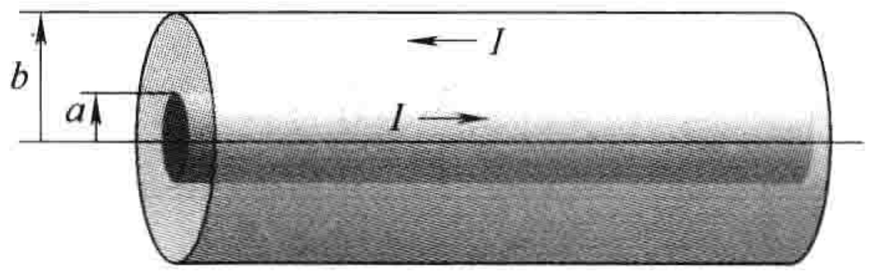


图　7.39

解： 根据安培定理，两个柱面之间的磁场为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

其他地方磁场为零。这样，每单位体积的能量为

$$\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}$$

因此，在一个长度 l，半径 s，厚度 ds 的柱形壳内的能量为

$$\left(\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}\right)2\pi l s\,ds = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\left(\frac{ds}{s}\right)$$

从 a 到 b 积分，我们有

$$W = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

顺便提及，这给出了一种计算同轴电缆自感非常简单的方法。根据式(7.29)，能量也可以被写为$\frac{1}{2}LI^2$。比较这两个表达式，[⊖]

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

当电流不是沿单一路径，而是分散在一些面上或者体积上时这种计算自感的方法特别有用。在这种情况下，电流的不同部分可能围有不同的磁通量，而从式(7.25)直接得到 L 可能会非常棘手。

习题 7.26　求出储存在一个长螺线管(半径 R，电流 I，每单位长度 n 匝)中长度为 l 的一段中的能量，(a)利用式(7.29)(你已经在习题 7.22 中求出了 L)；(b)利用式(7.30)(你在例题 5.12 中已经求出了 $\boldsymbol{A}$)；(c)利用式(7.34)；(d)利用式(7.33)(选取从半径 $a<R$ 直到 $b>R$ 的圆柱管作为你的积分体积)。

⊖　注意与式(7.27)的相似性——从某种意义上来说，翻转过来的矩形环就是一个短的同轴电缆。

习题 7.27 利用式(7.34)，计算例题 7.11 中环形螺线管中储存的能量。利用这个结果来检验式(7.27)。

习题 7.28 一个长电缆带有一个沿同一方向且在其(圆形)横截面上均匀分布的电流。电流沿着表面流回(有一层非常薄的绝缘套分开这两个电流)。求出每单位长度的自感。

习题 7.29 假设图 7.40 中的电路已经连通了很长一段时间，这时，在时刻 $t=0$，突然转动开关 S，断开电池。

(a) 在随后任意时刻 t 的电流多大?

(b) 传递给电阻的总能量多大?

(c) 证明这个能量与最初存储在电感中的能量相等。

习题 7.30 两个小线框，各有面积 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$，相距 $\boldsymbol{r}$(见图 7.41)。

(a) 求出它们的互感。[提示：将它们当做磁偶极子处理，然后利用式(5.87)。]你的式子与式(7.23)一致吗?

(b) 假设一个电流 I_1 在回路 1 中流动，而我们打算在回路 2 中建立一个电流 I_2。为了保持回路 1 中流动的电流 I_1，必须要克服互感电动势做多少功? 依据这个结果，对式(6.35)作出评价。

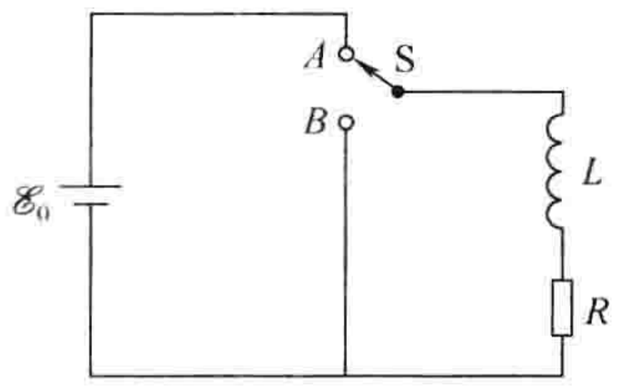


图 7.40

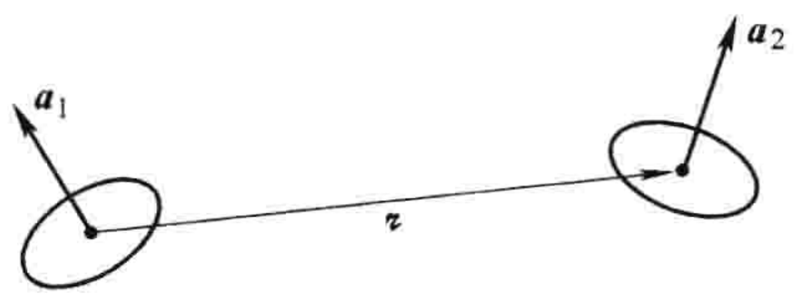


图 7.41

7.3 麦克斯韦方程组

7.3.1 麦克斯韦之前的电动力学

迄今为止，我们已经遇到了下列定律，它们指定了电场和磁场的散度与旋度：

(i) $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho$ (高斯定理)，

(ii) $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ (没有名字)，

(iii) $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ (法拉第定律)，

(iv) $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$ (安培定理)。

这些等式代表着大约一个世纪之前，当麦克斯韦开始他的工作时电磁理论的状态。在那个时代它们并没有被写成如此简洁的形式，但是它们的物理内容是熟悉的。现在，在这些公式中出现了一处致命的矛盾。它与早已熟知的法则“旋度的散度总为零”有关。如果你对第(iii)式计算散度，所有事情都很圆满：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{B})$$

等式的左边为零，因为旋度的散度为零；第(ii)式右边也为零。但是当你对第(iv)式做同样的事情时，你就会陷入困境：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{J}) \tag{7.35}$$

左边必须为零，但是右边，一般来说，不是。对于稳恒电流，$\boldsymbol{J}$ 的散度为零，但是显然，当你超出静磁学的范围，安培定理不可能是正确的。

还有另外一种方式可以看出安培定理对于非稳恒电流注定是失效的。假设我们正在为一个电容器充电(见图 7.42)。积分形式的安培定理为

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\mathrm{enc}}$$

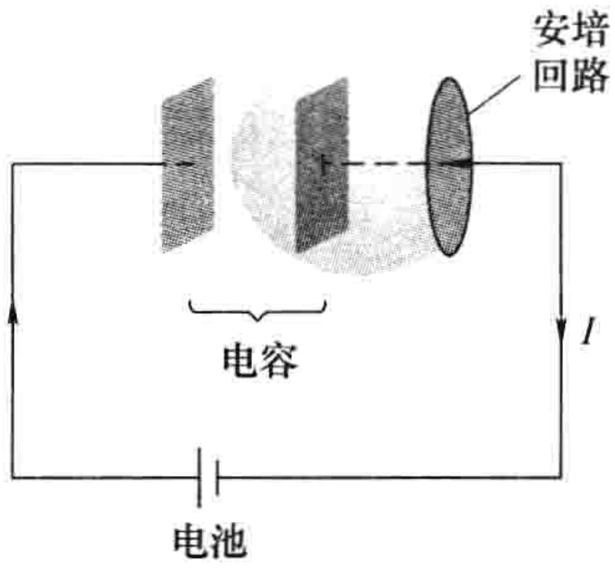


图　7.42

我想要将其应用在图中所示的安培回路上。我如何确定 I_{enc}？好吧，让它是流过回路的总电流，或者说，更加精确些，通过以回路为边界的面上的电流。在这个情形下，最简单的面是位于回路所在的平面上——导线穿过这个面，所以 $I_{\mathrm{enc}} = I$。这很好——但是如果我取而代之画一个如图 7.42 中所示的气球形的面又会怎样呢？没有电流流经这个面，所以我得出结论 $I_{\mathrm{enc}} = 0$！我们在静磁学中从来没有这个问题，因为只有当电荷在某处聚集时(在这个例子中，是在电容器极板上)这个矛盾才会出现。但是对于非稳恒电流来说(比如现在的情况)“一个环围住的电流”是一个不明确的概念，因为它完全取决于你使用哪个面。(如果这对于你来说看起来有点学究气了——“显而易见，应该使用平面”——请记住安培回路可以是一些甚至并不处于同一平面的扭曲形状。)

当然，我们并没有权利要求安培定理对于静磁学之外的情况保持成立；毕竟，我们是从毕奥-萨伐尔定律得到它的。但是，在麦克斯韦的时代，没有任何实验上的原因来怀疑安培定理的广泛有效性。这里的缺陷完全是理论上的，而麦克斯韦通过纯粹的理论论证修正了它。

7.3.2　麦克斯韦如何修改安培定理

问题在于式(7.35)的右边，其应该为零，但是却不是。利用连续性方程式(5.29)及高斯定理，这个令人不愉快的项可以改写为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}) = -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

你可能会意识到如果在安培定理中，我们把 $\varepsilon_0(\partial \boldsymbol{E}/\partial t)$ 与 $\boldsymbol{J}$ 结合在一起，这样就会正好消除掉多余的散度：

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}} \tag{7.36}$$

(麦克斯韦本人对于在安培定理中想要增加这个量有着其他理由。对于他来说，连续性方程来救场是一个令人高兴的意外惊喜，而不是最主要的动机。但是现在我们把上面的论证当做一个比麦克斯韦的论证更令人信服的论证，麦克斯韦的论证建立在现在不足以取信的以太模型上。)[⊖]

仅就静磁学而言，这样的一个修正什么都没有改变：当 $\boldsymbol{E}$ 为一个常数时，我们仍然有 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$。事实上，在日常的电磁学实验中是很难探测到麦克斯韦引入的这一项的，在实验中它为了被识别出来必须与 $\boldsymbol{J}$ 竞争；这也就是为什么法拉第和其他人在实验室中都从未发现过它。但是，正如我们将在第 9 章看到的，它却在电磁波的传播中扮演着举足轻重的角色。

撇开对安培定理缺陷的兴趣，麦克斯韦增添的项有着某种美感：正如一个变化的磁场会感应出一个电场(法拉第定律)那样，

⊖　对于这件事的历史，见 A. M. Bork. Am. J. Phys. 31, 854(1963)。

一个变化的电场感应出一个磁场

当然，理论上的方便和美学上的统一性都仅是建议——因为，也可能存在其他某种方式来修改安培定理。麦克斯韦理论的实际确认来自于 1888 年赫兹关于电磁波的实验。

麦克斯韦将他的额外项称为**位移电流**：

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}} \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{7.37}$$

这是一个容易令人误解的名字，因为 $\varepsilon_0(\partial \boldsymbol{E}/\partial t)$，除了在安培定理中加到 $\boldsymbol{J}$ 上，与电流没有任何关系。现在让我们来看一看，位移电流是如何解决充电电容器(见图 7.42)的佯谬的。如果电容器极板距离非常近(我并没有将它们画成那样，但是如果你假设如此，计算会简单得多)，那么两极板之间的电场为

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A}$$

式中，Q 为极板上的电荷；而 A 为它的面积。这样，在两个极板之间

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A} I$$

现在，将式(7.36)写为积分形式，

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\mathrm{enc}} + \mu_0 \varepsilon_0 \int \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{7.38}$$

如果我们选取平面，那么 $E=0$ 而 $I_{\mathrm{enc}} = I$。另一方面，如果我们选用气球状的面，那么 $I_{\mathrm{enc}} = 0$，但是 $\int(\partial \boldsymbol{E}/\partial t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = I/\varepsilon_0$。所以对于这两个面，我们得到相同的答案，尽管在第一个情形下它来自真正的电流，而在第二个情形来自位移电流。

习题 7.31 一个半径为 a 的粗导线，其横截面上均匀分布有稳恒电流 I。导线中有一个宽度 $\omega \ll a$ 的窄间隙，从而形成了一个如图 7.43 所示的平行板电容器。求出间隙中距离轴 $s < a$ 处的磁场。

习题 7.32 先前的问题是一个充电电容器的虚构模型，以避免与分布在极板平面上的非均匀电流有关的困难。对一个更现实的模型，假设细导线连接到两个极板的中心(见图 7.44a)。同样，电流 I 是恒定的，电容器的半径为 a，而极板之间的间距 $w \ll a$。假定电流的流动可保证极板上在任何给定时刻有均匀的面电荷，且在 $t=0$ 时刻电流为零。

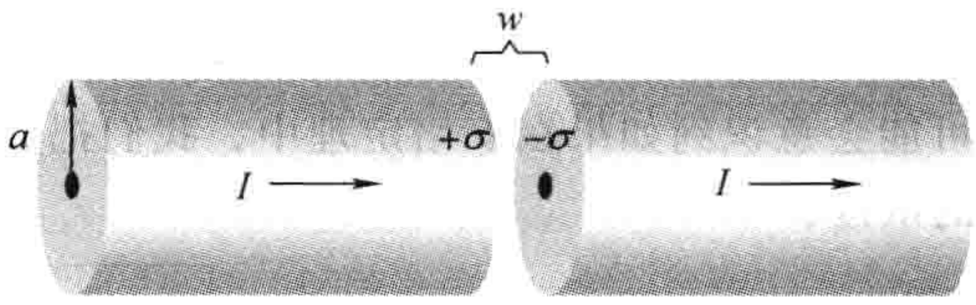


图 7.43

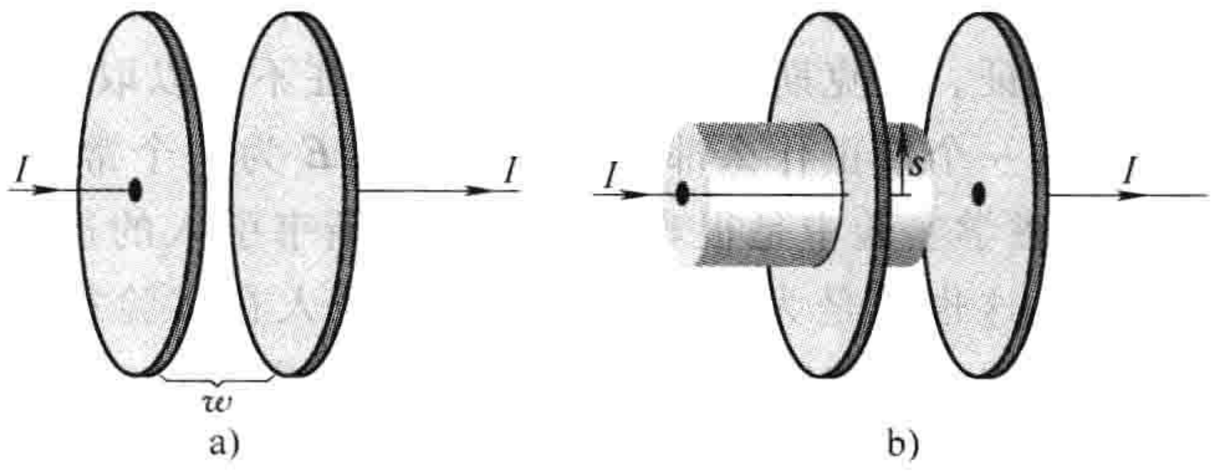


图 7.44

(a) 作为 t 的函数求出极板之间的电场。

(b) 求出通过位于两极板正中间的平面上的半径为 s 的圆的位移电流。将这个圆当做你的“安培闭合回路”，并取回路所围的平面，求出距离轴 s 处的磁场。

（c）重复(b)的计算，但是这次使用图 7.44b 所示的圆柱面，该面向左延伸穿过极板到电容器之外，右端不闭合。注意通过这个面的位移电流为零，对 I_{enc} 的存在有两个贡献。[⊖]

习题 7.33　参见习题 7.16，对那个问题正确答案是

$$\boldsymbol{E}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi}\sin(\omega t)\ln\left(\frac{a}{s}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

（a）求出位移电流密度 $\boldsymbol{J}_d$。

（b）将其积分从而得到总位移电流，

$$I_d = \int \boldsymbol{J}_d \cdot d\boldsymbol{a}$$

（c）比较 I_d 和 I。（它们的比率多大?）如果外圆柱面是，比如说，直径 2mm，为了使 I_d 为 I 的 1%，频率应该为多高？［这个习题是用来说明为什么法拉第从未发现位移电流，并且为什么通常可安全忽略它们，除非电流频率极高。］

7.3.3　麦克斯韦方程组

在上一节中我们对麦克斯韦方程组进行了最后的修订：

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho & \text{（高斯定理）} \\
\text{(ii)} & \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 & \text{（没有名字）} \\
\text{(iii)} & \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & \text{（法拉第定律）} \\
\text{(iv)} & \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} & \text{（带有麦克斯韦修正项的安培定理）}
\end{array} \tag{7.39}$$

连同力定律，

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{7.40}$$

它们总结了经典电动力学的全部理论内容[⊜]（除了介质的一些特别性质，我们已经在第 4 章和第 6 章遇到）。甚至电荷守恒定律的数学表述连续性方程，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{7.41}$$

都可以通过对第(iv)式计算散度而从麦克斯韦方程组得到。

我已经写出了传统写法的麦克斯韦方程组，这种写法特别强调 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的散度与旋度。以这种形式，它们使电场既可以由电荷(ρ)也可以由变化的磁场($\partial\boldsymbol{B}/\partial t$)产生，而磁场既可以由电流($\boldsymbol{J}$)亦可以由变化电场($\partial\boldsymbol{E}/\partial t$)产生的观念更加明显。事实上，这也许有一点令人误解，因为归根结底，$\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ 与$\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ 本身也是由电荷和电流产生的。我认为将方程组写作

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{(i)}\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho, & \text{(iii)}\ \nabla \times \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \\
\text{(ii)}\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, & \text{(iv)}\ \nabla \times \boldsymbol{B} - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{J}
\end{array}\right\} \tag{7.42}$$

⊖ 这个问题会产生一个很有趣的准哲学问题：如果你在实验室中测量了 $\boldsymbol{B}$，你是已经检测到了位移电流的效应(正如(b)所暗示的)，还是仅仅确认到了正常电流的效果(正如(c)所暗示的)？见 D. F. Bartlett. Am. J. Phys. 58, 1168(1990)。

⊜ 正如任何微分方程一样，麦克斯韦方程组必须有适当的边界条件辅助。因为从文意中这些条件一般是“显而易见的”(例如在局域电荷分布中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在远距离处趋近于零)，很容易忘记它们的重要作用。

从逻辑上来说更为可取，其中场在左边（$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$）而源（ρ 和 $\boldsymbol{J}$）在右边。这种写法强调所有的电磁场最终都可以归因于电荷与电流。一方面，麦克斯韦方程组告诉我们电荷如何产生场；而另一方面，力定律告诉我们场如何影响电荷。

习题 7.34 假设

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\theta(vt-r)\hat{\boldsymbol{r}};\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0$$

（θ 函数是在习题 1.45b 中定义的）。证明这些场满足所有的麦克斯韦方程，并且确定 ρ 和 $\boldsymbol{J}$。描述产生这些场的物理环境。

7.3.4 磁荷

麦克斯韦方程组存在一种令人喜欢的对称性；在 ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 为零的自由空间中，这种对称性尤其显著：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E} &= 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}\right\}$$

如果你将 $\boldsymbol{E}$ 替换为 $\boldsymbol{B}$，而将 $\boldsymbol{B}$ 换为 $-\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，第一对方程就会转变为第二对方程，反之亦然。不过，$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的这种对称性[㊀]却被高斯定理中的电荷项以及安培定理中的电流项所破坏。你不由自主地会对为什么相应量在 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ 中是“缺失的”而感到奇怪。如果我们有

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\ \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e, \quad \text{(iii)}\ \nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu_0\boldsymbol{J}_m - \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ &\text{(ii)}\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = \mu_0\rho_m, \quad \text{(iv)}\ \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}_e + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{7.43}$$

又会怎样？此时 ρ_m 代表磁“荷”的密度，而 ρ_e 是电荷的密度；$\boldsymbol{J}_m$ 将会是磁荷流，而 $\boldsymbol{J}_e$ 是电荷流。这两种荷都应该是守恒的：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_m = -\frac{\partial\rho_m}{\partial t}, \text{以及} \nabla\cdot\boldsymbol{J}_e = -\frac{\partial\rho_e}{\partial t} \tag{7.44}$$

前一个式子来自于对（iii）计算散度，后一个来自对（iv）取散度。

从某种意义上说，麦克斯韦方程组希望磁荷存在——它将会很完美地融合进来。但是，尽管经过了努力的研究，没有一个人曾经发现过任何磁荷[㊁]。就我们目前所知而言，ρ_m 处处为零，而 $\boldsymbol{J}_m$ 也是这样；$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 并非处于同等地位：对于 $\boldsymbol{E}$ 存在于静止源（电荷）但是 $\boldsymbol{B}$ 不存在。（这反映在磁多极矩展开中没有单极项，而磁偶极子由电流环而不是分开的北极和南极构成这些事实上。）显然，上帝并没有创造磁荷。（顺便提及，在电动力学的量子理论中，磁荷不存在远非仅仅是美学上的遗憾：狄拉克证明，磁荷的存在将会解释为什么电荷是量子化的。见习题 8.12。）

习题 7.35 假设磁荷（q_m）的“库仑定律”写为

㊀ 不要被讨厌的 μ_0 和 ε_0 所迷惑；它们会出现只是因为国际单位制用不同的单位计量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，而在高斯单位制中，则不会出现。

㊁ 对详细的介绍，见 A. S. Goldhaber 和 W. P. Trower, Am. J. Phys. 58, 429(1990)。

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{7.45}$$

给出一个磁单极子 q_m 以速度 v 通过电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 时的力定律。[一个有趣的评注见 W. Rindler, Am. J. Phys. 57, 993(1989)。]

习题 7.36 设想一个磁单极子 q_m 通过一个自感为 L 的无电阻回路。在回路中会感应出多大的电流?[这也是在实验室中用来寻找磁单极子的一个方法;见 B. Cabrera, Phys. Rev. Lett. 48, 1378(1982)。]

7.3.5 介质中的麦克斯韦方程组

式(7.39)形式的麦克斯韦方程组本身是完整且正确的。但是,当你处理那些经过电极化或者磁极化的材料时,存在一个更方便的形式来表述它们。对于内部极化的介质来说,会有"束缚"电荷和电流的积聚,对于这种积聚你不能施加直接控制。把麦克斯韦方程组改写为与那些我们直接控制的源("自由"电荷与电流)有明确关系的形式将会很惬意。

在静态情形下,我们已经学过电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 产生束缚电荷密度(式(4.12))

$$\rho_b = -\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{7.46}$$

同样的,磁极化强度(或者"磁化强度")$\boldsymbol{M}$ 导致束缚电流(式(6.13))

$$\boldsymbol{J}_b = \nabla\times\boldsymbol{M} \tag{7.47}$$

在非静态情形中,只有一个新特性需要考虑:电极化强度的任何变化都涉及(束缚)电荷的流动(称其为 $\boldsymbol{J}_p$),该电流必须包括在总电流中。假定我们考察一小块极化材料(见图 7.45)。极化导致在其中一端上的电荷密度 $\sigma_b = P$,而在另一端为 $-\sigma_b$(式(4.11))。如果现在 P 变大了一点,两端上的电荷也相应增多,从而带来了净电流

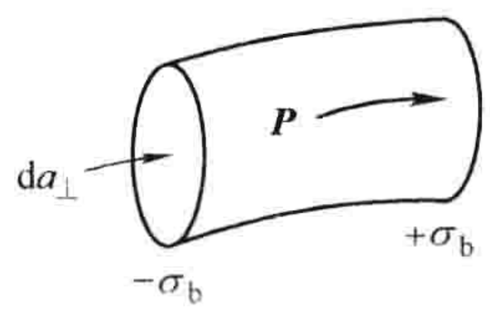


图 7.45

$$dI = \frac{\partial\sigma_b}{\partial t}da_\perp = \frac{\partial P}{\partial t}da_\perp$$

因此,电流密度为

$$\boldsymbol{J}_p = \frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{7.48}$$

这个**极化电流**不论如何都与束缚电流 $\boldsymbol{J}_b$ 没有任何关系。后者与材料的磁化有关,并且涉及电子的自旋与轨道运动;与此相反,$\boldsymbol{J}_p$ 是当电极化强度改变时电荷直线运动的结果。如果 $\boldsymbol{P}$ 指向右边并且正在变大,那么每个正电荷都向右移动一点而负电荷向左;其累积效应就是极化电流 $\boldsymbol{J}_p$。就此而言,我们应该检查式(7.48)与连续性方程是否保持一致:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_p = \nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{P}) = -\frac{\partial\rho_b}{\partial t}$$

显然:它满足连续性方程;事实上,$\boldsymbol{J}_p$ 对于解释束缚电荷的守恒非常重要。(顺便提及,一个变化的磁化强度并不会导致任何与此类似的电荷或者电流积累。当然,束缚电流 $\boldsymbol{J}_b = \nabla\times\boldsymbol{M}$ 会应 $\boldsymbol{M}$ 的改变而变化,但是仅此而已。)

考虑到所有这些,总的电荷密度可以被分为两个部分:

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{7.49}$$

而电流密度分为三个部分:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_f + \boldsymbol{J}_b + \boldsymbol{J}_p = \boldsymbol{J}_f + \nabla\times\boldsymbol{M} + \frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{7.50}$$

高斯定理现在可以写为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \boldsymbol{P})$$

或者

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f \tag{7.51}$$

式中，$\boldsymbol{D}$ 和静态情形中的一样，由下式给出

$$\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{7.52}$$

同时，安培定理(带有麦克斯韦项的)变为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{J}_f + \nabla \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\right) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

或者

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{7.53}$$

式中，和以前一样，

$$\boldsymbol{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} \tag{7.54}$$

法拉第定律和$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 未被我们将电荷和电流分为自由及束缚部分所影响，因为它们不涉及ρ 或者 $\boldsymbol{J}$。

于是，以自由电荷和自由电流表示的麦克斯韦方程组为

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{(i)}\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f, \quad \text{(iii)}\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ &\text{(ii)}\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \text{(iv)}\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{aligned}} \tag{7.55}$$

有些人将这些式子当做“真正的”麦克斯韦方程组，但是请理解它们绝不比式(7.39)更加“普适”；它们只不过说明将电荷和电流分为自由和非自由部分很方便。而且它们有混合记号的缺点，因为它们包括 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 两者，也包括 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 两者。因此，它们必须由合适的**构成关系**所补充，给出由 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示的 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$。这些关系依赖于材料的本质；对于线性介质

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \tag{7.56}$$

所以

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B} \tag{7.57}$$

式中，$\varepsilon \equiv \varepsilon_0(1 + \chi_e)$；而 $\mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m)$。顺带提及，你会想起来 $\boldsymbol{D}$ 被称为电“位移”矢量；这就是为什么安培-麦克斯韦方程(iv)中的第二项被称为**位移电流**，它是式(7.37)的推广：

$$\boldsymbol{J}_d = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{7.58}$$

习题 7.37 海水在 $\nu = 4 \times 10^8$ Hz 的频率下的介电常数为 $\varepsilon = 81\varepsilon_0$，磁导率为 $\mu = \mu_0$，电阻率为 $\rho = 0.23\Omega \cdot \mathrm{m}$。传导电流与位移电流之间的比率为多大？[提示：考虑一个浸泡在海水中由电压 $V_0\cos(2\pi\nu t)$ 驱动的平行板电容器。]

7.3.6 边界条件

一般来讲，在两种不同介质之间的边界处，或者在带有电荷面密度 σ 或面电流密度 $\boldsymbol{K}$ 的界

面处，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是不连续的。这种不连续性的具体形式可以从麦克斯韦方程组(7.55)的积分形式推导出来

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\ \oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = Q_{f_{enc}}\\ &\text{(ii)}\ \oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0\end{aligned}\right\}\text{在任意闭合面 } S \text{ 上。}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{(iii)}\ \oint_{\mathcal{P}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}\\ &\text{(iv)}\ \oint_{\mathcal{P}} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_{f_{enc}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}\end{aligned}\right\}\text{对于以闭合回路 } \mathcal{P} \text{ 为边界的任意面 } S\text{。}$$

将式(i)应用到一个微小扁高斯盒上，这个小盒在界面的两侧都只是略微延伸到材料中(见图 7.46)，我们得到：

$$\boldsymbol{D}_1\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{D}_2\cdot\boldsymbol{a} = \sigma_f a\text{。}$$

($\boldsymbol{a}$ 的正方向是从 2 指向 1 的。当盒的厚度趋近于零时，侧边无贡献，也没有任何体电荷。)这样，$\boldsymbol{D}$ 的垂直于界面的分量是不连续的

$$\boxed{D_1^{\perp} - D_2^{\perp} = \sigma_f} \tag{7.59}$$

同样的论证，应用到式(ii)上，有

$$\boxed{B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0} \tag{7.60}$$

至于式(iii)，应用一个套住界面的非常细的安培回路(见图 7.47)可得

$$\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{l} - \boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}\text{。}$$

但是当回路的宽度趋近于零，磁通量为零(以相同的理由，我已经去掉了回路两端对于 $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的贡献)。因此，

$$\boxed{\boldsymbol{E}_1^{\parallel} - \boldsymbol{E}_2^{\parallel} = 0} \tag{7.61}$$

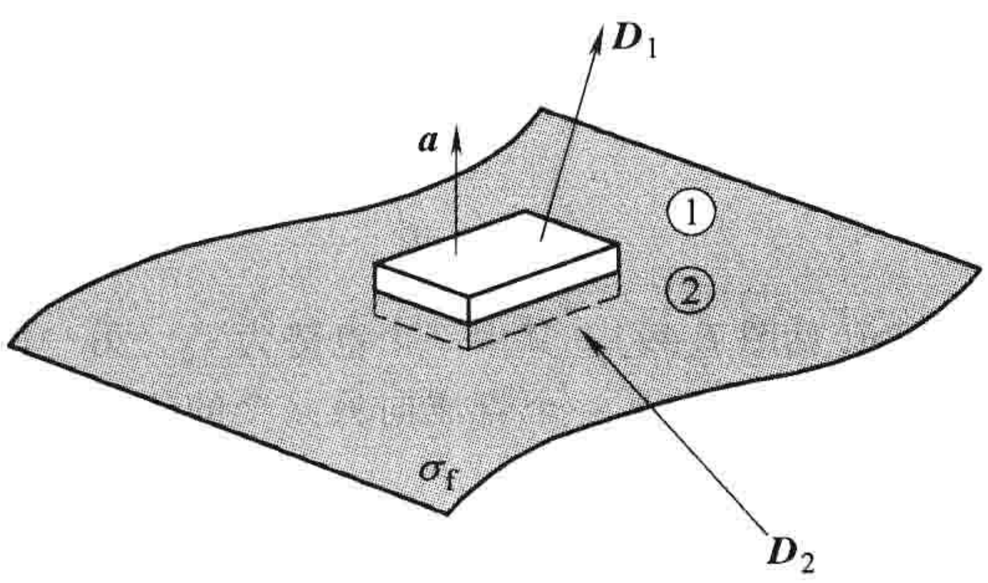


图　7.46

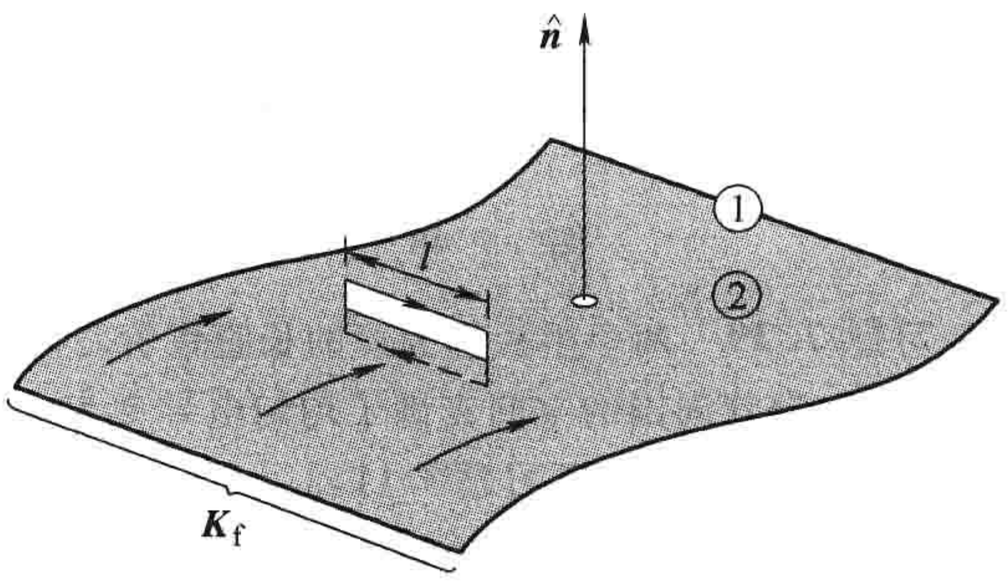


图　7.47

也就是说，$\boldsymbol{E}$ 平行于界面的分量在界面处是连续的。同样的理由，式(iv)意味着

$$\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{l} - \boldsymbol{H}_2\cdot\boldsymbol{l} = I_{f_{enc}}$$

式中，$I_{f_{enc}}$ 是通过安培回路的自由电流。体电流没有贡献(在无限小宽度的极限下)，但是可有面电流。事实上，如果 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 为垂直于界面的单位矢量(从 2 指向 1)，那么($\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{l}$)是安培回路的法线方向，于是

$$I_{f_{enc}} = \boldsymbol{K}_f \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{l}) = (\boldsymbol{K}_f \times \hat{\boldsymbol{n}}) \cdot \boldsymbol{l}$$

因此

$$\boxed{\boldsymbol{H}_1^{\parallel} - \boldsymbol{H}_2^{\parallel} = \boldsymbol{K}_f \times \hat{\boldsymbol{n}}} \tag{7.62}$$

所以 $\boldsymbol{H}$ 的平行分量是不连续的，差为一个与自由面电流密度成比例的量。

式(7.59)~式(7.62)是电动力学的普适边界条件。在线性介质的情形下，它们可以表示为仅与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有关：

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)}\ \varepsilon_1 E_1^{\perp} - \varepsilon_2 E_2^{\perp} = \sigma_f, \quad \text{(iii)}\ \boldsymbol{E}_1^{\parallel} - \boldsymbol{E}_2^{\parallel} = 0 \\ &\text{(ii)}\ B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0, \qquad \text{(iv)}\ \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{B}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{B}_2^{\parallel} = \boldsymbol{K}_f \times \hat{\boldsymbol{n}} \end{aligned}\right\} \tag{7.63}$$

特别有，如果在界面上没有自由电荷或自由电流的话，那么

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{(i)}\ \varepsilon_1 E_1^{\perp} - \varepsilon_2 E_2^{\perp} = 0, \quad \text{(iii)}\ \boldsymbol{E}_1^{\parallel} - \boldsymbol{E}_2^{\parallel} = 0 \\ &\text{(ii)}\ B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0, \qquad \text{(iv)}\ \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{B}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{B}_2^{\parallel} = 0 \end{aligned}} \tag{7.64}$$

正如我们将会在第 9 章看到的，这些方程是反射、折射理论的基础。

第 7 章补充习题

习题 7.38 两个非常大的金属板之间保持距离 d，一个电势为零，另一个电势为 V_0(见图 7.48)。一个半径为 $a(a \ll d)$的金属球被切成两半，而其中一个半球被放置在接地的极板上，所以它的电势也同样为零。如果两个极板之间的区域充满均匀电导率为 σ 的弱导电材料，流到半球上的电流为多大？[答案：$(3\pi a^2\sigma/d)V_0$。提示：研究例题 3.8。]

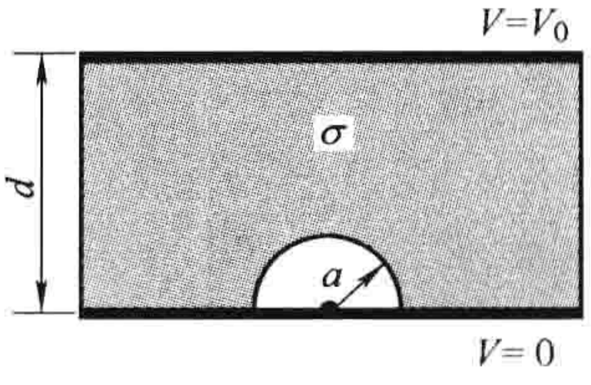


图 7.48

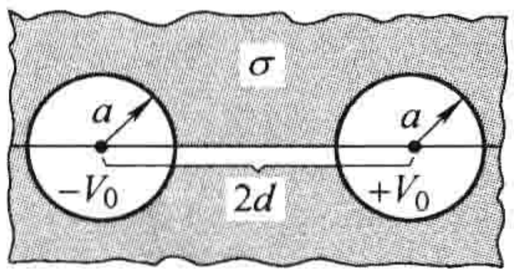


图 7.49

习题 7.39 两个半径都为 a 的长直铜管之间保持距离 $2d$(见图 7.49)。其中一个电势为 V_0，另一个电势为 $-V_0$。铜管周围的空间充满了均匀电导率为 σ 的弱导电材料。求出从一个管流向另一个的每单位长度上的电流。[提示：参考习题 3.11。]

习题 7.40 一个课本上常见的问题是要求你计算一个圆锥形物体的电阻，这个物体的电阻率为 ρ，长度为 L，一端的半径为 a，另一端的半径为 b(见图 7.50)。圆锥体两端是平的等势面。建议将圆锥切为厚度为 dz 的圆柱形碟片，得到每个碟片的电阻，然后积分得到总电阻。

(a) 用这种方法计算 R。

(b) 解释为什么这个方法从根本上来说是有缺陷的。[见 J. D. Romano 和 R. H. Price, Am. J. Phys. 64, 1150(1996)。]

(c) 如果假设两端是以圆锥体顶点为球心的球面。计算这种情况下的电阻。(令 L 为两端处球冠圆心之间的距离。)[答案：$(\rho/2\pi ab)(b-a)^2/(\sqrt{L^2+(b-a)^2}-L)$]

习题 7.41 一个可以实际计算出电流的静电场 $\boldsymbol{E}$ 的罕见情形是下述情形[M. A. Heald,

Am. J. Phys. 52, 522(1984)]：设想一个无限长圆柱形薄板，其电阻率均匀且半径为 a。如图 7.51 所示，一个位于 $\phi = \pm\pi$ 处的狭缝(与电池相对应)被保持在电势 $\pm V_0/2$，在圆柱表面上流有稳恒电流。于是，根据欧姆定律，

$$V(a,\phi) = \frac{V_0\phi}{2\pi}, (-\pi < \phi < +\pi)$$

(a) 利用柱坐标下的分离变量法，求出圆柱内部和圆柱外部的 $V(s, \phi)$。

[答案：$(V_0/\pi)\arctan[(s\sin\phi)/(a + s\cos\phi)]$，$(s < a)$，$(V_0/\pi)\arctan[(a\sin\phi)/(s + a\cos\phi)]$，$(s > a)$]

(b) 求出圆柱面上的电荷面密度。[答案：$(\varepsilon_0 V_0/\pi a)\tan(\phi/2)$]

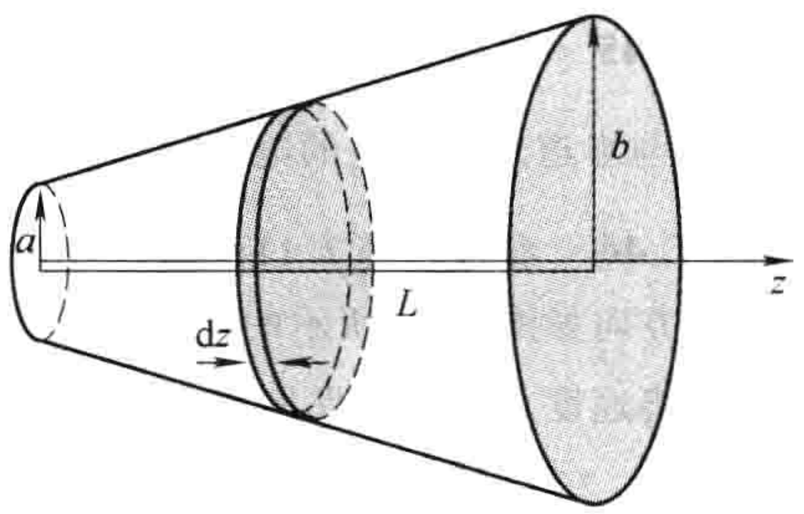


图　7.50

习题 7.42　在**理想导体**中，电导率无穷大，所以 $\boldsymbol{E} = 0$(式(7.3))，任何净电荷都位于导体表面上(正如在静电学情形中，位于非理想导体的表面那样)。

(a) 证明理想导体内部磁场是恒定的($\partial\boldsymbol{B}/\partial t = 0$)。

(b) 证明通过理想导电回路的磁通量是常数。

超导体是一种理想导体，但具有内部的(常数) $\boldsymbol{B}$ 事实上为零的特殊性质。(这里的“磁通量排斥”被称为**迈斯纳效应**(Meissner effect)。[㊀])

(c) 证明超导体中的电流被限制在表面上。

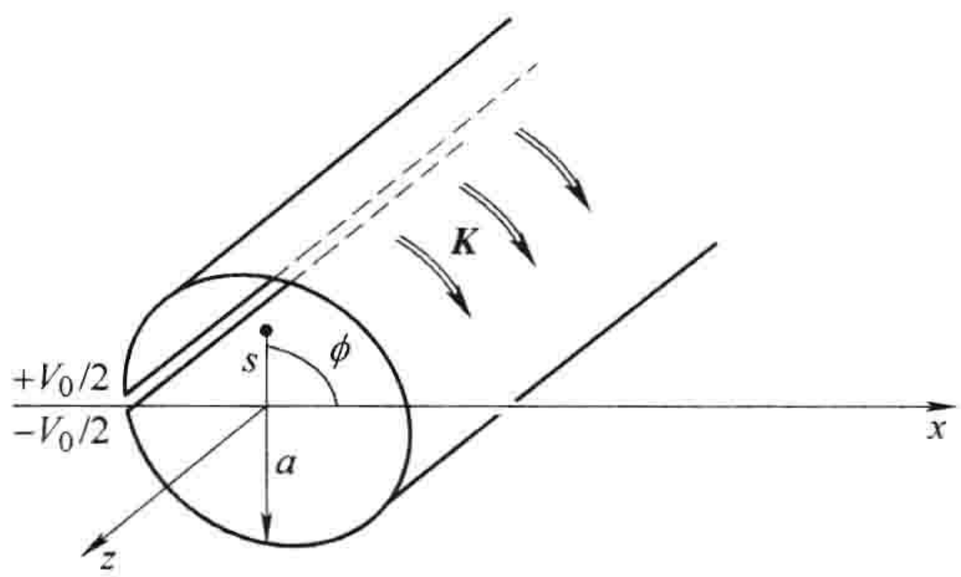


图　7.51

(d) 超导性在高于某个确定的临界温度(T_c)时消失，这个温度对于不同的材料是不同的。假设你有一个温度高于其临界温度的球(半径 a)，然后，你将它保持在一个均匀磁场 $B_0\hat{z}$ 中并逐渐将其冷却到低于 T_c 的温度。作为极角 θ 的函数，求出感应面电流密度 $\boldsymbol{K}$。

习题 7.43　一个超导性(习题 7.42)为人所熟知的演示是，在一块超导材料上方悬浮着一块磁铁。这个现象可以利用镜像法分析。[㊁]将磁铁作为一个理想磁偶极子 $\boldsymbol{m}$ 处理，该磁偶极子在原点上方 z 处(并且限制其方向为 z 方向)，然后认为超导体占据了 xy 平面以下的整个半空间。由于迈斯纳效应，对于 $z \leqslant 0$ 处 $\boldsymbol{B} = 0$，而且因为 $\boldsymbol{B}$ 是无散度的，法线方向(z)分量是连续的，所以在界面的稍上方 $B_z = 0$。作为超导体的替身，将镜像构造为在 $-z$ 处放置一个相同的磁偶极子时，满足边界条件；这两个不同的布置在 $z > 0$ 区域产生相同的磁场。

(a) 镜像磁偶极子应该指向哪个方向($+z$ 还是 $-z$)？

(b) 求出由超导体上的感应电流而产生的施加在磁铁上的力(这也就是说，由镜像磁偶极子产生的力)。将其设定为与 Mg 相等(其中 M 是磁铁的质量)，从而得到磁铁将会“悬浮”的高度。[提示：参考习题 6.3。]

(c) 超导体表面(xy 平面)上的感应电流可以由关于 $\boldsymbol{B}$ 切线分量的边界条件式(5.74)得到：$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{K} \times \hat{z})$。利用你通过镜像法得到的磁场，证明

$$\boldsymbol{K} = -\frac{3mrh}{2\pi(r^2 + h^2)^{5/2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

式中，r 为距原点的距离。

习题 7.44　如果一个悬浮在无限大超导平面上的磁偶极子(习题 7.43)可以自由旋转，它将会朝哪个方向转动？它将会在平面上悬浮多高？

㊀ 迈斯纳效应有时候指的是“完全抗磁性”，从这种意义上来说，内部的磁场不是被减弱了，而是被完全抵消掉了。但是产生这种效应的面电流是自由电流，而不是束缚电流，所以实际的机制是相当不同的。

㊁ W. M. Saslow, Am. J. Phys. 59, 16(1991)。

习题 7.45 在一个匀强磁场 $\boldsymbol{B}=B_0\hat{\boldsymbol{z}}$ 中，一个半径为 a 的理想导电球壳绕着 z 轴以角速度 ω 旋转。计算其“北极”与赤道之间产生的电动势。$\left[\text{答案：}\frac{1}{2}B_0\omega a^2\right]$

习题 7.46 参考习题 7.11(如果有用的话，利用习题 5.40 的结果)：

(a) 是方向如图 7.19 所示的方形线框下落得更快，还是将其绕指出纸面的轴旋转 45°后下落得更快？求出两者最终速度之比。如果你让线框下落，在下落过程中，它会转向哪个方向？[答案：$(\sqrt{2}-2y/l)^2$，其中 l 为边长，y 为旋转后线框中心在磁场边界上方的高度。]

(b) 一个圆形线框以其(与上不同的)最终速度需要花多长时间才能穿过磁场的底部？

习题 7.47

(a) 利用法拉第定律与安培定理之间的相似性，以及毕奥-萨伐尔定律，证明对于法拉第感应电场

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}',t)\times\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\mathrm{d}\tau' \tag{7.65}$$

(b) 参考习题 5.50a，证明

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{7.66}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 为磁矢势。通过对两边同取旋度验证该结果。

(c) 一个半径为 R 的球壳带有均匀的电荷面密度为 σ 的电荷。它绕着一个固定轴，以缓慢随时间变化的角速度 $\omega(t)$ 转动。求出球内部及外部的电场。[提示：这里有两部分的贡献，由于电荷而产生的库仑场，以及由于变化的 $\boldsymbol{B}$ 而产生的法拉第电场。参考例题 5.11，并且利用式(7.66)。]

习题 7.48 经历回旋运动的电子可以通过增大磁场进行加速；伴随产生的电场会产生一个切向加速度。这就是**电子感应加速器**的原理。有人想要在这个过程中保持轨道半径恒定。证明这可以通过设计这样一个磁场实现，其轨道区域上的平均磁场为周围磁场的两倍(见图 7.52)。假定电子在零场中从静止开始运动，并且设备关于轨道的中心是对称的。(同样假定电子的速度始终远远低于光速，所以非相对论力学是适用的。)[提示：把式(5.3)对时间求导，并利用 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=q\boldsymbol{E}$。]

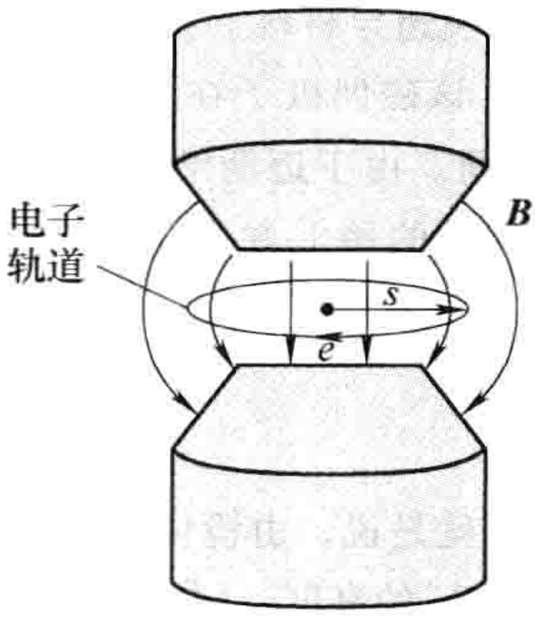


图 7.52

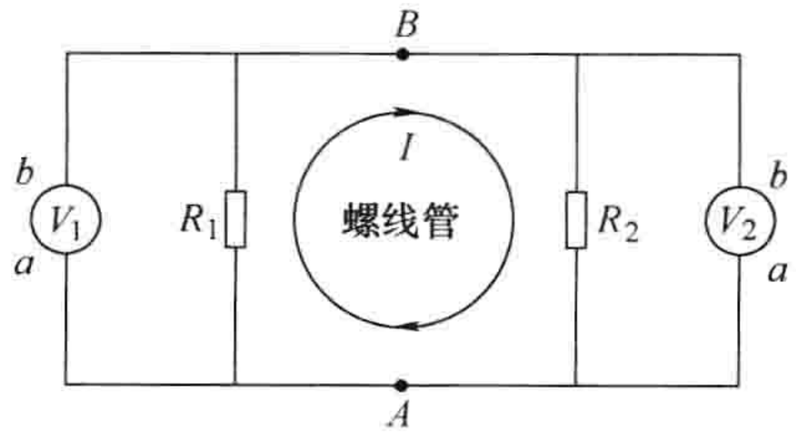


图 7.53

习题 7.49 一个原子中的电子(电荷 q)在半径为 r 的轨道上围绕核(电荷量 Q)运动；向心加速度，当然，是由不同符号电荷之间的吸引力提供的。现在垂直于轨道平面缓慢施加一个小磁场 $\mathrm{d}B$。证明由感应电场提供的动能增加量 $\mathrm{d}T$，正好可以维持电子在相同半径 r 上的圆周运动。(这就是为什么，在我关于抗磁性的讨论中，我假设半径是固定的。见 6.1.3 小节以及那里引用的参考文献。)

习题 7.50 一个长螺线管中的电流随时间线性增加，所以磁通量与 t 成比例：$\Phi=\alpha t$。如图 7.53 所示，两个电压表，连同电阻(R_1 和 R_2)，接在沿螺线管直径方向相对的两点(A 和 B)。这两个电压表上的读数分别为多少？假设这两个电压表是流过的电流可以忽略的理想电压表(它们有巨大的内阻)，而电压表记录两个接头之间通过表的 $\int_a^b\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。[答案：$V_1=\alpha R_1/(R_1+R_2)$；$V_2=-\alpha R_2/(R_1+R_2)$。注意 $V_1\neq V_2$，尽管它们连接到相同的点上！见 R. H. Romer，Am. J. Phys. 50，1089(1982)。]

习题 7.51　在动生电动势的讨论中(7.1.3 小节)，我假定导线回路(见图 7.10)有电阻 R；于是产生的电流为 $I = vBh/R$。但是如果导线是由理想导体制作的，即 R 为零，那将会怎样？在这个情况下电流只被与回路的自感 L 有关的反电动势(通常该电动势与 IR 相比是可以忽略的)所限制。证明在这个体系中回路(质量 m)作简谐运动，并且求出其频率。[㊀][答案：$\omega = Bh/\sqrt{mL}$]

习题 7.52

(a) 使用纽曼公式(7.22)计算图 7.36 中构型的互感，假设 a 非常小($a \ll b$，$a \ll z$)。将你的答案与习题 7.20 比较。

(b) 对于一般情形(未假设 a 很小)证明

$$M = \frac{\mu_0 \pi \beta}{2} \sqrt{ab\beta}\left(1 + \frac{15}{8}\beta^2 + \cdots\right)$$

式中

$$\beta \equiv \frac{ab}{z^2 + a^2 + b^2}$$

习题 7.53　两个线圈以使两个线圈的每一匝通过的磁通量相等的方式沿着一圆柱缠绕。(在实际中，这是通过在圆柱中穿过一个铁芯实现的；这个方法有浓缩磁通量的效果。)初级线圈有 N_1 匝，而次级线圈有 N_2 匝(见图 7.54)。如果初级线圈中的电流 I 正在改变，证明次级线圈中的电动势由下式给出

$$\frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{7.67}$$

式中，$\mathscr{E}_1$ 是初级线圈的(反)电动势。[这就是**变压器**的原型——一种升高或者降低交变电流源电动势的设备。通过选择合适的匝数，可以在次级线圈上得到任何想要的电动势。如果你认为这违背了能量守恒定律，在习题 7.54 中检验。]

习题 7.54　一个变压器(习题 7.53)有振幅为 V_1 的输入 AC 电压，并且输出振幅为 V_2 的输出电压，该大小由匝数比决定($V_2/V_1 = N_2/N_1$)。如果 $N_2 > N_1$，则输出电压比输入电压更大。为什么这没有违背能量守恒定律？答案：电能是电压与电流的乘积；显然，如果电压上升，电流必须下降。此问题的目的是来清楚地看看在简化过的模型中这是如何发生的。

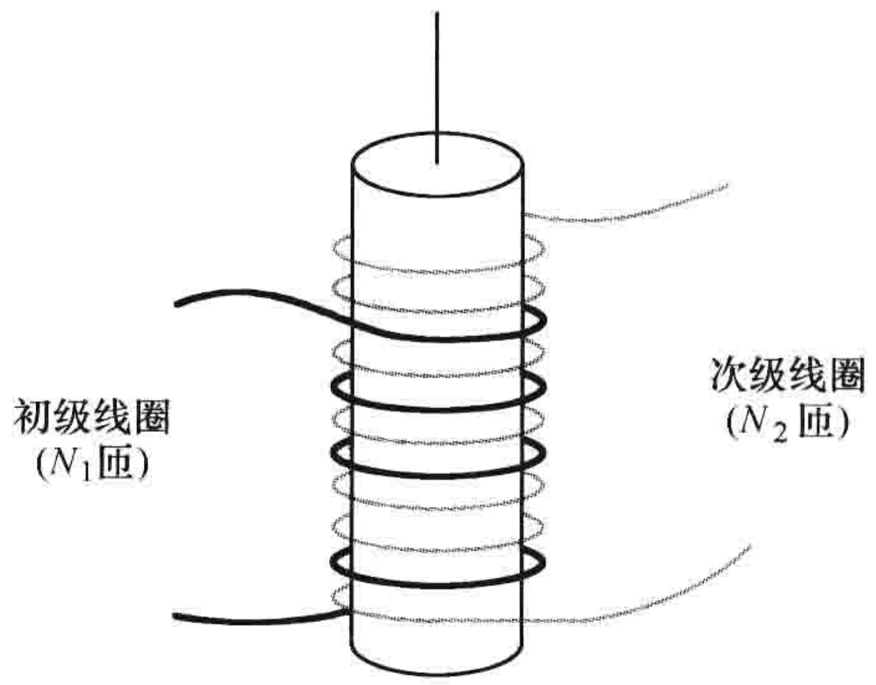


图　7.54

(a) 在理想变压器中，初级线圈与次级线圈的每一匝线圈都通过相同的磁通量。证明在这个情形下 $M^2 = L_1 L_2$，其中 M 为两个线圈之间的互感，而 L_1、L_2 为它们的自感。

(b) 假设初级线圈由 AC 电压 $V_{输入} = V_1 \cos(\omega t)$ 驱动，而次级线圈连接到一个电阻 R。证明这两个电流满足关系

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} = V_1 \cos(\omega t)\,;\; L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} = -I_2 R$$

(c) 利用(a)中的结果，解出关于 $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$ 的这两个方程。(假设 I_1 没有 DC 成分。)

(d) 证明输出电压($V_{输出} = I_2 R$)除以输入电压($V_{输入}$)等于匝数比：$V_{输出}/V_{输入} = N_2/N_1$。

(e) 计算输入功率($P_{输入} = V_{输入} I_1$)与输出功率($P_{输出} = V_{输出} I_2$)，并证明它们关于一个完整周期的平均值相等。

习题 7.55　假设 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ 不随时间变化但 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ 不是——可能存在的情况，例如，在电容器的充电过程中。

(a) 证明在任何点的电荷密度都是时间的线性函数：

㊀ 对于相关问题的合集，参见 W. M. Saslow, Am. J. Phys. 55, 986(1987)，以及 R. H. Romer, Eur. J. Phys. 11, 103(1990)。

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},0) + \dot{\rho}(\boldsymbol{r},0)t$$

式中，$\dot{\rho}(\boldsymbol{r},0)$ 为在 $t=0$ 时刻 ρ 对于时间的导数。

这并不是一个静电学或静磁学系统；[⊖]然而——相当令人吃惊——库仑定律（以式(2.8)的形式）和毕奥-萨伐尔定律（式(5.39)）保持成立，你可以通过证明它们满足麦克斯韦方程组来确认这一点。特别地：

（b）证明

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2} d\tau'$$

遵守带有麦克斯韦位移电流项的安培定理。

习题 7.56 一根带有电流 I 的无限长直导线的磁场可以通过下列方法从安培-麦克斯韦定理的位移电流项得到：设想由一个带有长度为 ε 的微小缺口的均匀线电荷 λ 沿着 z 轴以速度 v 运动构成电流（所以 $I=\lambda v$），该缺口在时刻 $t=0$ 到达原点。在下一个时刻（直到 $t=\varepsilon/v$），没有真实的电流通过一个 xy 平面上的环形安培回路，但是由于缺口中“缺失”的电荷，存在位移电流。

（a）对于 xy 平面上距离原点 s 处的点，利用库仑定律计算由一段从 $z_1 = vt - \varepsilon$ 到 $z_2 = vt$ 的带有均匀电荷线密度 $-\lambda$ 的一段导线产生的电场的 z 分量。

（b）求出这个电场通过 xy 平面上一个半径为 a 的圆环的通量。

（c）求出通过这个圆环的位移电流。证明在缺口宽度趋近于零的极限下，I_d 等于 I。[对于这个问题的一个稍微不同的解法，见 W. K. Terry, Am. J. Phys. 50, 742(1982)。]

习题 7.57 一个带有稳恒电流 I 的长直导线外部的磁场为（当然）

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{s}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

导线内部的电场是匀强的：

$$\boldsymbol{E} = \frac{I\rho}{\pi a^2}\hat{\boldsymbol{z}}$$

式中，ρ 为电阻率；而 a 为导线半径（见例题 7.1 及例题 7.3）。问题：导线外部的电场是什么样的？这是一个著名的问题，由索末菲首先研究，并且最近作为其特例的“莫巴克（Merzbacher）难题”为人所知[⊜]。答案取决于你如何使电路完整。假设电流沿着一个半径为 b 的理想的接地同轴圆柱面导电流回（见图 7.55）。在 $a<s<b$ 的区域中，电势 $V(s,z)$ 满足拉普拉斯方程，并有边界条件

$$\text{(i) } V(a,z) = -\frac{I\rho z}{\pi a^2};\ \text{(ii) } V(b,z) = 0$$

遗憾的是，这并不足以得到答案——我们还需要明确两端处的边界条件。在文献中通常无视这里的含糊不清，简单地断言（直截了当地）$V(s,z)$ 与 z 成比例：$V(s,z)=zf(s)$。根据这一假设：

（a）求出 $V(s,z)$。

（b）求出 $\boldsymbol{E}(s,z)$

（c）计算导线表面上的电荷面密度 $\sigma(z)$。

[答案：$V=(-Iz\rho/\pi a^2)[\ln(s/b)/\ln(a/b)]$，这是一个很奇特的结果，因为 E_s 和 $\sigma(z)$ 并非如在真正的无限长直导线的情形中我们理所当然期望的那样与 z 无关。]

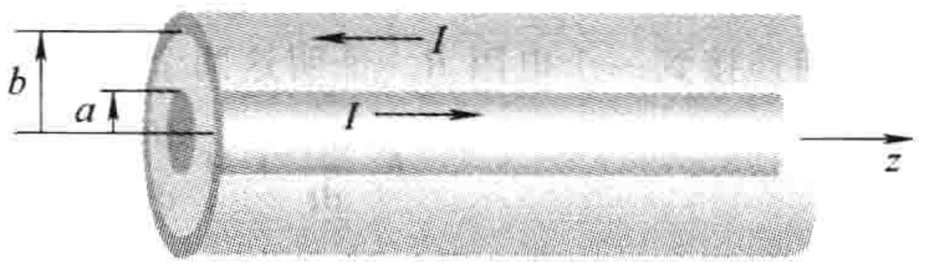


图 7.55

⊖ 有些作者会将这个问题当做是静磁学的，因为 $\boldsymbol{B}$ 与 t 无关。对他们来说，毕奥-萨伐尔定律是静磁学的普适定律，但是 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$ 仅对有附加条件 ρ 为常数时的情形适用。在这种表达方式下，麦克斯韦位移电流项可以（在这种非常特殊的情形下）用本题（b）部分中的方法由毕奥-萨伐尔定律导出。参见 D. F. Bartlett, Am. J. Phys. 58, 1168(1990)；D. J. Griffiths and M. A. Heald, Am. J. Phys. 59, 111(1991)。

⊜ A. Sommerfeld, Electrodynamics, p. 125 (New York: Academic Press, 1952)；E. Merzbacher, Am. J. Phys. 48, 178 (1980)；更多参考文献参见 M. A. Heald, Am. J. Phys. 52, 522(1984)。

习题 7.58　某输电线路由两条宽度为 w，相距很小的距离 $h \ll w$ 薄金属“带”构成。电流沿着其中一条流出，然后沿着另一条流回。电流在带的表面上是均匀分布的。

（a）求出每单位长度的电容，C。

（b）求出每单位长度的电感，L。

（c）乘积 LC 在数值上有多大？［当然，L 和 C 对于不同种类的传输线是不同的，但是它们的乘积是一个普适常数——例如，检验例题 7.13 中的电缆——只要两个导体之间的空间是真空的。在传输线的理论中，这个乘积与沿着导线传播的脉冲的速度有关：$v = 1/\sqrt{LC}$。］

（d）如果这两条导线相互之间用介电常数为 ε、磁导率为 μ 的不导电材料绝缘，此时乘积 LC 为多大？传播速度多大？［提示：见例题 4.6；当一个电容器浸入磁导率为 μ 的线性材料中时，L 按照什么因子改变？］

习题 7.59　证明**阿法万**（Alfven）定理：在理想导电流体中（例如，自由电子气），通过任意随流体流动的闭合回路的磁通量在所有时刻保持恒定。（磁场线，实际上，被“冻结”在流体中。）

（a）利用式（7.2）形式的欧姆定律，以及法拉第定律，证明如果 $\sigma = \infty$ 但是 $\boldsymbol{J}$ 有限，则

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})。$$

（b）令 S 为在时刻 t 以回路（$\mathcal{P}$）为边界的面，而 S' 为在时刻 $t + \mathrm{d}t$ 以新位置（$\mathcal{P}'$）的回路为边界的面（见图 7.56）。磁通量的变化为

$$\mathrm{d}\Phi = \int_S \boldsymbol{B}(t + \mathrm{d}t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} - \int_{S'} \boldsymbol{B}(t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

证明

$$\int_{S'} \boldsymbol{B}(t + \mathrm{d}t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} + \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{B}(t + \mathrm{d}t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_S \boldsymbol{B}(t + \mathrm{d}t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

（式中，$\mathcal{R}$ 为连接 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}'$ 的“带”），因此（对于无限小的 $\mathrm{d}t$）

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}t \int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} - \int_{\mathcal{R}} \boldsymbol{B}(t + \mathrm{d}t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

利用 7.1.3 小节中的方法将第二个积分改写为

$$\mathrm{d}t \int_{\mathcal{P}} (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

并且援引斯托克斯定理，可以得到结论

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \int_S \left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

连同（a）中的结果，这样就证明了阿法万定理。

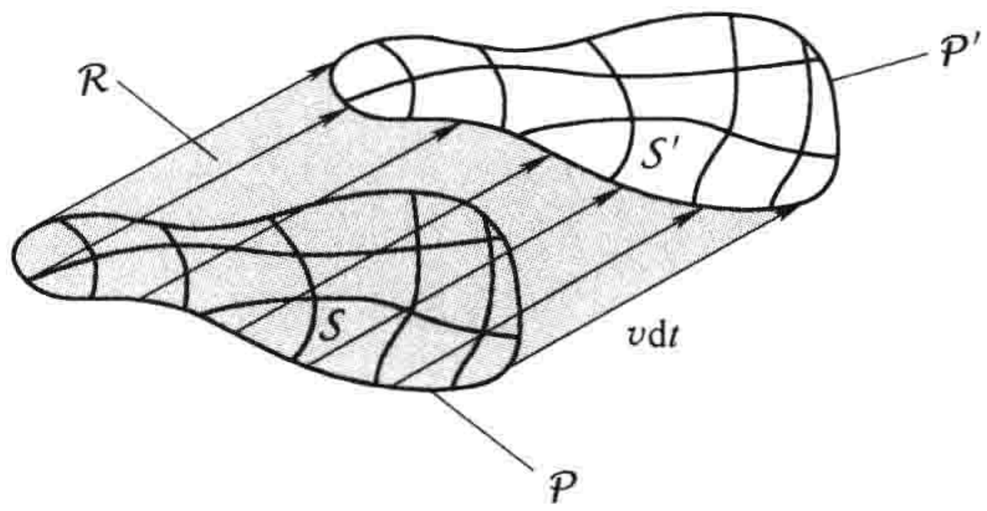


图　7.56

习题 7.60

（a）证明带有磁荷项的麦克斯韦方程组（式（7.43））在二元变化下保持不变

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E}\cos\alpha + c\boldsymbol{B}\sin\alpha \\ c\boldsymbol{B}' &= c\boldsymbol{B}\cos\alpha - \boldsymbol{E}\sin\alpha \\ cq_{\mathrm{e}}' &= cq_{\mathrm{e}}\cos\alpha + q_{\mathrm{m}}\sin\alpha \\ q_{\mathrm{m}}' &= q_{\mathrm{m}}\cos\alpha - cq_{\mathrm{e}}\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{7.68}$$

式中，$c \equiv 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$；而 α 是在“$\boldsymbol{E}/\boldsymbol{B}$ 空间”中的一个任意转动角。荷和流密度按照与 q_{m} 和 q_{e} 相同的方式变换。［特别地，这意味着如果你知道某个电荷分布产生的电场，你可以直接（利用 $\alpha = 90°$）写下相应分布的磁荷产生的磁场。］

（b）证明力定律（习题 7.35）

$$\boldsymbol{F} = q_e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + q_m\left(\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}\right) \tag{7.69}$$

同样在二元变化下保持不变。

期间暂停

所有的牌都已在桌子上了，在一定程度上这意味着我已完成我的工作。在前7章，我们一块一块地把电动力学组装起来，现在，以麦克斯韦方程组为它的最终形式，理论已经完备。没有更多的规律需要进一步学习，也没有进一步的推广需要考虑，并且(也许还有一个例外)没有潜在的不一致需要修补。如果你仅想修一学期的课程，也许现在是合理的终点。

但是，从另一个意义上讲我们刚好到达一个起点。我们至少掌握了相当的知识，知道了游戏的规则——现在是玩它们的时候了。这是一个有趣的部分，在其中我们将享受电动力学及其丰富的内容与威力。对一学年的课程，我们有充分的时间学习剩余的内容，也许可将等离子物理作为一个单元补充，或者AC电路理论，或者少许广义相对论的内容。但是，如果你仅有时间学习一个课题，我建议第9章电磁波(也许你想浏览第8章作为预备)。这是光学的继续，历史上这是麦克斯韦理论的最重要应用。

第8章　守恒定律

8.1　电荷和能量

8.1.1　连续性方程

在这一章中我们将要学习电动力学中的能量、动量和角动量守恒。但是作为开始，我想先回顾一下电荷守恒，因为它是一切守恒定律的范例。精确地讲，电荷守恒告诉了我们什么？宇宙中的电荷总量是一个常数？当然——这是全局的电荷守恒。但是局域电荷守恒是一个更强的表述：如果某一给定体积内的总电荷量有所改变，就必须有等量的电荷流入或流出包围这个体积的表面。就像老虎不能凭空跑到笼子外面，如果它从里面逃到外面，那么围栏上必然有一个洞。

形式上，一个体积 V 内的电荷量为

$$Q(t) = \int_V \rho(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}\tau \tag{8.1}$$

并且，通过边界 S 向外流出的电流为 $\oint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$，所以局域电荷守恒可表述为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\oint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{8.2}$$

将式(8.1)代入等式左边，并且在等式右边应用散度定理，我们得到：

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\tau \tag{8.3}$$

上式对任意体积 V 都成立，所以有

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{J}} \tag{8.4}$$

当然，这就是连续性方程——局域电荷守恒的严格数学表述。就像我之前指出的那样，它可以从麦克斯韦方程组中推导出来——电荷守恒不是一个独立的假设，而是电动力学规律的必然结果。

我们这一章的目的是对能量守恒和动量守恒构建相应的方程。在这个过程中(或许这更为重要)，我们会学到如何表达能量密度和动量密度(与 ρ 类似)，以及能量“流”和动量“流”(与 $\boldsymbol{J}$ 类似)。

8.1.2　坡印廷定理

在第2章中我们发现，将一个静态电荷分布聚集到一起需要的功(克服相同电荷间的库仑斥力)如式(2.45)

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\,\mathrm{d}\tau$$

式中，$\boldsymbol{E}$ 为最后生成的电场。类似地，使电荷流动产生电流所需要的功(克服反电动势)如式(7.34)

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,\mathrm{d}\tau$$

式中，$\boldsymbol{B}$ 为电流所产生的磁场。这表明电磁场所具有的总能量为

$$U_{em} = \frac{1}{2}\int\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)d\tau \tag{8.5}$$

下面我将从能量守恒的角度用更一般的方法推导出式(8.5)。

假设我们有电荷和电流分布，在时刻 t，它们产生电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$。在下一时刻，dt，电荷移动了一小段距离。问：在时间间隔 dt 中，作用在这些电荷上的电磁力做了多少功？根据洛伦兹力定律，电磁场对电荷所做的功为

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}dt = q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}dt$$

式中，$q=\rho d\tau$，$\rho\boldsymbol{v}=\boldsymbol{J}$，因此电磁场对体积 $\mathcal{V}$ 内所有电荷做功的总功率为

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J})d\tau \tag{8.6}$$

显然，$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}$ 是单位时间内对单位体积内的电荷所做的功——也就是说，对单位体积传递的功率。我们可以仅用场量把它表示出来，用安培-麦克斯韦定理消去 $\boldsymbol{J}$：

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) - \varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

根据矢量积规则(iv)

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

应用法拉第定律($\nabla\times\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$)，我们得到

$$\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$$

又因为

$$\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(B^2),\quad \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E^2) \tag{8.7}$$

所以

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) \tag{8.8}$$

将上式代入式(8.6)并对右边第二项应用散度定理，我们有

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)d\tau - \frac{1}{\mu_0}\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{a} \tag{8.9}$$

式中，S 为体积 $\mathcal{V}$ 的边界。这就是**坡印廷**(Poynting)**定理**；它是电动力学中的功能原理。右边第一项的积分是储藏在电磁场中的总能量 U_{em}(式(8.5))。第二项明显代表能量从体积 $\mathcal{V}$ 中通过表面向外传输的速率。坡印廷定理说明：电磁场对体积 $\mathcal{V}$ 内所有电荷做的总功等于电磁场能量的减少减去从边界流出的能量。

单位时间内电磁场通过单位表面积向外传递的能量称为**坡印廷矢量**：

$$\boxed{\boldsymbol{S} \equiv \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})} \tag{8.10}$$

特别地，$\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{a}$ 是单位时间内通过无限小面元 $d\boldsymbol{a}$ 的能量——能流，如果你喜欢的话(这样 $\boldsymbol{S}$ 就是**能流密度**)[㊀]。在第 9 章和第 11 章我们将会见到坡印廷矢量的多种应用，但是现在，我的主要兴

㊀ 如果细心的话，你会注意到在这里有一个逻辑上的小缺陷：从式(8.9)我们知道 $\oint\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{a}$ 是通过一个封闭曲面的总功率，但这并不说明 $\int\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{a}$ 是穿过任何开放面的功率(有可能存在额外项，但是这些项对封闭曲面积分为零)。不过，这是一个最明了自然的解释。在电动力学中总是如此，能量的精确定位是不确定的。(见第 2.4.4 小节)

趣是用它把坡印廷定理表述得更为紧凑：

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{em}}}{\mathrm{d}t} - \oint_S \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{8.11}$$

当然，对电荷做功会增加它们的机械能（动能、势能或者其他的能）。如果我们用 u_{mech} 表示机械能能量密度，则有

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V u_{\mathrm{mech}}\,\mathrm{d}\tau \tag{8.12}$$

同时用 u_{em} 表示电磁场的能量密度：

$$\boxed{u_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)} \tag{8.13}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V (u_{\mathrm{mech}} + u_{\mathrm{em}})\,\mathrm{d}\tau = -\oint_S \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{S})\,\mathrm{d}\tau$$

因此

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(u_{\mathrm{mech}} + u_{\mathrm{em}}) = -\nabla\cdot\boldsymbol{S}} \tag{8.14}$$

这是坡印廷定理的另一种表达形式。同表示电荷守恒的连续性方程（式(8.4)）

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{J}$$

比较，式(8.14)只是把电荷密度替换为能量密度（机械能的加上电磁场的），电流密度替换为坡印廷矢量。后者描述电磁场能量的流动，正和 $\boldsymbol{J}$ 描述电荷的流动一样。[⊖]

例题 8.1

当电流流过导线时，就会做功，以焦耳热的形式释放出来（式(7.7)）。尽管有更简便的方法，但我们可以利用坡印廷矢量来计算单位时间内传递给导线的能量。假设电场是均匀的，则平行于导线的电场强度为

$$E = \frac{V}{L}$$

式中，V 为导线两端的电势差，L 为导线的长度（见图 8.1）。磁场环绕着导线，在导线表面（半径为 a）磁场大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

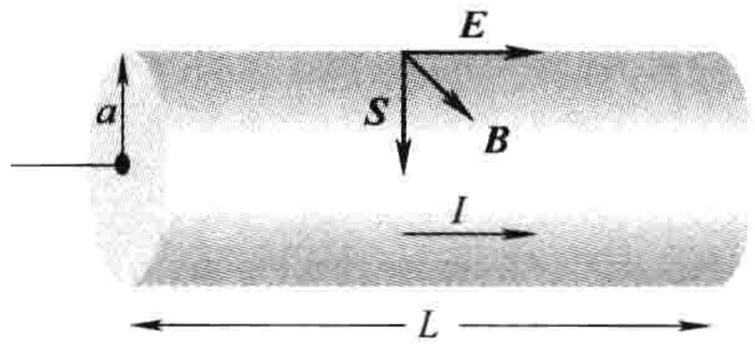


图　8.1

相应地，坡印廷矢量的大小为

$$S = \frac{1}{\mu_0}\,\frac{V}{L}\,\frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{VI}{2\pi aL}$$

并且（根据右手定则）它沿径向指向导线内部，单位时间内通过表面传入导线内的能量为

$$\int \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = S\cdot 2\pi La = VI$$

⊖ 在线性介质存在时，我们往往仅对自由电子和电流做的功感兴趣（见 4.4.3 小节）。在这种情况下，能量密度为 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})$，坡印廷矢量为 $(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$。详见 J. D. Jackson，经典电动力学，第 6.7 节（New York：John Wiley，1999）。

这正是我们在 7.1.1 小节中用更直接的方法得到的结果。

习题 8.1 计算例题 7.13 和习题 7.58 中沿着电缆传输的功率(单位时间内传输的能量),假设内外两个导线间的电势差为 V,电流为 I(从一个流入,另一个流出)。

习题 8.2 考虑习题 7.31 中的充电电容器。

(a) 作为到轴线的距离 s 与时间 t 的函数,求间隙中的电场与磁场。(假设在 $t=0$ 时刻,电容器的电荷量为零)。

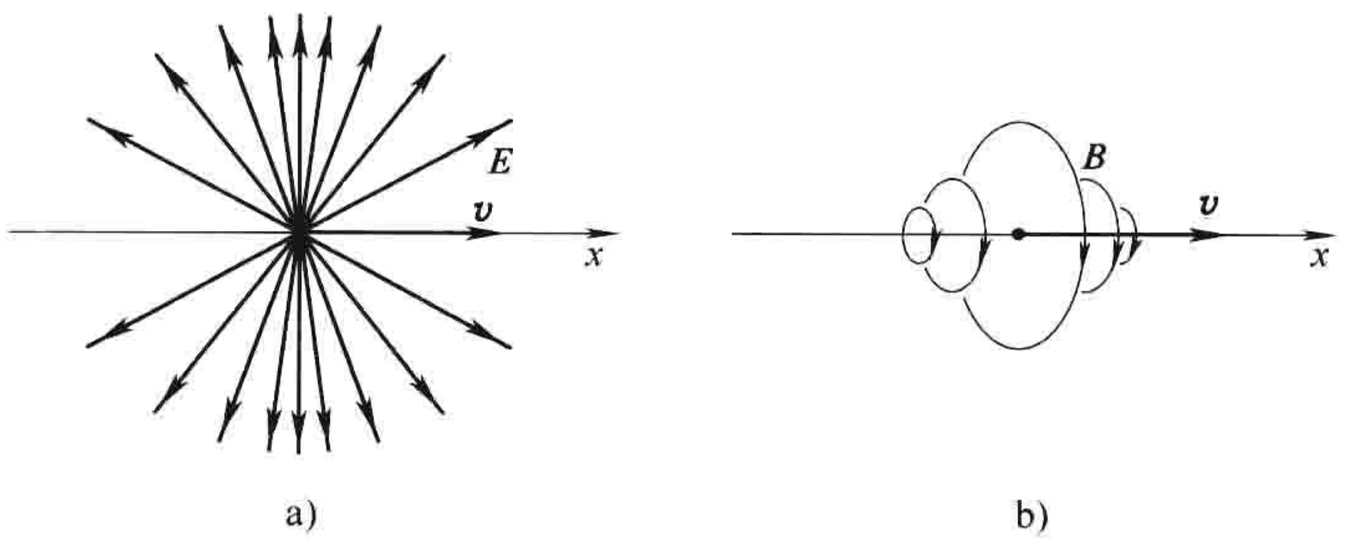
(b) 求间隙中的能量密度 u_{em} 和坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$,特别要注意 $\boldsymbol{S}$ 的方向。并且验证是否满足式(8.14)。

(c) 作为时间 t 的函数,计算间隙中的总能量。找一个合适的表面对坡印廷矢量积分求出电磁场向间隙中传输的总功率,检验它与间隙中能量的增加率相等。(式(8.9)——不过现在 $W=0$,因为间隙中没有电荷)。[如果担心边缘区域的影响,可以选取半径 $b<a$ 的体积使其完全处在间隙内部。]

8.2 动量

8.2.1 电动力学中的牛顿第三定律

设想一个点电荷 q 沿 x 轴以恒定速率 v 运动。因为运动,它所产生的电场并不由库仑定律给出;正如我们将在第 10 章见到的那样,$\boldsymbol{E}$ 的方向仍然沿电荷的瞬时位置的径向方向(见图 8.2a)。更重要的是,一个运动的电荷并不产生稳定的电流,所以它的磁场并不由毕奥-萨伐尔定律给出。然而,$\boldsymbol{B}$ 仍旧环绕着 x 轴,如右手定则表述的那样(见图 8.2b);同样,在第 10 章将给出证明。



a) b)

图 8.2

现在,假设这个电荷遇见了另外一个具有相等电荷量,以同样速度$\boldsymbol{v}$沿 y 轴运动的电荷。显然,电荷之间的电磁力会使它们偏离坐标轴。不过,让我们假设这两个电荷被固定在导轨上,或者由于别的什么原因,使它们只能沿固定方向以恒定速度运动(见图 8.3)。它们之间的电场力等值反向,但是磁力呢?因为电荷 q_1 产生的磁场指向纸内(在 q_2 位置处),所以 q_2 所受的磁力指向右。同时,q_2 产生的磁场指向纸外(在 q_1 的位置上),因此,q_1 所受磁力向上。q_1 和 q_2 所受电力大小相等,但并不指向相反方向,违背了牛顿第三定律。在静电学和静磁学中第三定律成立,但是在电动力学中它不成立。

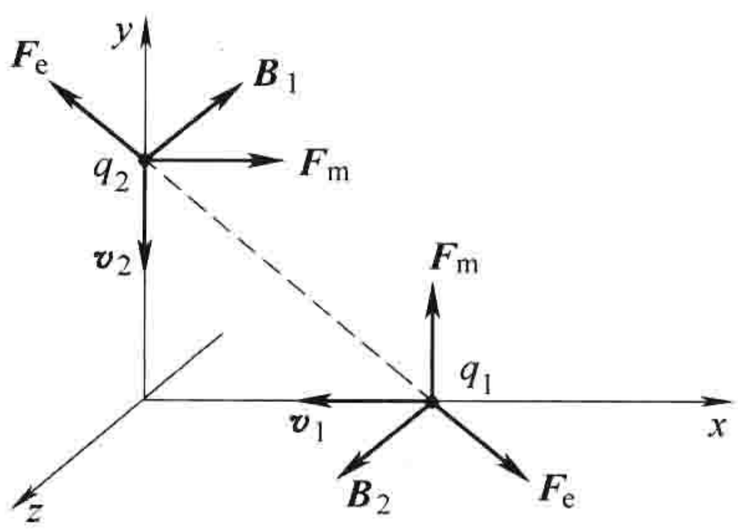


图 8.3

这真是一件有趣的事情，但是在实际中，我们能多经常地使用牛顿第三定律呢？答案：总是如此！动量守恒的证明是基于内力的相互抵消，内力遵循牛顿第三定律。当你扰动牛顿第三定律时，你就把动量守恒放到了一个危险地位，而物理学中没有规律比动量守恒更神圣。

如果我们意识到电磁场本身具有动量，电动力学中的动量守恒定律是可以得到保证的。考虑到我们已经知道电磁场具有能量，这并不令人吃惊。在上述的两个电荷的例子中，粒子损失的动量被电磁场获得，只有把电磁场的动量加入粒子的机械动量中后，动量守恒才能恢复。在接下来的几节中，你们会看到定量上它是怎样建立的。

8.2.2　麦克斯韦应力张量

让我们来计算一体积 V 内的电荷所受的电磁力

$$\boldsymbol{F} = \int_V (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\rho \mathrm{d}\tau = \int_V (\rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B})\,\mathrm{d}\tau \tag{8.15}$$

显然，单位体积所受的力为

$$\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \tag{8.16}$$

与以前一样，我仅用场量把它表示出来，用麦克斯韦方程组中的式(i)和式(iv)消去 ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 得

$$\boldsymbol{f} = \varepsilon_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \times \boldsymbol{B}$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \times \boldsymbol{B}\right) + \left(\boldsymbol{E} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)$$

另由法拉第定律，

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E}$$

所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{E} \times (\nabla \times \boldsymbol{E})$$

这样有

$$\boldsymbol{f} = \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \times (\nabla \times \boldsymbol{E})] - \frac{1}{\mu_0}[\boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{B})] - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \tag{8.17}$$

为了让方程看起来更对称一点，让我们加入一项 $(\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B}$；因为 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$，这样做没有任何影响。同时，根据矢量积规则 4，

$$\nabla(E^2) = 2(\boldsymbol{E} \cdot \nabla)\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{E} \times (\nabla \times \boldsymbol{E})$$

所以

$$\boldsymbol{E} \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\nabla(E^2) - (\boldsymbol{E} \cdot \nabla)\boldsymbol{E}$$

对 $\boldsymbol{B}$ 也是如此，这样我们就有

$$\boldsymbol{f} = \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{E} \cdot \nabla)\boldsymbol{E}] + \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}] -$$

$$\frac{1}{2}\nabla\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \tag{8.18}$$

这看起来不太优美。但是当我们引入**麦克斯韦应力张量**

$$T_{ij} \equiv \varepsilon_0\left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right) \tag{8.19}$$

方程可被简化。其中下标 i，j 表示坐标 x，y，z，所以应力张量共有 9 个分量（T_{xx}，T_{yy}，T_{xz}，T_{yx} 等）。**克罗内克**（Kronecker）δ **符号**当下标 i、j 相同时为 1（$\delta_{xx}=\delta_{yy}=\delta_{zz}=1$），其余情况为 0（$\delta_{xy}=\delta_{yz}=\delta_{zx}=0$）。这样有

$$T_{xx}=\frac{1}{2}\varepsilon_0(E_x^2-E_y^2-E_z^2)+\frac{1}{2\mu_0}(B_x^2-B_y^2-B_z^2)$$

$$T_{xy}=\varepsilon_0(E_xE_y)+\frac{1}{\mu_0}(B_xB_y)$$

依次类推。因为它有两个指标，而矢量只有一个，所以 T_{ij} 有时被写成一个带双箭号的符号：$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$。我们可以构造 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 与一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 的点积：

$$(\boldsymbol{a}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}})_j=\sum_{i=x,y,z}a_iT_{ij} \tag{8.20}$$

所得结果只有一个指标，是一个矢量。特别有，$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 的散度的第 j 个分量是

$$(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}})_j=\varepsilon_0\left[(\nabla\cdot\boldsymbol{E})E_j+(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)E_j-\frac{1}{2}\nabla_jE^2\right]+\frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla\cdot\boldsymbol{B})B_j+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)B_j-\frac{1}{2}\nabla_jB^2\right]$$

这样，单位体积所受的力（式(8.18)）可以写成更简洁的形式：

$$\boldsymbol{f}=\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{S}}{\partial t} \tag{8.21}$$

式中，$\boldsymbol{S}$ 是坡印廷矢量（式(8.10)）。

显然，体积 V 内所有电荷所受的合力为

$$\boldsymbol{F}=\oint_S\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\boldsymbol{S}\mathrm{d}\tau \tag{8.22}$$

（我已利用散度原理把第一项的体积分转换成面积分）。在静态情况（或者更一般的，只要当 $\int\boldsymbol{S}\mathrm{d}\tau$ 与时间无关时），第二项可以去掉，此时电荷分布所受的电磁力可以只用边界上电磁场的应力张量来表示。物理上，$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 是电磁场作用在表面上单位面积上的力（或应力）。更精确地说，$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{ij}$ 是作用在 j 方向面元上沿 i 方向（单位面积上）的力——“对角”元（T_{xx}，T_{yy}，T_{zz}）代表压力，“非对角”元（T_{xy}，T_{xz} 等）代表剪切力。

例题 8.2

求一个均匀带电球下半球作用于上半球的力，球的半径为 R，带有电荷 q。（和习题 2.43 相同，不过这一次，我们要用麦克斯韦应力张量和式(8.22)求解）。

解： 上半球的边界面由两部分组成——半径为 R 的半球和在 $\theta=\pi/2$ 处的一个圆面（见图 8.4）。对于半球面

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}=R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\hat{\boldsymbol{r}}$$

并且

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

采用直角坐标

$$\hat{\boldsymbol{r}}=\sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}+\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}$$

所以

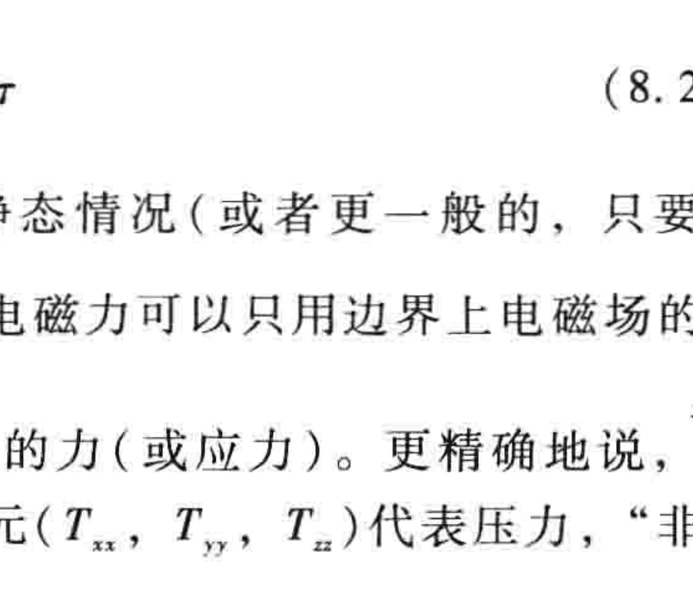


图 8.4

$$T_{zx} = \varepsilon_0 E_z E_x = \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 \sin\theta\cos\theta\cos\phi$$

$$T_{zy} = \varepsilon_0 E_z E_y = \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 \sin\theta\cos\theta\sin\phi$$

$$T_{zz} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \tag{8.23}$$

合力显然沿 z 方向。所以，只需要计算

$$(\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a})_z = T_{zx}\mathrm{d}a_x + T_{zy}\mathrm{d}a_y + T_{zz}\mathrm{d}a_z = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \right)^2 \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

因此，作用于“半球面”上的力为

$$F_{\text{半球面}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \right)^2 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{8R^2} \tag{8.24}$$

对于赤道处的圆面

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = -r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\hat{\boldsymbol{z}} \tag{8.25}$$

并且(因为我们是在球体内部)

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3}\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} r(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}})$$

这样有

$$T_{zz} = \frac{\varepsilon_0}{2}(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \right)^2 r^2$$

因此

$$(\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a})_z = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \right)^2 r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

这样，作用于圆面上的力为

$$F_{\text{圆面}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \right)^2 2\pi \int_0^R r^3\mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{16R^2} \tag{8.26}$$

结合式(8.24)和式(8.26)，得到作用在北半球上的力为

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3Q^2}{16R^2} \tag{8.27}$$

顺便指出，在应用式(8.22)时，任何体积只要它包含问题中的所有电荷(并且没有别的电荷)，计算结果都相同。例如，在本题中我们可以对整个上半平面 $z>0$ 作计算，这时边界变为整个 xy 平面(加上一个半径为无穷的半球，但是那里的 $E=0$，因此无须考虑)。代替原来的半球面，我们现在要计算的是 xy 平面中 $r>R$ 的部分。在这些地方

$$T_{zz} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4}$$

(式(8.23)，此时 $\theta=\pi/2$，并且将 R 代换为 r)，$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 由式(8.25)给出，所以

$$(\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a})_z = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^3}\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

圆面中 $r>R$ 部分所作的贡献为

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \right)^2 2\pi \int_R^\infty \frac{1}{r^3}\mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{8R^2}$$

这和原来的半球面所得结果一样。

我希望你们不要陷入例题 8.2 的细节中。如果是这样的话，花点时间去体会一下要领。我们打算计算作用在一个固体上的力，取代一个预期的体积分，式(8.22)允许我们由一个面积分来实现目的；应力张量以某种方式感觉出体积内部的情况。

习题 8.3 计算一个均匀带电旋转球壳南北半球间的磁吸引力。球壳半径为 R，转动角速度为 ω，电荷面密度为 σ。(这和习题 5.42 相同，但是这一次用麦克斯韦应力张量和式(8.22)求解)。

习题 8.4

(a) 考虑相距为 $2a$，带有等量电荷量 q 的两个点电荷。在到两电荷距离相等的平面上对麦克斯韦应力张量积分求一个电荷对另一个的作用力。

(b) 若两电荷带等量相反电荷，重复(a)中的求解。

8.2.3 动量守恒

根据牛顿第二定律，作用在物体上的力等于物体动量的变化率，

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t}$$

因此，式(8.22)可以写成如下形式，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{S}\mathrm{d}\tau + \oint_S \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{8.28}$$

式中，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{mech}}$代表体积 V 内所有粒子的总(机械)动量。上式在结构上和坡印廷定理相似，也具有一个类似的解释：第一项积分代表电磁场自身具有的动量：

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{em}} = \varepsilon_0\mu_0 \int_V \boldsymbol{S}\mathrm{d}\tau \tag{8.29}$$

而第二个积分代表单位时间内通过表面流入的动量。式(8.28)是电动力学中动量守恒的普适表达式：任何动量(机械动量加上电磁场的动量)的增加，等于电磁场带来的动量。(如果 V 是整个空间，就没有动量流入或流出，那么 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{mech}} + \boldsymbol{p}_{\mathrm{em}}$ 是一个常量。)

如同电荷和能量守恒一样，动量守恒也可以写成另外一种形式，让我们用 $\wp_{\mathrm{mech}}$ 表示机械动量密度，用 $\wp_{\mathrm{em}}$ 表示电磁场的动量密度：

$$\boxed{\wp_{\mathrm{em}} = \varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{S}} \tag{8.30}$$

那么式(8.28)可以写成另外一种形式

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\wp_{\mathrm{mech}} + \wp_{\mathrm{em}}) = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}} \tag{8.31}$$

显然，$-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 表示**动量流密度**，扮演电流连续性方程中 $\boldsymbol{J}$(电流密度)的角色或者坡印廷定理中 $\boldsymbol{S}$(能流密度)的角色。特别地，$-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}_{ij}$ 表示单位时间中通过沿 j 方向的单位面元沿 i 方向的动量。请注意，坡印廷矢量扮演两个十分不同的角色：$\boldsymbol{S}$ 自身是单位时间内电磁场通过单位面积传输的能量，同时 $\varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{S}$ 表示电磁场单位体积具有的动量。类似地，$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 也扮演两个角色：$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 自身是作用在表面上的电磁应力(单位面积上的力)，同时，$-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 描述电磁场传输的动量(动量流密度)。

例题 8.3

长为 l 的长同轴电缆由内导线(半径为 a)和外导线(半径为 b)组成。如图 8.5 所示，在导线一端接有电

池，另一端接有电阻。内导线带有均匀分布的电荷，每单位长度上电荷量为 λ，并且载有稳定向右的电流 I；外导线具有相反的电荷和电流。问：电磁场具有的动量为多少？

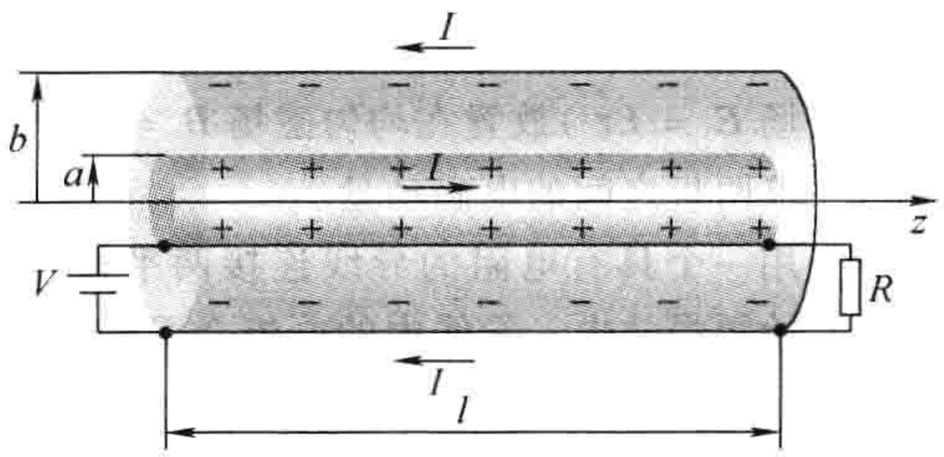


图　8.5

解： 它所产生的电磁场分别为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{s}\hat{\boldsymbol{s}}, \quad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{s}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

因此，坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2\varepsilon_0 s^2}\hat{\boldsymbol{z}}$$

显然，能量沿导线传递，从电池传向电阻。事实上，传输功率为

$$P = \int \boldsymbol{S}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{\lambda I}{4\pi^2\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{s^2}2\pi s\mathrm{d}s = \frac{\lambda I}{2\pi\varepsilon_0}\ln(b/a) = IV$$

它也应该如此。但是现在我们对它不感兴趣。电磁场自身具有的动量为

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{em}} = \mu_0\varepsilon_0\int \boldsymbol{S}\mathrm{d}\tau = \frac{\mu_0\lambda I}{4\pi^2}\hat{\boldsymbol{z}}\int_a^b \frac{1}{s^2}l2\pi s\mathrm{d}s = \frac{\mu_0\lambda Il}{2\pi}\ln(b/a)\hat{\boldsymbol{z}}$$

这是一个令人惊讶的结果。导线并没有运动，电场和磁场也是静态的，然而我们被告知系统具有动量！直觉告诉我们，这并不是全部。实际上只要局域系统的质心保持不动，它的总动量肯定为零。在这个例子中，实际上还存在“隐藏的”由于电荷流动所引起的机械动量，它正好抵消了电磁场的动量。但是找到**隐藏动量**并不是一件容易的事，事实上它是一个相对论效应，我们将在第 12 章讨论(例题 12.12)。

假设现在我们增大电阻，这样电流就会减小。变化的磁场会诱发一个电场(式(7.19))：

$$\boldsymbol{E} = \left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\ln s + K\right]\hat{\boldsymbol{z}}$$

这个电场会对内外导线上的电荷施加一个作用力：

$$\boldsymbol{F} = \lambda l\left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\ln a + K\right]\hat{\boldsymbol{z}} - \lambda l\left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\ln b + K\right]\hat{\boldsymbol{z}} = -\frac{\mu_0\lambda l}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\ln(b/a)\hat{\boldsymbol{z}}$$

当电流减小到零时，电磁场传给导线的总动量为

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{mech}} = \int \boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \frac{\mu_0\lambda Il}{2\pi}\ln(b/a)\hat{\boldsymbol{z}}$$

这正是之前储存在电磁场中的动量(导线并不会产生反冲，因为会有大小相等、方向相反的随着电流减小而消失的隐藏动量传递给导线)。

习题 8.5　考虑一个无限大平板电容器，下板面($z = -d/2$)电荷面密度为 $-\sigma$，上板面($z = +d/2$)电荷面密度为 $+\sigma$。

(a) 求两板之间的电磁场应力张量的九个分量。将结果写成一个 3×3 矩阵的形式。

$$\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

(b) 利用式(8.22)求作用在上板面单位面积上的力。同式(2.51)比较。

(c) 求单位时间内穿过 xy 平面单位面积的动量。(或者是两板之间的任意一个平行于板面的平面)

(d) 吸收这些动量的极板会产生反冲(除非有一个非电磁作用力维持平板不动)。求上半板单位面积受到的冲力。同(b)的结果作比较。[注意：这并非一个其他的力，而仅是用不同的方法计算相同的力——在(b)中我们用力学定律求解，(d)中用动量守恒求解。]

习题 8.6 如图 8.6 所示，一个带电平行板电容器(板间有均匀电场 $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{z}}$)放置在均匀磁场 $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{x}}$ 中。[一]

(a) 求两板之间的电磁动量。

(b) 用一个具有电阻的导线连接两平板，沿着 z 轴方向，电容器开始缓慢放电。导线中的电流会受到磁力；求放电过程中系统受到的总冲量?

(c) 代替减弱电场(就像(b)中所做的那样)，假定我们缓慢减小磁场。这样会产生一个法拉第电场，它将会对平板施加一个作用力。再次验证整个过程中对系统施加的总冲量等于原来储存在电磁场中的动量。

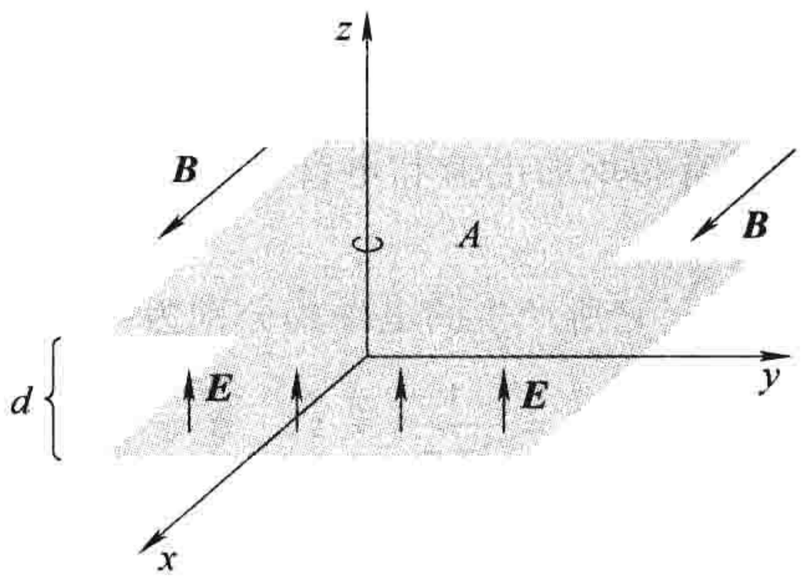


图 8.6

8.2.4 角动量

到现在为止，电磁场具有了自己的性质(一开始它们只是作为电荷间相互作用的中介)。它们具有能量密度(式(8.13))

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) \tag{8.32}$$

也具有动量密度(式(8.30))

$$\mathcal{P}_{em} = \varepsilon_0\mu_0 \boldsymbol{S} = \varepsilon_0(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) \tag{8.33}$$

由此角动量密度为

$$\mathcal{l}_{em} = \boldsymbol{r}\times\mathcal{P}_{em} = \varepsilon_0[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})] \tag{8.34}$$

即使是理想的静场也可以具有动量和角动量，只要 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 不为零，并且只有当这些场的作用考虑在内时经典的守恒定律才能得以保持。

例题 8.4

设想有一个半径为 R 的长螺线管线圈，单位长度绕有 n 匝，载有电流 I。有两个长为 l 的圆柱形壳管与螺线管同轴，螺线管内的壳管半径为 a，表面均匀带有电荷 $+Q$。螺线管外的壳管半径为 b，均匀带有电荷 $-Q$(见图 8.7，设 $l >> b$)。当螺线管中电流逐渐减小时，圆柱形壳管开始旋转，就像我们在例题 7.8 中见到的一样。问：这些角动量来自哪里?[二]

解： 这些角动量之前储存在电磁场里。在电流变为零之前，在两管层之间存在电场

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{1}{s}\hat{\boldsymbol{s}} \quad (a < s < b)$$

在螺线管内存在磁场

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 nI\hat{\boldsymbol{z}} \quad (s < R)$$

因此，在 $a < s < R$ 区域中动量密度(式(8.33))为

$$\mathcal{P}_{em} = -\frac{\mu_0 nIQ}{2\pi ls}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

角动量密度为

[一] 见 F. S. Johnson, B. L. Cragin, R. R. Hodges, Am. J. Phys. 62. 33(1994)。

[二] 这是“Feynman 盘佯谬”变形(R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands 著. *The Feynman Lectures*, vol2, pp. 17-5 (Reading, Mass: Addison-Wesley, 1964)，由 F. L. Boos, Jr. (Am. J. Phys. 52, 756(1984))提出。R. H. Romer 早先提出过一个相似的例子(Am. J. Phys. 34, 772(1996)). 进一步的文献，参阅 T. - C. E. Ma, Am. J. Phys. 54, 949(1986)。

$$\boldsymbol{\ell}_{\text{em}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\wp}_{\text{em}} = -\frac{\mu_0 nIQ}{2\pi l}\hat{\boldsymbol{z}}$$

如结果所示，这是一个常量。用它乘以体积 $\pi(R^2 - a^2)l$，我们得到电磁场所存储的总角动量：

$$\boldsymbol{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{2}\mu_0 nIQ(R^2 - a^2)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{8.35}$$

当减小电流时，根据法拉第定律，变化的磁场产生一个环绕的电场：

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{s}\hat{\boldsymbol{\phi}}, & (s > R) \\ -\dfrac{1}{2}\mu_0 n \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} s\hat{\boldsymbol{\phi}}, & (s < R) \end{cases}$$

因而，作用在外壳管的力矩为

$$\boldsymbol{N}_b = \boldsymbol{r} \times (-Q\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\mu_0 nQR^2 \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}}$$

它使外壳管产生角动量

$$\boldsymbol{L}_b = \frac{1}{2}\mu_0 nQR^2\hat{\boldsymbol{z}}\int_I^0 \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\mu_0 nIQR^2\hat{\boldsymbol{z}}$$

类似地，作用在内壳管上的力矩为

$$\boldsymbol{N}_a = -\frac{1}{2}\mu_0 nQa^2 \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}}$$

产生的角动量为

$$\boldsymbol{L}_a = \frac{1}{2}\mu_0 nIQa^2\hat{\boldsymbol{z}}$$

所以 $\boldsymbol{L}_{\text{em}} = \boldsymbol{L}_a + \boldsymbol{L}_b$ 总是成立。电磁场失去的角动量刚好等于内外壳管获得的角动量，（电磁场加上物质的）总角动量守恒。

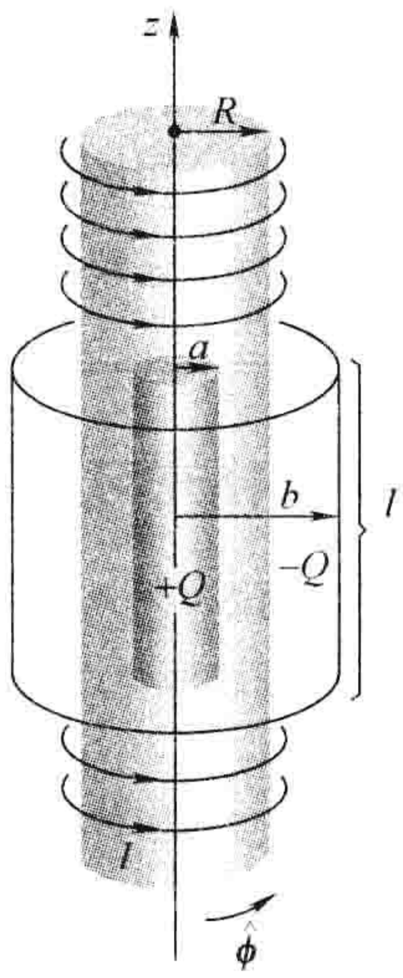


图　8.7

顺便指出，在某种程度上，角动量的问题比类似的动量问题（例题 8.3）更清晰，因为这里没有“隐藏的”角动量来补偿电磁场的角动量，当电磁场消失之后，两壳层确实开始旋转。如果一个局域系统没有移动，那么它的总动量一定为零，[㊀]但是对于角动量并没有相应的理论。在习题 8.12 中，你会看到一个优美的例子，没有任何东西移动——甚至没有电流——但是角动量却不为零。

习题 8.7　在例题 8.4 中假设代替减小磁场（即减小电流 I），我们来减小电场，在两壳管之间接一个弱导电[㊁]的径向辐条电阻（我们在螺线管中开一个狭缝，以保证两壳层可以自由旋转）。由作用在辐条中电流上的磁力，求整个放电过程中，传递给壳管的总角动量（注意：内外壳层被连接在一起，一起旋转）。同之前存储在电磁场中的总角动量式（8.35）作比较。（注意：在两个例子中，角动量从电磁场传递给壳管的物理机理完全不同，在例题 8.4 中起作用的是法拉第定律，在本题中，是洛仑兹力定律。）

！ **习题 8.8**[㊂]　设想一个半径为 R 的均匀磁化铁球，带有电荷 Q 和磁矩 $\boldsymbol{M} = M\hat{\boldsymbol{z}}$。铁球开始时处于静止。

（a）计算存储在电磁场中的角动量。

（b）假设该球被逐渐（均匀）去磁（或许加热到居里温度以上）。用法拉第定律确定感应电场，求出这个

㊀ S. Coleman, J. H. van Vleck, *Phys. Rev.* 171, 1370(1968)。

㊁ 在例题 8.4 中，我们很慢地减小电流，保持准静态；这里，我们很慢地减小电场，使位移电流可以忽略。

㊂ 这个版本的 Feynman 盘佯谬是由 N. L. Sharma (Am. J. Phys. 56. 420 (1988)) 提出的；E. M. Pugh 和 G. E. Pugh, Am. J. Phys. 35, 153(1967)及 R. H. Romer, Am. J. Phys. 35, 445(1967)，分析过类似的模型。

电场作用在球体上的力矩，求出在整个去磁过程中传递给球体的总角动量。

（c）如果代替去磁，我们在球体北极连接一个接地导线使球体放电。假设球面上电流的流动使电荷密度保持均匀。用洛伦兹力定律确定作用在球上的力矩，并且计算整个放电过程中传递给球的力矩。（球面处的磁场并不连续，这有影响吗?）[答案：$\frac{2}{9}\mu_0 MQR^2$]

第 8 章补充习题

习题 8.9[一] 有一个非常长的半径为 a 的螺线管线圈，单位长度绕有 n 砸，载有电流 I_s。另一半径 $b >> a$的圆线框与之同轴，线框电阻为 R。当螺线管中电流减小时，线框中产生感应电流 I_r。

（a）作为 dI_s/dt 的函数，计算感应电流 I_r。

（b）向线框传输的功率($I_r^2 R$)必然来自螺线管。由计算螺线管表面的坡印廷矢量证实这一点，（电场由螺线管内变化的磁场产生，磁场由线框中的感应电流产生）对螺线管整个表面作积分验证它与总功率相等。

习题 8.10[二] 半径为 R 的球体带有均匀电极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 和磁化强度 $\boldsymbol{M}$，（并不一定在相同方向）。求它所产生的电磁场具有的角动量。[答案：$(4/9)\pi\mu_0 R^3(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{P})$]

习题 8.11[三] 设想电子是一个均匀带电的球壳，总电荷量为 e，球壳半径为 R，自旋角速度为 ω。

（a）计算电磁场所具有的总能量。

（b）计算电磁场所具有的总角动量。

（c）根据爱因斯坦质能方程($E = mc^2$)，存储在电磁场总的能量对电子的质量也有贡献。

洛伦兹和一些人推测，电子的完整质量可用这种方式解释：$U_{em} = m_e c^2$。更进一步，假设电子的自旋角动量完全归于电磁场：$L_{em} = \hbar/2$。在这两个假设下，确定电子的半径和角速度。它们的乘积 ωR 等于什么？这种经典模型有意义吗？

习题 8.12[四] 假设你有一个电荷 q_e 和一个磁单极子 q_m。电荷产生的电场为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_e}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

磁荷产生的磁场为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

求电磁场所具有的总角动量，设两荷相距为 d[答案：$(\mu_0/4\pi)q_e q_m$。][五]

习题 8.13 Hope 学院的 Paul De Young，指出在例题 8.4 中因为两个壳层在转动（比如说，角速度为 ω_a，ω_b），实际上，即使是在螺线管中电流减小到零时，还有一个剩余磁场，因此磁场还会有剩余的角动量。如果壳管非常重，这种修正可以忽略，不过假如不作这种假设，会更加有趣。

（a）计算最后的电磁场中的角动量（作为 ω_a 和 ω_b 的函数）。

（b）当壳管开始转动时，它们变化的磁场会产生一个额外的沿方位角方向的电场，这样反过来会对壳管有一个附加力矩，求出相应的角动量，同（a）中结果作比较。[答案：$\mu_0 Q^2\omega_b(b^2 - a^2)/4\pi l$]

㈠ 更进一步的讨论，参见 M. A. Heald，Am. J. Phys. 56，540(1988)。

㈡ 更有趣的讨论可参阅 R. H. Romer，Am. J. Phys. 63，777(1995)。

㈢ 参考 J. Higbie，Am. J. Phys. 56，378(1988)。

㈣ 这个系统被称为 **Thomson's dipole**。更多讨论参考 I. Adawi，Am. J. Phys. 44，762(1976)，Phys. Rev. D31，3301(1985)，和 K. R. Brownstein，Am. J. Phys. 57，420(1989)。

㈤ 注意，这个结果与电荷之间的距离 d 并没有关系(!)；它从 q_e 指向 q_m。在量子力学中，角动量为半整数乘以 $\hbar$，这个结果说明，如果存在磁单极子，电荷和磁荷一定是量子化的：$\mu_0 q_e q_m/(4\pi) = n\hbar/2$，$n = 1, 2, 3, \cdots$，这由狄拉克在 1931 年首先提出。如果宇宙中存在磁单极子，就能“解释”为什么电荷为分立值。

习题 8.14㊀　距离无限长螺线管(半径为 R，单位长度绕有 n 匝，电流为 I)轴线 $a > R$ 处有一个点电荷 q。求出电磁场中的动量和角动量(设 q 在 x 轴上，螺线管沿 z 轴。将螺线管视为一个绝缘体，这样就不用考虑螺线管表面的感生电荷)。[答案：$\boldsymbol{p}_{\mathrm{em}} = (\mu_0 qnIR^2/2a)\hat{\boldsymbol{y}}$；$\boldsymbol{L}_{\mathrm{em}} = 0$]

习题 8.15㊁　(a)继续 8.1.2 小节的讨论，从式(8.6)开始，并把 $\boldsymbol{J}$ 替换为 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$。证明坡印廷矢量将会变为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

电磁场能量密度的变化率为

$$\frac{\partial u_{\mathrm{em}}}{\partial t} = \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

对于线性介质，证明

$$u_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H})$$

(b) 用同样的方法，重新讨论 8.2.2 小节，从式(8.15)开始，用 ρ_{f} 和 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$ 替换 ρ 和 $\boldsymbol{J}$。不用去费力建立麦克斯韦应力张量，证明动量密度为

$$\wp = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}$$

㊀　相关问题和进一步讨论见 F. S. Johnson，B. L. Cragin，R. R. Hodges，Am. J. Phys. 62，33(1994)。

㊁　这个问题由华盛顿大学的 David Thouless 提出。参考 4.4.3 小节，更进一步理解这里“能量”的意思。

第9章　电　磁　波

9.1　一维波

9.1.1　波方程

什么是“波”？我想我不能给你一个完全满意的答案——这个概念本身有些模糊——但这里给出一个解释作为对它理解的开始：*波是连续介质的一个扰动并以固定的形状和一定的速度传播*。我必须立刻加一些限制：在吸收存在的情形，波在传播中会消失；如果介质有色散，不同频率波传播的速度会不同；在二维或三维空间，当波向外传播时，它的幅度会减小；另外，驻波当然根本就不传播。这些限制是细节，让我们从最简单的情形开始：波形固定，波速不变(见图9.1)。

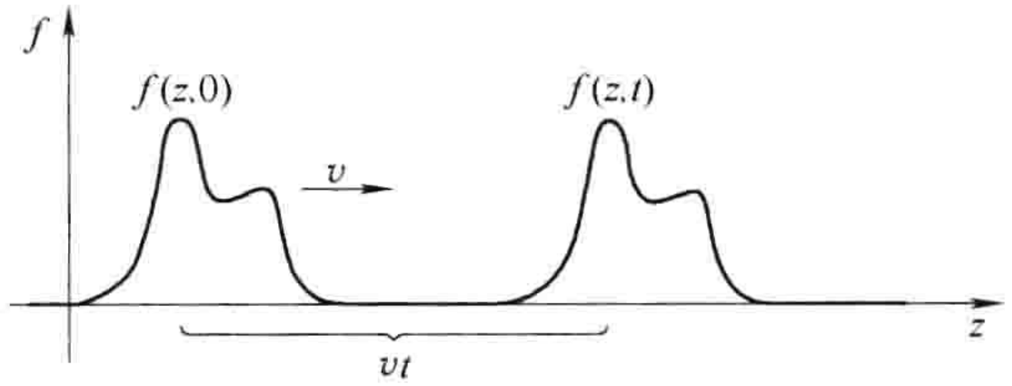


图　9.1

怎样从数学上表示这样一个波？图9.1中画出了波在两个不同时刻的情形：$t=0$ 时刻及稍后时刻 t——波形上的每一点简单地向右移动了一个量 vt，这里 v 是波速。这个波也许是由拉紧弦的一端的振动产生的。以 $f(z,\ t)$ 表示弦上 z 点处在时刻 t 的位移。如果弦的波形在初始时刻为 $g(z)\equiv f(z,\ 0)$，以后的波形 $f(z,\ t)$ 是什么？显然，在以后时刻 t，z 点处弦的位移，与 $t=0$ 时刻，在 z 点左边相距 vt 处(即在 $z-vt$ 处)的位移相同：

$$f(z,t)\ =\ f(z-vt,0)\ =\ g(z-vt) \tag{9.1}$$

这个表示(从数学上)给出了波运动的本质。它告诉我们函数 $f(z,\ t)$ 可能依赖过去的 z 和 t，事实上，它以一个很特别的组合 $(z-vt)$ 依赖它们。如果是这样，函数 $f(z,\ t)$ 就表示在 z 方向以一固定形状和速度 v 传播的波。如果 A 和 b 是常数(具有适当的单位)，下面这些式子

$$f_1(z,t)\ =\ Ae^{-b(z-vt)^2},\ f_2(z,t)\ =\ A\sin[b(z-vt)],\ f_3(z,t)\ =\ \frac{A}{b(z-vt)^2+1}$$

都代表波(当然，有不同形状)，但

$$f_4(z,t)\ =\ Ae^{-b(bz^3+vt)}\quad 和\quad f_5(z,t)\ =\ A\sin(bz)\cos(bvt)^3$$

不是波。

为何拉紧的弦可以传播波？事实上，这遵从牛顿第二定律。想象一个张力为 T 的长弦，它在横向上偏离平衡位置，在区间 z 和 $z+\Delta z$(见图9.2)上净横向力为

$$\Delta F\ =\ T\sin\theta'\ -\ T\sin\theta$$

这里 θ' 和 θ 分别是弦和 z 方向在 $z+\Delta z$ 点和 z 点所夹的角。假如弦的形变不太大，这些角度会很小(图中显然被放大了)，我们可以用正切函数 tan 代替正弦函数 sin，

$$\Delta F\ \cong\ T(\tan\theta'\ -\ \tan\theta)\ =\ T\left(\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z+\Delta z}\ -\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z}\right)\cong\ T\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\Delta z$$

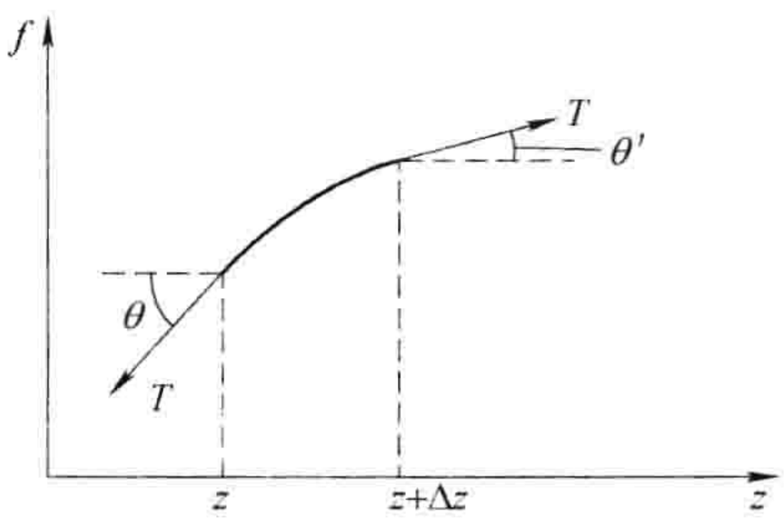


图　9.2

如果单位长度的质量是 μ，由牛顿第二定律得

$$\Delta F = \mu(\Delta z)\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

所以有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

显然，在弦上的小的扰动满足方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}} \tag{9.2}$$

这里 v（我们后面会看到它表示波的传播速度）为

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{9.3}$$

式(9.2)称为(经典)**波方程**，具有下面形式的函数都是它的解

$$f(z,t) = g(z - vt) \tag{9.4}$$

(即所有函数以特定的组合 $u \equiv z - vt$ 依赖变量 z 和 t)，而我们刚刚知道这个函数表示波在 z 方向以速度 v 传播。由式(9.4)可得

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}$$

和

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}u^2}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}u^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -v\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}\right) = -v\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}u^2}\frac{\partial u}{\partial t} = v^2\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}u^2}$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

证毕。

注意，$g(u)$ 可以是任何(可微)函数。如果扰动在传播中不改变形状，它就满足波方程。

但是具有形式 $g(z - vt)$ 的函数不是唯一的解。波方程包含 v 的二次方，因此通过简单地改变速度的符号我们可得到另一类解：

$$f(z,t) = h(z + vt) \tag{9.5}$$

这当然代表一个沿着负 z 的方向传播的波，这个解(从物理上看)也是合理的。让人惊奇的是波方程最一般的解是一个向右和一个向左传播的两个波之和：

$$f(z,t) = g(z - vt) + h(z + vt) \tag{9.6}$$

(注意波方程是线性的：任何两个解之和仍是方程的解。)波方程的每一个解都可表示成这种形式。

如同简单的谐振子方程一样，波方程在物理中具有普遍性。如果存在振动，就需要用到谐振子方程(至少对小振动的情形)。同样，如果存在波动(不论是在力学、声学、光学或海洋学方面)，就要用到波方程(可能有小的修改)。

习题 9.1　由直接微分，检验上文中的函数 f_1，f_2 和 f_3 满足波方程，f_4 和 f_5 不满足。

习题 9.2　证明**驻波** $f(z,\ t) = A\sin(kz)\cos(kvt)$ 满足波方程。把它表示成一个向左和一个向右传播的

两个波之和(式(9.6))。

9.1.2 正弦波

(i) **术语**。 在所有的波的形式中，正弦曲线

$$f(z,t) = A\cos[k(z - vt) + \delta] \tag{9.7}$$

是最熟悉的形式。图 9.3 画出了 $t=0$ 时刻的这个函数。A 是波的**振幅**(它取正值，代表距平衡位置的最大位移)。余弦函数的宗量称为**相位**，δ 是**常数相因子**(显然，你可把 δ 加上任何 2π 整数倍而不改变 $f(z,t)$，通常在 $0 \leqslant \delta \leqslant 2\pi$ 内取值。)注意，在 $z = vt - \delta/k$，相是零，这称为“中心极大”。假如 $\delta = 0$，中心极大在 $t=0$ 时通过原点。更一般的，δ/k 是中心极大(所以也是整个波)“延迟”的距离。最后，k 称为**波数**，它与波长 λ 通过下面的方程相联系

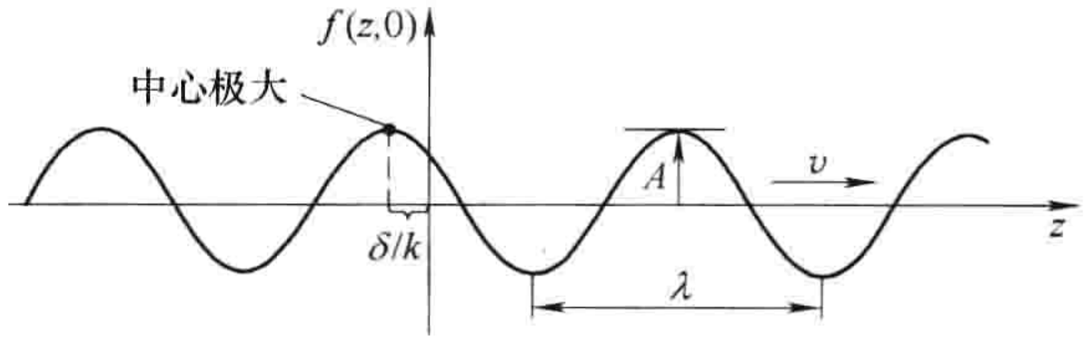


图 9.3

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{9.8}$$

当 z 前进 $2\pi/k$，余弦函数完成一个周期。

随着时间的流逝，整列波向右以速度 v 前进。在任何固定点 z，弦上下振动，在一个周期

$$T = \frac{2\pi}{kv} \tag{9.9}$$

内完成一次循环。**频率** ν(单位时间内振动的次数)是

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{kv}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \tag{9.10}$$

对于我们的目的，一个更方便的量是**角频率** ω，这样称谓是因为它类似于匀速圆周运动中表示的单位时间内扫过的弧度数：

$$\omega = 2\pi\nu = kv \tag{9.11}$$

通常情况下，用 ω 比用 v 写出的正弦波更好：

$$f(z,t) = A\cos(kz - \omega t + \delta) \tag{9.12}$$

一个波数为 k，角频率为 ω，向左传播的正弦波可写成

$$f(z,t) = A\cos(kz + \omega t - \delta) \tag{9.13}$$

常数相因子的符号的选择与前面的一致，即 δ/k 表示波延迟的距离(因为波现在向“左”传播，延迟意思是向“右”移动)。在 $t=0$ 时刻，波如图 9.4 所示。因为余弦函数是一个偶函数，我们因此可把式(9.13)写为

$$f(z,t) = A\cos(-kz - \omega t + \delta) \tag{9.14}$$

与式(9.12)比较可以看出，我们仅把 k 的符号改变就可得到一个具有同样的振幅、常数相因子、频率和波长，但传播方向相反的波。

(ii) **复数表示**。考虑到欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{9.15}$$

正弦波(式(9.12))可写成

$$f(z,t) = \mathrm{Re}[Ae^{i(kz-\omega t+\delta)}] \tag{9.16}$$

式中，$\mathrm{Re}(\xi)$ 表示复数 ξ 的实部。这可使我们引进**复波函数**

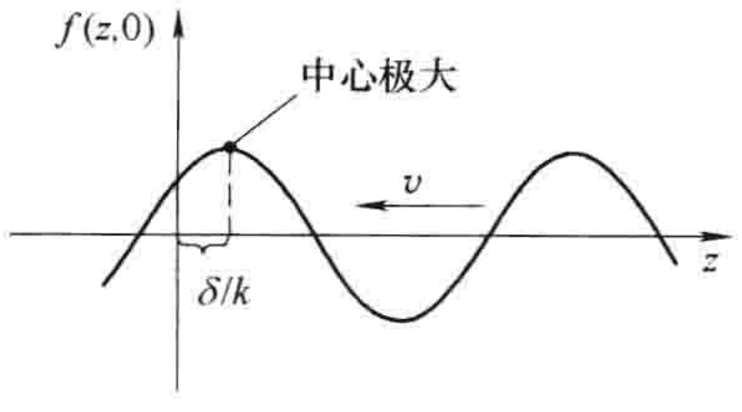


图 9.4

$$\tilde{f}(z,t) \equiv \tilde{A}\, e^{i(kz-\omega t)} \tag{9.17}$$

式中，**复振幅** $\tilde{A} \equiv Ae^{i\delta}$ 把常数相因子吸收其中。实际的波函数是 $\tilde{f}$ 的实部：

$$f(z,t) = \mathrm{Re}[\tilde{f}(z,t)] \tag{9.18}$$

如果知道了 $\tilde{f}$，很容易求出 f。复数表示的优点在于指数函数比正弦和余弦函数更容易运算处理。

例题 9.1

假设把两个正弦波组合在一起：

$$f_3 = f_1 + f_2 = \mathrm{Re}(\tilde{f}_1) + \mathrm{Re}(\tilde{f}_2) = \mathrm{Re}(\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) = \mathrm{Re}(\tilde{f}_3),$$

只需要把对应的复波函数相加，然后取实部。特别的，如果它们有相同的频率和波数，

$$\tilde{f}_3 = \tilde{A}_1 e^{i(kz-\omega t)} + \tilde{A}_2 e^{i(kz-\omega t)} = \tilde{A}_3 e^{i(kz-\omega t)}$$

式中

$$\tilde{A}_3 = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2, \text{ 或 } \quad A_3 e^{i\delta_3} = A_1 e^{i\delta_1} + A_2 e^{i\delta_2} \tag{9.19}$$

显然，只需把(复)振幅相加。组合的波有相同的频率和波长，

$$f_3(z,t) = A_3 \cos(kz - \omega t + \delta_3)$$

由式(9.19)(习题 9.3)可很容易求出 A_3 和 δ_3。试着不利用复数表示求出它们，你将发现通过代数运算是很复杂的。

(iii) **正弦波函数的线性叠加**。虽然正弦函数式(9.17)是个非常特殊的波形，而事实上任何波都可以表示成它的线性叠加：

$$\tilde{f}(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k) e^{i(kz-\omega t)} \mathrm{d}k \tag{9.20}$$

这里 ω 是 k 的函数(式(9.11))。k 允许取负值是为了包括两个方向。[⊖]

$\tilde{A}(k)$的表示可由初始条件 $f(z, 0)$ 和 $\dot{f}(z, 0)$ 利用傅里叶变换理论得到(参看习题 9.32)，这里的细节不是我们关心的。重要的是所有的波都可写成正弦波的组合。所以你知道了正弦波的行为，原则上你就知道了任何波的行为。因此，从现在开始我们只关心正弦波。

习题 9.3　利用式(9.19)和 A_1，A_2，δ_1 及 δ_2 确定 A_3 和 δ_3。

习题 9.4　通过分离变量，从波方程直接得到式(9.20)。

9.1.3　边界条件：反射与透射

到现在为止，我们假定弦是无限长的——或者说足够长，我们不用担心波到达端点时发生什么。事实上发生什么取决于端点是如何连接的——即波被施加的具体的边界条件。例如，假如弦简单地系在第二个弦上，而两个弦的张力 T 一样，但假定单位长度的质量 μ 不同，则波速 v_1 和 v_2 不同(记住，$v = \sqrt{(T/\mu)}$)。为了便利，设节点在 $z=0$ 处，**入射波**

$$\tilde{f}_I(z,t) = \tilde{A}_I e^{i(k_1 z-\omega t)}, \quad (z < 0) \tag{9.21}$$

⊖ 这不意味着 λ 和 ω 是负值——波长和频率永远是正的。如果我们取负的波数，式(9.8)和式(9.11)就要写成 $\lambda = 2\pi/|k|$ 和 $\omega = |k| v$。

从左边入射，产生的一个反射波

$$\tilde{f}_{\mathrm{R}}(z,t) = \tilde{A}_{\mathrm{R}} e^{\mathrm{i}(-k_1 z-\omega t)}, (z<0) \tag{9.22}$$

沿弦 1 返回(故在 k_1 前有负号)，以及一个**透射波**

$$\tilde{f}_{\mathrm{T}}(z,t) = \tilde{A}_{\mathrm{T}} e^{\mathrm{i}(k_2 z-\omega t)}, (z>0) \tag{9.23}$$

沿弦 2 继续传播。

这个入射波 $f_1(z, t)$是正弦振动，原则上它向后扩展至 $z=-\infty$，在遇到节点前均是如此。f_{R} 和 f_{T} 也是这样(当然，对于后者，振动扩展至 $z=+\infty$)。体系的各个部分振动角频率均为 ω(这个角频率由在 $z=-\infty$ 处最初拨动弦的那个人确定)。因为在两个弦上的波速不同，所以它们的波长和波数也不同：

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2} \tag{9.24}$$

当然，这个解有相当的人为因素——更进一步，入射和反射波在同一个无限长弦上反向传播，观察者将很难把它们分开。也许，你们也许更愿意考虑一个局域入射波——如图 9.5 所示的脉冲波。如果乐意，你可自行解出细节(习题 9.5)。这个方法的麻烦在于局域的脉冲不是真正的正弦函数。图 9.5 的波看起来像正弦函数，但它们不是：它们是正弦函数的一小部分，连接着一个完全不同的函数(即，零)。如同其他的波一样，它们可表示成正弦函数的线性叠加(式(9.20))，但要包括所有的频率和波长。如果你需要单一入射频率(像我们将要讨论的电磁波的情形)，你必须把你的波扩展到无穷远。实际中，假如你利用一个非常长的包含有许多振动的脉冲，它就接近于一个单一频率的波。

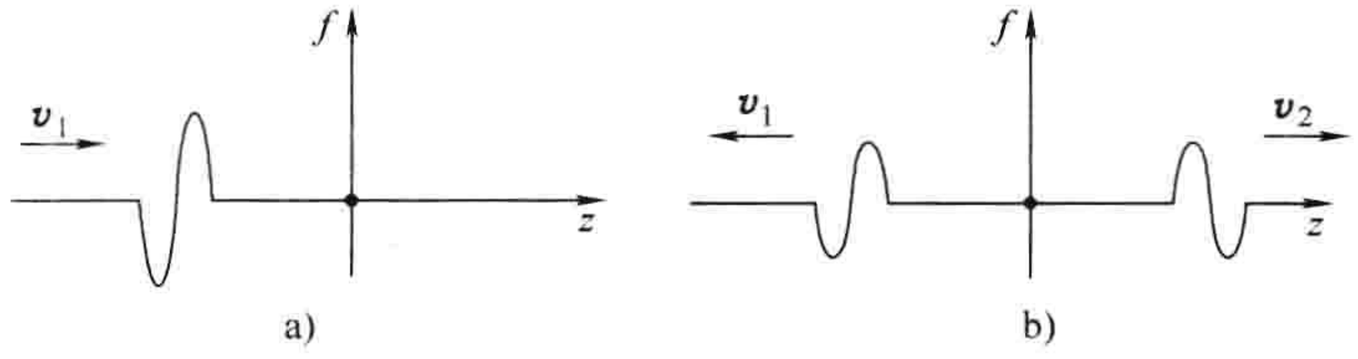


图 9.5

a）入射波 b）反射和透射波

对于一个正弦入射波，弦的净扰动是

$$\tilde{f}(z,t) = \begin{cases} \tilde{A}_{\mathrm{I}} e^{\mathrm{i}(k_1 z-\omega t)} + \tilde{A}_{\mathrm{R}} e^{\mathrm{i}(-k_1 z-\omega t)}, (z<0) \\ \tilde{A}_{\mathrm{T}} e^{\mathrm{i}(k_2 z-\omega t)}, (z>0) \end{cases} \tag{9.25}$$

在靠近连接点($z=0$)处，左边的位移($z=0^-$)必须与右边的位移($z=0^+$)相等，否则，两弦间会有一断点。从数学上讲，$f(z, t)$在 $z=0$ 处是连续的：

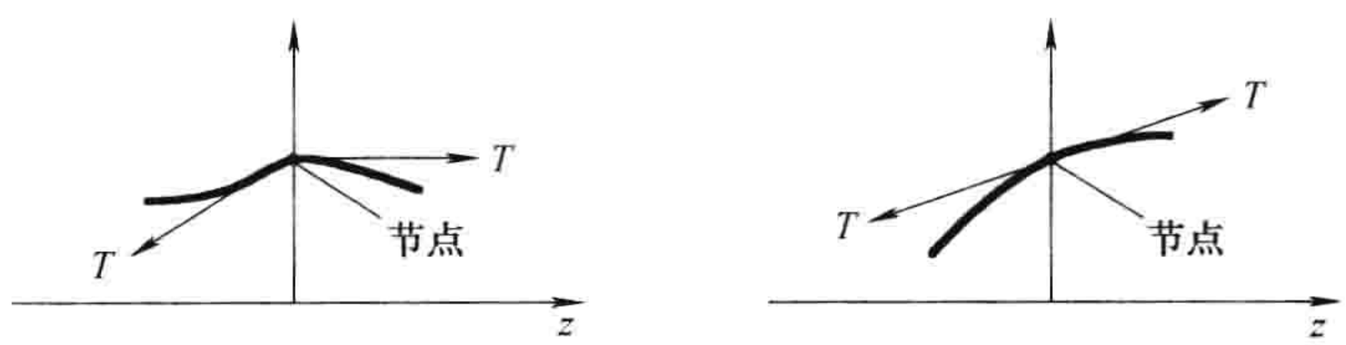
$$f(0^-,t) = f(0^+,t) \tag{9.26}$$

如果那个结点本身的质量可忽略，f 的导数也必须是连续的：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{0^-} = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{0^+} \tag{9.27}$$

否则在这个结点上会作用有一个净力，因此会产生一个无穷大的加速度(见图 9.6)。这些边界条件直接应用于实际的波函数 $f(z, t)$上。但是因为 $\tilde{f}$ 的虚部与实部的不同仅在于用正弦函数替换余弦函数(式(9.15))，因此，复波函数 $\tilde{f}(z,t)$ 遵从相同的边界条件：

$$\tilde{f}(0^-,t) = \tilde{f}(0^+,t), \quad \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\right|_{0-} = \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\right|_{0+} \tag{9.28}$$



a)　　b)

图　9.6

a）不连续斜率，力作用在结点　b）连续斜率，在结点上没有力

把这些边界条件应用到式(9.25)时，可用入射波的振幅($\tilde{A}_I$)确定出射波的振幅($\tilde{A}_R$和 $\tilde{A}_T$)：

$$\tilde{A}_I + \tilde{A}_R = \tilde{A}_T, \; k_1(\tilde{A}_I - \tilde{A}_R) = k_2\tilde{A}_T$$

由此可得

$$\tilde{A}_R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)\tilde{A}_I, \quad \tilde{A}_T = \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right)\tilde{A}_I \tag{9.29}$$

或用速度表示(式(9.24))：

$$\tilde{A}_R = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_2}\right)\tilde{A}_I, \quad \tilde{A}_T = \left(\frac{2v_2}{v_1 + v_2}\right)\tilde{A}_I \tag{9.30}$$

真实的振幅和相位间的关系可表示为

$$A_R e^{i\delta_R} = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right)A_I e^{i\delta_I}, \quad A_T e^{i\delta_T} = \left(\frac{2v_2}{v_1 + v_2}\right)A_I e^{i\delta_I} \tag{9.31}$$

如果第二个弦比第一个轻($\mu_2 < \mu_1$，故有 $v_2 > v_1$)，则所有三个波有相同的相位($\delta_R = \delta_T = \delta_I$)，出射波振幅为

$$A_R = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}\right)A_I, \quad A_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1}\right)A_I \tag{9.32}$$

如果第二个弦比第一个重($v_2 < v_1$)，反射波相位翻转 180°($\delta_R + \pi = \delta_T = \delta_I$)。换句话说，因为

$$\cos(-k_1 z - \omega t + \delta_I - \pi) = -\cos(-k_1 z - \omega t + \delta_I)$$

所以反射波“上下倒置”了。这种情况下振幅为

$$A_R = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_2 + v_1}\right)A_I, \quad A_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1}\right)A_I \tag{9.33}$$

特别是，如果第二个弦质量为无穷大——或者，等效地，如果第一个弦在端点被固定，

$$A_R = A_I, \quad A_T = 0$$

自然地，在这种情况下没有透射波——所有的波均被反射回去。

习题 9.5　假如沿弦 1 发出一个具有某种形状的入射波 $g_I(z - v_1 t)$。它产生一反射波 $h_R(z + v_1 t)$和透射波 $g_T(z - v_2 t)$。利用边界条件式(9.26)和式(9.27)，求出 h_R 和 g_T。

习题 9.6

(a) 对于两个施加有应力 T 并用质量为 m 的结点连接的弦，取代式(9.27)，写出其正确的边界条件。

(b) 对于结点的质量为 m，第二个弦无质量的情形，求出反射和透射波的振幅及相位。

习题 9.7　假如第二个弦处于某种粘滞介质中(如蜜糖)，这将施加一个与其横向速度成正比的阻力：

$$\Delta F_{\text{阻力}} = -\gamma \frac{\partial f}{\partial t}\Delta z$$

(a) 推导出修正的描述弦运动的波方程。

(b) 假设入射波振动角频率为 ω，求解该方程，即求形式如 $\tilde{f}(z,t) = e^{i\omega t}\tilde{F}(z)$ 的解。

(c) 证明这个波是**衰减的**(即随着 z 的增大，振幅减小)。求出用 γ，T，μ 和 ω 表示的特征穿透距离，在这个距离处，振幅为初始值的 $1/e$。

(d) 如果一个振幅为 A_1，相位为 $\delta_1 = 0$ 及角频率为 ω 的入射波从左边进入(弦 1)，求出反射波的振幅和相位。

9.1.4 偏振

拨动琴弦产生的波称为**横波**，因为弦的位移方向和波的传播方向垂直。如果弦有适当的弹性，通过对弦施加一个小拉力也可在弦上产生压缩波。压缩波在弦上很难看出，但如果用一个机灵鬼(一种螺旋弹簧玩具)实验，压缩波就相当明显(见图 9.7)。这种波称为**纵波**，因为偏离平衡位置的位移与波的传播方向一致。声波就是压缩空气的纵波；而电磁波，我们将会看到，是横波。

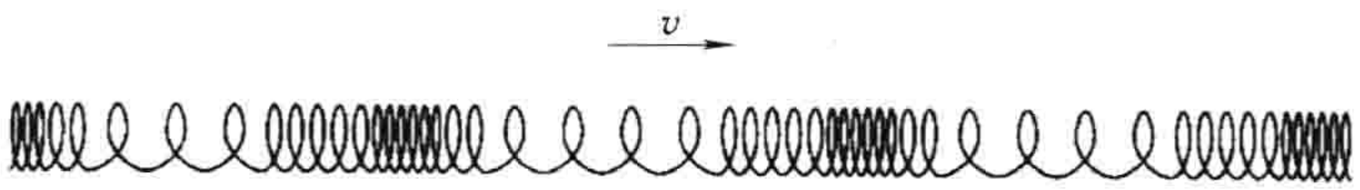


图 9.7

当然，垂直于任何直线传播方向有两个维数，故横波可有两个独立的**偏振态**：你可以上下拨动弦("垂直"偏振——见图 9.8a)，

$$\tilde{f}_v(z,t) = \tilde{A}\, e^{i(kz-\omega t)}\hat{x} \tag{9.34}$$

或者左右拨动弦("水平"偏振——见图 9.8b)，

$$\tilde{f}_h(z,t) = \tilde{A}\, e^{i(kz-\omega t)}\hat{y} \tag{9.35}$$

或在 xy 平面内沿任何其他方向(见图 9.8c)：

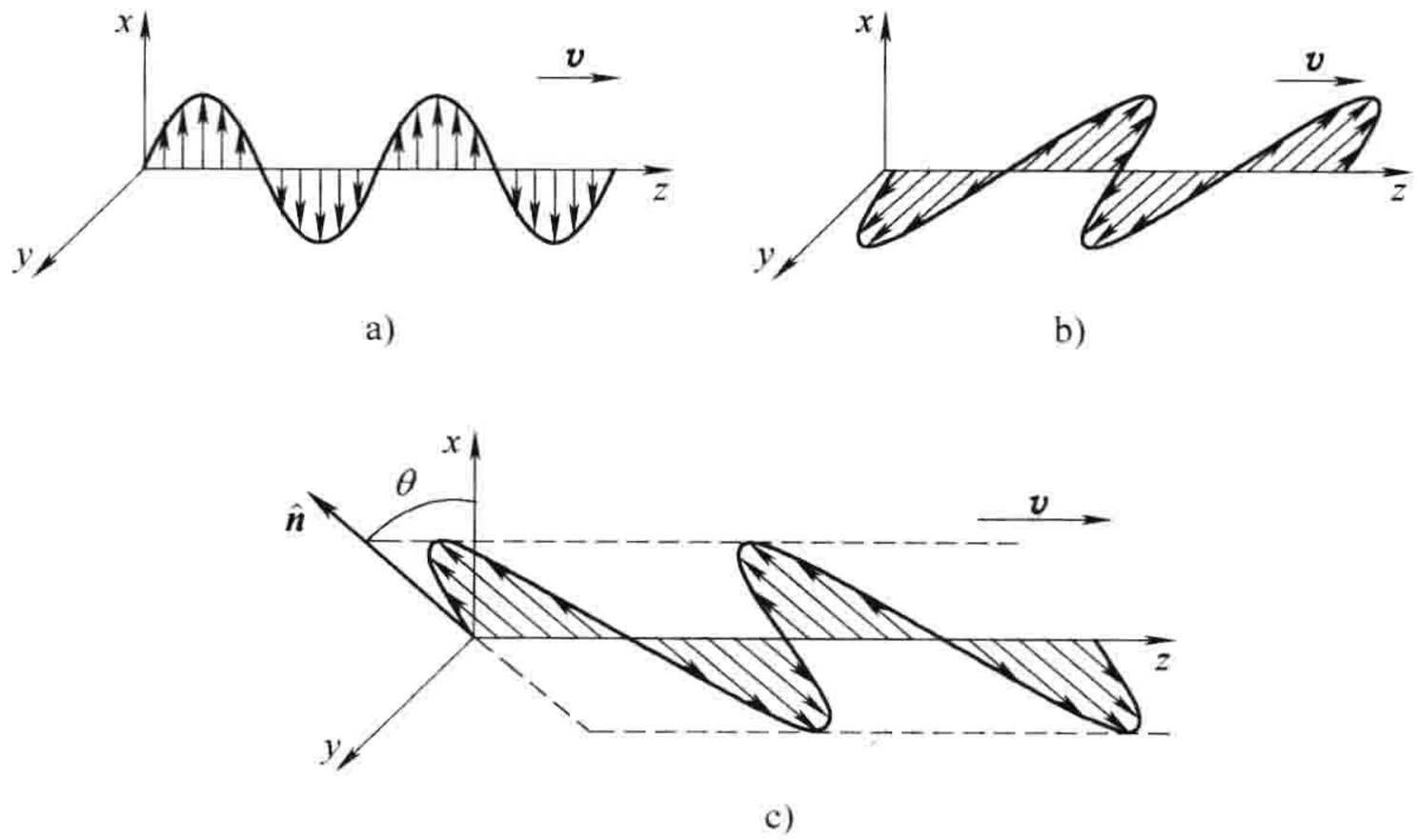


图 9.8

a) 垂直偏振 b) 水平偏振 c) 偏振矢量

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(z,t) = \tilde{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\hat{\boldsymbol{n}} \tag{9.36}$$

偏振矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 确定了振动平面。[⊖]因为波是横波，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 垂直于传播方向：

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} = 0 \tag{9.37}$$

利用偏振角 θ，有

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} \tag{9.38}$$

因此，图 9.8c 的波可认为是两个波的叠加——一个为水平偏振，另一个为垂直偏振：

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(z,t) = (\tilde{A}\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\hat{\boldsymbol{x}} + (\tilde{A}\sin\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\hat{\boldsymbol{y}} \tag{9.39}$$

习题 9.8 式(9.36)描述了在弦上的最一般的**线性**偏振波。线性(或“平面”)偏振(这样称是因为弦的位移平行于一个固定矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$)源于同相位的水平方向和垂直方向偏振波的叠加(式(9.39))。如果两分量振幅相同，但相位相差 90°(如，$\delta_{\mathrm{v}}=0$，$\delta_{\mathrm{h}}=90°$)，则形成一个圆偏振波。在这种情况下：

(a) 在一固定点 z，证明弦以 z 轴作一圆周运动。沿 z 轴负方向看，圆周运动是顺时针还是逆时针？怎样构造一个作其他圆周运动的波？(在光学中，顺时针运动称为**右旋圆偏振**，逆时针为**左旋圆偏振**)。

(b) 画出 $t=0$ 时弦的形状。

(c) 要产生一个圆偏振波，如何拨动弦？

9.2 真空中的电磁波

9.2.1 E 与 B 的波方程

在没有电荷和电流的空间，麦克斯韦方程为

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\ \nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0, \quad \text{(iii)}\ \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\&\text{(ii)}\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \quad \text{(iv)}\ \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{9.40}$$

它们组成了 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的相互关联的一阶偏微分方程组。利用对式(iii)和(iv)的旋度可把方程化成彼此独立的：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E} = \nabla\times\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \nabla^2\boldsymbol{B} = \nabla\times\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

$$= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{E}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

或者，因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ 和 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，有

$$\boxed{\nabla^2\boldsymbol{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}} \tag{9.41}$$

⊖ 注意，如果改变相位 180°，则总是相应地改变 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的正负符号，因为两者会改变波的符号。

这样，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的方程彼此独立了，但它们变成了二阶方程，这是把它们变成独立方程的代价。

在真空中，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的每个直角坐标分量满足**三维波方程**，

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

（除了 $\partial^2 f/\partial z^2$ 被更普遍的形式 $\nabla^2 f$ 替代外，这个方程与式(9.2)相同。）故麦克斯韦方程意味着真空中可以传播电磁波，传播速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s} \tag{9.42}$$

这与光的速度 c 完全一样。这个结论让人十分吃惊：也许光是电磁波。[一]当然这个结论在今天看来并不稀奇，但在麦克斯韦时代这个结论相当具有革命性！回顾 ε_0 和 μ_0 最初是如何引入理论中的：它们是库仑定律和毕奥-萨伐尔定律中的常数。我们在实验中测量它们，而实验中用到充电的通草小球、电池和导线——实验与光没有任何关系。但是，根据麦克斯韦理论你可以用这两个常数计算光速 c。注意麦克斯韦对安培定理的关键贡献（$\mu_0\varepsilon_0\partial \boldsymbol{E}/\partial t$），没有它波方程不会出现，也就没有光的电磁理论。

9.2.2 单色平面波

因为在 9.1.2 小节中提及的原因，我们把讨论重点放在频率为 ω 的正弦波。因在可见光范围内不同频率对应不同颜色，这些波称为**单色波**（见表 9.1）。进一步，假设波在 z 方向传播，不依赖于 x 或 y，它们称为**平面波**，[二]因为场在垂直于传播方向的平面上是均匀的（见图 9.9）。此时，我们对下述形式的场感兴趣：

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \tilde{\boldsymbol{E}}_0 e^{i(kz-\omega t)}, \quad \tilde{\boldsymbol{B}}(z,t) = \tilde{\boldsymbol{B}}_0 e^{i(kz-\omega t)} \tag{9.43}$$

式中，$\tilde{\boldsymbol{E}}_0$ 和 $\tilde{\boldsymbol{B}}_0$ 是（复）振幅（当然，物理的场是 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 的实部）。

表 9.1

电磁波谱

频率/Hz	类型	波长/m
10^{22}		10^{-13}
10^{21}	γ 射线	10^{-12}
10^{20}		10^{-11}
10^{19}		10^{-10}
10^{18}	X 射线	10^{-9}
10^{17}		10^{-8}
10^{16}	紫外线	10^{-7}
10^{15}	可见光	10^{-6}
10^{14}	红外线	10^{-5}
10^{13}		10^{-4}
10^{12}		10^{-3}

[一] 正如麦克斯韦本人所写的，“我们不可避免地得出结论，光是存在于介质中的横向波动，并产生电磁现象。”参看 Ivan Tolstoy, James Clerk Maxwell, A Biography (Chicago: University of Chicago Press, 1983)。

[二] 对球面波的讨论，参看 J. R. Reitz, F. J. Milford 和 R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 3rd ed., Sect. 17-5 (Reading, MA: Addison-Wesley, 1979)。或习题 9.33。当然，在一个足够小的区域，只要波长远小于波前的曲率半径，任何波本质上都是平面的。

（续）

电磁波谱		
频率/Hz	类型	波长/m
10^{11}		10^{-2}
10^{10}	微波	10^{-1}
10^{9}		1
10^{8}	电视，调频	10
10^{7}		10^{2}
10^{6}	调幅	10^{3}
10^{5}		10^{4}
10^{4}	无线电波	10^{5}
10^{3}		10^{6}

可见光范围		
频率/Hz	颜色	波长/m
1.0×10^{15}	近紫外	3.0×10^{-7}
7.5×10^{14}	波长最短的蓝色可见光	4.0×10^{-7}
6.5×10^{14}	蓝色	4.6×10^{-7}
5.6×10^{14}	绿色	5.4×10^{-7}
5.1×10^{14}	黄色	5.9×10^{-7}
4.9×10^{14}	橘色	6.1×10^{-7}
3.9×10^{14}	波长最长的红色可见光	7.6×10^{-7}
3.0×10^{14}	近红外	1.0×10^{-6}

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的波动方程(式(9.41))是从麦克斯韦方程推导出来的。然而，尽管(真空中的)麦克斯韦方程的每个解必须满足波动方程，但是反之并不成立。麦克斯韦方程对 $\tilde{\boldsymbol{E}}_0$ 和 $\tilde{\boldsymbol{B}}_0$ 施加了额外的限制，特别地，因 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ 和 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，有[⊖]

$$(\tilde{E}_0)_z = (\tilde{B}_0)_z = 0 \tag{9.44}$$

这表明电磁波是横波：电磁场垂直于传播方向。而且，法拉第定律，$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$，意味着电磁场振幅之间存在着关系，即：

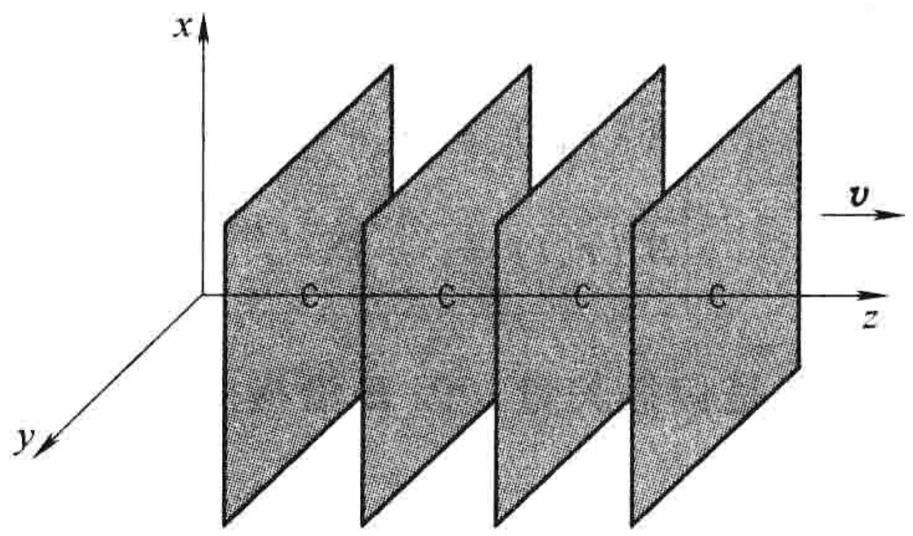


图　9.9

$$-k(E_0)_y = \omega(B_0)_x,\quad k(E_0)_x = \omega(B_0)_y \tag{9.45}$$

或更紧凑的形式

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_0 = \frac{k}{\omega}(\hat{z}\times\tilde{\boldsymbol{E}}_0) \tag{9.46}$$

显然，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同相位且相互垂直，它们的(实部)振幅有关系

$$B_0 = \frac{k}{\omega}E_0 = \frac{1}{c}E_0 \tag{9.47}$$

⊖ 因 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 的实部和虚部的不同之处仅在于把正弦函数变为余弦函数，故如果实部满足麦克斯韦方程，虚部也同样满足，因此 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 也满足麦克斯韦方程。

第四个麦克斯韦方程，$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 (\partial \boldsymbol{E}/\partial t)$，不产生独立的条件，它只是重复推出式(9.45)。

例题 9.2

如果 $\boldsymbol{E}$ 指向 x 轴，$\boldsymbol{B}$ 就指向 y 轴(式(9.46))：

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \tilde{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \hat{\boldsymbol{x}}, \quad \tilde{\boldsymbol{B}}(z,t) = \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \hat{\boldsymbol{y}}$$

或(取实部)

这是一个单色平面波的典型形式(见图 9.10)。作为整体，波被称为沿 x 方向偏振的(为方便起见，我们用 $\boldsymbol{E}$ 的方向来定义电磁波的偏振方向)。

$$\boldsymbol{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{B}(z,t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{\boldsymbol{y}} \tag{9.48}$$

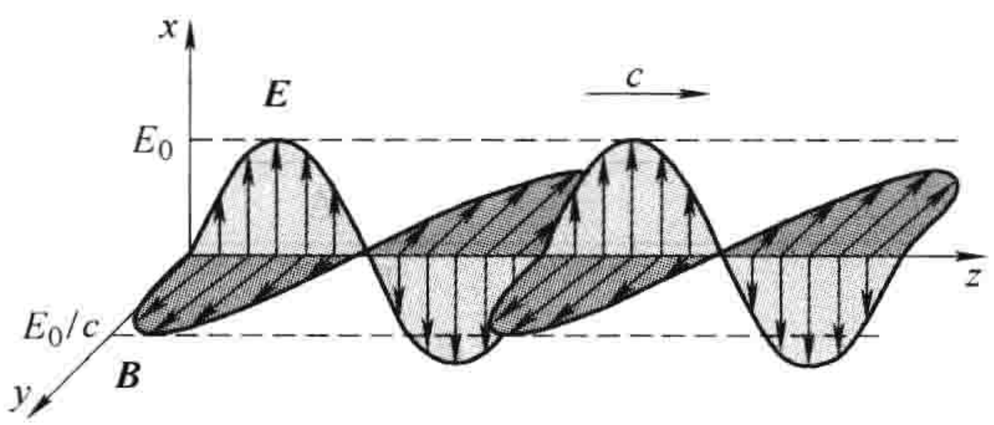


图 9.10

当然，z 方向并没有任何特殊性——我们很容易把单色平面波的传播方向推广到任何方向。引进**传播(或波)矢量**符号 $\boldsymbol{k}$，它指向传播方向，大小等于波数 k。更普遍地用标量积 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}$ 代替 kz(见图 9.11)，得到

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = \tilde{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \hat{\boldsymbol{n}},$$
$$\tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{n}}) = \frac{1}{c} \hat{\boldsymbol{k}} \times \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{9.49}$$

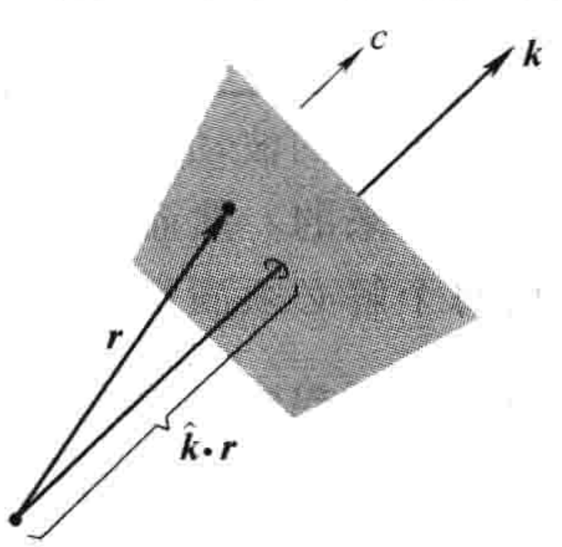


图 9.11

式中，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是偏振矢量。因 $\boldsymbol{E}$ 沿横向，

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = 0 \tag{9.50}$$

($\boldsymbol{B}$ 的横向性可从式(9.49)自动得出)。具有传播矢量 $\boldsymbol{k}$ 和偏振矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的一个单色平面波的实际的(实部)电场和磁场是

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \delta) \hat{\boldsymbol{n}} \tag{9.51}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \delta) (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{n}}) \tag{9.52}$$

习题 9.9 写出振幅为 E_0，频率为 ω，相位为零的一单色平面波的(实部)电场和磁场：(a)沿 x 负方向传播，偏振沿 z 方向。(b)传播沿原点至点(1，1，1)方向，偏振平行于 xy 平面。对每种情况画出波形并给出 $\boldsymbol{k}$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 在直角坐标系下的分量。

9.2.3 电磁波的能量与动量

根据式(8.13)，电磁场单位体积内储存的能量为

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) \tag{9.53}$$

对于单色平面波(式(9.48))

$$B^2 = \frac{1}{c^2}E^2 = \mu_0\varepsilon_0 E^2 \tag{9.54}$$

故电场和磁场的贡献相等:

$$u = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \tag{9.55}$$

当波传播时,它携带着能量一起传播。通过场传播的能流密度(单位时间通过单位面积上的能量)由坡印廷矢量给出(式(8.10))

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \tag{9.56}$$

对于在 z 方向上传播的单色平面波

$$\boldsymbol{S} = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta)\hat{\boldsymbol{z}} = cu\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.57}$$

注意,$\boldsymbol{S}$ 是能量密度(u)乘以波速($c\hat{\boldsymbol{z}}$)——这正是它的定义。对于在一段时间 Δt,通过面积为 A、传播距离为 $c\Delta t$ 的电磁场,其携带的能量为 $uAc\Delta t$。因此,单位时间内通过单位面积所传输的能量为 uc。

电磁场不仅有能量,还有动量。事实上,我们从式(8.30)知道电磁场的动量密度是

$$\wp = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{S} \tag{9.58}$$

对于单色平面波有

$$\wp = \frac{1}{c}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta)\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{1}{c}u\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.59}$$

对于光,波长(约 5×10^{-7}m)和周期(约 10^{-15}s)都很小,宏观测量会包含许多个周期。所以,一般我们不关心能量和动量密度以余弦函数二次方的形式的波动,我们关心的是平均值。在一个完整周期㊀内余弦函数二次方的平均值是 1/2,故有

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \tag{9.60}$$

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 \hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.61}$$

$$\langle \wp \rangle = \frac{1}{2c}\varepsilon_0 E_0^2 \hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.62}$$

这里用括号〈　〉表示对一个周期(或许多周期,如果你喜欢)的(时间)平均。通过单位面积传播的电磁波平均功率称为**电磁波的强度**:

$$I \equiv \langle S \rangle = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 \tag{9.63}$$

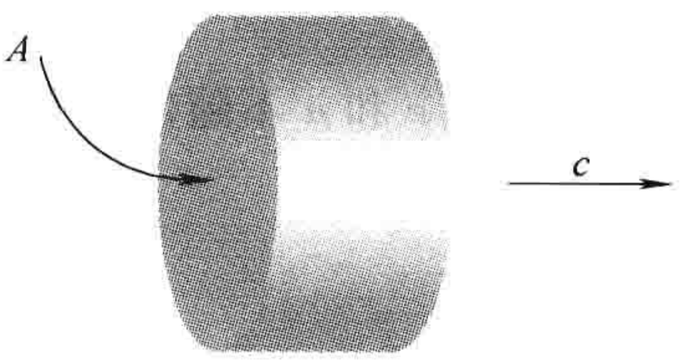


图　9.12

当光照射在一个物体上并被完全吸收时,光把它的动量传递给物体表面。在时间 Δt 内,传递的动量为(见图 9.12)$\Delta \boldsymbol{p} = (\wp)Ac\Delta t$,故**辐射压**(单位面积

㊀ 在进行计算时有个小技巧:$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$,在一个完整周期,$\sin^2\theta$ 的平均值等于 $\cos^2\theta$ 的平均值,故$\langle \sin^2 \rangle = \langle \cos^2 \rangle = 1/2$。更正规的是,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kz - 2\pi t/T + \delta)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

上的平均力)是

$$P = \frac{1}{A}\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c} \tag{9.64}$$

(对于一个完全反射的面，压强为上式的 2 倍，因为在这种情况下动量改变了方向而不是被吸收。)我们可以如下定性地考虑这个压强：电场(式(9.48))在 x 方向驱动电荷，磁场随后在它上施加一个沿 z 方向的力($q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$)。施加在表面上所有电荷的这种力产生压强。

习题 9.10 太阳光辐射到地球上的光波的强度约为 $1300\mathrm{W/m^2}$。如果阳光照射在完全吸收光的物体上，施加的压力是多少？如果是一个全反射的物体，情况如何？这个压强是大气压的多少分之一？

习题 9.11 在复数表示中，有一个聪明的方法计算乘积的时间平均。设 $f(\boldsymbol{r}, t) = A\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \delta_a)$ 和 $g(\boldsymbol{r}, t) = B\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \delta_b)$。证明 $\langle fg\rangle = (1/2)\mathrm{Re}(\tilde{f}\,\tilde{g}^{\,*})$，式中星号表示复共轭。[注意，这仅对两个波有相同的 $\boldsymbol{k}$ 和 ω 时成立，但它们可有不同的振幅和相位。]例如

$$\langle u\rangle = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(\varepsilon_0\tilde{\boldsymbol{E}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}^{\,*} + \frac{1}{\mu_0}\tilde{\boldsymbol{B}}\cdot\tilde{\boldsymbol{B}}^{\,*}\right) \text{和} \langle \boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(\tilde{\boldsymbol{E}}\times\tilde{\boldsymbol{B}}^{\,*})$$

习题 9.12 求出沿 z 方向传播和在 x 方向线性偏振的单色平面波(式(9.48))的麦克斯韦应力张量的所有元素。结果有意义吗？($\overleftrightarrow{T}$ 表示动量流密度。)在这种情况下，动量流密度和能流密度有何关系？

9.3 物质中的电磁波

9.3.1 在线性介质中的传播

在物质中，在没有自由电荷和电流的区域内，麦克斯韦方程变为

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)}\ \nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0, \quad \text{(iii)}\ \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ &\text{(ii)}\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \quad \text{(iv)}\ \nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{9.65}$$

如果介质是线性的，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B} \tag{9.66}$$

和均匀的(即 ε 和 μ 不随位置变化)，麦克斯韦方程简化为

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)}\ \nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0, \quad \text{(iii)}\ \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ &\text{(ii)}\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \quad \text{(iv)}\ \nabla\times\boldsymbol{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{9.67}$$

这与真空中的形式(式(9.40))(明显的)不同之处仅在于 $\mu_0\varepsilon_0$ 被 $\mu\varepsilon$ 取代。[⊖] 显然，电磁波通过线性均匀介质时以速度

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n} \tag{9.68}$$

⊖ 这个不同在数学上是微不足道的，但物理含义却非同小可：当电磁波通过物质时，电磁场频繁地极化和磁化所有的分子，产生的(振荡)偶极子激发它们自己的电磁场。总的电磁场构成一个具有与原来相同频率但不同速度的波。这非同寻常的共同作用产生了**透射**现象。这显然是线性介质非同寻常的结果。进一步的讨论参看 M. B. James 和 D. J. Griffiths, Am. J. Phys. 60, 309(1992)。

传播。式中

$$n \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{9.69}$$

是物体的**折射率**。对大多数材料，μ 非常接近于 μ_0，故

$$n \cong \sqrt{\varepsilon_r} \tag{9.70}$$

式中，ε_r 是相对介电常数(式(4.34))。因为 ε_r 总是大于 1，光在物质中的传播速度稍慢——这在光学中是众所周知的事实。

进行简单的变换 $\varepsilon_0 \to \varepsilon$，$\mu_0 \to \mu$ 及 $c \to v$(见习题 8.15)，以前得到的结果继续适用。能量密度为[⊖]

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2\right) \tag{9.71}$$

坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \tag{9.72}$$

对于单色平面波，角频率和波数有关系 $\omega = kv$(式(9.11))，$\boldsymbol{B}$ 的振幅是 $\boldsymbol{E}$ 的振幅的 $1/v$(式(9.47))，波的强度是

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon v E_0^2 \tag{9.73}$$

有趣的问题是：当一列波从一种透明的介质进入另一种透明介质时会发生什么现象——比如说，从空气进入水中，或从玻璃进入塑料？如同在一个弦上的波一样，我们预期有反射波和透射波。确切的结果取决于我们在第 7 章推导出的电磁场的边界条件(式(7.64))：

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)}\ \varepsilon_1 E_1^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp}, \quad \text{(iii)}\ \boldsymbol{E}_1^{\parallel} = \boldsymbol{E}_2^{\parallel} \\ &\text{(ii)}\ B_1^{\perp} = B_2^{\perp}, \qquad \text{(iv)}\ \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{B}_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{B}_2^{\parallel} \end{aligned}\right\} \tag{9.74}$$

这些方程把两种线性介质界面左右两边的电场和磁场联系了起来。下面我们将用这些关系导出电磁波的反射和折射定理。

9.3.2　垂直入射时的反射与透射

假设 xy 平面为两线性介质的界面，角频率为 ω，沿 z 方向传播和沿 x 方向偏振的平面波从左边入射到界面(见图 9.13)：

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{E}}_I(z,t) &= \tilde{E}_{0I}e^{i(k_1 z-\omega t)}\hat{\boldsymbol{x}} \\ \tilde{\boldsymbol{B}}_I(z,t) &= \frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0I}e^{i(k_1 z-\omega t)}\hat{\boldsymbol{y}} \end{aligned}\right\} \tag{9.75}$$

它产生一个反射波

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{E}}_R(z,t) &= \tilde{E}_{0R}e^{i(-k_1 z-\omega t)}\hat{\boldsymbol{x}} \\ \tilde{\boldsymbol{B}}_R(z,t) &= -\frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0R}e^{i(-k_1 z-\omega t)}\hat{\boldsymbol{y}} \end{aligned}\right\} \tag{9.76}$$

反射波向左折回介质(1)中；及一个透射波

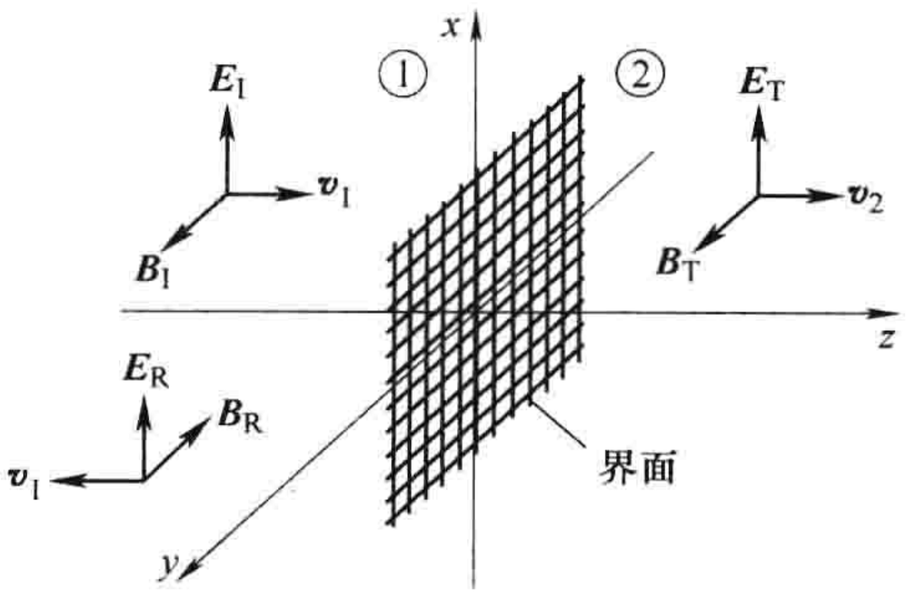


图　9.13

⊖　对“能量密度”的确切意义，参见 4.4.3 小节。

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{T}}(z,t) &= \tilde{E}_{0\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2 z-\omega t)}\hat{\boldsymbol{x}}\\ \tilde{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{T}}(z,t) &= \frac{1}{v_2}\tilde{E}_{0\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2 z-\omega t)}\hat{\boldsymbol{y}}\end{aligned}\right\} \tag{9.77}$$

透射波继续在介质(2)中向右传播。注意，$\tilde{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{R}}$ 中的负号是式(9.49)的要求——或者，如果你愿意，是由坡印廷矢量指向传播方向的事实得出的。

在 $z=0$ 处，由边界条件式(9.74)，左边总的场强 $\tilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{I}}+\tilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{R}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}+\tilde{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{R}}$ 与右边的场强 $\tilde{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{T}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{T}}$ 要拟合。在垂直入射的情况下，垂直于表面方向没有分量，故(i)和(ii)自然满足。但式(iii)要求

$$\tilde{E}_{0\mathrm{I}}+\tilde{E}_{0\mathrm{R}}=\tilde{E}_{0\mathrm{T}} \tag{9.78}$$

而式(iv)要求

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0\mathrm{I}}-\frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0\mathrm{R}}\right)=\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{1}{v_2}\tilde{E}_{0\mathrm{T}}\right) \tag{9.79}$$

或

$$\tilde{E}_{0\mathrm{I}}-\tilde{E}_{0\mathrm{R}}=\beta\tilde{E}_{0\mathrm{T}} \tag{9.80}$$

式中

$$\beta\equiv\frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}=\frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \tag{9.81}$$

利用入射波振幅及式(9.78)和式(9.80)，容易解出出射波振幅：

$$\tilde{E}_{0\mathrm{R}}=\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\tilde{E}_{0\mathrm{I}},\quad \tilde{E}_{0\mathrm{T}}=\left(\frac{2}{1+\beta}\right)\tilde{E}_{0\mathrm{I}} \tag{9.82}$$

这些结果与在弦上传播的波的结果非常相似。的确，如果介质的磁导率 μ 与真空中的接近(对大多数介质是这样)，则 $\beta=v_1/v_2$，有

$$\tilde{E}_{0\mathrm{R}}=\left(\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}\right)\tilde{E}_{0\mathrm{I}},\quad \tilde{E}_{0\mathrm{T}}=\left(\frac{2v_2}{v_2+v_1}\right)\tilde{E}_{0\mathrm{I}} \tag{9.83}$$

这与式(9.30)一样。在这种情况下，如同前面的情形，如果 $v_2>v_1$，反射波与入射波同相；如果 $v_2<v_1$，则反相。实振幅间有下面的关系：

$$E_{0\mathrm{R}}=\left|\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}\right|E_{0\mathrm{I}},\quad E_{0\mathrm{T}}=\left|\frac{2v_2}{v_2+v_1}\right|E_{0\mathrm{I}} \tag{9.84}$$

或者利用折射率有

$$E_{0\mathrm{R}}=\left|\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right|E_{0\mathrm{I}},\quad E_{0\mathrm{T}}=\left|\frac{2n_1}{n_1+n_2}\right|E_{0\mathrm{I}} \tag{9.85}$$

反射和透射波各占入射波能量的多少？由式(9.73)，波的强度(单位面积上的平均功率)是

$$I=\frac{1}{2}\varepsilon v E_0^2$$

如果(再次)$\mu_1=\mu_2=\mu_0$，则反射波和入射波强度比为

$$R\equiv\frac{I_{\mathrm{R}}}{I_{\mathrm{I}}}=\left(\frac{E_{0\mathrm{R}}}{E_{0\mathrm{I}}}\right)^2=\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2 \tag{9.86}$$

而透射波和入射波强度比为

$$T\equiv\frac{I_{\mathrm{T}}}{I_{\mathrm{I}}}=\frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1}\left(\frac{E_{0\mathrm{T}}}{E_{0\mathrm{I}}}\right)^2=\frac{4n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2} \tag{9.87}$$

上两式中，R 称为**反射系数**；T 称为**透射系数**。它们分别量度了入射波能量被反射和透射的情况。注意

$$R + T = 1 \tag{9.88}$$

显然这是能量守恒的要求。例如，当光从空气（$n_1 = 1$）进入玻璃（$n_2 = 1.5$）时，$R = 0.04$，$T = 0.96$。这结果一点也不令人吃惊，因为大部分光都透射了。

习题 9.13　如果没有假设 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$，计算精确的反射和透射系数，证明 $R + T = 1$。

习题 9.14　在写出式(9.76)和式(9.77)时，默认了反射和透射波与入射波的偏振方向一致——沿 x 方向。证明情况的确如此。[提示：把透射和反射波的偏振矢量写成

$$\hat{\boldsymbol{n}}_T = \cos\theta_T \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta_T \hat{\boldsymbol{y}}, \quad \hat{\boldsymbol{n}}_R = \cos\theta_R \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta_R \hat{\boldsymbol{y}}$$

根据边界条件证明 $\theta_T = \theta_R = 0$。]

9.3.3　倾斜入射时的反射与透射

在上一节我们讨论了垂直入射波的反射和透射——即，入射光方向垂直入射面。我们现在讨论更一般的斜入射的情形，在此情形下入射波满足任意入射角度 θ_I 的边界条件（见图 9.14）。当然，垂直入射只是斜射入射在 $\theta_I = 0$ 时的一种特殊情况，我把它拿出来单独处理仅是作为一种热身，而对于一般的斜入射，要进行的代数运算更加复杂。

假设一个单色平面波

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_I(\boldsymbol{r},t) = \tilde{\boldsymbol{E}}_{0I} e^{i(\boldsymbol{k}_I \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\boldsymbol{B}}_I(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{v_1}(\hat{\boldsymbol{k}}_I \times \tilde{\boldsymbol{E}}_I) \tag{9.89}$$

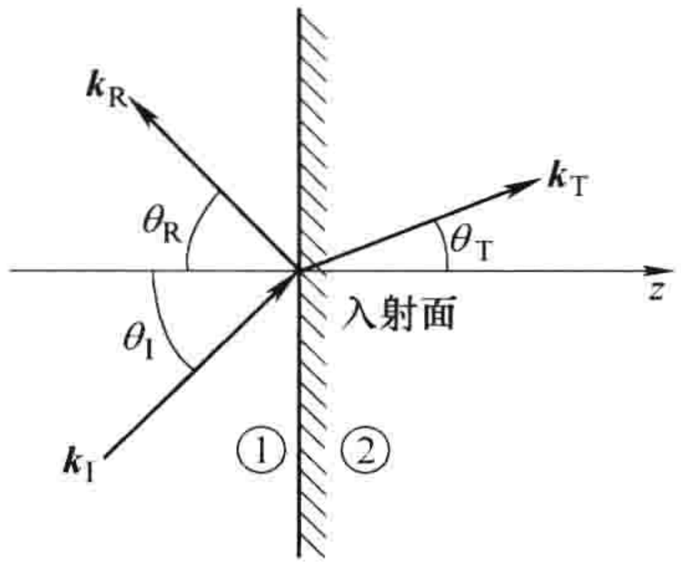


图　9.14

从左边入射，产生一个反射波，

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_R(\boldsymbol{r},t) = \tilde{\boldsymbol{E}}_{0R} e^{i(\boldsymbol{k}_R \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\boldsymbol{B}}_R(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{v_1}(\hat{\boldsymbol{k}}_R \times \tilde{\boldsymbol{E}}_R) \tag{9.90}$$

和一个透射波

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_T(\boldsymbol{r},t) = \tilde{\boldsymbol{E}}_{0T} e^{i(\boldsymbol{k}_T \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\boldsymbol{B}}_T(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{v_2}(\hat{\boldsymbol{k}}_T \times \tilde{\boldsymbol{E}}_T) \tag{9.91}$$

所有的三个波有相同的频率 ω——它由光源确定（闪光灯或任何其他产生入射光的光源）。三个波的波数由式(9.11)所联系：

$$k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega, \text{或} \quad k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T \tag{9.92}$$

利用边界条件，在介质(1)中的合场强 $\tilde{\boldsymbol{E}}_I + \tilde{\boldsymbol{E}}_R$ 和 $\tilde{\boldsymbol{B}}_I + \tilde{\boldsymbol{B}}_R$ 必须拟合介质(2)中的场强 $\tilde{\boldsymbol{E}}_T$ 和 $\tilde{\boldsymbol{B}}_T$。其一般的表示形式为

$$(\quad) e^{i(\boldsymbol{k}_I \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)} + (\quad) e^{i(\boldsymbol{k}_R \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)} = (\quad) e^{i(\boldsymbol{k}_T \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)}, \text{在 } z = 0 \text{ 处} \tag{9.93}$$

括号一会儿填。现在重要的是注意对 x，y 和 t 的依赖被限制在指数中。因为边界条件在入射平面上的所有点、所有时间都必须满足，所以这些指数因子必须相等。否则，如 x 有稍微的变化，将破坏等式（见习题 9.15）。当然，时间因子已经相等（事实上，可以认为这是一个独立的事实，即透射和反射的频率必须与入射的匹配）。对于空间项，显然

$$\boldsymbol{k}_I \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_R \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_T \cdot \boldsymbol{r}, \text{当 } z = 0 \tag{9.94}$$

或者，更明显地，对所有的 x 和 y 有

$$x(k_I)_x + y(k_I)_y = x(k_R)_x + y(k_R)_y = x(k_T)_x + y(k_T)_y \tag{9.95}$$

但式(9.95)仅对各分量分别相等时成立，对 $x=0$，有

$$(k_I)_y = (k_R)_y = (k_T)_y \tag{9.96}$$

对于 $y=0$，有

$$(k_I)_x = (k_R)_x = (k_T)_x \tag{9.97}$$

我们可以改变坐标轴的方向使 $\boldsymbol{k}_I$ 在 xz 平面内(即 $(\boldsymbol{k}_I)_y = 0$)。根据式(9.96)，$\boldsymbol{k}_R$ 和 $\boldsymbol{k}_T$ 有同样关系。结论：

第一定律：入射、反射和透射波矢量在同一平面内(称为**入射面**)，入射面的法线也在这平面内(这里是 z 轴)。

同时，式(9.97)意味着

$$k_I \sin\theta_I = k_R \sin\theta_R = k_T \sin\theta_T \tag{9.98}$$

式中，θ_I 是入射角，θ_R 是反射角，θ_T 是透射角，通常称为**折射角**。它们都是相对于法线方向的(见图 9.14)。考虑到式(9.92)，有

第二定律：入射角等于反射角

$$\theta_I = \theta_R \tag{9.99}$$

这是**反射定律**。

对于折射角，

第三定律：

$$\frac{\sin\theta_T}{\sin\theta_I} = \frac{n_1}{n_2} \tag{9.100}$$

这是**折射定律**，或称为斯涅耳定律。

这些是几何光学的三个基本定律。值得注意的是，我们使用了很少的电动力学：我们没有利用任何特别的边界条件——我们用到的仅是它们的一般形式(式(9.93))。所以，可以预期任何其他的波(例如水波或声波)，当它们从一种介质进入另一种介质时，遵从同样的“光学”定律。

既然式(9.94)中的指数因子被抵消——边界条件式(9.74)变为

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \varepsilon_1(\tilde{\boldsymbol{E}}_{0I} + \tilde{\boldsymbol{E}}_{0R})_z = \varepsilon_2(\tilde{\boldsymbol{E}}_{0T})_z \\
&\text{(ii)} \quad (\tilde{\boldsymbol{B}}_{0I} + \tilde{\boldsymbol{B}}_{0R})_z = (\tilde{\boldsymbol{B}}_{0T})_z \\
&\text{(iii)} \quad (\tilde{\boldsymbol{E}}_{0I} + \tilde{\boldsymbol{E}}_{0R})_{x,y} = (\tilde{\boldsymbol{E}}_{0T})_{x,y} \\
&\text{(iv)} \quad \frac{1}{\mu_1}(\tilde{\boldsymbol{B}}_{0I} + \tilde{\boldsymbol{B}}_{0R})_{x,y} = \frac{1}{\mu_2}(\tilde{\boldsymbol{B}}_{0T})_{x,y}
\end{aligned}\right\} \tag{9.101}$$

式中，$\tilde{\boldsymbol{B}}_0 = (1/v)\hat{\boldsymbol{k}} \times \tilde{\boldsymbol{E}}_0$。(最后的两个是一对方程，一个为 x 分量，一个为 y 分量。)

假设入射波的电场的偏振方向平行于入射面(图 9.15 中的 xz 平面)。这样(参看习题 9.14)反射和透射波的电场的偏振方向也在这个面内。(偏振方向垂直于入射面的情形留给读者分析，参看习题 9.16)。这样(i)写为

$$\varepsilon_1(-\tilde{E}_{0I}\sin\theta_I + \tilde{E}_{0R}\sin\theta_R) = \varepsilon_2(-\tilde{E}_{0T}\sin\theta_T) \tag{9.102}$$

(ii) 式没有任何信息(0 =0)，因为磁场没有 z 分量；式(iii)变为

$$\tilde{E}_{0I}\cos\theta_I + \tilde{E}_{0R}\cos\theta_R = \tilde{E}_{0T}\cos\theta_T \tag{9.103}$$

式(iv)为

$$\frac{1}{\mu_1 v_1}(\tilde{E}_{0\mathrm{I}} - \tilde{E}_{0\mathrm{R}}) = \frac{1}{\mu_2 v_2}\tilde{E}_{0\mathrm{T}} \tag{9.104}$$

由反射和折射定律，式(9.102)和式(9.104)化简为

$$\tilde{E}_{0\mathrm{I}} - \tilde{E}_{0\mathrm{R}} = \beta \tilde{E}_{0\mathrm{T}} \tag{9.105}$$

式中(与前面一样)

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \tag{9.106}$$

式(9.103)写为

$$\tilde{E}_{0\mathrm{I}} + \tilde{E}_{0\mathrm{R}} = \alpha \tilde{E}_{0\mathrm{T}} \tag{9.107}$$

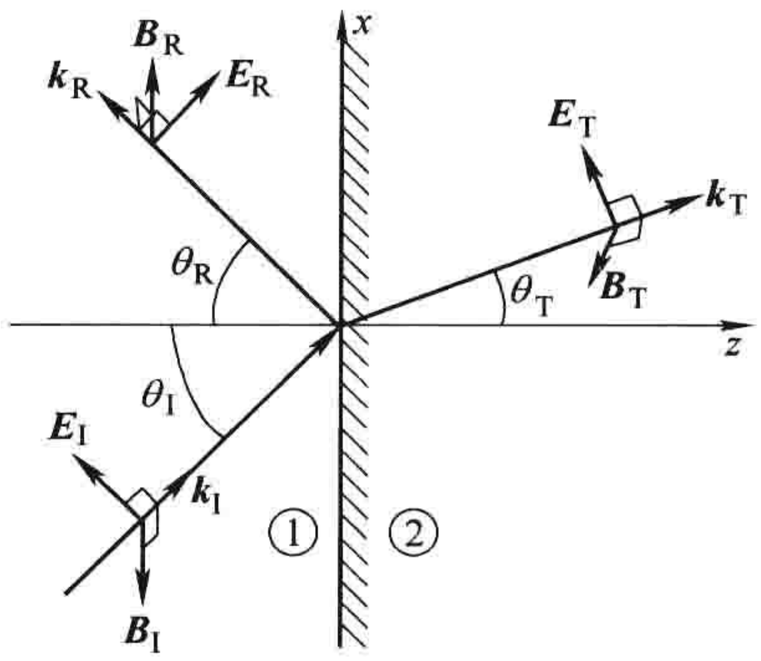


图　9.15

式中

$$\alpha \equiv \frac{\cos\theta_{\mathrm{T}}}{\cos\theta_{\mathrm{I}}} \tag{9.108}$$

求解式(9.105)和式(9.107)得到反射和透射波振幅，

$$\boxed{\tilde{E}_{0\mathrm{R}} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)\tilde{E}_{0\mathrm{I}}, \quad \tilde{E}_{0\mathrm{T}} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta}\right)\tilde{E}_{0\mathrm{I}}} \tag{9.109}$$

它们称为偏振方向在入射面内的**菲涅尔方程**。(有另外两个菲涅尔方程，对应反射和透射波垂直于入射平面的情形——参看习题 9.16。)注意透射波与入射波相位总是一致。反射波既可同相，当 $\alpha > \beta$；也可差 180°反相，当 $\alpha < \beta$。[㊀]

透射和反射波的振幅依赖于入射角度，因为 α 是 θ_{I} 的函数：

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\theta_{\mathrm{T}}}}{\cos\theta_{\mathrm{I}}} = \frac{\sqrt{1 - [(n_1/n_2)\sin\theta_{\mathrm{I}}]^2}}{\cos\theta_{\mathrm{I}}} \tag{9.110}$$

对于垂直入射($\theta_{\mathrm{I}} = 0$)，$\alpha = 1$，我们回到了式(9.82)。在掠射情形($\theta_{\mathrm{I}} = 90°$)，$\alpha$ 是发散的，波被全部反射(在夜间有水的路面上驾车的人应该有此感受)。有趣的是，有一个中间角度，θ_{B}(称为**布鲁斯特角**)，以这个角入射的反射波完全消失了。[㊁]根据式(9.109)，当 $\alpha = \beta$，或

$$\sin^2\theta_{\mathrm{B}} = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2} \tag{9.111}$$

时这个现象发生。

对于一个典型的情形 $\mu_1 \cong \mu_2$，有 $\beta \cong n_2/n_1$，$\sin^2\theta_{\mathrm{B}} \cong \beta^2/(1+\beta^2)$，故

$$\tan\theta_{\mathrm{B}} \cong n_2/n_1 \tag{9.112}$$

图 9.16 给出了光从空气($n_1 = 1$)射入玻璃($n_2 = 1.5$)时，其反射光和透射光的振幅随入射角度 θ_{I} 变化的函数关系图。(在图中，负数表示相对入射波有 180°的相位差——振幅本身是绝对值。)

单位入射面上的功率是 $\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}$，故入射强度是

㊀ 对反射波的相位有一个不可避免的模糊，因为(在 9.1.4 小节的脚注中提到)偏振矢量符号的变化等同于一个 180°相位的偏移。在图 9.15 中我采用的约定，即正 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$ 对应向上振动，这与某些光学教科书一致，但并非全部。

㊁ 因偏振方向垂直于入射平面的波，它的反射波分量不会消失，以布鲁斯特角入射的任意一入射波产生的反射波是全偏振波，偏振方向平行于界面。这就是为何具有竖直透过轴的偏光眼镜，有助于减小一个水平面上的炫目光线。

$$I_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\varepsilon_1 v_1 E_{0\mathrm{I}}^2 \cos\theta_{\mathrm{I}} \tag{9.113}$$

而反射和透射强度是

$$I_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\varepsilon_1 v_1 E_{0\mathrm{R}}^2 \cos\theta_{\mathrm{R}}, \quad I_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\varepsilon_2 v_2 E_{0\mathrm{T}}^2 \cos\theta_{\mathrm{T}} \tag{9.114}$$

(式中的余弦函数是因为我们计算的是界面处单位面积上的平均功率，界面与波前有一角度。)偏振方向平行于入射面的反射和透射系数是

$$R \equiv \frac{I_{\mathrm{R}}}{I_{\mathrm{I}}} = \left(\frac{E_{0\mathrm{R}}}{E_{0\mathrm{I}}}\right)^2 = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 \tag{9.115}$$

$$T \equiv \frac{I_{\mathrm{T}}}{I_{\mathrm{I}}} = \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1}\left(\frac{E_{0\mathrm{T}}}{E_{0\mathrm{I}}}\right)^2 \frac{\cos\theta_{\mathrm{T}}}{\cos\theta_{\mathrm{I}}} = \alpha\beta\left(\frac{2}{\alpha+\beta}\right)^2 \tag{9.116}$$

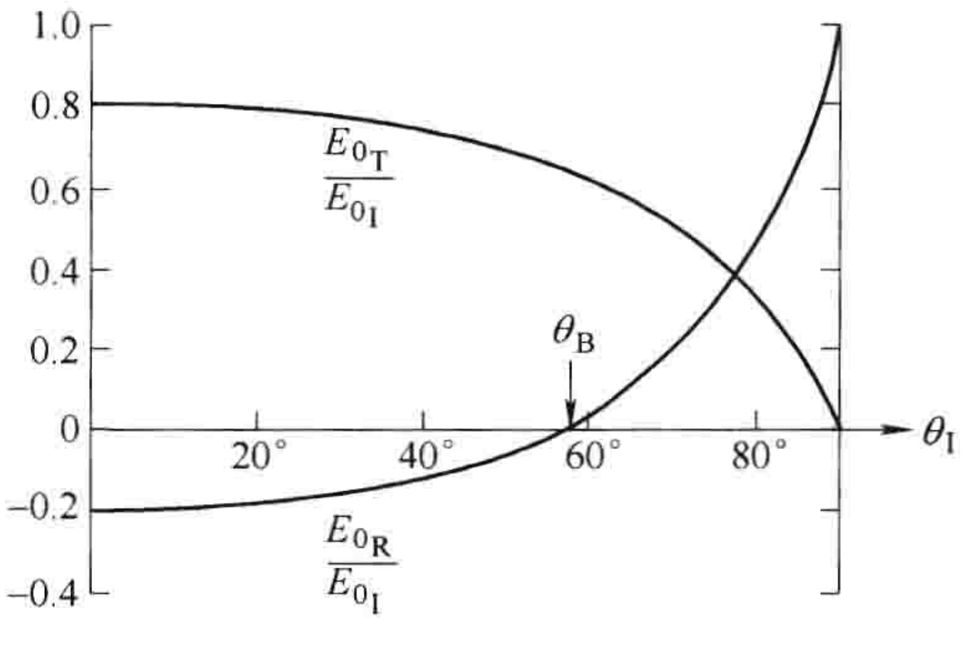


图 9.16

图 9.17 给出了(空气/玻璃界面)反射和透射振幅随入射角度变化而变化的函数。R 是入射能量中的反射部分——自然地，以布鲁斯特角入射时它趋于零。T 是透射部分——当入射角为 θ_{B} 时，它趋于 1。注意 $R+T=1$，这是能量守恒的要求：单位时间内入射在某一小区域的能量等于单位时间内离开这个小区域的能量。

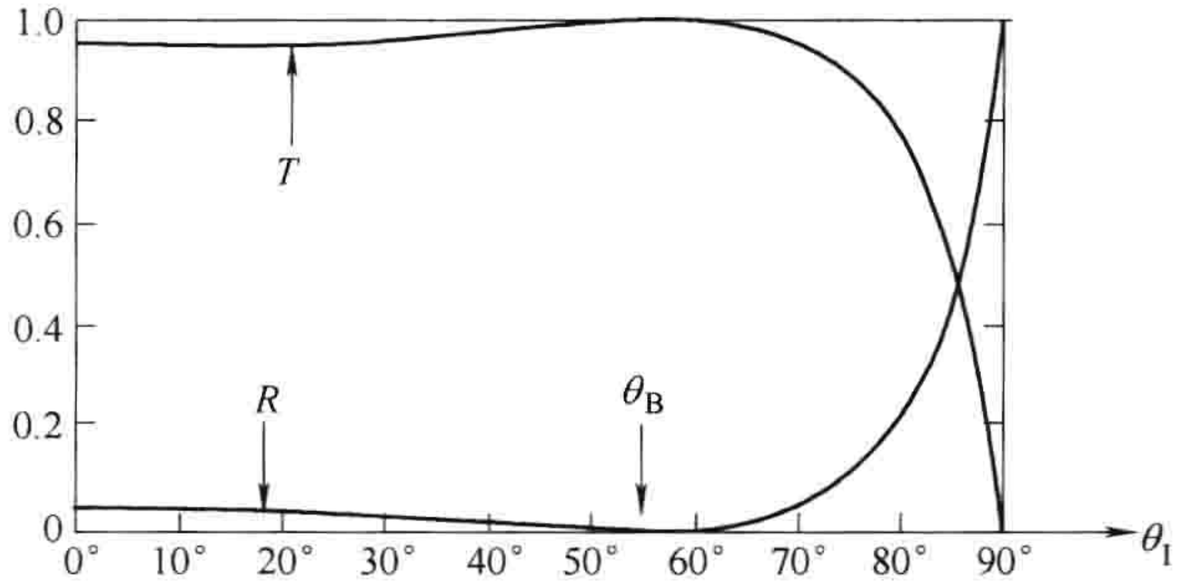


图 9.17

习题 9.15 设 $Ae^{iax}+Be^{ibx}=Ce^{icx}$，$A$，$B$，$C$，$a$，$b$，$c$ 对所有 x 都是非零常数，证明 $a=b=c$ 和 $A+B=C$。

！习题 9.16 分析偏振方向垂直于入射面的情形(即，在图 9.15 中电场沿 y 方向)。利用边界条件式(9.101)，得到 $\tilde{E}_{0\mathrm{R}}$ 和 $\tilde{E}_{0\mathrm{T}}$ 的菲涅尔方程。对于情形 $\beta=n_2/n_1=1.5$，画出随 θ_{I} 变化的($\tilde{E}_{0\mathrm{R}}/\tilde{E}_{0\mathrm{I}}$)和($\tilde{E}_{0\mathrm{T}}/\tilde{E}_{0\mathrm{I}}$)函数曲线。(注意对于这个 β，反射波总是有 180°的相位差。)证明对任何 n_1 和 n_2，不存在布鲁斯特角：$\tilde{E}_{0\mathrm{R}}$ 总不为零(除非 $n_1=n_2$，$\mu_1=\mu_2$，两介质在光学上没有区别)。验证所得的菲涅尔方程在垂直入射时约化为正确的形式。计算反射和透射系数，检查它们相加等于 1。

习题 9.17 金刚石的折射率是 2.42。对于空气/金刚石体系，画出与图 9.16 类似的图形。(设 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$。)特别地，计算(a)在垂直入射时的振幅；(b)布鲁斯特角；(c)“交叉”角，在这个角度时，反射和折射振幅相等。

9.4　吸收与色散

9.4.1　导体中的电磁波

在9.3节我限定自由电荷密度 ρ_f 和自由电流密度 $\boldsymbol{J}_f$ 是零，随后的结果都是在这个条件下得出的。这样的限定对在真空和绝缘体中(如玻璃或纯水)传播的波是非常合理的。但对导体我们不能独立地控制电荷的流动，一般来说，$\boldsymbol{J}_f$ 肯定不为零。事实上，根据欧姆定律，(自由)电流密度正比于电场：

$$\boldsymbol{J}_f = \sigma \boldsymbol{E} \tag{9.117}$$

由此，对线性介质麦克斯韦方程的形式是

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)}\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho_f, \quad \text{(iii)}\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ &\text{(ii)}\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \text{(iv)}\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\sigma \boldsymbol{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{9.118}$$

由自由电荷的连续性方程，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \tag{9.119}$$

并利用欧姆定律和高斯定理(i)，对均匀线性介质有

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\sigma(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_f$$

由此得出

$$\rho_f(t) = e^{-(\sigma/\varepsilon)t}\rho_f(0) \tag{9.120}$$

因此任何初始自由电荷密度 $\rho_f(0)$ 以一个特征时间 $\tau \equiv \varepsilon/\sigma$ 耗散了。这反映了一个熟悉的事实：如果把一些自由电荷放在导体上，它将流向边缘。时间常数 τ 提供了一个量度导体导电性能的方式：对于“理想”导体 $\sigma = \infty$，$\tau = 0$；对于“良”导体，τ 比体系中其他的相关时间小很多(在一个振动系统，意味着 $\tau << 1/\omega$)；对于“不良”导体，τ 比体系中其他的相关时间大($\tau >> 1/\omega$)。[⊖]现在我们对这种瞬态行为不感兴趣——我们等到任何聚集的自由电荷消失。此后，$\rho_f = 0$，我们有

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)}\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \quad \text{(iii)}\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ &\text{(ii)}\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \text{(iv)}\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu\sigma \boldsymbol{E} \end{aligned}\right\} \tag{9.121}$$

这些与对应的非导电介质的方程式(9.67)的差别仅在于(iv)中多了最后一项。

同前一样，对式(iii)和(iv)取旋度，我们得到了 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的在导体介质中修正的波方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \boldsymbol{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.122}$$

⊖ N. Ashby, Am. J. Phys. 43, 553(1975)，指出对于良导体，τ 非常小(对于铜，为 10^{-19} s，而两次碰撞的时间间隔是 $\tau_c = 10^{-14}$ s)。问题是在时间尺度小于 τ_c 时，欧姆定律不再适用。事实上，良导体中自由电荷耗散所需的时间是 τ_c 的量级，而不是 τ。而且，H. C. Ohanian, *Am. J. Phys.* 51, 1020(1983)，证明要使场和电流达到平衡需要更长的时间。但这些与我们现在的目的无关。导体中的自由电荷密度最终会耗散，这个过程精确地需要多长时间超出本书内容。

这些方程仍有平面波解，

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \tilde{\boldsymbol{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}, \quad \tilde{\boldsymbol{B}}(z,t) = \tilde{\boldsymbol{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} \tag{9.123}$$

但现在“波数” $\tilde{k}$ 是复数：

$$\tilde{k}^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \tag{9.124}$$

通过把式(9.123)代入式(9.122)，这很容易证明上式。取平方根，

$$\tilde{k} = k + i\kappa \tag{9.125}$$

式中

$$k \equiv \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}+1\right]^{1/2}; \quad \kappa \equiv \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1\right]^{1/2} \tag{9.126}$$

$\tilde{k}$ 的虚部导致波是衰减的(随着 z 的增大振幅减小)：

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \tilde{\boldsymbol{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz-\omega t)}, \quad \tilde{\boldsymbol{B}}(z,t) = \tilde{\boldsymbol{B}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz-\omega t)} \tag{9.127}$$

振幅减小到 1/e 时(约三分之一)对应的距离称为**趋肤深度**：

$$d \equiv \frac{1}{\kappa} \tag{9.128}$$

它量度了波进入导体内的深度。而 $\tilde{k}$ 的实部以通常的方式确定了波长、波速及折射率：

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad v = \frac{\omega}{k}, \quad n = \frac{ck}{\omega} \tag{9.129}$$

对任何 $\tilde{\boldsymbol{E}}_0$和 $\tilde{\boldsymbol{B}}_0$，衰减的平面波(式(9.127))满足修正的波方程(式(9.122))。但麦克斯韦方程(式(9.121))附加了进一步的限制用来确定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的相对振幅、相位及偏振。与以前相同，(i)和(ii)排除了 z 分量：场是横波。我们可以调整坐标轴使 $\boldsymbol{E}$ 的偏振方向沿 x 方向：

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \tilde{\boldsymbol{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz-\omega t)}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{9.130}$$

这样(iii)给出

$$\tilde{\boldsymbol{B}}(z,t) = \frac{\tilde{k}}{\omega}\tilde{\boldsymbol{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz-\omega t)}\hat{\boldsymbol{y}} \tag{9.131}$$

(式(iv)给出同样结果。)这再次证明，电场与磁场是互相垂直的。

如同任何复数，$\tilde{k}$ 可用模和相位表示：

$$\tilde{k} = Ke^{i\phi} \tag{9.132}$$

式中

$$K \equiv |\tilde{k}| = \sqrt{k^2+\kappa^2} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} \tag{9.133}$$

及

$$\phi \equiv \arctan(\kappa/k) \tag{9.134}$$

由式(9.130)和式(9.131)，复振幅 $\tilde{E}_0 = E_0 e^{i\delta_E}$ 和 $\tilde{B}_0 = B_0 e^{i\delta_B}$ 通过下式相联系

$$B_0 e^{i\delta_B} = \frac{Ke^{i\phi}}{\omega}E_0 e^{i\delta_E} \tag{9.135}$$

显然，电场与磁场不再同相，事实上，

$$\delta_B - \delta_E = \phi \tag{9.136}$$

磁场滞后于电场。同时，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的(实)振幅通过下式相联系

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{K}{\omega} = \sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} \tag{9.137}$$

最后，(实)电场和磁场为，

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}(z,t) &= E_0 \mathrm{e}^{-\kappa z}\cos(kz - \omega t + \delta_E)\hat{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{B}(z,t) &= B_0 \mathrm{e}^{-\kappa z}\cos(kz - \omega t + \delta_E + \phi)\hat{\boldsymbol{y}} \end{aligned}\right\} \tag{9.138}$$

图 9.18 画出了这些场。

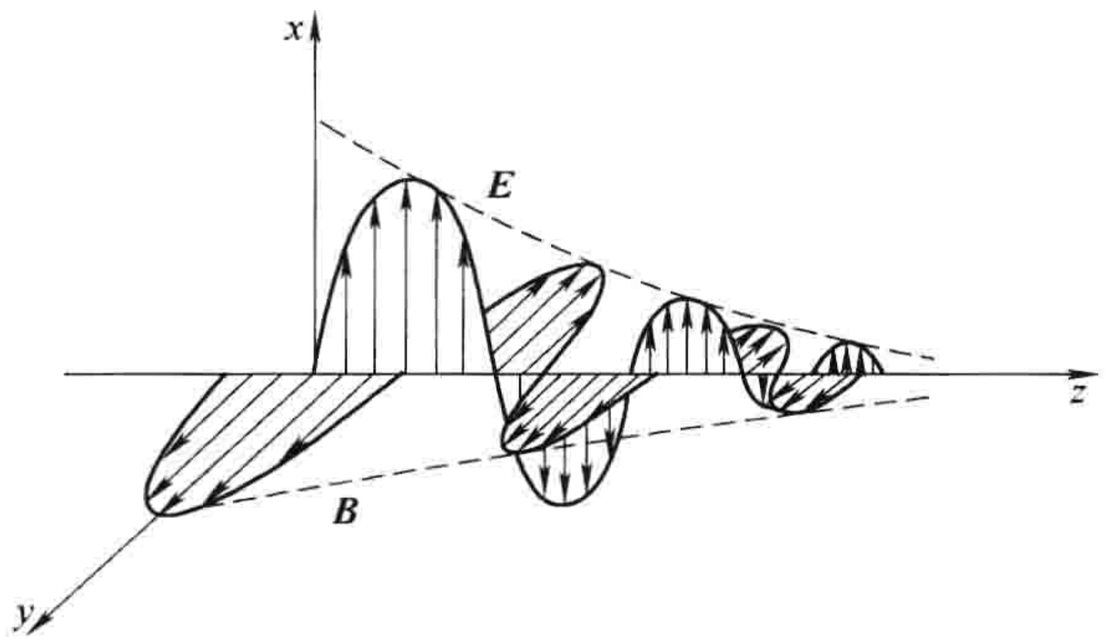


图　9.18

习题 9.18

(a) 假如你在一小片玻璃中嵌入一些自由电荷，这些电荷需要多长时间流到表面？

(b) 银是很好的导体，但它昂贵。假设你正设计一个工作频率在 10^{10}Hz 的微波实验，需要多厚的银覆盖层？

(c) 求频率为 1MHz 的无线电波在铜中的波长和传播速度，并与空气(或真空)中的情况比较。

习题 9.19

(a) 证明在不良导体($\sigma << \omega\varepsilon$)中趋肤深度是$(2/\sigma)\sqrt{\varepsilon/\mu}$(不依赖于频率)。求(纯)水的趋肤深度(以米为单位)。

(b) 证明在良导体($\sigma >> \omega\varepsilon$)中趋肤深度是 $\lambda/2\pi$(式中 λ 是在导体中的波长)。求在可见光范围($\omega \approx 10^{15}$/s)，典型金属($\sigma \approx 10^7(\Omega \cdot \mathrm{m})^{-1}$)中的趋肤深度(纳米)。设 $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ 和 $\mu \approx \mu_0$。为何金属是不透明的？

(c) 证明在良导体中磁场滞后电场 45°。求出它们的振幅比。作为数值计算的例子，利用在(b)中给出的典型金属的参数进行计算。

习题 9.20

(a) 计算平面电磁波在金属介质(式(9.138))中的(时间平均)能量密度。证明磁场的贡献是主要的。[答案：$(k^2/2\mu\omega^2)E_0^2\mathrm{e}^{-2\kappa z}$]

(b) 证明电磁波的强度是$(k/2\mu\omega)E_0^2\mathrm{e}^{-2\kappa z}$。

9.4.2　导体表面的反射

我们用来分析在两电介质界面处的反射和折射的边界条件在有自由电荷和电流存在的情况下不再成立。取而代之，有更一般的关系式(7.63)：

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)}\ \varepsilon_1 E_1^{\perp} - \varepsilon_2 E_2^{\perp} = \sigma_f, \quad \text{(iii)}\ \boldsymbol{E}_1^{\parallel} - \boldsymbol{E}_2^{\parallel} = 0 \\ &\text{(ii)}\ B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0, \qquad \text{(iv)}\ \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{B}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{B}_2^{\parallel} = \boldsymbol{K}_f \times \hat{\boldsymbol{n}} \end{aligned}\right\} \tag{9.139}$$

式中，σ_f（不要与电导率混淆）是自由表面电荷；$\boldsymbol{K}_f$ 是自由表面电流；$\hat{\boldsymbol{n}}$（不要与波的偏振方向混淆）是垂直于表面的单位矢量，它从介质(2)指向介质(1)。对于欧姆导体($\boldsymbol{J}_f = \sigma\boldsymbol{E}$)，可以没有自由表面电流，因为这会要求在边界处有无限的电场。

假设 xy 平面构成非导体线性介质(1)和导体(2)的界面。一个单色平面波，其偏振方向指向 x 方向，从左边沿着 z 轴接近界面，如图 9.13 所示：

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_I(z,t) = \tilde{E}_{0I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\boldsymbol{x}}, \quad \tilde{\boldsymbol{B}}_I(z,t) = \frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\boldsymbol{y}} \tag{9.140}$$

这个入射波产生一个反射波，

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_R(z,t) = \tilde{E}_{0R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\boldsymbol{x}}, \quad \tilde{\boldsymbol{B}}_R(z,t) = -\frac{1}{v_1}\tilde{E}_{0R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\boldsymbol{y}} \tag{9.141}$$

它在介质(1)中向左返回。产生的一个透射波为

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_T(z,t) = \tilde{E}_{0T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\boldsymbol{x}}, \quad \tilde{\boldsymbol{B}}_T(z,t) = \frac{\tilde{k}_2}{\omega}\tilde{E}_{0T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\boldsymbol{y}} \tag{9.142}$$

它进入导体而衰减。

依照边界条件式(9.139)，在 $z=0$ 处，在介质(1)中叠加的波与介质(2)中的波必须拟合。因在界面两边都有 $E^{\perp}=0$，由边界条件(i)得 $\sigma_f = 0$。因 $B^{\perp}=0$，边界条件(ii)自动满足。同时，由边界条件(iii)得

$$\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \tilde{E}_{0T} \tag{9.143}$$

由(iv)(利用 $\boldsymbol{K}_f = 0$)有

$$\frac{1}{\mu_1 v_1}(\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R}) - \frac{\tilde{k}_2}{\mu_2 \omega}\tilde{E}_{0T} = 0 \tag{9.144}$$

或

$$\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \tilde{\beta}\,\tilde{E}_{0T} \tag{9.145}$$

式中

$$\tilde{\beta} \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega}\tilde{k}_2 \tag{9.146}$$

由上可得

$$\tilde{E}_{0R} = \left(\frac{1-\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}}\right)\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \left(\frac{2}{1+\tilde{\beta}}\right)\tilde{E}_{0I} \tag{9.147}$$

这些结果与应用于非导体间的边界条件时所得的结果式(9.82)形式上一样，但这种形式上的一样仅是表面上的，因为现在 $\tilde{\beta}$ 是一个复数。

对于理想导体($\sigma = \infty$)，$k_2 = \infty$（式(9.126)），故 $\tilde{\beta}$ 是无穷大，有

$$\tilde{E}_{0R} = -\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = 0 \tag{9.148}$$

在这种情况下，波被全反射，有一个 180°的相移。（这就是为何良导体能作为好的镜子的原因。实际中，一块玻璃后面镀上一薄层银——玻璃与反射没有任何关系，它只是用来支撑银并避免它

生锈的。因为在可见光频段，趋肤深度在 100Å 数量级，故不需镀很厚的银层。）

习题 9.21　计算光在空气-银界面的反射系数（$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$，$\varepsilon_1 = \varepsilon_0$，$\sigma = 6 \times 10^7 (\Omega \cdot \mathrm{m})^{-1}$），设光的角频率是 $\omega = 4 \times 10^{15}/\mathrm{s}$。

9.4.3　介电常数对频率的依赖

在前几节，我们看到电磁波在物质中的传播由材料的三个性质决定，我们把它们取为常数：介电常数 ε、磁导率 μ 和电导率 σ。实际上，这些参数在某种程度上依赖于所考虑波的频率。的确，如果介电常数真的是常数，那么在某一透光介质中折射率，$n \cong \sqrt{\varepsilon_r}$，也将是常数。但从光学知识知道 n 是波长的函数（图 9.19 是一种典型玻璃的变化图）。一个棱镜或水滴对蓝光的折射率要比红光大，这样白色光经过折射后出射光成为彩虹。这种现象称为**色散**。推广这个概念，当波速依赖于频率时，介质称为有**色散性的**。㊀

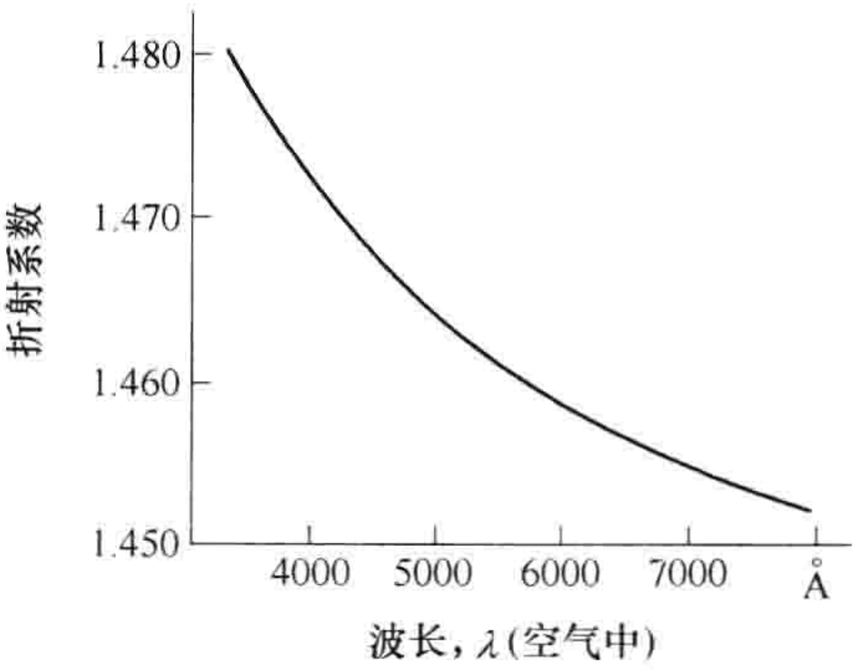


图　9.19

因为不同频率的波在色散介质中以不同速度传播，一个由一定频率区间的波组成的波包在传播过程中形状将发生变化。一个尖锐的波将变得平坦，尽管波包中每个正弦波分量以通常的**波（相）速度**传播，

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{9.149}$$

波包作为一个整体（“包络”）以所谓的**群速度**㊁

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{9.150}$$

传播。[你可在池塘中丢入一块石头观察波形来揭示这个：扰动作为一个整体以一个圆向外传播，速度为 v_g，可观察到组成波包的波纹以二倍的速度传播（在此情况下 $v = 2v_g$）。它们在波包的后端产生，在向波包中部移动时增大，随后减小至波前处消失（见图 9.20）。]我们将不关注这些事情——我将专注单色波，它们不存在这些问题。但这里我要强调的是，在一个色散介质中一个波包携带的能量通常以群速度传播，不以相速度。因此对在某些情况下 v 会大于 c 也不必太惊讶。㊂

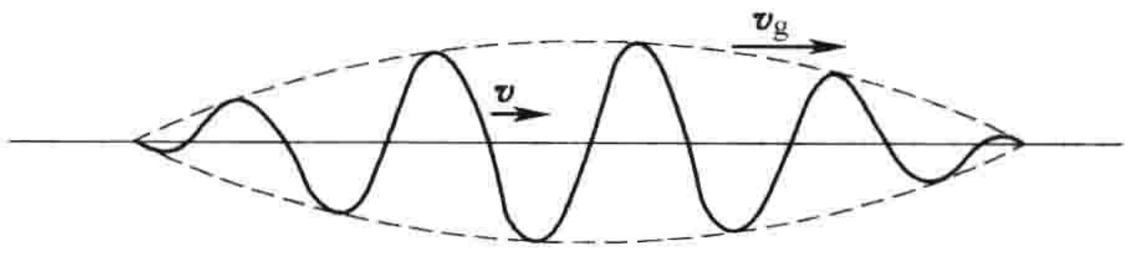


图　9.20

本小节的目的是利用电子在电介质中的性质的简单模型，说明在非导体中 ε 对频率的依赖性。正如所有原子尺度现象的经典模型，它是对真实图像的很好近似，能产生令人满意的定性结果，可对透明介质中的色散机理提供一个合理的解释。

非导体中的电子被特定的分子束缚。实际的结合力相当复杂，但我们可设想电子连接在一个

㊀　导体有时是有色散性的：参看式(9.126)和式(9.129)。

㊁　参看 A. P. French，*Vibrations and Waves*，p. 230（New York：W. W. Norton&Co.，1971），或 F. S. Crawford Jr.，*Waves*，Sect. 6.2（New York：McGraw-Hill，1968）。

㊂　甚至在一些特殊情况下群速度也能够超过 c——参看 P. C. Peters，*Am. J. Phys.* 56，129（1988）。附带地，如果两个不同的“光速”不足以满足你，参看 S. C. Bloch，*Am. J. Phys.* 45，538（1977），在该论文中不少于八个不同的速度被确定！

劲度系数为 $k_{弹簧}$ 的虚拟弹簧的一端(见图 9.21):

$$F_{约束} = -k_{弹簧}x = -m\omega_0^2 x \tag{9.151}$$

式中，x 是偏离平衡位置的距离；m 是电子的质量；ω_0 是本征振动频率 $\sqrt{k_{弹簧}/m}$。[如果觉的这个模型不够真实，参考例题 4.1，在那个例子中我们给出了这种形式力的精确形式。事实上，在偏离平衡位置足够小的情形下，任何约束力都可这样近似，正如你可在平衡位置通过泰勒级数对势能展开：

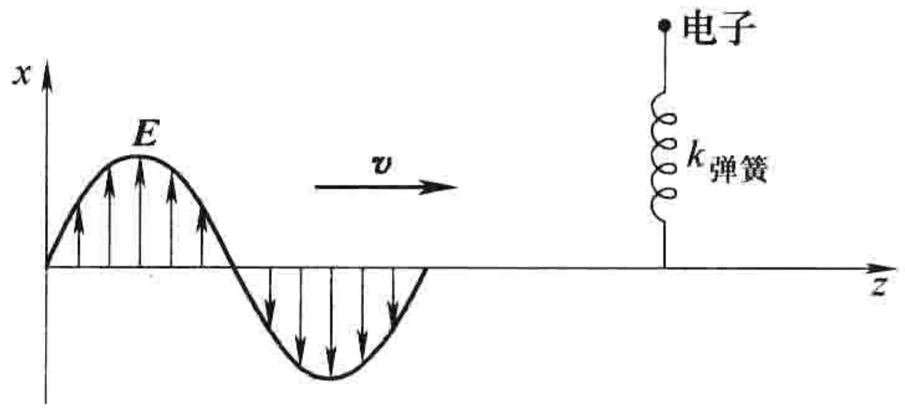


图 9.21

$$U(x) = U(0) + xU'(0) + \frac{1}{2}x^2U''(0) + \cdots$$

式中，第一项是常数，没有动力学意义(你总可以调整势能零点使 $U(0)=0$)。第二项自动为零，因为 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}x = -F$，在平衡点处力为零。第三项是一个劲度系数为 $k_{弹簧} = \mathrm{d}^2U/\mathrm{d}x^2\big|_0$ 的弹簧的势能(在稳定平衡点处，二阶微分是正值)。因为位移很小，级数的高阶项可以略去。几何上，任何函数在一个极小值附近都可用一个适当的抛物线拟合。]

另外，电子也可受到某些阻尼作用：

$$F_{阻尼} = -m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{9.152}$$

[我再次选择了最简单的可能形式，阻尼方向与速度必须相反，使它与速度成正比较易求解。这里我们不关心阻尼产生的原因——除了其他原因，一个振荡的电荷会辐射，而辐射会消耗能量。在第 11 章中我们将计算这种“辐射阻尼”。]

一个角频率为 ω，偏振方向沿 x 方向(见图 9.21)的电磁波，施加在电子上的驱动力为

$$F_{驱动} = qE = qE_0\cos(\omega t) \tag{9.153}$$

式中，q 是电子电荷；E_0 是电子所在处电磁波的振幅。(因只对一点感兴趣，时钟设定为 $t=0$ 时 E 最大。)把这些力代入牛顿第二定律有

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_{总} = F_{约束} + F_{阻尼} + F_{驱动}$$

或

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + m\omega_0^2x = qE_0\cos(\omega t) \tag{9.154}$$

即在我们的模型中，电子运动由一个阻尼谐振子方程描述，驱动力角频率为 ω。(我假设了质量很大的原子核保持静止。)

如果我们把式(9.154)作为复数方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{x}}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\tilde{x} = \frac{q}{m}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{9.155}$$

的实部，则更易处理。在稳定时，系统将以驱动频率振动：

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{9.156}$$

把它代入式(9.155)，我们得到

$$\tilde{x}_0 = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma\omega}E_0 \tag{9.157}$$

电偶极矩是下式的实部。

$$\tilde{p}(t) = q\tilde{x}(t) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma\omega}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{9.158}$$

分母中的虚部项意味着 p 与 E 相位不同——滞后一个角度 $\arctan[\gamma\omega/(\omega_0^2-\omega^2)]$。这个角度当 $\omega << \omega_0$ 时很小，而当 $\omega >> \omega_0$ 时，趋于 π。

一般地，在一个分子中不同位置的电子会感受到不同的频率和阻尼系数。假设在每一个分子中有 f_j 个电子具有频率 ω_j 和阻尼 γ_j。如果单位体积内有 N 个分子，则电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 由下式实部给出[⊖]

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \frac{Nq^2}{m}\left(\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma_j\omega}\right)\tilde{\boldsymbol{E}} \tag{9.159}$$

我曾定义过电极化率是 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 间的比例常数(具体讲，$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}$)。在现在的情形下 $\boldsymbol{P}$ 不再正比于 $\boldsymbol{E}$(严格讲，这不是一个线性介质)，因为它们不同相。但复电极化强度 $\tilde{\boldsymbol{P}}$ 是正比于复电场 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 的，这提示我们可引进一个复电极化率，$\tilde{\chi}_e$：

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \varepsilon_0\tilde{\chi}_e\tilde{\boldsymbol{E}} \tag{9.160}$$

这样可继续延用以前的推导，不过现在，正如实际的电场是 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 的实部一样，实际的电极化强度是 $\tilde{\boldsymbol{P}}$ 的实部。特别有，$\tilde{\boldsymbol{D}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 间的比例系数是复介电常数 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0(1+\tilde{\chi}_e)$，(在这个模型中的)复(相对)介电常数是

$$\tilde{\varepsilon}_r = 1 + \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma_j\omega} \tag{9.161}$$

通常情况下，虚部项可以略去，但当 ω 非常接近某个共振频率(ω_j)时，我们将会看到，虚部将起着重要的作用。

在色散介质中，一个给定频率的波方程是

$$\nabla^2\tilde{\boldsymbol{E}} = \tilde{\varepsilon}\mu_0\frac{\partial^2\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} \tag{9.162}$$

同前一样，存在平面波解

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \tilde{\boldsymbol{E}}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tilde{k}z-\omega t)} \tag{9.163}$$

式中，复波数

$$\tilde{k} \equiv \sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu_0\omega} \tag{9.164}$$

把它写成实部和虚部的形式，

$$\tilde{k} = k + \mathrm{i}\kappa \tag{9.165}$$

式(9.163)变为

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \tilde{\boldsymbol{E}}_0\mathrm{e}^{-\kappa z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{9.166}$$

显然，波是衰减的(这一点也不奇怪，因为阻尼吸收能量)。因为波的强度正比于 E^2(也因此正比于 $\mathrm{e}^{-2\kappa z}$)，量

$$\alpha \equiv 2\kappa \tag{9.167}$$

称为**吸收系数**。此外，波速是 ω/k，折射率为

$$n = \frac{ck}{\omega} \tag{9.168}$$

⊖ 这直接适用于稀有气体情形；对密度大的材料理论稍有修改，以便与 Clausius-Mossotti 方程一致(习题 4.38)。另外，不要把介质的电极化强度 P 与波的偏振混淆——(英文)名字一样，但意义完全无关。

这里我故意用了与9.4.1小节中类似的符号。但对现在的情况，k 和 κ 与电导率无关，它们由阻尼谐振子的参数确定。对于气体，式(9.161)的第二项是小量，平方根(式(9.164))可近似由二项式展开的第一项 $\sqrt{1+\varepsilon}\cong 1+\frac{1}{2}\varepsilon$ 得到，故有

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\tilde{\varepsilon}_r} \cong \frac{\omega}{c}\left[1 + \frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma_j\omega}\right] \tag{9.169}$$

所以有

$$n = \frac{ck}{\omega} \cong 1 + \frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2} \tag{9.170}$$

和

$$\alpha = 2\kappa \cong \frac{Nq^2\omega^2}{m\varepsilon_0 c}\sum_j \frac{f_j\gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2} \tag{9.171}$$

在图9.22中画出了在一个共振频率附近的折射率和吸收系数。折射率在大多数时间里随着频率的增加而增加，与光学(见图9.19)实验一致。但在共振频率附近折射率下降很快。因为这个行为反常，故称为**反常色散**。注意反常色散区域(在图中，$\omega_1 < \omega < \omega_2$)与吸收最大区域一致。事实上，材料在这个区域实际可能是不透明的，原因是我们在电子“适合的”频率驱动电子，它们的振荡振幅相对较大，相应地，大量能量由于阻尼作用而被耗散掉。

在图9.22中，n 在共振频率上小于1，意味着波的速度超过 c。如前所述，对此不必惊讶，因为能量不是以波的速度，而是以群速度传播(参看习题9.25)。而且，图中没有包含求和项中其他项的贡献，这些项附加一个相对恒定的“背景”量，在某些情况下使共振两边保持 $n>1$。

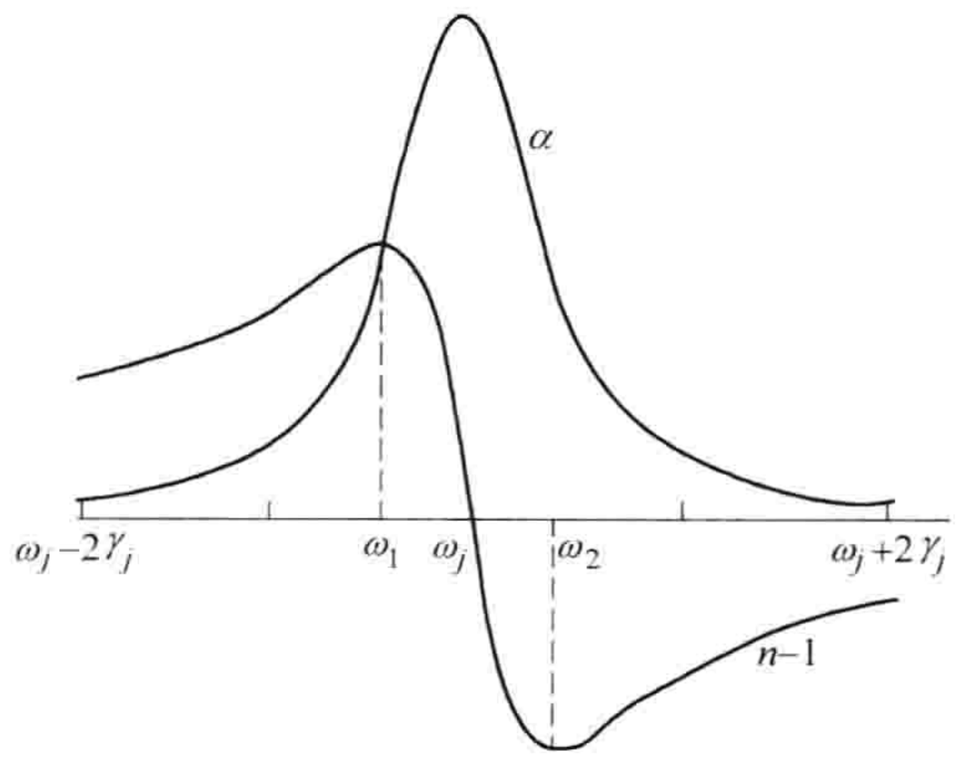


图 9.22

如果远离共振频率，阻尼可以忽略，折射率公式可简化为

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2} \tag{9.172}$$

对于大多数的材料，固有角频率 ω_j 无序地分布在整个光谱中。但对透明材料，最邻近的显著的共振频率一般在紫外区域，故 $\omega < \omega_j$。在这种情况下

$$\frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_j^2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right)^{-1} \cong \frac{1}{\omega_j^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right)$$

式(9.172)取形式

$$n = 1 + \left(\frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2}\right) + \omega^2\left(\frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^4}\right) \tag{9.173}$$

或者，用真空中的波长($\lambda = 2\pi c/\omega$)表示

$$n = 1 + A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right) \tag{9.174}$$

这称为**柯西**(Cauchy)**公式**。常数 A 称为**折射系数**，B 称为**色散系数**。柯西公式在可见光区域对大多数气体是适用的。

当然本节所讨论的不是非导体介质中色散的全部内容。然而，确实指出了电子的阻尼谐振如何使折射率依赖于频率，解释了为何通常 n 随着角频率 ω 增大而缓慢增大，而在特殊的“反常”

区域它陡然下降。

习题 9.22

(a) 浅水是非色散的，波的传播速度正比于深度的平方根。但对于深水，波不能“感知”水深——它们认为深度与波长 λ 差不多。(实际上，“浅”和“深”本身依赖于波长：如果深度小于波长水就是“浅的”；如果远大于波长，水就是“深的”。)证明深水中的波速是群速的二倍。

(b) 在量子力学中在 x 方向传播的质量为 m 的自由粒子由下面波函数描述

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(px-Et)/\hbar}$$

式中，p 是动量，$E=p^2/2m$ 是动能。计算群速和波速。哪一个是粒子的经典速度？注意波速是群速的一半。

习题 9.23　如果在例题 4.1 中的模型里的球面上取值，计算的固有角频率是多少？利用实际数据，如果设原子半径为 0.5Å，在电磁波谱中它处在何处？求折射系数和色散系数，并与零度一个大气压下氢气的值比较：$A=1.36\times10^{-4}$，$B=7.7\times10^{-15}\text{m}^2$。

习题 9.24　对于单个共振角频率 ω_0，求反常色散区域的宽度。设 $\gamma \ll \omega_0$，证明折射率呈现最大和最小值处，吸收系数是最大值的一半。

习题 9.25　如果忽略阻尼($\gamma_j=0$)，计算由式(9.166)和式(9.169)描述的波的群速度($v_g=\text{d}\omega/\text{d}k$)。证明即使 $v>c$，仍有 $v_g<c$。

9.5　波导

9.5.1　波导

目前，我们处理的是无限扩展的平面波，现在我们考虑限制在一个空管内的电磁波，或称为**波导**(见图 9.23)。假定波导是一个理想导体，即在材料内有 $\boldsymbol{E}=0$ 和 $\boldsymbol{B}=0$，故在其内壁的边界条件是[⊖]

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\ \boldsymbol{E}^{\parallel}=0\\&\text{(ii)}\ B^{\perp}=0\end{aligned}\right\}\qquad(9.175)$$

在表面感应产生的自由电荷和电流将遵从这个限制。我们对沿管轴传播的单色波感兴趣，故 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的形式是

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\ \tilde{\boldsymbol{E}}(x,y,z,t)=\tilde{\boldsymbol{E}}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}\\&\text{(ii)}\ \tilde{\boldsymbol{B}}(x,y,z,t)=\tilde{\boldsymbol{B}}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}\end{aligned}\right\}\qquad(9.176)$$

(对于感兴趣的情形，k 是实数，故略去其上面的 ~ 号。)在波导内部，电磁场必须满足麦克斯韦方程：

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\quad\text{(iii)}\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\&\text{(ii)}\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad\text{(iv)}\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\qquad(9.177)$$

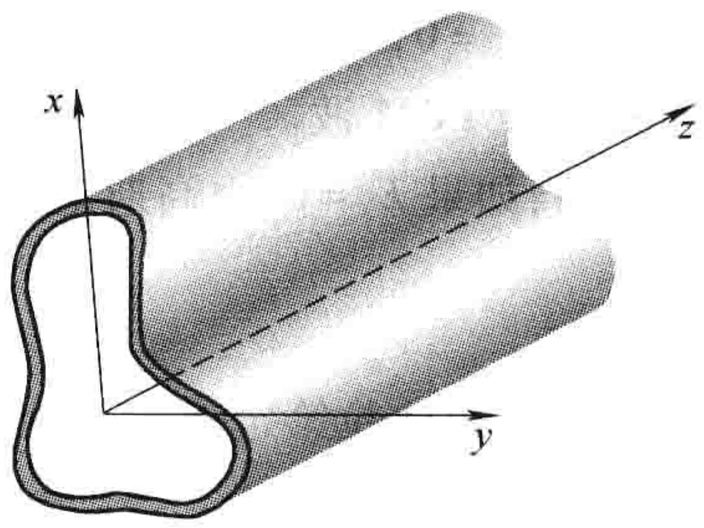


图　9.23

⊖ 参看式(9.139)和习题 7.42。在理想导体中 $\boldsymbol{E}=0$，故(由法拉第定律)$\partial\boldsymbol{B}/\partial t=0$。如果磁场最初为零，它将保持为零。

这样，所求问题就是在边界条件式(9.175)下求满足偏微分方程式(9.177)的场函数 $\tilde{\boldsymbol{E}}_0$和 $\tilde{\boldsymbol{B}}_0$(式(9.176))。

如我们将要看到的，被限制的波(一般)不是横波。为了适应边界条件我们不得不加入纵波分量(E_z 和 B_z)：[⊖]

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_0 = E_x\hat{\boldsymbol{x}} + E_y\hat{\boldsymbol{y}} + E_z\hat{\boldsymbol{z}}, \quad \tilde{\boldsymbol{B}}_0 = B_x\hat{\boldsymbol{x}} + B_y\hat{\boldsymbol{y}} + B_z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.178}$$

式中，每个分量均是 x 和 y 的函数。把它代入麦克斯韦方程(iii)和(iv)，得到(习题9.26a)

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \mathrm{i}\omega B_z, \quad \text{(iv)}\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2}E_z \\
&\text{(ii)}\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathrm{i}kE_y = \mathrm{i}\omega B_x, \quad \text{(v)}\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \mathrm{i}kB_y = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2}E_x \\
&\text{(iii)}\ \mathrm{i}kE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mathrm{i}\omega B_y, \quad \text{(vi)}\ \mathrm{i}kB_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2}E_y
\end{aligned}\right\} \tag{9.179}$$

由式(ii)，式(iii)，式(v)和式(vi)可解出 E_x，E_y，B_x 和 B_y：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(i)}\ E_x = \frac{\mathrm{i}}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\frac{\partial B_z}{\partial y}\right) \\
&\text{(ii)}\ E_y = \frac{\mathrm{i}}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \\
&\text{(iii)}\ B_x = \frac{\mathrm{i}}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) \\
&\text{(iv)}\ B_y = \frac{\mathrm{i}}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{9.180}$$

由这些方程可以去确定纵向分量 E_z 和 B_z。如果我们解出了这些量，通过求偏微分可求出其他量。把式(9.180)代入其余的麦克斯韦方程(习题9.26b)，得到独立的 E_z 和 B_z 的方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2\right]E_z = 0 \\
&\text{(ii)}\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2\right]B_z = 0
\end{aligned}\right\} \tag{9.181}$$

如果 $E_z=0$，则称为 **TE**(“横向电”)波；如果 $B_z=0$，则称为 **TM**(“横向磁”)波；如果 $E_z=0$，$B_z=0$，则称为 **TEM** 波。[⊜]可证明在中空波导中 TEM 波不能发生。

证明：如果 $E_z=0$，由高斯定理(式(9.177)i)，

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

如果 $B_z=0$，由法拉第定律，

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

这样式(9.178)中的 $\tilde{\boldsymbol{E}}_0$，其散度和旋度均为零，故它可写成一个标量势的梯度，该标量势满足拉普拉斯方程。但 $\boldsymbol{E}$(式(9.175))的边界条件要求表面是一个等势面，又因拉普拉斯方程没有局域极大和极小值(由3.1.4小节)，这意味着势是个常数，故电场为零——根本不存在波。(证毕)

⊖ 为了避免繁琐，对分量省去了下标0及上面的符号。

⊜ 对于 TEM 波的情形(包括9.2节中的非限制平面波)，$k=\omega/c$，式(9.180)不确定，必须回到式(9.179)。

注意,这个结论仅适用于空管——如果你在管中间放置一个导线,它表面的势与外壁不一定相同,因此可有非平凡的势。我们将在 9.5.3 小节看到这样的例子。

习题 9.26

(a) 推导出式(9.179),并从这些方程得出式(9.180)。

(b) 把式(9.180)代入麦克斯韦方程式(i)和式(ii),导出式(9.181)。检验用式(9.179)的式(i)和式(iv)可得出同样的结果。

9.5.2　矩形波导中的 TE 波

假设我们有一个矩形波导(见图 9.24),高为 a,宽为 b,我们来求解 TE 波的传播。这个问题是在边界条件式(9.175)ii 下,求解式(9.181)ii。我们通过分离变量求解。令

$$B_z(x,y) = X(x)Y(y)$$

有

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} + [(\omega/c)^2 - k^2]XY = 0$$

两边除以 XY 并注意到依赖于 x 和 y 的项必须是常数:

$$\text{(i)}\ \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2, \quad \text{(ii)}\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2 \tag{9.182}$$

式中

$$-k_x^2 - k_y^2 + (\omega/c)^2 - k^2 = 0 \tag{9.183}$$

式(9.182)i 的一般解是

$$X(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)$$

但边界条件要求在 $x=0$ 和 $x=a$ 处,B_z 为零,故需(式(9.180)iii)dX/dx 为零。所以 $A=0$,且

$$k_x = m\pi/a, \quad (m = 0,1,2,\cdots) \tag{9.184}$$

对 Y 是同样的,有

$$k_y = n\pi/b, \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{9.185}$$

最后有

$$B_z = B_0\cos(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b) \tag{9.186}$$

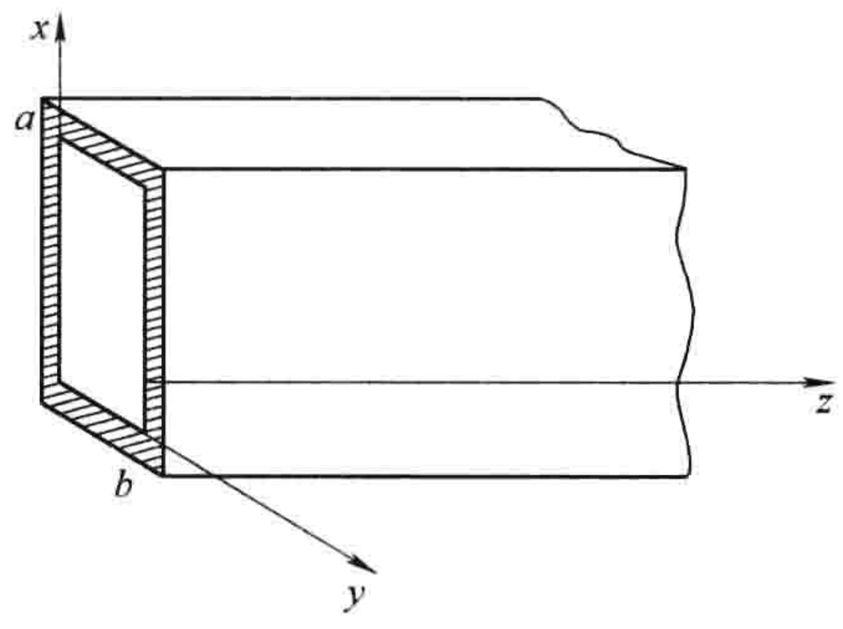


图　9.24

这个解称为 $\mathbf{TE}_{mn}$ 模式。(通常第一个指数与波导的宽边相联系,故假设 $a \geqslant b$。另外,至少一个指数不为零——参看习题 9.27。)波数(k)由把式(9.184)和式(9.185)代入式(9.183)得到:

$$k = \sqrt{(\omega/c)^2 - \pi^2[(m/a)^2 + (n/b)^2]} \tag{9.187}$$

如果

$$\omega < c\pi\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \equiv \omega_{mn} \tag{9.188}$$

波数将是复数,场将指数衰减而不是行波(式(9.176))。由于这个原因 ω_{mn} 称为这个模式的**截断频率**。对于模式 $\mathbf{TE}_{10}$ 一个给定波导的最低截断频率是

$$\omega_{10} = \frac{c\pi}{a} \tag{9.189}$$

低于这个频率的波将不能传播。

利用截断频率,波数可写成更简单的形式:

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2} \tag{9.190}$$

波速是

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}} \tag{9.191}$$

这比 c 大。然而(参看习题 9.29),波携带的能量以群速度传播(式(9.150)):

$$v_g = \frac{1}{\mathrm{d}k/\mathrm{d}\omega} = c\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2} < c \tag{9.192}$$

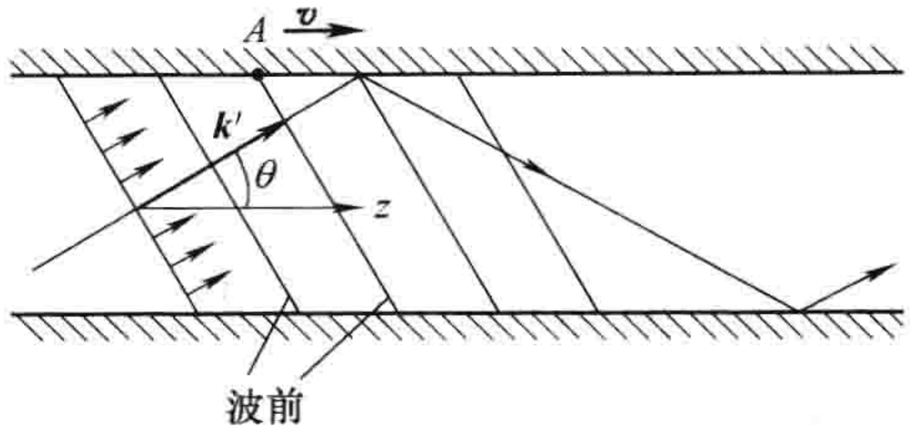


图 9.25

有另一个途径观察一个电磁波在一个矩形管道中的传播,它可以阐明很多所得的结果。考虑一个普通平面波,以与 z 轴成 θ 角的方向传输,在导体表面被全反射(见图 9.25)。在 x 和 y 方向(多重反射的)波互相干涉,形成驻波,波长分别为 $\lambda_x = 2a/m$ 和 $\lambda_y = 2b/n$(故波数为 $k_x = 2\pi/\lambda_x = \pi m/a$ 和 $k_y = \pi n/b$)。同时,在 z 方向上仍为行波,波数为 $k_z = k$。所以"最初"平面波的传播矢量是

$$\boldsymbol{k}' = \frac{\pi m}{a}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\pi n}{b}\hat{\boldsymbol{y}} + k\hat{\boldsymbol{z}}$$

角频率是

$$\omega = c\,|\boldsymbol{k}'| = c\sqrt{k^2 + \pi^2[(m/a)^2 + (n/b)^2]} = \sqrt{(ck)^2 + (\omega_{mn})^2}$$

只有以某些角度入射才能导致允许的驻波图样产生:

$$\cos\theta = \frac{k}{|\boldsymbol{k}'|} = \sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}$$

平面波的传播速度是 c,但因为它以 θ 角度入射,沿波导的速度是

$$v_g = \cos\theta = c\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}$$

另一方面,波速是沿着管子的波前的速度(见图 9.25*A*)。正如波浪线与海滩的交汇点,它们的移动速度比波自身的速度能够快很多——事实上

$$v = \frac{c}{\cos\theta} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}}$$

习题 9.27 证明 TE_{00} 模式在矩形波导中不能产生。[提示:在这种情形中 $\omega/c = k$,所以式(9.180)是不确定的,必须回到式(9.179)。证明 B_z 是常量,因此——对一个截面应用法拉第定律的积分形式——$B_z = 0$,所以这会是一个 TEM 模式。]

习题 9.28 考虑尺寸为 2.28cm × 1.01cm 的矩形波导。如果驱动频率是 1.70×10^{10} Hz,在波导中什么 TE 模式将传播?假设你仅想激发一个 TE 模式,应选用什么频率范围?相应的波长是什么(在开放空间)?

习题 9.29 证明在 TE_{mn} 模式能量以群速度传播。[提示:求时间平均的坡印廷矢量 $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ 和能量密度 $\langle u \rangle$(如果愿意,可利用习题 9.11 的结果)。对波导截面积分,求单位时间和单位长度波携带的能量,并取它们的比值。]

习题 9.30 求出矩形波导的 TM 模式理论表示。特别地,求出纵电场、截断频率、波速和群速。对于一个给定的波导,求出最低 TM 模式截断频率和最低 TE 模式截断频率之比。[注意:最低的 TM 模式是什么?]

9.5.3　共轴传输线

在 9.5.1 小节，证明了中空的波导不能传输 TEM 模式波。但在一个由半径为 a 的长导体线和一个内径为 b 的圆柱形导体壳所组成的长直共轴传输线中（见图 9.26），却能使 $E_z=0$ 和 $B_z=0$ 的模式存在。在此情形下由麦克斯韦方程（式(9.179)的形式）得

$$k = \omega/c \tag{9.193}$$

（故波以速度 c 传播，没有色散），

$$cB_y = E_x, \quad cB_x = -E_y \tag{9.194}$$

（故 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 互相垂直），且（加上$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$）：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \tag{9.195}$$

这些就是二维真空中的静电场和磁场的方程。具有柱对称的解可分别直接借用无限长线电荷及无限长直线电流的结果：

$$\boldsymbol{E}_0(s,\phi)=\frac{A}{s}\hat{\boldsymbol{s}}, \quad \boldsymbol{B}_0(s,\phi)=\frac{A}{cs}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{9.196}$$

式中，A 是某一常数。把这些代入式(9.176)，取实部：

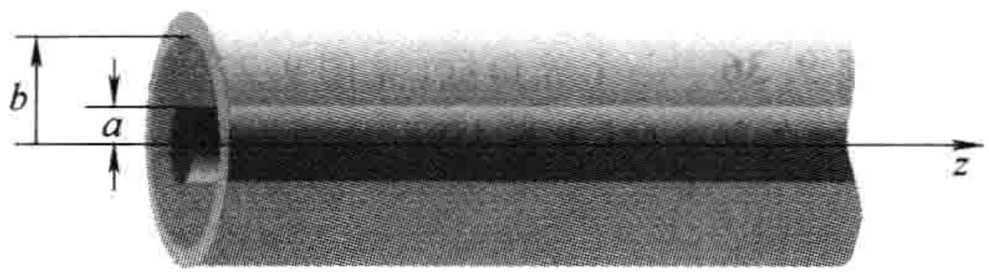


图　9.26

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}(s,\phi,z,t)&=\frac{A\cos(kz-\omega t)}{s}\hat{\boldsymbol{s}} \\ \boldsymbol{B}(s,\phi,z,t)&=\frac{A\cos(kz-\omega t)}{cs}\hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned}\right\} \tag{9.197}$$

习题 9.31

（a）直接证明式(9.197)满足麦克斯韦方程式(9.177)和边界条件式(9.175)。

（b）求在内部导体上的电荷线密度 $\lambda(z,t)$ 和电流 $I(z,t)$。

第 9 章补充习题

！ **习题 9.32**　傅里叶变换中的“互逆定理”是

$$\tilde{\phi}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}(k)e^{ikz}dk \Leftrightarrow \tilde{\Phi}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\phi}(z)e^{-ikz}dz \tag{9.198}$$

利用这个变换及 $f(z,0)$ 和 $\dot{f}(z,0)$ 确定式(9.20)中的 $\tilde{A}(k)$。

$\left[\text{答案：}(1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}[f(z,0)+(i/\omega)\dot{f}(z,0)]e^{-ikz}dz\right]$

习题 9.33　假设

$$\boldsymbol{E}(r,\theta,\phi,t)=A\frac{\sin\theta}{r}[\cos(kr-\omega t)-(1/kr)\sin(kr-\omega t)]\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad c=\omega/k$$

（顺便说明，这是最简单的**球面波**。为了方便，在计算中令$(kr-\omega t)\equiv u$。）

（a）证明 $\boldsymbol{E}$ 满足真空中的所有四个麦克斯韦方程。求相应的磁场。

（b）计算坡印廷矢量。对 $\boldsymbol{S}$ 求一个周期的平均，得出波的强度矢量 $\boldsymbol{I}$。

（它指向预想的方向吗？它以应有的 r^{-2} 方式衰减吗？）

（c）在一个球面上对 $\boldsymbol{I}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 求积分，确定总的辐射功率。［答案：$4\pi A^2/3\mu_0 c$］

！ **习题 9.34** （角）频率为 ω 的光，从介质 1 经过介质 2 薄板（厚度为 d）进入介质 3（例如，从水中经过玻璃进入空气中，如图 9.27 所示）。证明垂直入射时透射系数由下式给出

$$T^{-1} = \frac{1}{4n_1 n_3}\left[(n_1+n_3)^2 + \frac{(n_1^2-n_2^2)(n_3^2-n_2^2)}{n_2^2}\sin^2\left(\frac{n_2\omega d}{c}\right)\right] \tag{9.199}$$

［提示：在左边有入射波和反射波，右边有透射波。在薄板内有向右及向左的波。用复振幅分别表示出它们，并把振幅通过在两界面的适当的边界条件联系起来。三个介质都是线性均匀的，设 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_0$。］

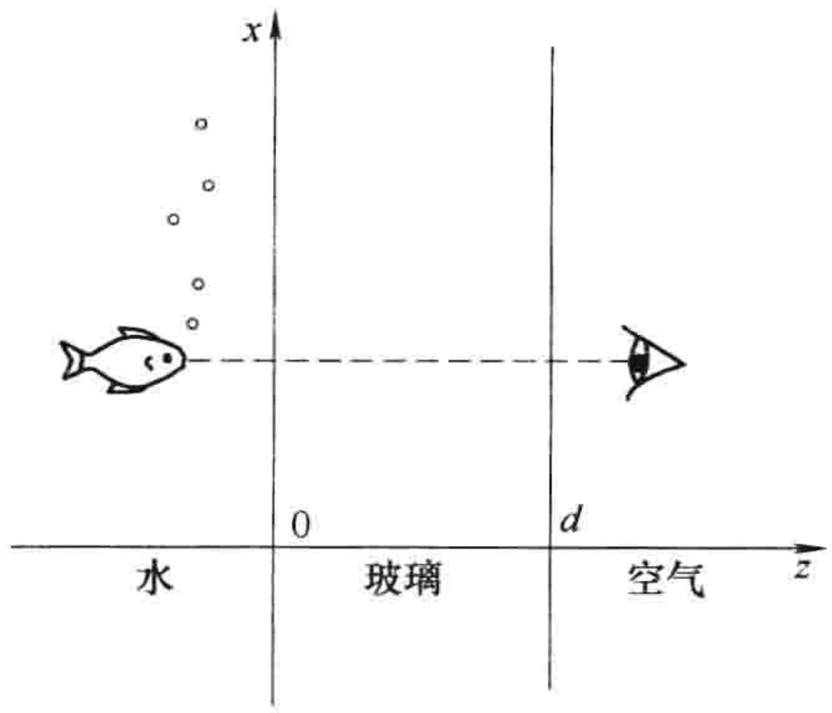


图 9.27

习题 9.35 一个微波天线，辐射频率为 10GHz，用介电常数为 2.5 的塑料罩与环境屏蔽。要让辐射的电磁波完全透射，则屏蔽塑料罩的最小厚度是多少（假设垂直入射）？［提示：利用式（9.199）］

习题 9.36 一个养鱼缸（见图 9.27）的光线从水中（$n=4/3$）通过玻璃板（$n=3/2$）进入空气中（$n=1$）。假设光是单色平面波，垂直入射，求最小和最大透射系数（式（9.199））。你能清楚地看到鱼，而它看你的情形怎样？

！ **习题 9.37** 根据斯涅耳定律，当光线从光密介质进入光疏介质（$n_1>n_2$）时，传播矢量 $\boldsymbol{k}$ 向远离法线方向偏折（见图 9.28）。特别地，如果光线以**临界角**

$$\theta_c \equiv \arcsin(n_2/n_1) \tag{9.200}$$

入射，$\theta_T=90°$，透射光线仅掠过表面。如果 θ_I 超过 θ_c，则折射光线完全消失，只有反射光线（这个现象称为**全反射**，导光管和光纤就是据此制成的）。但在介质 2 中场并不为零，我们得到的是所谓的**瞬逝波**，这种波迅速衰减，不向介质 2 中传输能量。㊀

一个快捷构造瞬逝波的方法是利用 9.3.3 小节的结果，这里 $k_T=\omega n_2/c$，

$$\boldsymbol{k}_T = k_T(\sin\theta_T\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta_T\hat{\boldsymbol{z}})$$

仅有的变化是现在

$$\sin\theta_T = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_I$$

大于 1，及

$$\cos\theta_T = \sqrt{1-\sin^2\theta_T} = \mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_T - 1}$$

是虚数。（显然，θ_T 不能再被解释成角度！）

（a）证明

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_T(\boldsymbol{r},t) = \tilde{\boldsymbol{E}}_{0T}\mathrm{e}^{-\kappa z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} \tag{9.201}$$

式中

$$\kappa \equiv \frac{\omega}{c}\sqrt{(n_1\sin\theta_I)^2 - n_2^2}; \quad k \equiv \frac{\omega n_1}{c}\sin\theta_I \tag{9.202}$$

这是一个在 x 方向传播的波（平行于界面！），并在 z 方向衰减。

（b）注意，现在 α（式（9.108））是虚数，利用式（9.109）计算偏振方向平行于入射面的波的反射系数。［注意，你得到 100% 的反射，这比在一个导体表面的反射更好（参看习题 9.21）。］

㊀ 通过放置第二个界面在第一个界面右侧附近，可以探测瞬逝波。与量子隧穿类似，波穿过缝隙在右边再出现。参见 F. Albiol, S. Navas, and M. V. Andres, Am. J. Phys. 61, 165 (1993)。

(c) 同样求解偏振方向垂直于入射面时的情形(利用习题 9.16 的结果)。

(d) 对于偏振方向垂直于入射面的情形,证明(实)瞬逝波场为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= E_0 e^{-\kappa z}\cos(kx-\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{E_0}{\omega}e^{-\kappa z}[\kappa\sin(kx-\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + k\cos(kx-\omega t)\hat{\boldsymbol{z}}] \end{aligned}\right\} \tag{9.203}$$

(e) 验证(d)中的场满足麦克斯韦方程式(9.67)。

(f) 对(d)中的场,构造坡印廷矢量,证明在 z 方向传输的能量平均值为零。

! **习题 9.38**　考虑一个共振腔,由矩形波导把两端 $z=0$ 和 $z=d$ 密封构成,形成了一个理想的导体空盒。证明对 TE 和 TM 模式,共振频率为

$$\omega_{lmn} = c\pi\sqrt{(l/d)^2 + (m/a)^2 + (n/b)^2} \tag{9.204}$$

式中,l,m 和 n 为整数。求出相应的电场和磁场。

第10章　势　和　场

10.1　势表述

10.1.1　标势与矢势

在本章中，我们探究源(ρ 和 $\boldsymbol{J}$)怎样产生电场和磁场，换句话说，我们寻求麦克斯韦方程，

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)}\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \quad \text{(iii)}\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ &\text{(ii)}\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \quad \text{(iv)}\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

的普遍解。即给定 $\rho(\boldsymbol{r},\ t)$ 和 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},\ t)$，如何确定场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)$ 和 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\ t)$？对于静态情形，库仑定律和毕奥-萨伐尔定律给出了解。我们在这里寻求的则是依赖于时间的这些定律的普遍情形的解。

这不是一个容易的问题，它需要从用势表示出场开始。在静电学中 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，这使我们可以把场 $\boldsymbol{E}$ 写成标量势的梯度形式：$\boldsymbol{E}=-\nabla V$。在电动力学中，这个关系式不再成立，因为 $\boldsymbol{E}$ 的旋度不再是零。但与在静磁学中一样，$\boldsymbol{B}$ 的散度依然为零，所以我们仍然有

$$\boxed{\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},} \tag{10.2}$$

把它代入法拉第定律(iii)式有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

或

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0$$

括号中的量，与单独的 $\boldsymbol{E}$ 不同，它可写成一个标量的梯度：

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla V$$

则以 V 和 $\boldsymbol{A}$ 表示，有

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{10.3}$$

当然，这个式子，当 $\boldsymbol{A}$ 取常数时回到原来的形式。

势表示式(10.2)和式(10.3)自动满足麦克斯韦方程(ii)和(iii)。高斯定理(i)和安培-麦克斯韦定理(iv)又如何呢？把式(10.3)代入(i)，我们得到

$$\nabla^2V+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{10.4}$$

它代替了泊松方程(从它可以回到静电学的形式)。把式(10.2)和式(10.3)代入(iv)得到

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mu_0\boldsymbol{J}-\mu_0\varepsilon_0\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}$$

或者利用矢量关系 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$，重新整理：

$$\left(\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right)-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right)=-\mu_0\boldsymbol{J} \tag{10.5}$$

式(10.4)和式(10.5)包含了麦克斯韦方程的所有信息。

例题 10.1

求产生下面势的电荷和电流分布：

$$V=0,\ \boldsymbol{A}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 k}{4c}(ct-|x|)^2\hat{\boldsymbol{z}}, & |x|<ct\\ 0, & |x|>ct\end{cases}$$

式中，k 是常数，$c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$。

解： 首先，利用式(10.2)和式(10.3)确定电场和磁场，

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{\mu_0 k}{2}(ct-|x|)\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=-\frac{\mu_0 k}{4c}\frac{\partial}{\partial x}(ct-|x|)^2\hat{\boldsymbol{y}}=\pm\frac{\mu_0 k}{2c}(ct-|x|)\hat{\boldsymbol{y}}$$

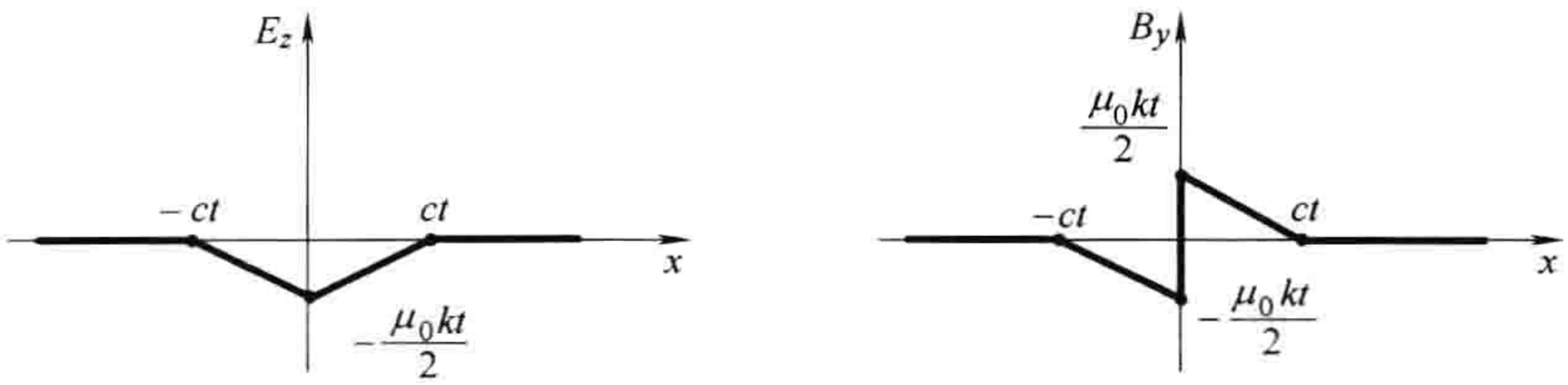


图　10.1

($x>0$ 取正号，$x<0$ 取负号)。以上这些是 $|x|<ct$ 时的情形，对于 $|x|>ct$，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}=0$(见图 10.1)。对每个量求导得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0;\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0;\ \nabla\times\boldsymbol{E}=\mp\frac{\mu_0 k}{2}\hat{\boldsymbol{y}};\ \nabla\times\boldsymbol{B}=-\frac{\mu_0 k}{2c}\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=-\frac{\mu_0 kc}{2}\hat{\boldsymbol{z}};\ \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\pm\frac{\mu_0 k}{2}\hat{\boldsymbol{y}}$$

很容易验证它们满足麦克斯韦方程，且 ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 都为零，但是要注意在 $x=0$ 点，$\boldsymbol{B}$ 是不连续的，这意味着在 yz 面有表面电流 $\boldsymbol{K}$。由式(7.63)的边界条件(iv)得出

$$kt\,\hat{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{K}\times\hat{\boldsymbol{x}}$$

所以

$$\boldsymbol{K}=kt\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

显然有一个沿 z 方向在 $x=0$ 面上的均匀表面电流。这个电流在 $t=0$ 时开始，并与 t 成正比地增加。注意，信息以光速传播出去(向两个方向)：对于 $|x|>ct$ 的点，信息(电流正在流动)还没有到达，所以场是零。

习题 10.1　证明 V 和 $\boldsymbol{A}$ 的微分方程(式(10.4)和式(10.5))，可以写成下面更对称的形式

$$\left.\begin{aligned}\Box^2 V+\frac{\partial L}{\partial t}&=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\\ \Box^2\boldsymbol{A}-\nabla L&=-\mu_0\boldsymbol{J}\end{aligned}\right\}\tag{10.6}$$

式中

$$\Box^2\equiv\nabla^2-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2},\ L\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$$

习题 10.2　对例题 10.1 中的构型，考虑一边长为 l，宽为 w，高为 h 的长方形盒子放在距 yz 面高为 d 的地方(见图 10.2)。

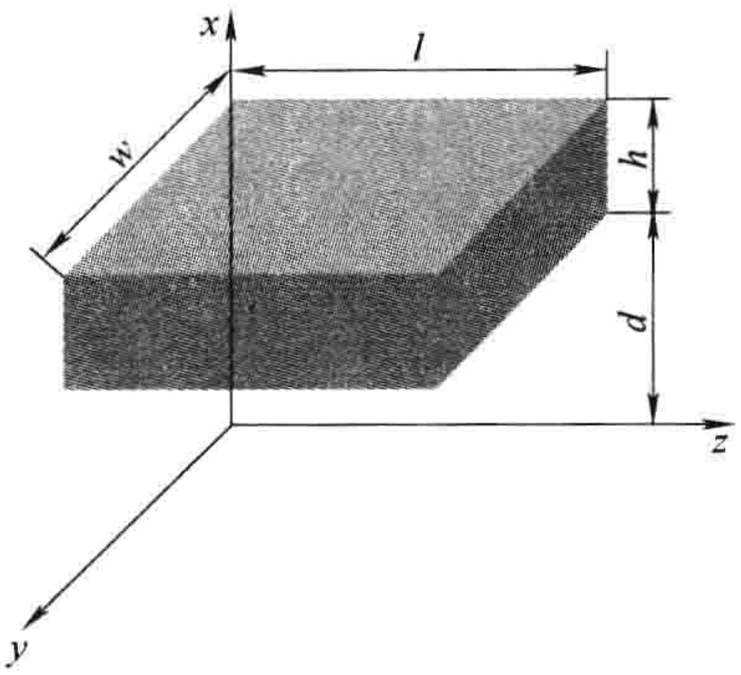


图 10.2

(a) 求在时间 $t_1 = d/c$ 和 $t_2 = (d+h)/c$ 时，盒子中的能量。

(b) 求出坡印廷矢量。确定在时间间隔 $t_1 < t < t_2$ 内，单位时间流入盒子的能量。

(c) 从 t_1 到 t_2，对(b)中的结果积分，证实能量的增加(由(a)得到)等于净流入量。

10.1.2 规范变换

式(10.4)和式(10.5)不太优美，你们也许倾向于放弃这种形式的处理方法。然而，我们成功地把六个问题——求解 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$(每个量有三个分量)——缩减为四个：求解 V(一个分量)和 $\boldsymbol{A}$(三个分量)。此外，式(10.2)和式(10.3)不能唯一地定义势：只要不影响 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，我们可以自由地对 V 和 $\boldsymbol{A}$ 附加额外条件。让我们精确地给出什么是**规范自由度**。假设我们有两套势(V，$\boldsymbol{A}$)和(V'，$\boldsymbol{A}'$)，它们对应相同的电场和磁场。它们可以有怎样的不同？设

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha}, \quad V' = V + \beta$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$要给出同样的 $\boldsymbol{B}$，它们的旋度必须相等，故

$$\nabla \times \boldsymbol{\alpha} = 0$$

因此我们可以把 $\boldsymbol{\alpha}$ 写成某个标量的梯度

$$\boldsymbol{\alpha} = \nabla \lambda$$

这两个势也要给出同样的 $\boldsymbol{E}$，所以

$$\nabla \beta + \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0$$

或

$$\nabla \left(\beta + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) = 0$$

括号中的项因此不依赖于坐标(然而它可以依赖于时间)，称它为 $k(t)$，

$$\beta = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + k(t)$$

事实上，我们可以把 $k(t)$ 吸收进 λ 中，通过增加一项 $\int_0^t k(t')\,\mathrm{d}t'$ 定义一个新的 λ。这不影响 λ 的梯度，它只把 $k(t)$ 加入 $\partial\lambda/\partial t$。这样有，

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}' &= \boldsymbol{A} + \nabla \lambda \\ V' &= V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{10.7}$$

结论：对任何标量函数 λ，我们可以把 $\nabla\lambda$ 加入 $\boldsymbol{A}$，只要我们同时从 V 中减去 $\partial\lambda/\partial t$。这对物理量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 没有任何影响。这种对 V 和 $\boldsymbol{A}$ 的改变称为**规范变换**。它们可用来调整 $\boldsymbol{A}$ 的散度，美

化式(10.4)和式(10.5)。在静磁学中，取$\nabla \cdot \boldsymbol{A}=0$是最合适的式(5.61)。在电动力学情形中，情况就不这么明了，最方便的规范变换依赖于具体的问题。在文献中有许多著名的规范变换。下面将给出两个最流行的。

习题 10.3　对下面的势，求场、电荷和电流分布：

$$V(\boldsymbol{r},\ t)=0,\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

习题 10.4　设$V=0$，$\boldsymbol{A}=A_0\sin(kx-\omega t)\boldsymbol{y}$，其中$A_0$，$\omega$和$k$为常数。求出$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$，并验证它们满足真空中的麦克斯韦方程。对$\omega$和$k$必须施加什么条件？

习题 10.5　利用规范函数$\lambda=-(1/4\pi\varepsilon_0)(qt/r)$变换习题 10.3 中的势，并对结果加以说明。

10.1.3　库仑规范与洛伦兹*规范

库仑规范。如在静磁学中，我们取

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}=0 \tag{10.8}$$

利用这个规范，式(10.4)变为

$$\nabla^2 V=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{10.9}$$

这就是泊松方程。我们已经知道怎样去解它：设在无穷远处$V=0$，

$$V(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{\mathscr{r}}\mathrm{d}\tau' \tag{10.10}$$

然而不要认为——像在静电学中那样，仅由V就能求出$\boldsymbol{E}$，你还需要知道$\boldsymbol{A}$(式(10.3))。

库仑规范中的标势有点令人惊奇：某时刻的势由此时刻电荷的分布立即确定。如果我在实验室移动电荷，在月亮处的势V立刻记录下这个变化。考虑到在狭义相对论中信息的传递不可能超过光速，这听起来有点不可思议。关键是V本身不是一个物理可观测量——在月亮上的人仅能测量$\boldsymbol{E}$，但这将涉及$\boldsymbol{A}$。在库仑规范中，矢势的作用不可忽略，尽管V可以立刻反映ρ的变化，但组合——$\nabla V-(\partial \boldsymbol{A}/\partial t)$并非如此。只有经过足够长的时间，“信息”到达后，$\boldsymbol{E}$才变化。[⊖]

库仑规范的优点是标势的计算非常简单，缺点是$\boldsymbol{A}$的计算比较困难(除了某些特殊的V外)。在库仑规范中$\boldsymbol{A}$的微分方程(式(10.5))为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\varepsilon_0\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) \tag{10.11}$$

洛伦兹规范。在洛伦兹规范中，我们取

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}} \tag{10.12}$$

这种取法是为了消除式(10.5)中的中间项(用习题 10.1 的话来说就是设$L=0$)。由此，

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{J} \tag{10.13}$$

同时，V的微分方程(式(10.4))变为

$$\nabla^2 V-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{10.14}$$

---

* 这应当归功于 H. A. Lorentz 还是 L. V. Lorenz，有许多疑问(参看 J. Van Bladel，IEEE Antennas and Propagation Magazine 33(2)，69(1991)。但所有标准的教科书都是如此，为避免可能的混淆，我这里也这样做。

⊖ 参看 O. L. Brill 和 B. Goodman. Am. J. Phys. 35，832(1967)。

洛伦兹规范的优点在于它对 V 和 $\boldsymbol{A}$ 的处理是相同的：相同的微分算子

$$\boxed{\nabla^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \Box^2} \tag{10.15}$$

（这称为**达朗贝尔**（d'Alembertian）**算子**）同时出现在两个方程中，

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{(i)}\ \Box^2 V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ &\text{(ii)}\ \Box^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \end{aligned}} \tag{10.16}$$

这种平等处理 V 和 $\boldsymbol{A}$ 的方法在狭义相对论中特别有好处，那里达朗伯算子是拉普拉斯算子的自然推广，式(10.16)可认为是泊松方程的四维版本。（同理对波速 c 的波方程，$\Box^2 f = 0$，可认为是拉普拉斯方程的四维版本。）在洛伦兹规范中，V 和 $\boldsymbol{A}$ 满足**非齐次波方程**，在右端（取代零）有一个“源”项。从现在开始，我们将只用洛伦兹规范。全部的电动力学变为求解有指定源的非齐次波方程的问题。这是我们下一节的任务。

习题 10.6 在例题 10.1 和习题 10.3、习题 10.4 中，哪一个势是库仑规范？哪一个是洛伦兹规范？（注意一种规范可以同时是库仑规范和洛伦兹规范。）

习题 10.7 在第 5 章中，我证明了总可以找到一个矢势，它的散度是零（库仑规范）。证明也总能选择 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 (\partial V / \partial t)$ 满足洛伦兹规范要求，假设你知道怎样求解式(10.16)，总有可能选择 $V = 0$ 吗？$\boldsymbol{A} = 0$ 又如何？

10.2 连续分布

10.2.1 推迟势

对于静态情形，式(10.16)变为（四个相同的）泊松方程，

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \quad \nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$$

它具有熟知的解

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\imath} d\tau', \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{\imath} d\tau' \tag{10.17}$$

这里像通常一样，$\imath$ 是源点 $\boldsymbol{r}'$ 距场点 $\boldsymbol{r}$ 的距离（见图 10.3）。现在，电磁“信息”以光速传播。所以，在非静止情况下，这信息不是源“现在”的状态，而是较早时间 t_r（称为推迟时间）当“信息”离开源时的。由于这个信息必须传播一个距离 $\imath$，推迟为 $\imath/c$：

$$\boxed{t_r \equiv t - \frac{\imath}{c}} \tag{10.18}$$

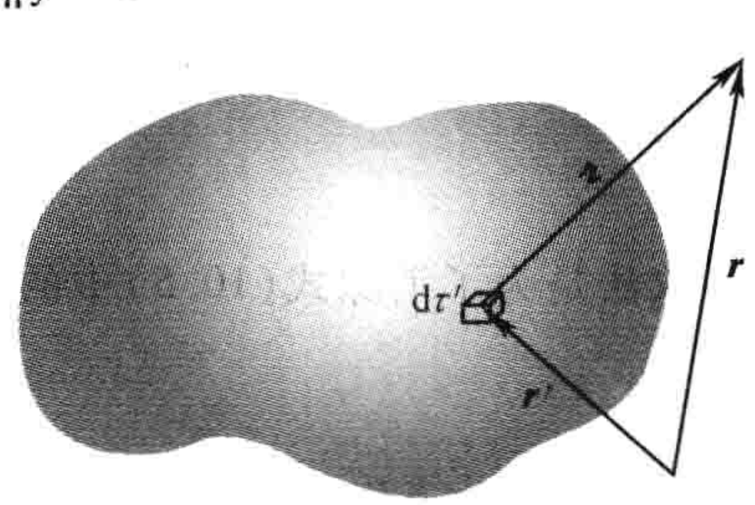


图 10.3

所以，对非静止源，式(10.17)的一个自然推广为

$$\boxed{V(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{\imath} d\tau', \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\imath} d\tau'} \tag{10.19}$$

这里 $\rho(\boldsymbol{r}', t_r)$ 是在推迟时间 t_r 时在点 $\boldsymbol{r}'$ 处的电荷密度。因为积分在推迟时间内进行，它们被称

为**推迟势**。(当然分布较远的电荷比分布较近的电荷有较早的推迟时间。这就像夜空中我们看到的从每个恒星上发出的光的推迟时间对应于恒星距地球的距离。)注意推迟势在静态情形变为式(10.17)，ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 不再依赖于时间。

所有的听起来都很合理——而且令人惊讶地简单。但我们确信它是正确的吗？我没有推导有关 V 和 $\boldsymbol{A}$ 的公式。我做的只是利用启发式的论证("电磁信息以光速传播")使它们看起来有道理。为了证明它们，我们必须证明它们满足非齐次波方程(式(10.16))和洛伦兹条件(式(10.12))。为避免你们认为我过分挑剔，我警告你们，如果对场应用相同的宗量，预期同样的逻辑对库仑定律和毕奥-萨伐尔定律同样有效，则将会得到完全错误的结果：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \neq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{\imath^2}\hat{\boldsymbol{\imath}}\,\mathrm{d}\tau', \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \neq \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t_r)\times\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\mathrm{d}\tau'$$

让我们来验证推迟标势满足式(10.16)；实际上，这也同样适合矢势。[㊀]检验推迟势满足洛伦兹条件将留给你们自己(习题 10.8)。

在计算 $V(\boldsymbol{r},\ t)$ 的拉普拉斯算子时，特别要注意的是积分(在式(10.19)中)在两处依赖 r：显含在分母中的($\imath = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$)和隐含在分子中的 $t_r \equiv t - \imath/c$。所以

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[(\nabla\rho)\frac{1}{\imath} + \rho\nabla\left(\frac{1}{\imath}\right)\right]\mathrm{d}\tau' \tag{10.20}$$

和

$$\nabla\rho = \dot{\rho}\,\nabla t_r = -\frac{1}{c}\dot{\rho}\,\nabla\imath \tag{10.21}$$

(式中的点表示对时间的微分)。[㊁]现在有 $\nabla\imath = \hat{\boldsymbol{\imath}}$ 和 $\nabla(1/\imath) = -\hat{\boldsymbol{\imath}}/\imath^2$(习题 1.13)，故

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath} - \rho\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\right]\mathrm{d}\tau' \tag{10.22}$$

取散度，

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left\{-\frac{1}{c}\left[\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath}\cdot(\nabla\dot{\rho}) + \dot{\rho}\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath}\right)\right] - \left[\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\cdot(\nabla\rho) + \rho\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\right)\right]\right\}\mathrm{d}\tau'$$

但

$$\nabla\dot{\rho} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\,\nabla\imath = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

这同式(10.21)中的一样，并且

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath}\right) = \frac{1}{\imath^2}$$

(习题 1.62)，和

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\right) = 4\pi\delta^3(\boldsymbol{\imath})$$

(式(1.100))。故

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\rho}}{\imath} - 4\pi\rho\delta^3(\boldsymbol{\imath})\right]\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r},t)$$

这证明了推迟势(式(10.19))满足非齐次波方程(式(10.16))。证毕。

㊀ 我将给出直接的但有点繁杂的证明。一个聪明的间接的论证参见 M. A. Heald 和 J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, 3d ed., Sect. 8.1 (Orlando, FL: Saunders(1995))。

㊁ 注意 $\partial/\partial t_r = \partial/\partial t$，因为 $t_r = t - \imath/c$，而 $\imath$ 不依赖于 t。

顺便提及，这个证明同样适用于**超前势**，

$$V_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_{\mathrm{a}})}{\imath}\mathrm{d}\tau',\quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t_{\mathrm{a}})}{\imath}\mathrm{d}\tau' \tag{10.23}$$

式中，电荷密度和电流密度是在**超前时刻**

$$t_{\mathrm{a}}\equiv t+\frac{\imath}{c} \tag{10.24}$$

时的值。一些正负号改变了，但最后的结果不受影响。尽管超前势完全满足麦克斯韦方程，但它违背了物理学的最高原则：因果律。它们意味着现在的势依赖于将来某时刻的电荷和电流分布。换句话说，结果超前于原因。虽然超前势从理论上讲可研究，但它们没有直接的物理意义。⊖

例题 10.2

一无限长直导线载有电流

$$I(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ I_0, & t>0\end{cases}$$

即，一常数电流 I_0 在 $t=0$ 时刻突然出现。求产生的电场和磁场。

解： 设导线是电中性的，则标势为零。让导线沿着 z 轴放置(见图 10.4)；在 P 点处的推迟矢势是

$$\boldsymbol{A}(s,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\hat{\boldsymbol{z}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I(t_{\mathrm{r}})}{\imath}\mathrm{d}z$$

当 $t<s/c$ 时，“信息”还没有到达 P 点，矢势为零。当 $t>s/c$ 时，仅在范围

$$|z|\leqslant\sqrt{(ct)^2-s^2} \tag{10.25}$$

内的导线部分有贡献(在这个范围外，t_{r} 是负值，故 $I(t_{\mathrm{r}})=0$)，所以

$$\boldsymbol{A}(s,t)=\left(\frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\hat{\boldsymbol{z}}\right)2\int_0^{\sqrt{(ct)^2-s^2}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{s^2+z^2}}$$

$$=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\hat{\boldsymbol{z}}\ln\left(\sqrt{s^2+z^2}+z\right)\Big|_0^{\sqrt{(ct)^2-s^2}}=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

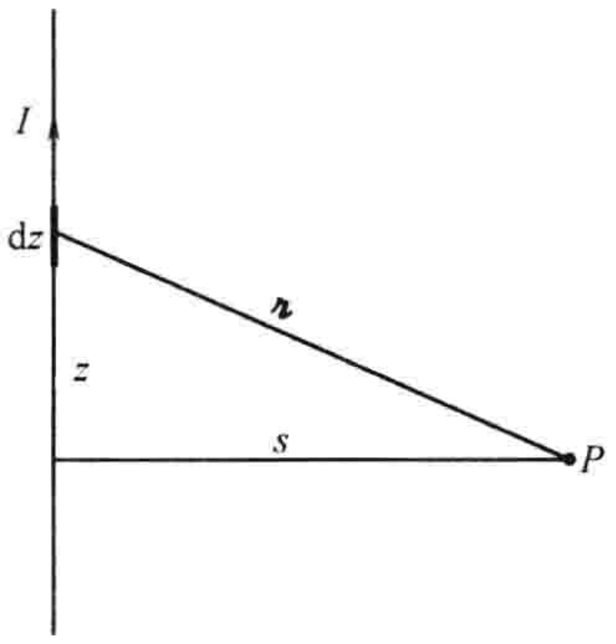


图 10.4

电场是

$$\boldsymbol{E}(s,\ t)=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi\sqrt{(ct)^2-s^2}}\hat{\boldsymbol{z}}$$

磁场是

$$\boldsymbol{B}(s,\ t)=\nabla\times\boldsymbol{A}=-\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{\boldsymbol{\phi}}=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi s}\frac{ct}{\sqrt{(ct)^2-s^2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

注意，当 $t\to\infty$，我们回到静态的情形：$\boldsymbol{E}=0$，$\boldsymbol{B}=(\mu_0 I_0/2\pi s)\boldsymbol{\phi}$。

习题 10.8 证明推迟势满足洛伦兹规范条件。[提示：首先证明

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{\imath}\right)=\frac{1}{\imath}(\nabla\cdot\boldsymbol{J})+\frac{1}{\imath}(\nabla'\cdot\boldsymbol{J})-\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{\imath}\right),$$

这里∇表示对 $\boldsymbol{r}$ 求导数，∇'表示对 $\boldsymbol{r}'$求导数。其次注意 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',\ t-\imath/c)$显含地依赖 $\boldsymbol{r}'$以及通过 $\imath$ 隐含地依赖

⊖ 因为达朗贝尔算子包含 t^2(而不是 t)，理论本身是**时间反演不变**的，不区分过去和将来。时间的不对称性的引入是当我们选择推迟势而不是超前势时——这反映(不是没有理由的)了我们的信念，电磁场的影响在时间上总是向前传播的，而不是向后。

$\boldsymbol{r}'$，而对 $\boldsymbol{r}$ 的依赖仅通过 $\mathscr{r}$，证明

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{j}} \cdot (\nabla \mathscr{r}),\quad \nabla' \cdot \boldsymbol{J} = -\dot{\rho} - \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{j}} \cdot (\nabla' \mathscr{r})$$

利用它计算 $\boldsymbol{A}$ 的散度(式(10.19))。]

！习题 10.9

(a) 设在例题 10.2 中导线中的电流线性增大

$$I(t) = kt$$

对 $t>0$，求出产生的电磁场。

(b) 求出脉冲电流

$$I(t) = q_0\delta(t)$$

产生的电磁场。

习题 10.10　如图 10.5 所示，一导线绕成一个回路，回路中有一随时间线性增加的电流。

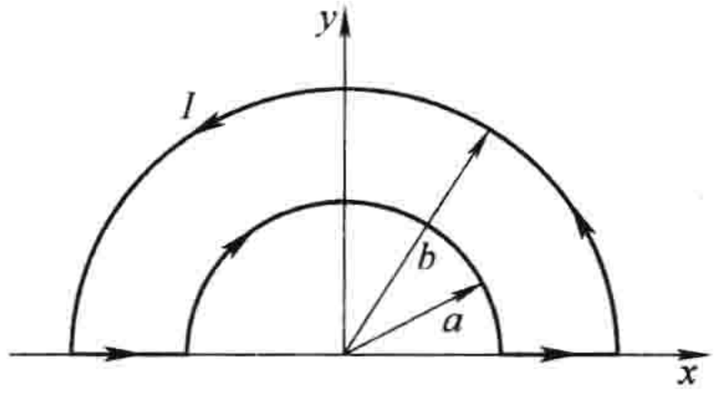


图　10.5

$$I(t) = kt$$

计算中心处的推迟矢势，求出中心处的电场。为何这个中性的导线能产生一个电场？(从 $\boldsymbol{A}$ 的表示式你为何不能确定磁场？)

10.2.2　杰斐缅柯方程

给出推迟势

$$V(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{\mathscr{r}}\mathrm{d}\tau',\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\mathscr{r}}\mathrm{d}\tau' \tag{10.26}$$

原则上可直接求出场

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},\qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{10.27}$$

但具体求解并不简单，因为如我前面提到的，积分既通过分母中的 $\mathscr{r} = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ 明显依赖 $\boldsymbol{r}$，又通过分子中的推迟时间 $t_r = t - \mathscr{r}/c$ 隐性地依赖于 $\boldsymbol{r}$。

我们已经计算了 V 的梯度(式(10.22))，$\boldsymbol{A}$ 的时间的导数容易求出

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\dot{\boldsymbol{j}}}{\mathscr{r}}\mathrm{d}\tau' \tag{10.28}$$

把它们放在一起(并利用 $c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$)：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{\mathscr{r}^2}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} + \frac{\dot{\rho}(\boldsymbol{r}',t_r)}{c\mathscr{r}}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \frac{\dot{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}',t_r)}{c^2\mathscr{r}}\right]\mathrm{d}\tau' \tag{10.29}$$

这就是依赖于时间的普遍的库仑定律。它可回到静态时的情形(第二项和第三项去掉，第一项中去掉对 t_r 的依赖)。

对于 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}$ 的旋度包含两项：

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{1}{\mathscr{r}}(\nabla \times \boldsymbol{J}) - \boldsymbol{J} \times \nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\right]\mathrm{d}\tau'$$

考虑到

$$(\nabla \times \boldsymbol{J})_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}$$

和

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = \dot{J}_z \frac{\partial t_r}{\partial y} = -\frac{1}{c}\dot{J}_z \frac{\partial \imath}{\partial y}$$

所以

$$(\nabla \times \boldsymbol{J})_x = -\frac{1}{c}\left(\dot{J}_z \frac{\partial \imath}{\partial y} - \dot{J}_y \frac{\partial \imath}{\partial z}\right) = \frac{1}{c}[\dot{\boldsymbol{J}} \times \nabla \imath]_x$$

但$\nabla \imath = \hat{\imath}$(习题 1.13)，故

$$\nabla \times \boldsymbol{J} = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{J}} \times \hat{\imath} \tag{10.30}$$

同时$\nabla(1/\imath) = -\hat{\imath}/\imath^2$(习题 1.13)，因此

$$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\imath^2} + \frac{\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',t_r)}{c\imath}\right] \times \hat{\imath}\,\mathrm{d}\tau'} \tag{10.31}$$

这是依赖于时间的普遍的毕奥-萨伐尔定律，从它可回到静态时的形式。

式(10.29)和式(10.31)是(有因果关系的)麦克斯韦方程的解。由于某些原因，它们直到近期才发表——我知道的最早的明确的叙述是由欧雷格·杰斐缅柯(Oleg Jefimenko)在 1966 年发表的。[㊀]实际中，**杰斐缅柯方程**的应用很有限，因为一般求推迟势并求导比直接求场容易。然而，它们提供了理论的完整性。它们也帮我们对前面所提到的一个论述进行了澄清：为了得到推迟势，你所做的一切是把静电和静磁公式中的 t 换为 t_r。但对于场，不但要把时间换为推迟时间，而且还出现了新的(涉及 ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 的导数的)项。它们对准静态近似提供了很强的支持(习题 10.12)。

习题 10.11 设 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$不随时间变化，所以有(习题 7.55)$\rho(\boldsymbol{r},\ t) = \rho(\boldsymbol{r},\ 0) + \dot{\rho}(\boldsymbol{r},\ 0)t$。证明

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{\imath^2}\hat{\imath}\,\mathrm{d}\tau'$$

即电荷密度按“非推迟”时间计算时，库仑定律成立。

习题 10.12 假设电流密度缓慢变化以至于我们能够(在足够好的近似下)忽略泰勒展开式的所有高阶项

$$\boldsymbol{J}(t_r) = \boldsymbol{J}(t) + (t_r - t)\dot{\boldsymbol{J}}(t) + \cdots$$

(为了清楚，我省去了对 r 的依赖，它与讨论的问题无关)。证明在式(10.31)中的一个幸运的相消后可得到

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t) \times \hat{\imath}}{\hat{\imath}^2}\mathrm{d}\tau'$$

即：以“非推迟”时间计算 $\boldsymbol{J}$，毕奥-萨伐尔定律成立。这意味着准静态近似实际上比我们希望的要好很多：所包含的两个误差(忽略了推迟项，省去了式(10.31)的第二项)在一阶近似下彼此相消。

10.3 点电荷

10.3.1 李纳-维谢尔势

我们的下一个任务是计算以一个特定轨迹

㊀ O. D. Jefimenko，电与磁，15.7 节(New York：Appleton-Century-Crofts，1996)。较相近的表述出现在 W. K. H. Panofsky and M. Phillips，经典电磁学，14.3 节(Reading，MA：Addison-Wesley，1962)。进一步的评述和参考文献可参见 K. T. McDonald，Am. J. Phys. 65，1074(1997)。

$$\boldsymbol{w}(t) \equiv \text{在时刻 } t \text{ 电荷 } q \text{ 的位置} \tag{10.32}$$

运动的点电荷的(推迟)势 $V(\boldsymbol{r}, t)$和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$。推迟时间隐含在方程

$$| \boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t_r) | = c(t - t_r) \tag{10.33}$$

中，因为左边是“信息”必须传播的距离，$(t - t_r)$是它传播过程花费的时间(见图 10.6)。我将把 $\boldsymbol{w}(t_r)$称为电荷的**推迟位置**；$\boldsymbol{\mathscr{r}}$是从推迟位置到场点 $\boldsymbol{r}$ 的矢量

$$\boldsymbol{\mathscr{r}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t_r) \tag{10.34}$$

需要着重注意的是，在任何特定的时间，轨道上最多仅有一个点与 $\boldsymbol{r}$ 通信。如果假设有两个点，则它们有推迟时间 t_1 和 t_2：

$$\mathscr{r}_1 = c(t - t_1), \quad \mathscr{r}_2 = c(t - t_2)$$

则 $\mathscr{r}_1 - \mathscr{r}_2 = c(t_2 - t_1)$，所以粒子在 $\boldsymbol{r}$ 方向的平均速度应是 c——不管电荷在其他方向的速度如何。因为没有带电粒子的速度能超过光速，这表明在任何时刻只有一个推迟点对势有贡献。㊀

现在，也许你认为公式

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t_r)}{\mathscr{r}} \mathrm{d}\tau' \tag{10.35}$$

自然意味着点电荷推迟势应简单地为

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\mathscr{r}}$$

(与静态的情形一样，只是把 $\mathscr{r}$ 理解为距电荷推迟位置的距离)。但这是错误的，因为一个非常微妙的原因：对于点源，可以把分母 $\mathscr{r}$ 移到积分外，㊁但剩余的

$$\int \rho(\boldsymbol{r}', t_r)\, \mathrm{d}\tau' \tag{10.36}$$

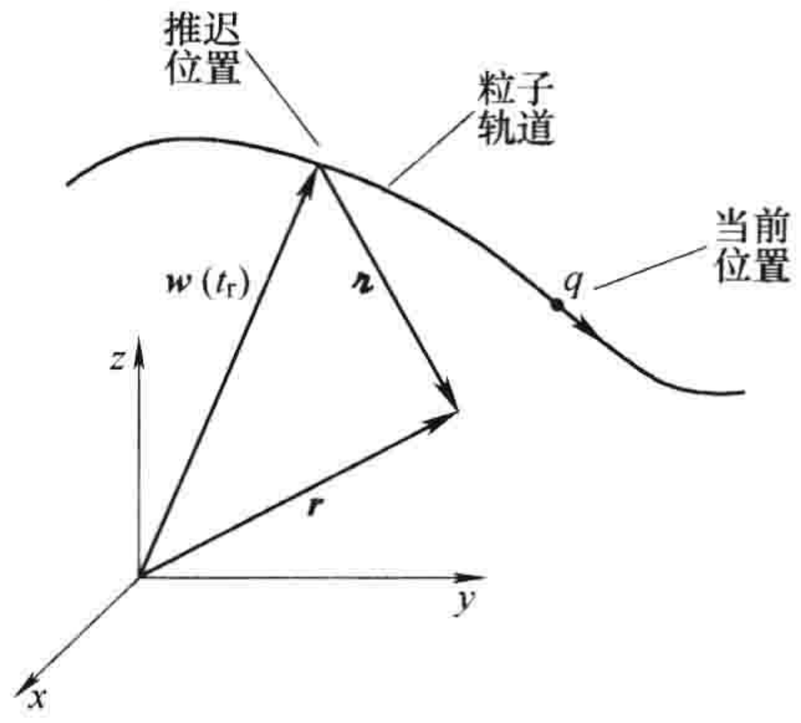


图　10.6

不等于粒子的电荷。为了计算构型的总电荷，你必须在某瞬时对电荷的整个分布进行积分。但这里的延迟，$t_r = t - \mathscr{r}/c$，迫使我们对构型的不同部分在不同时间求 ρ。如果源是运动的，这将给出一个扭曲的总电荷图像。你也许认为这个问题对点电荷不存在，但并非如此。在麦克斯韦电动力学中，若公式中出现电荷密度和电流密度，则点电荷必须被认为是当体积趋于零时非点电荷的极限。对于一个非点粒子，无论其多么小，式(10.36)中的推迟项总有因子$(1 - \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \cdot \boldsymbol{v}/c)^{-1}$，式中$\boldsymbol{v}$是在推迟时刻电荷的速度，即

$$\int \rho(\boldsymbol{r}', t_r)\, \mathrm{d}\tau' = \frac{q}{1 - \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \cdot \boldsymbol{v}/c} \tag{10.37}$$

证明：这纯粹是一个几何效应，它可以帮助我们较形象地理解所述内容。由于过于寻常，你们可能没有注意到它，但事实上向你开来的火车看上去要比实际的略长，因为你看到的从最后一节守车车厢发出的光要早于你同时看到的从车头发出的光，并且在较早时火车距离比较远(见图 10.7)。在这个时间间隔中，从守车发出的光走过了多余的距离 L'，火车本身走过了距离 $L' - L$：

$$\frac{L'}{c} = \frac{L' - L}{v}, \quad \text{或 } L' = \frac{L}{1 - \dfrac{v}{c}}$$

㊀ 由于同样的原因，在 $\boldsymbol{r}$ 处的观测者在某个时间看到粒子在一个位置。相反，在某一时刻，可“听”到一个物体在两个位置。考虑一只熊对你咆哮，然后以声速跑向你并接着咆哮，你同时听到两声咆哮，它们来源于不同位置，但是只有一只熊。

㊁ 然而，在它的函数依赖中有一个隐含的变化：在积分前，$\mathscr{r} = | \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' |$ 是 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$的函数；积分后(固定 $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{w}(t_r)$) $\mathscr{r} = | \boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t_r) |$ 是(像 t_r 一样)r 和 t 的函数。

所以较接近的火车显得“较长”，需乘一个因子$(1-v/c)^{-1}$。相反，离开的火车看起来“较短”，[一]需乘一个因子$(1+v/c)^{-1}$。更一般地，如果火车的速度与你看的光线成一个角度θ，[二]则从守车发出的光经过的附加距离是$L'\cos\theta$(见图10.8)。在时间$L'\cos\theta/c$内，火车移动了一个距离$(L'-L)$：

$$\frac{L'\cos\theta}{c}=\frac{L'-L}{v},\ \text{或}\ L'=\frac{L}{1-v\cos\theta/c}$$

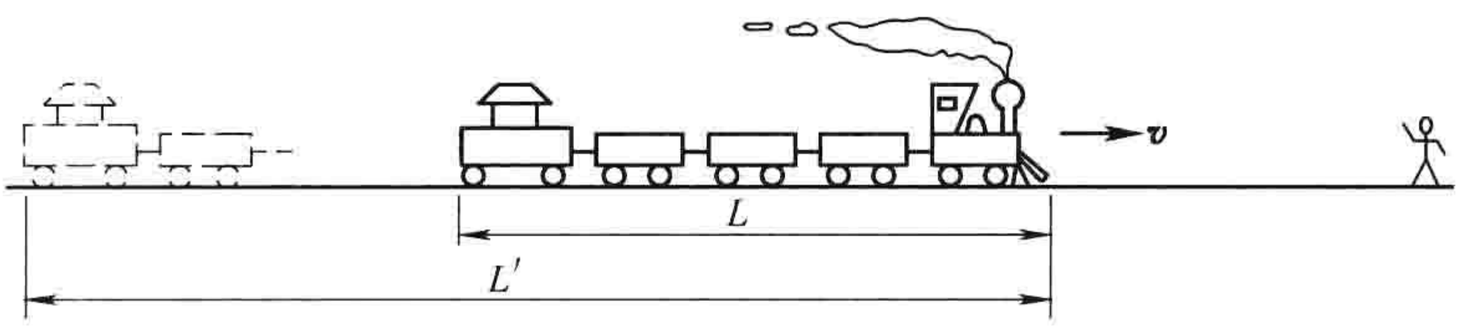


图 10.7

注意，这个效应对垂直于火车运动方向的维度(火车的高度和宽度)不起作用。不必在意从侧面远处的光线到达你较迟(与侧面近处的光相比)——因为侧向没有运动，它们的距离不变。火车看上去的体积τ'与实际体积有关系：

$$\tau'=\frac{\tau}{1-\hat{\boldsymbol{\imath}}\cdot\boldsymbol{v}/c} \tag{10.38}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{\imath}}$是从火车到观察者的单位矢量。

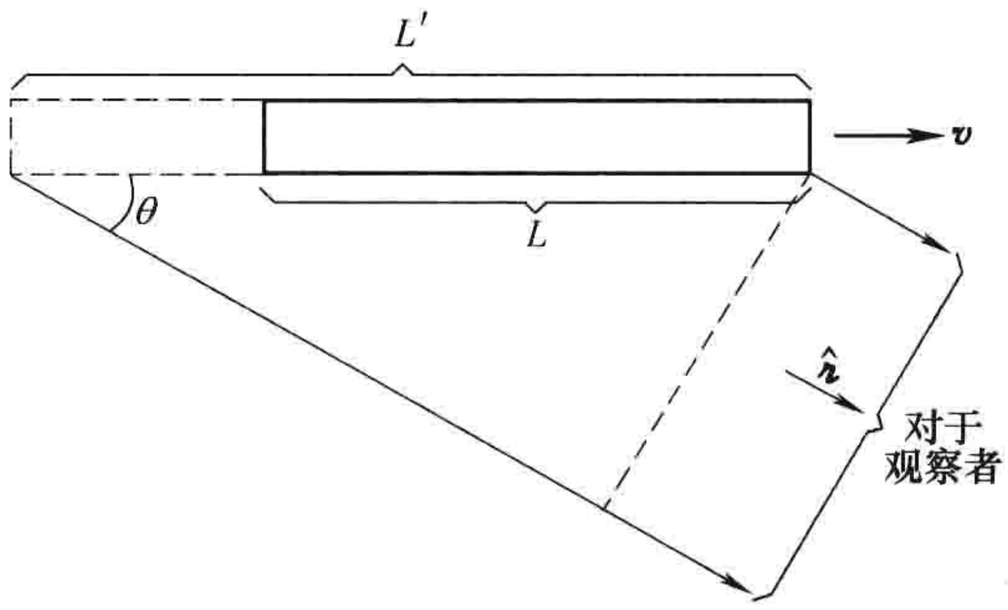


图 10.8

移动的火车和推迟势类比的要点是：无论何时求式(10.37)类型的积分，被积函数是在推迟时间的值，因为同样的原因，有效的体积由式(10.38)中出现的因子所修正，就像火车的体积看上去那样。因为这个修正因子与粒子的体积大小没有关系，对点电荷的修正与对非点电荷的修正是一样的。证毕。

由此，有

$$\boxed{V(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{(\boldsymbol{\imath}c-\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{v})}} \tag{10.39}$$

式中，$\boldsymbol{v}$是在推迟时间时电荷的速度；$\boldsymbol{\imath}$是从推迟位置到场点$\boldsymbol{r}$的矢量。而且，因为一个刚体的电流密度是$\rho\boldsymbol{v}$(式(5.26))，所以我们有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)\,\boldsymbol{v}(t_r)}{\imath}\mathrm{d}\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{v}}{\imath}\int\rho(\boldsymbol{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$

或

$$\boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qc\,\boldsymbol{v}}{(\boldsymbol{\imath}c-\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{v})}=\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}V(\boldsymbol{r},\ t)} \tag{10.40}$$

式(10.39)和式(10.40)是一个运动点电荷的著名的**李纳-维谢尔(Liénard-Wiechert)势**。[三]

[一] 请注意这与狭义相对论或洛伦兹收缩没有任何关系——L为移动的火车的长度，它的静止长度与问题无关。这个讨论多少让人想起多普勒效应。

[二] 我假设火车足够远或(更贴近地说)足够短，从而可认为从守车和车头发出的光线是平行的。

[三] 有许多方法求李纳-维谢尔势。我试图强调参数$(1-\hat{\boldsymbol{\imath}}\cdot\boldsymbol{v}/c)^{-1}$的几何来源；更明确的说明参看W. K. H. Panofsky 和 M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2d, ed., pp. 342-3 (Reading, MA: Addison-Wesley, 1962)。一个更严格的推导由 J. R. Reitz, F. J. Milford 和 R. W. Christy 提出的 Foundations of Electromagnetic Theory, 3d ed., Sect. 21.1 (Reading, MA: Addison - Wesley, 1979)，或 M. A. Heald 和 J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, 3d ed., Sect. 8.3 (Orlando, FL: Saunders, 1995)。

例题 10.3

求出匀速运动的点电荷的势。

解： 为方便起见，设粒子在 $t=0$ 时刻通过原点，故

$$\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{v}t$$

首先利用式(10.33)

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_r|=c(t-t_r)$$

计算推迟时间，或其二次方：

$$r^2-2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}t_r+v^2t_r^2=c^2(t^2-2tt_r+t_r^2)$$

通过二次方程求根公式，求得 t_r

$$t_r=\frac{(c^2t-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\pm\sqrt{(c^2t-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2} \tag{10.41}$$

为了确定正负号，考虑极限情况 $v=0$，

$$t_r=t\pm\frac{r}{c}$$

在这种情况下，电荷静止在原点，推迟时间应为 $(t-r/c)$，因此应取负号。

现在，由式(10.33)和式(10.34)，

$$\boldsymbol{\imath}=c(t-t_r)\text{ 和 }\hat{\boldsymbol{\imath}}=\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_r}{c(t-t_r)}$$

所以

$$\boldsymbol{\imath}(1-\hat{\boldsymbol{\imath}}\cdot\boldsymbol{v}/c)=c(t-t_r)\left[1-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_r}{c(t-t_r)}\right]=c(t-t_r)-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{c}+\frac{v^2}{c}t_r$$

$$=\frac{1}{c}[(c^2t-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})-(c^2-v^2)t_r]$$

$$=\frac{1}{c}\sqrt{(c^2t-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}$$

(在最后一步利用了式(10.41)，方程中取负号)。故有

$$V(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}} \tag{10.42}$$

和(式(10.40))

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qc\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{(c^2t-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}} \tag{10.43}$$

习题 10.13　一个电荷为 q 的粒子以角速度 ω 作半径为 a 的匀速圆周运动。(假设圆处在 xy 平面，圆心在原点，在 $t=0$ 时刻，粒子位于 x 正轴 $(a,\ 0)$ 处。)求出 z 轴上各点处的李纳-维谢尔势。

习题 10.14　以恒定速度(式(10.42))运动的点电荷的标势可以等价地写成

$$V(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R\sqrt{1-v^2\sin^2\theta/c^2}} \tag{10.44}$$

式中，$\boldsymbol{R}\equiv\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t$ 为从粒子当前的(!)位置指向场 $\boldsymbol{r}$ 点的矢量；θ 是 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的角度(见图 10.9)。显然，对非相对论速度($v^2\ll c^2$)，

$$V(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

习题 10.15　我证明过在粒子轨迹中在任何给定的时间仅有一点与 $\boldsymbol{r}$ 通信。在一些情形下也可能没有这样的点(在 $\boldsymbol{r}$ 点的观察者不能看到那个粒子——用广义相对论的生动语言描述就是它超过了**视野**)。作为一个例子，考虑一个粒子沿着 x 轴作**双曲线函数运动**：

$$\boldsymbol{w}(t)=\sqrt{b^2+(ct)^2}\,\hat{\boldsymbol{x}}\quad(-\infty<t<\infty) \tag{10.45}$$

(在狭义相对论中，这是一个被施加一个恒定力 $F = mc^2/b$ 的粒子的运动轨迹)画出 ω 对 t 的图形。在这个曲线上选 4 个或 5 个代表点，对每个点画出粒子发出的光信号的轨迹——正和负 x 方向都画。在图中的哪个区域对应的点和时间不能看到粒子？在点 x，哪个时刻能首次看到粒子？(早于此时，x 处的势显然为零。)对于一个粒子，一旦看到，它可能会再次看不到吗？

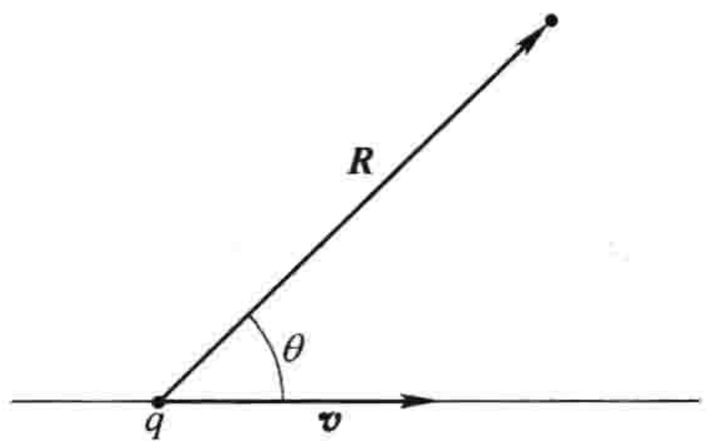


图 10.9

！ 习题 10.16 确定双曲线运动的一个电荷的李纳-维谢尔势(式(10.45))。假设点 $\boldsymbol{r}$ 在 x 轴上并位于电荷的右侧。

10.3.2 运动点电荷的场

我们现在利用李纳-维谢尔势[⊖]

$$V(\boldsymbol{r},\ t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{(\boldsymbol{\imath}c - \boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{v})}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t) = \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}V(\boldsymbol{r},\ t) \tag{10.46}$$

计算任意运动的点电荷的电场和磁场。计算得 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的方程为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

微分是有技巧的，因为

$$\boldsymbol{\imath} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t_r),\ \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{w}}(t_r) \tag{10.47}$$

两者都是在推迟时间取值，而 t_r——由下面方程隐含地定义

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}(t_r)| = c(t - t_r) \tag{10.48}$$

它本身是 $\boldsymbol{r}$ 和 t 的函数。[⊜]请耐心坚持：下面的两页略显繁杂——但结果值得努力。

让我们首先计算 V 的梯度：

$$\nabla V = \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-1}{(\boldsymbol{\imath}c - \boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{v})^2}\nabla(\boldsymbol{\imath}c - \boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{v}) \tag{10.49}$$

因为 $\boldsymbol{\imath} = c(t - t_r)$，所以

$$\nabla\boldsymbol{\imath} = -c\nabla t_r \tag{10.50}$$

对于第二项，积规则 4 给出

$$\nabla(\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{\imath}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\imath} + \boldsymbol{\imath}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{\imath}) \tag{10.51}$$

依次计算其中的每一项

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\imath}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} &= \left(\imath_x\frac{\partial}{\partial x} + \imath_y\frac{\partial}{\partial y} + \imath_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{v}(t_r)\\ &= \imath_x\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t_r}\frac{\partial t_r}{\partial x} + \imath_y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y} + \imath_z\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t_r}\frac{\partial t_r}{\partial z}\\ &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\imath}\cdot\nabla t_r)\end{aligned} \tag{10.52}$$

式中，$\boldsymbol{a} \equiv \dot{\boldsymbol{v}}$ 是在推迟时间时粒子的加速度。现在

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\imath} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{w} \tag{10.53}$$

和

⊖ 你可直接从杰斐缅柯方程得到场，但较复杂。参看，如 M. A. Heald 和 J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, 3d ed., Sect. 8.4(Orlando, FL: Saunders, 1995)。

⊜ 下面的计算是通过最直接的“强力”方法求得的。对于更聪明有效的方法，可参见 J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3d ed., Sect. 14.1 (New York: John Wiley, 1999)。

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=\left(v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(x\,\hat{\boldsymbol{x}}+x\,\hat{\boldsymbol{y}}+x\,\hat{\boldsymbol{z}})$$

$$=v_x\,\hat{\boldsymbol{x}}+v_y\hat{\boldsymbol{y}}+v_z\hat{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{v}\tag{10.54}$$

而

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{v}\cdot\nabla t_r)$$

(与式(10.52)的理由一样)。对于式(10.51)中的第三项,

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t_r}\frac{\partial t_r}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}}+\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t_r}\frac{\partial t_r}{\partial z}-\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t_r}\frac{\partial t_r}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}}+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t_r}\frac{\partial t_r}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$=-\boldsymbol{a}\times\nabla t_r\tag{10.55}$$

最后

$$\nabla\times\boldsymbol{\mathscr{r}}=\nabla\times\boldsymbol{r}-\nabla\times\boldsymbol{w}\tag{10.56}$$

但$\nabla\times\boldsymbol{r}=0$，与式(10.55)类似的计算给出，

$$\nabla\times\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{v}\times\nabla t_r\tag{10.57}$$

把所有这些代回式(10.51)，利用“BAC-CAB”规则，化简三重叉积，

$$\nabla(\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\nabla t_r)+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla t_r)-\boldsymbol{\mathscr{r}}\times(\boldsymbol{a}\times\nabla t_r)+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{v}\times\nabla t_r)$$

$$=\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{a}-v^2)\nabla t_r\tag{10.58}$$

把式(10.50)和式(10.58)合在一起，有

$$\nabla V=\frac{qc}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(\mathscr{r}c-\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{v})^2}[\boldsymbol{v}+(c^2-v^2+\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{a})\nabla t_r]\tag{10.59}$$

为了完成计算，我们需要知道∇t_r。这可通过对式(10.48)求梯度得出——这在式(10.50)中我们已做过——展开$\nabla\mathscr{r}$：

$$-c\nabla t_r=\nabla\mathscr{r}=\nabla\sqrt{\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{\mathscr{r}}}=\frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{\mathscr{r}}}}\nabla(\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{\mathscr{r}})$$

$$=\frac{1}{\mathscr{r}}[(\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\mathscr{r}}+\boldsymbol{\mathscr{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{\mathscr{r}})]\tag{10.60}$$

但

$$(\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\mathscr{r}}=\boldsymbol{\mathscr{r}}-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\nabla t_r)$$

(与式(10.53)同样的思想)，而(从式(10.56)和式(10.57))

$$\nabla\times\boldsymbol{\mathscr{r}}=(\boldsymbol{v}\times\nabla t_r)$$

故

$$-c\nabla t_r=\frac{1}{\mathscr{r}}[\boldsymbol{\mathscr{r}}-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\nabla t_r)+\boldsymbol{\mathscr{r}}\times(\boldsymbol{v}\times\nabla t_r)]=\frac{1}{\mathscr{r}}[\boldsymbol{\mathscr{r}}-(\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{v})\nabla t_r]$$

所以

$$\nabla t_r=\frac{-\boldsymbol{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}c-\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{v}}\tag{10.61}$$

把这个结果代入式(10.59)，有

$$\nabla V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{(\mathscr{r}c-\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{v})^3}[(\mathscr{r}c-\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}-(c^2-v^2+\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{\mathscr{r}}]\tag{10.62}$$

我留给你们一个类似的计算(习题 10.17)，它有

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{(\mathscr{r}c-\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{v})^3}\left[(\mathscr{r}c-\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{v})\left(-\boldsymbol{v}+\frac{\mathscr{r}\boldsymbol{a}}{c}\right)+\frac{\mathscr{r}}{c}(c^2-v^2+\boldsymbol{\mathscr{r}}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}\right]\tag{10.63}$$

利用所有这些结果，引进矢量

$$\boldsymbol{u} \equiv c\hat{\boldsymbol{\imath}} - \boldsymbol{v} \tag{10.64}$$

得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\imath}{(\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{u})^3}[(c^2 - v^2)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\imath}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a})] \tag{10.65}$$

同时

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\nabla\times(V\boldsymbol{v}) = \frac{1}{c}[V(\nabla\times\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\times(\nabla V)]$$

我们已经计算了$\nabla\times\boldsymbol{v}$（式(10.55)）和 ∇V（式(10.62)）。把这些结果放在一起

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\imath})^3}\boldsymbol{\imath}\times[(c^2 - v^2)\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}]$$

上式括号中的量与式(10.65)非常相似。利用 BAC-CAB 规则，式(10.65)可写成$[(c^2 - v^2)\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}]$。它们主要的不同之处仅在于前两项中$\boldsymbol{v}$代替了$\boldsymbol{u}$。事实上，因为它们都要与$\boldsymbol{\imath}$叉积，所以我们可以把$\boldsymbol{v}$变成$-\boldsymbol{u}$，这并不改变结果，从而正比于$\boldsymbol{\imath}$的额外的项在叉积中消失了。这样有

$$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\ t) = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{\imath}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)} \tag{10.66}$$

显然，点电荷的磁场总是垂直于电场，垂直于从推迟位置指向场点的位置矢量的。

在$\boldsymbol{E}$中的第一项（包含$(c^2 - v^2)\boldsymbol{u}$的项）以反比于到粒子距离的二次方衰减。如果速度和加速度都为零，只有这一项存在，则回到静电学的结果

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\imath^2}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

由于这个原因，$\boldsymbol{E}$的第一项有时也称为**广义库仑场**。（因为它不依赖于加速度，所以它也称为**速度场**。）第二项（包含$\boldsymbol{\imath}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a})$的项）以$\imath$的倒数衰减，故在远距离时起主要作用。我们在第 11 章中将看到，正是这一项引起了电磁辐射，所以它称为**辐射场**——或因为它正比于a，也称为**加速场**。同样的术语也适用于磁场。

回顾第 2 章，我曾提到，如果可能，我们仅需写出一个电荷施加在另一个电荷上的力，原则上，我们就能求解电动力学。与叠加原理一起，可给出施加在一个实验电荷Q上的任何构型（电荷分布）的合力。现在我们可以了，式(10.65)和式(10.66)给出了场，而洛伦兹力定律给出了它们在Q上产生的力：

$$\boldsymbol{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\imath}{(\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{u})^3}\left\{[(c^2 - v^2)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\imath}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a})] + \frac{\boldsymbol{V}}{c}\times[\hat{\boldsymbol{\imath}}\times[(c^2 - v^2)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\imath}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a})]]\right\} \tag{10.67}$$

式中，$\boldsymbol{V}$是Q的速度；$\boldsymbol{\imath}$、$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$均在推迟时间计算。整个经典电动力学的整个理论被包括在这个方程中……因此你们就明白为何我要从库仑定律开始讲起了。

例题 10.4

计算匀速运动的点电荷的电磁场。

解： 在式(10.65)中，令$\boldsymbol{a} = 0$，

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(c^2 - v^2)\,\imath}{(\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{u})^3}\boldsymbol{u}$$

在这种情况下，利用 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}t$，

$$\boldsymbol{\imath u}=c\boldsymbol{\imath}-\boldsymbol{\imath v}=c(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_r)-c(t-t_r)\boldsymbol{v}=c(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)$$

在例题 10.3 中，我们发现

$$\boldsymbol{\imath}c-\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{u}=\sqrt{(c^2t-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}$$

在习题 10.14 中，证明了根式可写成

$$Rc\sqrt{1-v^2\sin^2\theta/c^2}$$

式中

$$\boldsymbol{R}\equiv\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t$$

是粒子现在的位置至 $\boldsymbol{r}$ 处的位置矢量；θ 是 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的角度（见图 10.9）。故

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{(1-v^2\sin^2\theta/c^2)^{3/2}}\frac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}}\tag{10.68}$$

注意，$\boldsymbol{E}$ 的指向是沿着 $\boldsymbol{R}$ 的。这是一个及不寻常的巧合，因为“信息”是从推迟位置发出的。因为 $\sin^2\theta$ 在分母中，所以一个高速运动电荷的场在垂直于运动方向上是平的，像一个薄烤饼（见图 10.10）。在前方和后方，$\boldsymbol{E}$ 与静止点电荷的电场相比减小了一个因子 $(1-v^2/c^2)$；而在垂直方向增加了一个因子 $1/\sqrt{(1-v^2/c^2)}$。

对于 $\boldsymbol{B}$，我们有

$$\hat{\boldsymbol{\imath}}=\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t_r}{\imath}=\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)+(t-t_r)\boldsymbol{v}}{\imath}=\frac{\boldsymbol{R}}{\imath}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}$$

所以

$$\boxed{\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}(\hat{\boldsymbol{\imath}}\times\boldsymbol{E})=\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})}\tag{10.69}$$

$\boldsymbol{B}$ 的磁场线环绕着这个电荷，如图 10.11 所示。

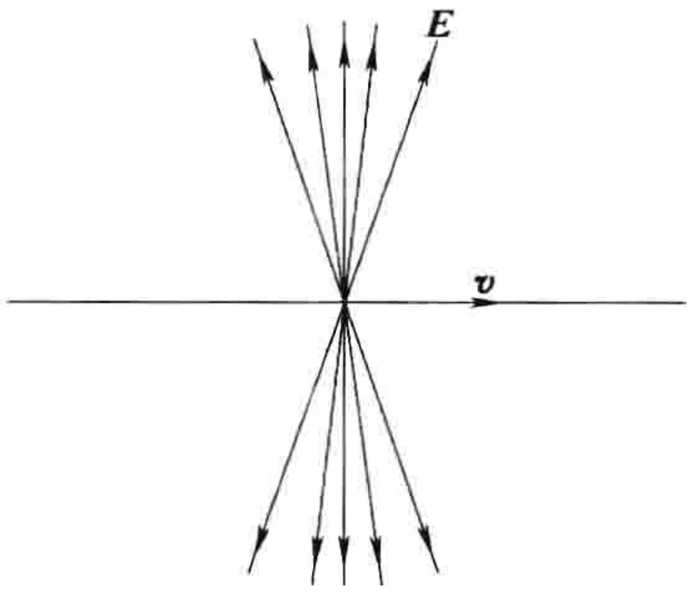


图　10.10

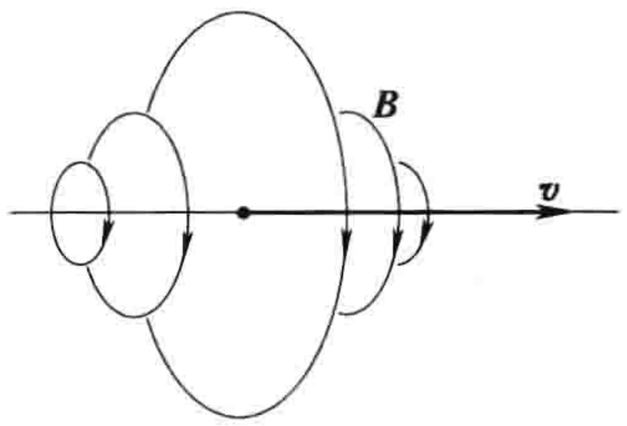


图　10.11

匀速运动点电荷的场（式（10.68）和式（10.69））由 Oliver Heaviside 在 1888 年首先得到。[⊖] 当 $v^2 \ll c^2$ 时，它们简化为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\hat{\boldsymbol{R}};\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{R^2}(\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{R}})\tag{10-70}$$

第一个实际上是库仑定律，第二个是“点电荷的毕奥-萨伐尔定律”，在第 5 章我曾告知过你们（式（5.40））。

习题 10.17　推导出式（10.63）。首先证明

$$\frac{\partial t_r}{\partial t}=\frac{\imath c}{\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{u}}\tag{10.71}$$

⊖ 对这些历史和参考文献，可参看 O. J. Jefimenko, Am. J. Phys. 62, 79 (1994)。

习题 10.18 设点电荷 q 被限制，只能在沿着 x 轴方向运动。证明轴上电荷右边的点处的场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(\frac{c+v}{c-v}\right)\hat{\boldsymbol{x}},\quad \boldsymbol{B}=0$$

电荷左边的点处的场如何？

习题 10.19

（a）一无限长直导线，带均匀电荷，电荷线密度为 λ，以速度 v 沿导线轴线方向运动，利用式(10.68)计算距离导线为 d 处的电场。

（b）利用式(10.69)计算导线产生的磁场。

习题 10.20 对习题 10.13 的构型，求中心处的电场和磁场。根据你求出的 $\boldsymbol{B}$ 的公式，确定圆形稳恒电流 I 在中心处的磁场，把你的结果与例题 5.6 的比较。

第 10 章补充习题

习题 10.21 假设你拿着半径为 a 的塑料环，有电荷附着在上面，电荷线密度为 $\lambda_0\,|\sin(\theta/2)|$。使环以角速度 ω 绕其轴旋转。求出在环中心处(精确的)标量和矢量势。[答案：$\boldsymbol{A}=(\mu_0\lambda_0\omega a/3\pi)\{\sin[\omega(t-a/c)]\hat{\boldsymbol{x}}-\cos[\omega(t-a/c)]\hat{\boldsymbol{y}}\}$]

习题 10.22 图 2.35 总结了静电学的定律，用一个三角形的图示指出了源(ρ)，场($\boldsymbol{E}$)和势(V)的关系。图 5.48 同样总结了静磁学的定律，那里源是 $\boldsymbol{J}$，场是 $\boldsymbol{B}$，势是 $\boldsymbol{A}$。对于电动力学，也画出同样的图形，在这里源为(ρ)和 $\boldsymbol{J}$(被连续性方程限制)，场是 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，势是 V 和 $\boldsymbol{A}$(被洛伦兹规范限制)。不要包括以 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示的 V 和 $\boldsymbol{A}$ 的公式。

习题 10.23 验证匀速运动的点电荷的势(式(10.42)和式(10.43))满足洛伦兹规范(式(10.12))。

习题 10.24 电荷为 q_1 的一个粒子，静止在原点。另一个电荷为 q_2 的粒子沿 x 轴以双曲线函数接近它

$$x(t)=\sqrt{b^2+(ct)^2}$$

在 $t=0$ 时刻，它到达最接近点 b，随后折返至无穷远。

（a）在时刻 t，(由于 q_1)作用在 q_2 上的力 $\boldsymbol{F}_2$ 是什么？

（b）q_2 对 q_1 的总的冲量($I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}_2\,dt$)是什么？

（c）在时刻 t，(由于 q_2)作用在 q_1 上的力 $\boldsymbol{F}_1$ 是什么？

（d）q_1 对 q_2 的总的冲量($I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}_1\,dt$)是什么？[提示：在做这个积分之前，复习习题 10.15 也许会有帮助。答案：$I_2=-I_1=q_1q_2/4\varepsilon_0bc$]

习题 10.25 一个电荷为 q 的粒子以恒定速度 v 沿 x 轴运动。计算粒子在原点时，通过平面 $x=a$ 的总功率。[答案：$q^2v/32\pi\varepsilon_0a^2$]。

习题 10.26[⊖] 电荷为 q_1 的粒子静止在原点。电荷为 q_2 的第二个粒子沿 z 轴以恒定速度 v 运动。

（a）求在时刻 t（q_2 在 $z=vt$ 处），q_1 作用在 q_2 上的力 $\boldsymbol{F}_{12}(t)$。

（b）求在时刻 t，q_2 作用在 q_1 上的力 $\boldsymbol{F}_{21}(t)$。在这种情况下牛顿第三定律成立吗？

！（c）计算在时刻 t，电磁场中的线动量 $\boldsymbol{p}(t)$。(不要被不随时间变化的项干扰，因为你在(d)部分不需要它们。[答案：$[\mu_0q_1q_2/4\pi t]\hat{\boldsymbol{z}}$]

（d）证明总的力等于场中动量变化率的负值，解释其物理含义。

⊖ 参见 J. J. G. Scanio, Am. J. Phys. 43, 258(1975)。

第11章　辐　　射

11.1　偶极辐射

11.1.1　辐射的定义

在第9章我们讨论了平面电磁波在各种介质中的传播，但我并没有说明波最初是如何产生的。如同所有的电磁场，它们的源也是由某种电荷的布局所产生的。但静止的电荷不会产生电磁波，稳恒电流也同样。我们将看到，这需要加速的电荷和变化的电流。本章的目的是向你展示如何产生电磁波——即它们如何产生**辐射**。

电磁波一旦产生，将在真空中携带着能量向无穷远处传播。辐射的特点是从源发出不可逆的能量流。在本章中，将假设源局域在原点附近。[㊀]想象一个半径为 r 的巨大球壳(见图11.1)，通过这个面的总功率是坡印廷矢量的积分：

$$P(r) = \oint \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\mu_0}\oint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{11.1}$$

辐射的功率由 r 趋于无穷大时的极限得到

$$P_{\text{辐射}} \equiv \lim_{r\to\infty} P(r) \tag{11.2}$$

这个能量(单位时间内的)传播至无穷远，且不再返回。

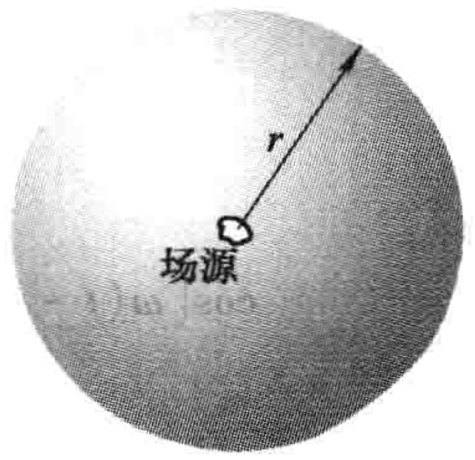


图　11.1

现在，球壳的面积是 $4\pi r^2$，故有辐射发生时，坡印廷矢量的减小(在 r 较大时)不能快于 $1/r^2$(例如，如果它以 $1/r^3$ 的方式减小，$P(r)$将以 $1/r$ 减小，$P_{\text{辐射}}$就是零)。根据库仑定律，静电场以 $1/r^2$ 的形式减小(或更快，如果总电荷是零)，而由毕奥-萨伐尔定律，磁场以 $1/r^2$(或更快)的方式减小，这意味着对于静止情形 $S \sim 1/r^4$，故静止的源不产生辐射。但杰斐缅柯方程(式(10.29)和式(10.31))指出，依赖于时间的场包含的一些项(包含 $\dot{\rho}$ 和 $\dot{\boldsymbol{J}}$)以 $1/r$ 变化，正是由于这些项导致电磁辐射。

这样，对辐射的研究就是找出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中在远离源处以 $1/r$ 变化的部分，由此构造 $\boldsymbol{S}$ 中 $1/r^2$ 项，在一个大球面上积分，[㊁]，并取 $r\to\infty$ 时的极限。我们将利用这些步骤首先求解振动的电偶极子和磁偶极子的辐射，然后在11.2节，考虑更复杂的加速点电荷的辐射。

11.1.2　电偶极子辐射

想象两个小金属球相距为 d 并用一个细导线相连(见图11.2)。在时刻 t，上面的小球带电 $q(t)$，下面的为 $-q(t)$。假设以角频率 ω 驱动电荷通过导线在两端的小球上来回振荡，

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) \tag{11.3}$$

这样产生一个振荡的电偶极子：[㊂]

㊀　对于非局域源，如无穷大平面，线或螺线管，辐射的整个概念则要重新定义——参见习题11.24。

㊁　当然，它不必是个球面，但球面可使计算变得更容易。

㊂　也许一个更自然的模型是大小相等、符号相反的电荷置于一个弹簧两端，这样 q 不变，距离 d 振荡。这样的模型会导致相同的结果，但在计算移动电荷的推迟势时有一个不易察觉的问题，在11.2节中会讲到。

$$\boldsymbol{p}(t) = p_0 \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{11.4}$$

式中

$$p_0 \equiv q_0 d$$

是电偶极矩最大值。

推迟势(式(10.19))为

$$V(\boldsymbol{r},\ t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_0\cos[\omega(t - \imath_+/c)]}{\imath_+} - \frac{q_0\cos[\omega(t - \imath_-/c)]}{\imath_-}\right\} \tag{11.5}$$

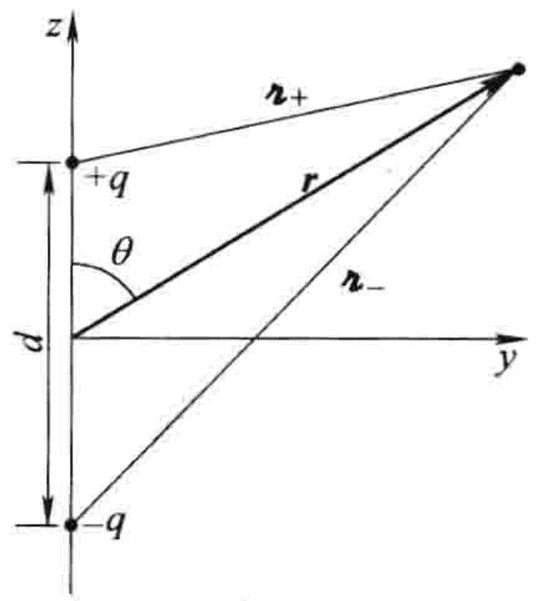


图 11.2

式中，由余弦定理，

$$\imath_\pm = \sqrt{r^2 \mp rd\cos\theta + (d/2)^2} \tag{11.6}$$

现在把物理上的电偶极子变成理想的电偶极子，使正负电荷相距非常小：

$$\text{近似 1：}\ d << r \tag{11.7}$$

当然，如果 d 是零，则根本得不到势，我们想得到的是有关 d 展开的一级近似。即

$$\imath_\pm \cong r\left(1 \mp \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \tag{11.8}$$

有

$$\frac{1}{\imath_\pm} \cong \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right) \tag{11.19}$$

和

$$\cos[\omega(t - \imath_\pm/c)] \cong \cos\left[\omega(t - r/c) \pm \frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right]$$

$$= \cos[\omega(t - r/c)]\cos\left(\frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right) \mp \sin[\omega(t - r/c)]\sin\left(\frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right)$$

对于理想电偶极子极限，进一步有

$$\text{近似 2：}\ d << \frac{c}{\omega} \tag{11.10}$$

(因为角频率为 ω 的波其波长是 $\lambda = 2\pi c/\omega$，这等同于要求 $d << \lambda$。)在这些条件下

$$\cos[\omega(t - \imath_\pm/c)] \cong \cos[\omega(t - r/c)] \mp \frac{\omega d}{2c}\cos\theta\sin[\omega(t - r/c)] \tag{11.11}$$

把式(11.9)和式(11.11)代入式(11.5)，得到振动的理想电偶极子的势：

$$V(r,\ \theta,\ t) = \frac{p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{-\frac{\omega}{c}\sin[\omega(t - r/c)] + \frac{1}{r}\cos[\omega(t - r/c)]\right\} \tag{11.12}$$

在静态极限($\omega \to 0$)第二项给出了静止电偶极子的势(式(3.99))：

$$V = \frac{p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

但这项不是我们关注的；我们感兴趣的是远离源处，即所谓的辐射区仍然存在的场，[⊖]

$$\text{近似 3：}\ r >> \frac{c}{\omega} \tag{11.13}$$

(或用波长表示，$r >> \lambda$。)在这个区域势简化为

$$\boxed{V(r,\ \theta,\ t) = -\frac{p_0\omega}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\sin[\omega(t - r/c)]} \tag{11.14}$$

⊖ 注意近似 2 和 3 包含近似 1，总的有 $d << \lambda << r$。

矢势由流过导线的电流确定：

$$\boldsymbol{I}(t)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}}=-q_0\omega\sin\omega t\hat{\boldsymbol{z}} \tag{11.15}$$

参考图 11.3，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-d/2}^{d/2}\frac{-q_0\omega\sin[\omega(t-\imath/c)]\hat{\boldsymbol{z}}}{\imath}\mathrm{d}z \tag{11.16}$$

因为积分引进了一个因子 d，在一级近似下，被积函数可用其中值替代：

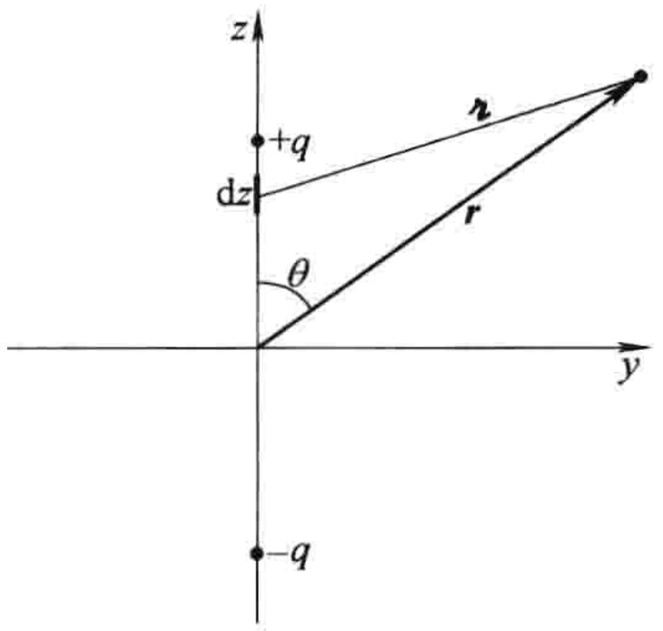


图　11.3

$$\boxed{\boldsymbol{A}(r,\ \theta,\ t)=-\frac{\mu_0 p_0\omega}{4\pi r}\sin[\omega(t-r/c)]\hat{\boldsymbol{z}}} \tag{11.17}$$

（注意，虽然只保留 d 的一阶项暗含着利用了近似 1 和 2，但式(11.17)没有用近似 3。）

由势可直接计算场。

$$\begin{aligned}\nabla V&=\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}\\&=-\frac{p_0\omega}{4\pi\varepsilon_0 c}\left\{\cos\theta\left(-\frac{1}{r^2}\sin[\omega(t-r/c)]-\frac{\omega}{rc}\cos[\omega(t-r/c)]\right)\hat{\boldsymbol{r}}-\frac{\sin\theta}{r^2}\sin[\omega(t-r/c)]\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}\\&\cong\frac{p_0\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\cos[\omega(t-r/c)]\hat{\boldsymbol{r}}\end{aligned}$$

（由近似 3，第一和最后一项可略去）同样可得

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi r}\cos[\omega(t-r/c)](\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}-\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

故

$$\boxed{\boldsymbol{E}=-\nabla V-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos[\omega(t-r/c)]\hat{\boldsymbol{\theta}}} \tag{11.18}$$

由

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A}&=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\boldsymbol{A}_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}\\&=-\frac{\mu_0 p_0\omega}{4\pi r}\left\{\frac{\omega}{c}\sin\theta\cos[\omega(t-r/c)]+\frac{\sin\theta}{r}\sin[\omega(t-r/c)]\right\}\hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned}$$

第二项由于近似 3 也略去了，故

$$\boxed{\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=-\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos[\omega(t-r/c)]\hat{\boldsymbol{\phi}}} \tag{11.19}$$

式(11.18)和式(11.19)表示角频率为 ω 的单色波沿径向方向以光速传播。$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同相位，彼此垂直，为横波。振幅比为 $E_0/B_0=c$。所有这些性质是自由空间中电磁波应有的。（这些实际上是球面波，而非平面波，当它们向前传播时，振幅以 $1/r$ 的形式衰减但当 r 很大时，它们在小区域可近似为平面波——就像地球表面，在局部区域可近似认为是平的）。

一个振荡的电偶极子辐射的能量由坡印廷矢量确定：

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=\frac{\mu_0}{c}\left\{\frac{p_0\omega^2}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos[\omega(t-r/c)]\right\}^2\hat{\boldsymbol{r}} \tag{11.20}$$

波的强度由一个周期内的（时间）平均得到：

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle=\left(\frac{\mu_0 p_0^2\omega^4}{32\pi^2 c}\right)\frac{\sin^2\theta}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{11.21}$$

值得注意的是，沿着电偶极子轴的方向(即 $\sin\theta=0$)没有辐射。强度的分布[⊖]如一个油炸圈饼的形状，它的最大值处于赤道面上(见图 11.4)。辐射的总功率由对$\langle \boldsymbol{S}\rangle$在半径为 r 的球面上的积分得到：

$$\langle P\rangle = \int \langle \boldsymbol{S}\rangle \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\int \frac{\sin^2\theta}{r^2} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} \tag{11.22}$$

总功率不依赖于球的半径，这正是从能量守恒所预期的结果(由近似 3，我们在 $r\to\infty$ 时预期得到这个极限)。

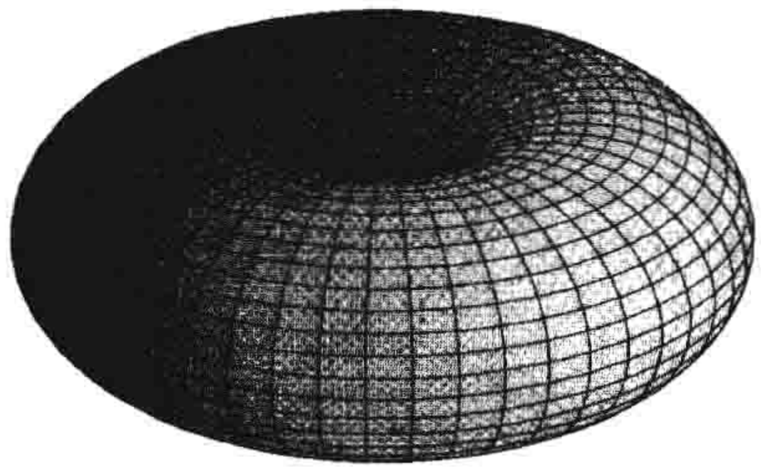


图 11.4

例题 11.1

在能量公式中，能量对频率的强烈依赖可解释天空为什么是蓝色的。太阳光通过大气层激发原子振动，产生许多小的偶极振荡。入射太阳光的辐射覆盖一个宽的频率范围(白光)，但被大气电偶极子吸收和重新辐射的能量在高频处较强，因为在式(11.22)中有 ω^4。这样蓝光就强于红光。你抬头仰望天空，看到的正是二次辐射光——当然，除非你直接盯住太阳看。

因为电磁波是横波，所以偶极振动面垂直于太阳光线。在天空，垂直于光线的弧形区域蓝色光最强，它沿着偶极振动方向没有辐射地传播向观察者(因为式(22.21)中的 $\sin^2\theta$)，故在这个角度接收到的光偏振方向垂直于太阳光线(见图 11.5)。

日落时天空呈现红色是同样的原因：太阳光沿切线照射地球表面，这些光线比直射光线在大气层中经过更长的距离(见图 11.6)。结果许多蓝色光被散射掉，留下的是红色光。

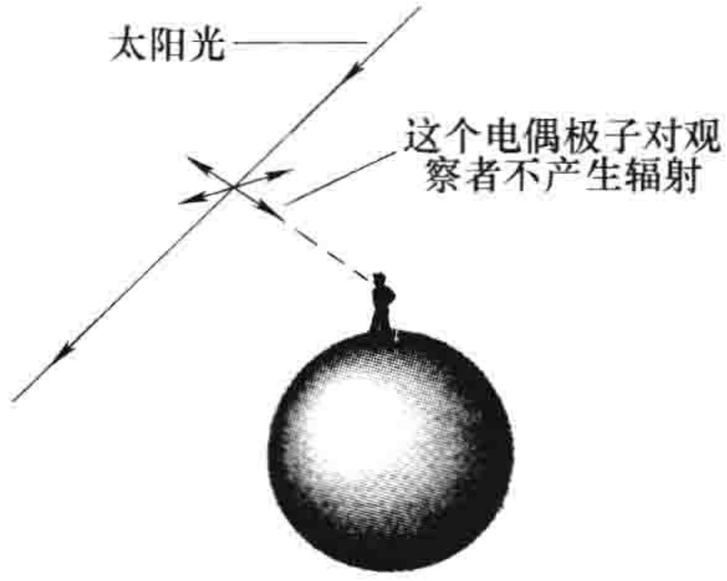


图 11.5

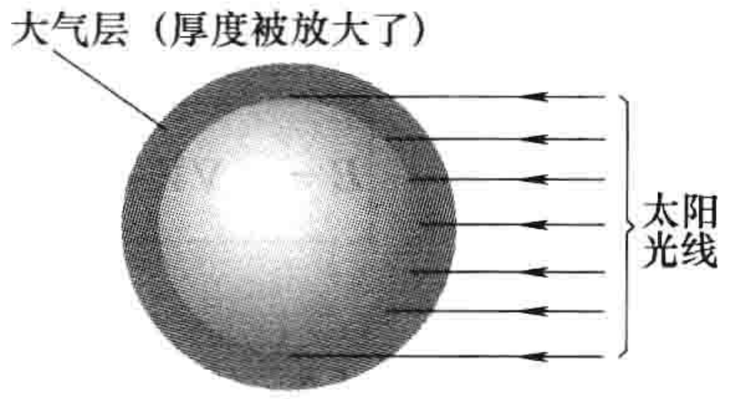


图 11.6

习题 11.1 验证振动偶极子的推迟势(式(11.12)和式(11.17))满足洛伦兹规范条件。不要用近似 3。

习题 11.2 式(11.14)可写成不依赖坐标的形式 $p_0\cos\theta = \boldsymbol{p}_0\cdot\hat{\boldsymbol{r}}$，对式(11.17)，式(11.18)，式(11.19)和式(11.21)做同样处理。

习题 11.3 求在偶极子中连接两端导线的“**辐射电阻**”。(这个电阻给出同样的平均功率损失——变为热能——如振动的偶极子以辐射的形式释放出的功率。)证明 $R = 790(d/\lambda)^2\Omega$，式中 λ 是辐射波长。对于在普通收音机中的导线(假定，$d=5\mathrm{cm}$)，你会担心辐射对总电阻的贡献吗？

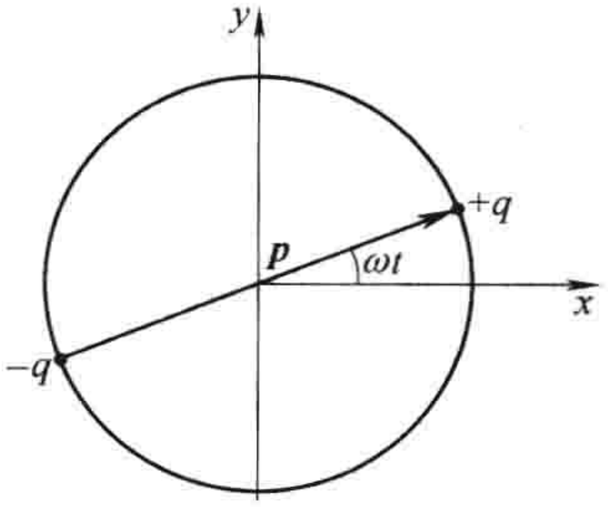


图 11.7

! **习题 11.4** 一个转动的电偶极子可认为是两个振动的偶极子的

⊖ 图 11.4 中的径向坐标表示(在固定 r 处)$\langle \boldsymbol{S}\rangle$的大小，它是 θ 和 ϕ 的函数。

叠加，如图 11.7 所示，一个沿 x 轴，一个沿 y 轴，后者与前者相位差 90°：

$$\boldsymbol{p} = p_0[\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}]$$

利用叠加原理和式(11.18)、式(11.19)(或许用习题 11.2 中给出的形式)，求出转动偶极子的场。求出坡印廷矢量和辐射强度。画出以极角 θ 为变量的强度函数分布图。计算总的辐射功率。结果合理吗?(注意功率是场的二次方，不满足叠加原理。在这个例子中，它似乎满足，能给出解释吗?)

11.1.3　磁偶极子辐射

如果我们现在有一个由导线构成的半径为 b 的环(见图 11.8)，它通有一个交变电流

$$I(t) = I_0\cos(\omega t) \tag{11.23}$$

这就是一个振动的磁偶极子模型，

$$\boldsymbol{m}(t) = \pi b^2 I(t)\hat{\boldsymbol{z}} = m_0\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{11.24}$$

式中

$$m_0 \equiv \pi b^2 I_0 \tag{11.25}$$

是磁偶极矩的最大值。

环不带电荷，故标势为零。推迟矢势是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I_0\cos[\omega(t - \imath/c)]}{\imath}\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \tag{11.26}$$

对于一个在 x 轴上方的点 $\boldsymbol{r}$(见图 11.8)，$\boldsymbol{A}$ 必定指向 y 方向，因为对称分布在 x 轴两边的 x 分量彼此抵消，故

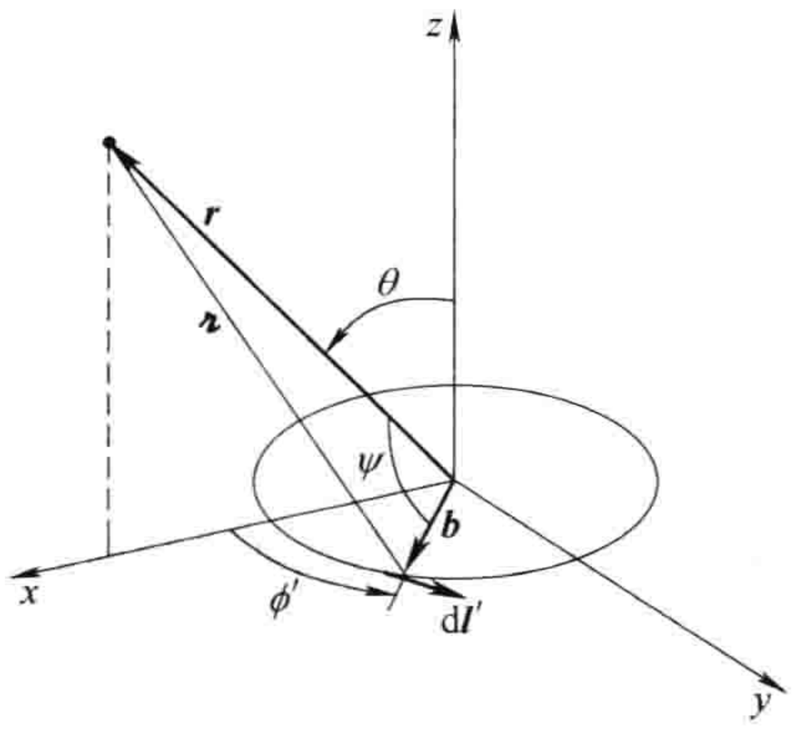


图　11.8

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi}\hat{\boldsymbol{y}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos[\omega(t - \imath/c)]}{\imath}\cos\phi'\mathrm{d}\phi' \tag{11.27}$$

($\cos\phi'$用来挑选出 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$中的 y 分量)。由余弦定理，

$$\imath = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\psi}$$

式中，ψ 是矢量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角：

$$\boldsymbol{r} = r\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} + r\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}},\quad \boldsymbol{b} = b\cos\phi'\hat{\boldsymbol{x}} + b\sin\phi'\hat{\boldsymbol{y}}$$

所以 $rb\cos\psi = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b} = rb\sin\theta\cos\phi'$，故

$$\imath = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\sin\theta\cos\phi'} \tag{11.28}$$

对于一个“理想”偶极子，希望环非常小：

$$\text{近似 1：}\ b \ll r \tag{11.29}$$

对于 b 的一级近似，有

$$\imath \cong r\left(1 - \frac{b}{r}\sin\theta\cos\phi'\right)$$

所以

$$\frac{1}{\imath} \cong \frac{1}{r}\left(1 + \frac{b}{r}\sin\theta\cos\phi'\right) \tag{11.30}$$

有

$$\cos[\omega(t - \imath/c)] \cong \cos\left[\omega(t - r/c) + \frac{\omega b}{c}\sin\theta\cos\phi'\right]$$

$$= \cos[\omega(t - r/c)]\cos\left(\frac{\omega b}{c}\sin\theta\cos\phi'\right) - \sin[\omega(t - r/c)]\sin\left(\frac{\omega b}{c}\sin\theta\cos\phi'\right)$$

和以前一样，我们假设偶极子的尺度比辐射的波长小

$$\text{近似 2：} b \ll \frac{c}{\omega} \tag{11.31}$$

在这种情况下，

$$\cos[\omega(t - \text{?}/c)] \cong \cos[\omega(t - r/c)] - \frac{\omega b}{c}\sin\theta\cos\phi'\sin[\omega(t - r/c)] \tag{11.32}$$

把式(11.30)和式(11.32)代入式(11.27)，略去二阶项：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \cong \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r}\hat{\boldsymbol{y}}\int_0^{2\pi}\left\{\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] + b\sin\theta\cos\phi'\left(\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega}{c}\sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\right)\right\}\cos\phi'\mathrm{d}\phi'$$

上式中第一项积分为零：

$$\int_0^{2\pi}\cos\phi'\mathrm{d}\phi' = 0$$

第二项涉及余弦二次方积分：

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\phi'\mathrm{d}\phi' = \pi$$

代入方程(注意，一般地 A 是指向 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 方向的。)可得振动的理想偶极子矢势为

$$\boldsymbol{A}(r,\ \theta,\ t) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\left\{\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega}{c}\sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\right\}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{11.33}$$

在静态极限下($\omega = 0$)，我们回到熟悉的磁偶极子矢势的公式(式(5.85))

$$\boldsymbol{A}(r,\ \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_0\sin\theta}{r^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

在辐射区域，

$$\text{近似 3：} r \gg \frac{c}{\omega} \tag{11.34}$$

$\boldsymbol{A}$ 中第一项可略去，故

$$\boxed{\boldsymbol{A}(r,\ \theta,\ t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}} \tag{11.35}$$

由 $\boldsymbol{A}$ 得到在大 r 处的场为

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}} \tag{11.36}$$

和

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}} \tag{11.37}$$

(在计算 $\boldsymbol{B}$ 时利用了近似3。)这些场同相位，彼此垂直，而且都垂直于传播方向($\hat{\boldsymbol{r}}$)。它们的振幅比是 $E_0/B_0 = c$，所有这些都是电磁波应有的特性。事实上，它们与振动的电偶极子的场(式(11.18)和式(11.19))在形式上极为相似。差异仅在于这里 $\boldsymbol{B}$ 指向 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 方向，$\boldsymbol{E}$ 指向 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 方向，而对于电偶极子则相反。

磁偶极子的辐射能量流是

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) = \frac{\mu_0}{c}\left\{\frac{m_0\omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos[\omega(t - r/c)]\right\}^2\hat{\boldsymbol{r}} \tag{11.38}$$

强度为

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \right) \frac{\sin^2\theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{r}} \tag{11.39}$$

总辐射功率是

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3} \tag{11.40}$$

强度分布也具有油炸圈饼的形状(见图 11.4)，辐射功率也依赖于 ω^4。但电偶极子与磁偶极子辐射有一个重要的不同：对尺度相当的偶极子，电偶极子辐射的能量远大于磁偶极子。比较式(11.22)和式(11.40)，

$$\frac{P_{\text{磁}}}{P_{\text{电}}} = \left(\frac{m_0}{p_0 c} \right)^2 \tag{11.41}$$

式中，(还记得)$m_0 = \pi b^2 I_0$；$p_0 = q_0 d$。在电偶极子中电流的大小是 $I_0 = q_0 \omega$(式(11.15))。为了比较，设 $d = \pi b$，得

$$\frac{P_{\text{磁}}}{P_{\text{电}}} = \left(\frac{\omega b}{c} \right)^2 \tag{11.42}$$

但量 $\omega b/c$ 正如我们假设的，是非常小的(近似 2)，这里它以二次方出现。故通常可认为电偶极子辐射起主要作用。仅当系统被仔细设计从而排除电偶极子辐射的贡献(如刚处理的体系)时，磁偶极子辐射才能显现。

习题 11.5　不利用近似 3，计算振荡磁偶极子的电磁场。[比较于习题 9.33，它们看上去相似吗?]求出坡印廷矢量，证明辐射强度与利用近似 3 时所得到的结果相同。

习题 11.6　求图 11.8 中的振荡磁偶极子的辐射电阻(习题 11.3)。结果用 λ 和 b 表示，并与电偶极子的辐射电阻比较。[答案：$3 \times 10^5 (b/\lambda)^4 \Omega$]

习题 11.7　利用习题 7.60 的“两元”变换及振荡电偶极子的场(式(11.18)和式(11.19))，确定振荡“吉尔波特”磁偶极子(由大小相等、符号相反的磁荷组成，而非电流环)的场。比较式(11.36)和式(11.37)，并对结果加以评述。

11.1.4　任意源的辐射

在前面部分我们学习了由两个特殊体系产生的辐射：振荡的电偶极子和磁偶极子。现在利用同样的步骤来求任意分布的电荷和电流的辐射，仅假设它们是局限在原点附近有限体积内(见图 11.9)。推迟标量势是

$$V(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t - \mathscr{r}/c)}{\mathscr{r}} \mathrm{d}\tau' \tag{11.43}$$

式中

$$\mathscr{r} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'} \tag{11.44}$$

和以前相同，假设场点 $\boldsymbol{r}$ 与源的尺度相比很远：

$$\text{近似 1：} r' \ll r。 \tag{11.45}$$

(实际上，r'是积分变量。近似 1 的意思是，r'的最大值，即源的尺度，与 r 相比非常小。)根据这个假设，

$$\mathscr{r} \cong r\left(1 - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^2}\right) \tag{11.46}$$

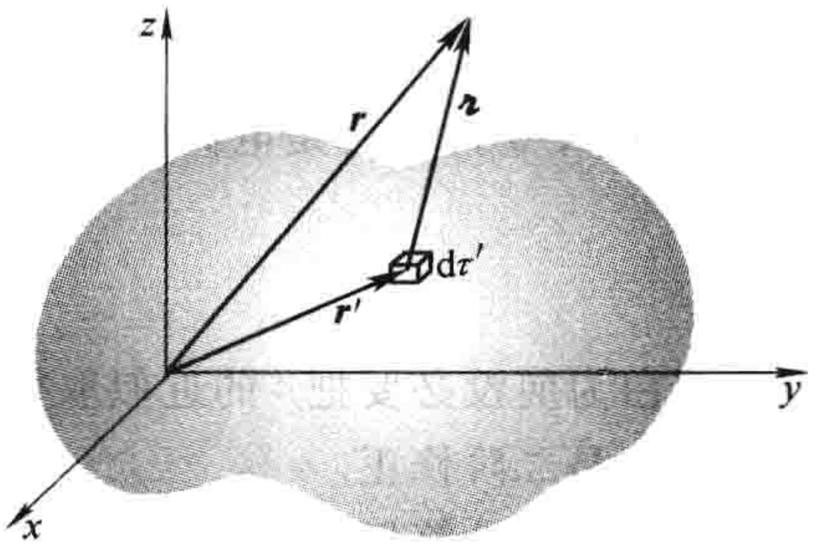


图　11.9

故有

$$\frac{1}{\mathscr{r}} \cong \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}'}{r^2}\right) \tag{11.47}$$

和

$$\rho(\boldsymbol{r}',\ t - \mathscr{r}/c) \cong \rho\left(\boldsymbol{r}',\ t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}'}{c}\right)$$

以原点的推迟时间把 ρ 展开为 t 的泰勒级数，

$$t_0 \equiv t - \frac{r}{c} \tag{11.48}$$

我们有

$$\rho(\boldsymbol{r}',\ t - \mathscr{r}/c) \cong \rho(\boldsymbol{r}',\ t_0) + \dot{\rho}\,(\boldsymbol{r}',\ t_0)\left(\frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}'}{c}\right) + \cdots \tag{11.49}$$

式中，圆点表示对时间求导数。级数中后面的项应当是

$$\frac{1}{2}\ddot{\rho}\left(\frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}'}{c}\right)^2,\ \frac{1}{3!}\dddot{\rho}\left(\frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}'}{c}\right)^3,\ \cdots$$

我们可以略去它们，只要有

$$\text{近似 2：}\ r' \ll \frac{c}{|\ \ddot{\rho}/\dot{\rho}\ |},\ \frac{c}{|\ \dddot{\rho}/\dot{\rho}\ |^{1/2}},\ \frac{c}{|\ \ddddot{\rho}/\dot{\rho}\ |^{1/3}},\ \cdots \tag{11.50}$$

对于一个振荡体系，上面的每一个比值均为 c/ω，我们回到了过去的近似 2。对于一般的情形，式(11.50)难以明显给出，但近似 1 和 2 意味着我们只需考虑保留 r'的一阶近似。

把式(11.47)和式(11.49)代入求 V 的公式(式(11.43))，略去二阶项：

$$V(\boldsymbol{r},t) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\int \rho(\boldsymbol{r}',t_0)\,\mathrm{d}\tau' + \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r} \cdot \int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}',t_0)\,\mathrm{d}\tau' + \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{c} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}',t_0)\,\mathrm{d}\tau'\right]$$

第一项积分只是在 t_0 时的总电荷 Q。但因为电荷是守恒的，实际上它不依赖于时间。另两个积分表示在时间 t_0 时的电偶极矩。所以

$$V(\boldsymbol{r},\ t) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{p}}\,(t_0)}{rc}\right] \tag{11.51}$$

在静态情形，前两项是 V 多极展开中的单极和偶极贡献，第三项当然将不出现。

同时，矢势是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t - \mathscr{r}/c)}{\mathscr{r}}\mathrm{d}\tau' \tag{11.52}$$

后面会看到，对于 $\boldsymbol{r}'$一阶近似，可在被积函数中用 r 替换 $\mathscr{r}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi r}\int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t_0)\,\mathrm{d}\tau' \tag{11.53}$$

根据习题 5.7，$\boldsymbol{J}$ 的积分是电偶极矩对时间的导数，故

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\boldsymbol{p}}\,(t_0)}{r} \tag{11.54}$$

现在你明白为何没必要把 $\mathscr{r}$ 的近似取得超过零级了吧($\mathscr{r} \cong r$)：$\boldsymbol{p}$ 已经是 r'一阶近似了，任何进一步的改进都是二阶修正。

下一步必须计算场。我们再次对辐射区域感兴趣(即远离源的场)，故仅保留那些 $1/r$ 项：

$$\text{近似 3：在 } \boldsymbol{E} \text{ 和 } \boldsymbol{B} \text{ 中忽略 } 1/r^2 \text{ 项} \tag{11.55}$$

例如，库仑场

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

源于式(11.51)中的第一项对电磁辐射没有贡献。事实上，辐射全部来源于对变量 t_0 求导的项。从式(11.48)得

$$\nabla t_0=-\frac{1}{c}\nabla r=-\frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{r}}$$

所以

$$\nabla V\cong\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{p}}\,(t_0)}{rc}\right]\cong\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{p}}\,(t_0)}{rc}\right]\nabla t_0=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{[\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{p}}\,(t_0)]}{r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

类似地，

$$\nabla\times\boldsymbol{A}\cong\frac{\mu_0}{4\pi r}[\nabla\times\dot{\boldsymbol{p}}\,(t_0)]=\frac{\mu_0}{4\pi r}[(\nabla t_0)\times\ddot{\boldsymbol{p}}\,(t_0)]=-\frac{\mu_0}{4\pi rc}[\hat{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{p}}\,(t_0)]$$

而

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cong\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{\boldsymbol{p}}\,(t_0)}{r}$$

故

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)\cong\frac{\mu_0}{4\pi r}[(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{p}})\hat{\boldsymbol{r}}-\ddot{\boldsymbol{p}}]=\frac{\mu_0}{4\pi r}[\hat{\boldsymbol{r}}\times(\hat{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{p}})]}\tag{11.56}$$

式中，$\ddot{\boldsymbol{p}}$ 是在时间 $t_0=t-r/c$ 时的值，而

$$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\ t)\cong-\frac{\mu_0}{4\pi rc}[\hat{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{p}}]}\tag{11.57}$$

特别地，如果使用球坐标，令 z 轴指向 $\ddot{\boldsymbol{p}}(t_0)$ 方向，有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(r,\ \theta,\ t)&\cong\frac{\mu_0\ddot{p}\,(t_0)}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \boldsymbol{B}(r,\ \theta,\ t)&\cong\frac{\mu_0\ddot{p}\,(t_0)}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned}\right\}\tag{11.58}$$

坡印廷矢量是

$$\boldsymbol{S}\cong\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=\frac{\mu_0}{16\pi^2 c}[\ddot{p}\,(t_0)]^2\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)\hat{\boldsymbol{r}}\tag{11.59}$$

总的辐射功率是

$$P\cong\int\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\frac{\mu_0\ddot{p}^2}{6\pi c}\tag{11.60}$$

注意，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 互相垂直，而且垂直于传播方向($\hat{\boldsymbol{r}}$)，$E/B=c$，这是辐射场一直有的关系。

例题 11.2

(a) 对于振动电偶极子，

$$p(t)=p_0\cos(\omega t),\quad\ddot{p}\,(t)=-\omega^2 p_0\cos(\omega t)$$

回到 11.1.2 小节的结果。

（b）对于单个点电荷 q，电偶极矩是

$$\boldsymbol{p}(t) = q\boldsymbol{d}(t)$$

式中，$\boldsymbol{d}$ 是 q 相对于原点的位置。由此

$$\ddot{\boldsymbol{p}}\ (t) = q\boldsymbol{a}(t)$$

式中，$\boldsymbol{a}$ 是电荷的加速度。这种情形下辐射的功率（式(11.60)）是

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \tag{11.61}$$

这就是著名的**拉莫尔（Larmor）公式**。在下一节，将用另一种非常不同的方法再次推导它。注意，点电荷辐射的功率正比于加速度的二次方。

在本节我们对推迟势进行了多极展开，取 r' 的最低阶，产生电磁辐射（场以 $1/r$ 衰减）。这是电偶极子项。因为电荷守恒，电单极子不辐射——如果电荷不守恒，式(11.51)中的第一项为

$$V_{\text{单极}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(t_0)}{r}$$

得到电单极场正比于 $1/r$：

$$\boldsymbol{E}_{\text{单极}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\dot{Q}(t_0)}{r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

你也许认为一个半径振荡变化的带电球会辐射，但它不会辐射——根据高斯定理，不论球的大小是否变化，球外的场严格为 $(Q/4\pi\varepsilon_0 r^2)\hat{\boldsymbol{r}}$。（顺便指出，在声学模拟中，单极子确能产生辐射，牛蛙的哇哇叫就是个例证。）

如果电偶极矩是零（或至少它对时间的二阶导数为零），则没有电偶极子辐射，必须看下一项：r' 的二阶项。经计算可知，此项对辐射的贡献可分为两部分，一部分与源的磁偶极矩相联系，另一部分是电四极矩。（前一项是我们在 11.1.3 小节讨论的磁偶极子辐射的一个推广。）如果磁偶极矩和电四极矩贡献仍然为零，就必须考虑 r'^3 项。这会产生磁四极矩和电八极矩辐射……以此类推。

习题 11.8 把式(11.59)和式(11.60)应用于习题 11.4 中的转动偶极子。解释任何表面上与你以前结果的不同。

习题 11.9 一个绝缘的圆形环（半径为 b）位于 xy 平面，中心在原点。它的电荷线密度为 $\lambda = \lambda_0 \sin\phi$，式中 λ_0 是常数，ϕ 是通常的方位角。现在线圈以角速度 ω 绕 z 轴旋转。计算辐射功率。

习题 11.10 一个电子从静止释放，在重力作用下下落。在初始下降的 1cm 中，损失的势能中有多少辐射出去了？

！习题 11.11 作为一个电四极矩辐射模型，考虑两个相反方向振动的电偶极子，相距为 d，如图 11.10 所示。利用 11.1.2 小节中给出的每个偶极子势的结果，但是要注意，现在它们不是位于原点。仅保留 d 的一阶项：

（a）求标势和矢势。

（b）求电场和磁场。

（c）求坡印廷矢量和辐射功率。画出以 θ 为变量的强度分布函数图。

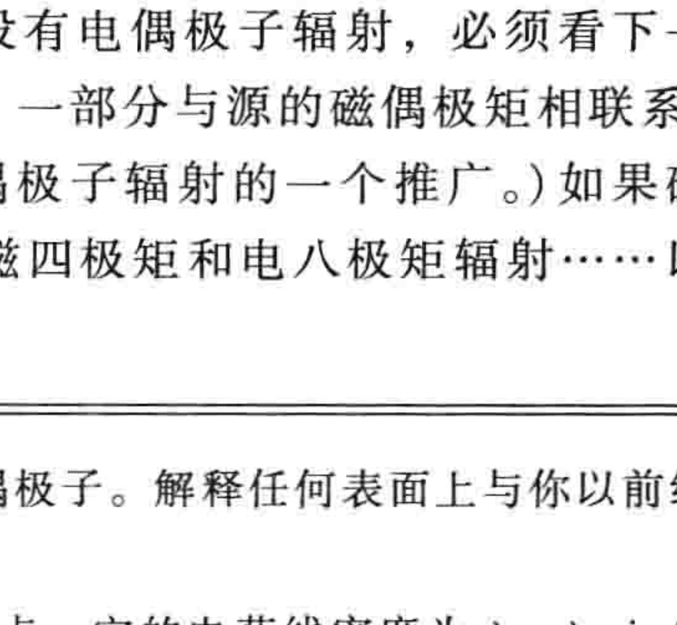


图 11.10

！习题 11.12 一电流 $I(t)$ 流过如图 11.8 所示的圆形线圈。推导出辐射功率的一般表达式（类似式(11.60)），用线圈的磁偶极矩

($m(t)$)表示结果。[答案：$P=\mu_0\ddot{m}^2/6\pi c^3$]

11.2　点电荷

11.2.1　点电荷的辐射功率

在第 10 章中我们推导出了任意运动的点电荷 q 的场(式(10.65)和式(10.66))：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\imath}{(\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{u})^3}[(c^2-v^2)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\imath}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a})] \tag{11.62}$$

(式中，$\boldsymbol{u}=c\hat{\boldsymbol{\imath}}-\boldsymbol{v}$)和

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{\imath}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t) \tag{11.63}$$

式(11.62)的第一项称为速度场，第二项(三个叉积项)称为加速场。

坡印廷矢量是

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=\frac{1}{\mu_0 c}[\boldsymbol{E}\times(\hat{\boldsymbol{\imath}}\times\boldsymbol{E})]=\frac{1}{\mu_0 c}[E^2\hat{\boldsymbol{\imath}}-(\hat{\boldsymbol{\imath}}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}] \tag{11.64}$$

但是，不是能量流中所有的项都构成辐射，它们中的一些仅是运动粒子携带的场能量。辐射能是脱离电荷传播向无穷远处的能量(就像滋生在垃圾车上的苍蝇，其中的一些随着车飞舞，而另一些飞走不再回来)。为了计算粒子在时间 t_r 时的总的辐射功率，我们画一个半径为 $\imath$ 的巨大的球面(见图 11.11)，球心在粒子处(在时刻 t_r)，在适当的时间间隔

$$t-t_r=\frac{\imath}{c} \tag{11.65}$$

后，辐射到达球面，此时对球面上的坡印廷矢量积分。[⊖]我用了符号 t_r，因为事实上这是在时刻 t 球面上所有的点的推迟时间。

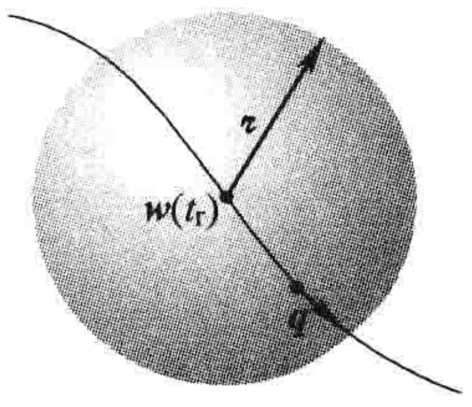


图　11.11

由于球面的面积正比于 $\imath^2$，所以在 $\imath\to\infty$ 时，$\boldsymbol{S}$ 中任何包含 $1/\imath^2$ 的项积分不为零，但包含 $1/\imath^3$ 和 $1/\imath^4$ 的项将趋于零。由于这个原因，仅加速场代表真实的辐射(所以它们的另一个名字是**辐射场**)：

$$\boldsymbol{E}_{\text{辐射}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\imath}{(\boldsymbol{\imath}\cdot\boldsymbol{u})^3}[\boldsymbol{\imath}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a})] \tag{11.66}$$

速度场确实携带能量，当电荷移动时，这个能量跟随着一起移动——但它不辐射(就像苍蝇跟随着垃圾车)。现在 $\boldsymbol{E}_{\text{辐射}}$ 垂直于 $\hat{\boldsymbol{\imath}}$，所以式(11.64)中的第二项为零：

$$\boldsymbol{S}_{\text{辐射}}=\frac{1}{\mu_0 c}E^2_{\text{辐射}}\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{11.67}$$

如果电荷瞬时静止(在时刻 t_r)，则 $\boldsymbol{u}=c\hat{\boldsymbol{\imath}}$，有

$$\boldsymbol{E}_{\text{辐射}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2\imath}[\hat{\boldsymbol{\imath}}\times(\hat{\boldsymbol{\imath}}\times\boldsymbol{a})]=\frac{\mu_0 q}{4\pi\imath}[(\hat{\boldsymbol{\imath}}\cdot\boldsymbol{a})\hat{\boldsymbol{\imath}}-\boldsymbol{a}] \tag{11.68}$$

在这种情况

⊖　注意这里细微的变化：在 11.1 节，我们讨论的是固定点(原点)，但这里更多的是用(移动的)电荷的位置。这种变化隐含的意义下面会变得清晰。

$$\boldsymbol{S}_{\text{辐射}} = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\frac{\mu_0 q}{4\pi r}\right)^2 [a^2 - (\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{a})^2]\,\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)\hat{\boldsymbol{r}} \tag{11.69}$$

式中，θ 是 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 之间的夹角。在前方和后方没有能量辐射——而是以一个沿着瞬时加速方向的油炸圈饼的形状向外辐射(见图 11.12)。

显然，总的辐射功率是

$$P = \oint \boldsymbol{S}_{\text{辐射}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\int \frac{\sin^2\theta}{r^2} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

或

$$\boxed{P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}} \tag{11.70}$$

这即是**拉莫尔公式**，较早前我们用另一种方法得到过(式(11.61))。

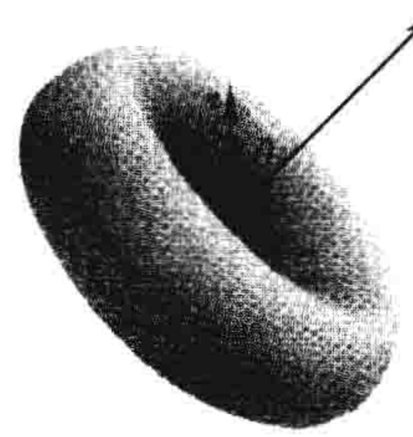


图 11.12

尽管推导时假设 $v=0$，实际上式(11.69)和式(11.70)对 $v \ll c$ 的情形也是很好的近似。对 $v \neq 0$情形的精确处理比较困难，[⊖]一个明显的原因是 $\boldsymbol{E}_{\text{辐射}}$ 更为复杂，另一个更微妙的原因是单位时间穿过球面的能量，并不等于单位时间粒子发射的能量。假设从移动汽车的窗户中射出一束子弹(见图 11.13)，由于汽车的运动，单位时间击中固定目标的子弹数 N_t 与手枪单位时间发射的子弹数 N_g 是不同的。事实上，若假定汽车向靶运动，你可以很容易算出 $N_g = (1 - v/c)N_t$，对汽车以任意方向运动，则有

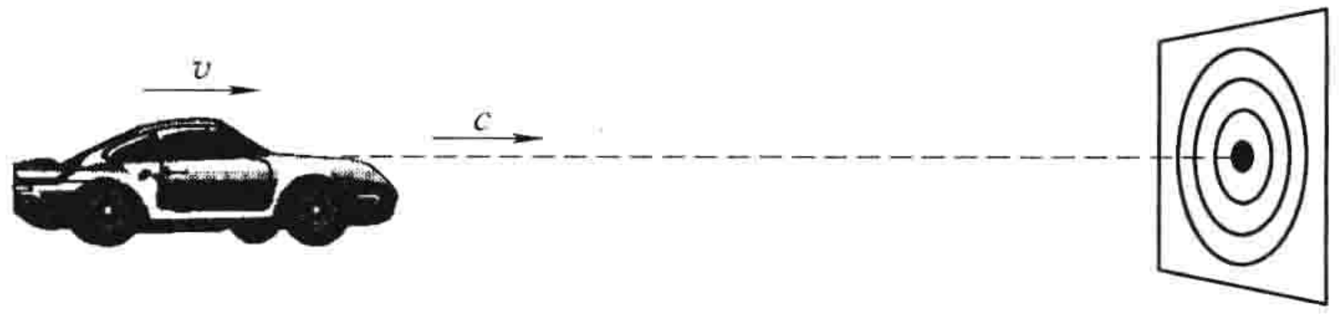


图 11.13

$$N_g = \left(1 - \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{v}}{c}\right)N_t$$

(式中，$\boldsymbol{v}$ 是车的速度；c 是子弹相对于地面的速度；$\hat{\boldsymbol{r}}$ 是从车到靶的单位矢量)。对于我们的情形，如果 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ 是单位时间穿过半径为 r 的球面的能量，则单位时间离开电荷的能量为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t_r} = \frac{\mathrm{d}W/\mathrm{d}t}{\partial t_r/\partial t} = \left(\frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u}}{rc}\right)\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tag{11.71}$$

(我用了式(10.71)表示 $\partial t_r/\partial t$。)但这是精确的 N_g 对 N_t 的比率，它纯粹是一个几何因子(与多普勒效应相同)。

所以，粒子在球面上穿过一块区域 $r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = r^2\mathrm{d}\Omega$ 的辐射功率为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u}}{rc}\right)\frac{1}{\mu_0 c}E_{\text{辐射}}^2 r^2 = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{|\hat{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a})|^2}{(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{u})^5} \tag{11.72}$$

式中，$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ 是辐射能量通过的**立体角**。对角度 θ 和 ϕ 积分不是件轻松的事，这里仅给出结果

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c}\left(a^2 - \left|\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}}{c}\right|^2\right) \tag{11.73}$$

⊖ 在狭义相对论中，条件 $v=0$ 仅表示一个对参考系的精明的选取，并不失普遍性。如果你能决定 P 如何变换，你就能从 $v=0$(拉莫尔)公式推出一般的李纳公式(参看习题 12.69)。

式中，$\gamma \equiv 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$，这是拉莫尔公式的**李纳**(Liénard)**推广式**，在低速时它化为拉莫尔公式。因子 γ^6 意味着当粒子的速度接近光速时辐射能会剧烈增大。

例题 11.3

设 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的方向瞬时共线(时刻 t_r)，例如在一条直线上的运动。求辐射的角分布(式(11.72))和总的辐射能。

解： 在这种情况下 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}) = c(\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{a})$，故

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2c^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{|\hat{\boldsymbol{r}}\times(\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{a})|^2}{(c-\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{v})^5}$$

而

$$\hat{\boldsymbol{r}}\times(\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{a}) = (\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{a})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{a}，\text{有}\ |\hat{\boldsymbol{r}}\times(\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{a})|^2 = a^2 - (\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{a})^2$$

特别地，如果让 $\boldsymbol{v}$ 沿 z 轴方向，有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5} \tag{11.74}$$

式中，$\beta \equiv v/c$。当然，在 $v=0$ 的情况下这与式(11.69)一致。但对于很大的 $v(\beta\approx 1)$，辐射圈饼(见图 11.12)向外扩张并向前拉伸一个因子 $(1-\beta\cos\theta)^{-5}$，如图 11.14 所示。尽管在正前方依然没有辐射，但大部分辐射集中在一个指向前进方向的逐渐狭窄的椎体内(参看习题 11.15)。

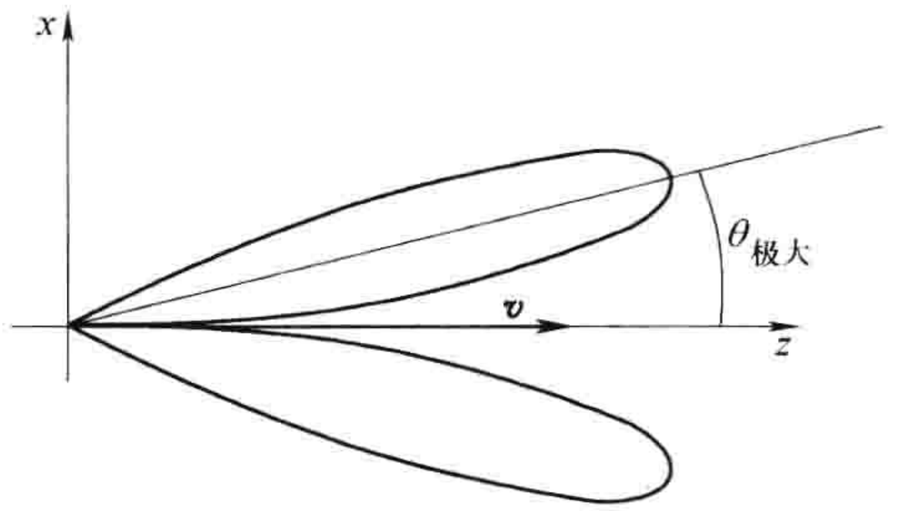


图　11.14

通过对式(11.74)中所有角度的积分，得出总辐射功率：

$$P = \int \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\int \frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

ϕ 的积分为 2π，通过替换 $x\equiv\cos\theta$，对 θ 的积分可化简：

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{8\pi c}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)}{(1-\beta x)^5}\mathrm{d}x$$

由分部积分得 $\frac{4}{3}(1-\beta^2)^{-3}$，有

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^6}{6\pi c} \tag{11.75}$$

这个结果对 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 共线的情形与李纳公式(式(11.73))一致。注意，辐射的角分布不论粒子是加速还是减速都是一样的；它仅依赖于 a 的二次方，且在任意一种情况都集中在前进方向(速度的方向)。当一个电子高速碰撞金属靶时，它速度迅速降低，发出所谓的韧致辐射，或“减速辐射”。这个例子中描述的实际上就是韧致辐射的经典理论。

习题 11.13

(a) 假设一个初速度为 v_0 的电子以恒定加速度 a 减速至速度为零。它辐射损失的能量占它初始动能的比值是多少？(其余的能量被为保持它以一个恒定减速运动的其他机制吸收掉了。)假设 $v_0 << c$，所以拉莫尔公式适用。

(b) 为了对具体相关数字有个认识，假设电子的初速度是热运动速度(大约 $10^5\,\mathrm{m/s}$)，电子运动的距离是 30Å。由计算的结果，你对电子在普通导体中的辐射损失有什么结论？

习题 11.14　在氢原子的玻尔理论中，电子在基态作圆周运动的半径是 $10^{-11}\,\mathrm{m}$，它被质子通过库仑作

用束缚在轨道上。根据经典的电磁理论，电子会辐射，所以会以螺旋线运动到原子核。证明在大多数情形下 $v \ll c$（故可用拉莫尔公式），计算玻尔原子的寿命。（假设运动一周的轨道基本是圆。）

习题 11.15 求在例题 11.3 中最大辐射方向的方向角 θ_{max}（见图 11.14）。证明对极相对论速度（v 接近于光速 c），$\theta_{max} \cong \sqrt{(1-\beta)/2}$，与粒子瞬间静止情形的相同量相比较，这个辐射最大方向的辐射强度是多少（对极相对论情形）？以 γ 表示你的结果。

！ **习题 11.16** 在例题 11.3 中我们假设速度和加速度（至少瞬时）共线。对于它们垂直的情形作同样的分析。适当选择坐标系使 $\boldsymbol{v}$ 沿着 z 轴方向，$\boldsymbol{a}$ 沿着 x 轴（见图 11.15），这样 $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$，$\boldsymbol{a} = a\hat{\boldsymbol{x}}$，而 $\hat{\boldsymbol{\imath}} = \sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}$。验证 P 与李纳公式一致。［答案：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{[(1-\beta\cos\theta)^2 - (1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\phi]}{(1-\beta\cos\theta)^5}, \quad P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c}$$

对相对论速度（$\beta \approx 1$）辐射在前进方向有尖锐的峰（见图 11.16）。这些公式最重要的应用是对圆周运动——在这种情形下辐射称为**同步辐射**。对于一个相对论电子，辐射像火车头的前照灯，随着它的运动扫过周围。］

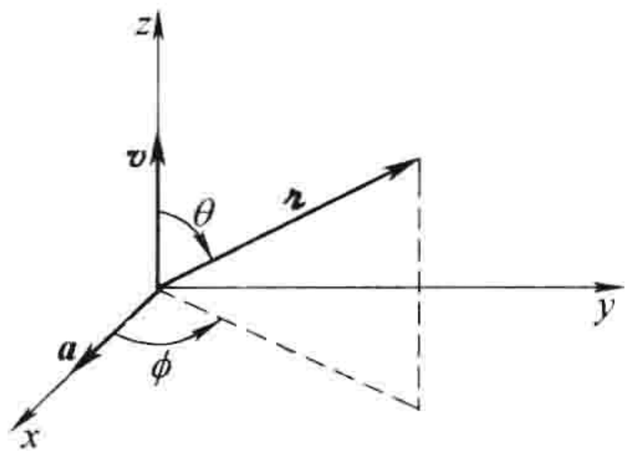


图 11.15

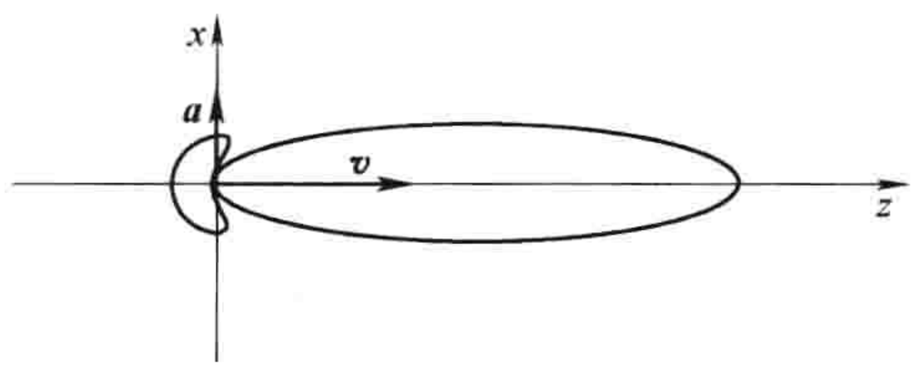


图 11.16

11.2.2 辐射反作用

根据经典电动力学，加速运动的电荷要产生辐射。这种辐射携带能量，这种能量必须消耗粒子的动能。所以在给定力的情况下，带电粒子的加速度要小于有同样质量的中性粒子的加速度。显然，辐射对电荷施加了一个阻力 $\boldsymbol{F}_{\text{辐射}}$——一个反冲力，如同子弹对枪的后座力。在本节我们将从能量守恒出发推导出**辐射反作用力**。在下节将描述实际的机制，并从一个简单模型再次推导出反作用力。

对非相对论粒子（$v \ll c$），辐射的总功率由拉莫尔公式（式(11.70)）给出：

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \tag{11.76}$$

根据能量守恒，这暗示，也正是粒子由于辐射反作用力 $\boldsymbol{F}_{\text{辐射}}$ 作用而损失了能量，损失的功率为

$$\boldsymbol{F}_{\text{辐射}} \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \tag{11.77}$$

我故意说“暗示”，因为这个方程事实上是错误的。因为我们是通过在一个半径为“无限大”的球面上积分坡印廷矢量来计算辐射功率的，在这个计算中速度场不起作用，因为作为 $\imath$ 的函数它们衰减得太快，所以没有任何贡献。但速度场的确携带了能量——它们仅是没有把它传输至无穷远而已。当粒子加速和减速时粒子和速度场之间有能量交换，同时能量以不可逆的形式通过加速场辐射出去。式(11.77)仅是后者，但如果我们想知道由场施加在电荷上的反作用力，我们需要考虑在任何时刻损失的总功率，而不只是最终失去的那部分辐射能。（术语“辐射反作用”是不当

的，我们实际上应当称它为场反作用。事实上，不久我们就会看到 $\boldsymbol{F}_{\text{辐射}}$ 可通过对加速度的时间导数求出，它甚至在瞬时加速度本身为零从而粒子不辐射时依然不为零。）

粒子在任何给定的时间间隔的能量损失，必须等于辐射携带的能量及转移给速度场的能量之和。[㊀]但是如果我们考虑的只是系统回到初始状态的时间间隔，那么速度场的能量在两端相同，净损失的能量只是辐射能。故式(11.77)在瞬时是不正确的，取平均

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{\text{辐射}} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\int_{t_1}^{t_2} a^2\,\mathrm{d}t \tag{11.78}$$

时才有效，并且具有约束，即系统的状态在 t_1 和 t_2 是相同的。例如，对于周期性运动我们必须对一个周期积分。[㊁]现在式(11.78)的右边可以通过分部积分求出

$$\int_{t_1}^{t_2} a^2\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = \left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

边界项为零，因为在 t_1 和 t_2 时的速度和加速度相同。故式(11.78)可等价写成

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\boldsymbol{F}_{\text{辐射}} - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\dot{\boldsymbol{a}}\right)\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t = 0 \tag{11.79}$$

如果

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{\text{辐射}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\dot{\boldsymbol{a}}} \tag{11.80}$$

则式(11.79)将必定满足。这就是辐射反作用力的亚伯拉罕-洛伦兹公式。

当然，式(11.79)不能证明式(11.80)。关于 $\boldsymbol{F}_{\text{辐射}}$ 垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的分量，它得不出任何结论，它仅告诉你平行分量的时间平均——在一个特别的时间间隔内的平均。在下节我们将看到有其他的原因相信亚伯拉罕-洛伦兹公式，但是现在能说的最好的表述是，它是辐射反作用力能取的最简单的形式，并与能量守恒一致。

亚伯拉罕-洛伦兹公式的含义有点令人困扰，在它首次被提出的近一个世纪以来还没有被完全理解。因为假设一个粒子没有受到外力，根据牛顿第二定律

$$F_{\text{辐射}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\dot{a} = ma$$

由此得

$$a(t) = a_0 \mathrm{e}^{t/\tau} \tag{11.81}$$

式中

$$\tau \equiv \frac{\mu_0 q^2}{6\pi m c} \tag{11.82}$$

(对于电子的情形，$\tau = 6\times10^{-24}\mathrm{s}$。)加速度自发地随着时间指数增加！如果令 $a_0 = 0$，则可以避免这个荒谬的结论，但这种**逃避的方法**会引起更糟糕的结果：如果你的确施加了一个外力，则粒子在力施加前就开始反应！(参看习题 11.19)。这个**无起因的预加速度**仅使枪提前跳起一个短暂的

㊀ 事实上，总的场是速度场和加速场之和，$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_v + \boldsymbol{E}_a$，能量正比于 $E^2 = E_v^2 + 2\boldsymbol{E}_v\cdot\boldsymbol{E}_a + E_a^2$，其中包括三项：储存在速度场中的能量($E_v^2$)，辐射出去的能量($E_a^2$)及交叉项 $\boldsymbol{E}_v\cdot\boldsymbol{E}_a$。为了简化，我把前两项之和($E_v^2 + 2\boldsymbol{E}_v\cdot\boldsymbol{E}_a$)称为“储存在速度场中的能量。”这些项分别以 $1/\mathscr{r}^4$ 和 $1/\mathscr{r}^3$ 衰减，对辐射没有贡献。

㊁ 对非周期运动，在 t_1 和 t_2 时速度场中的能量相同的条件是比较难得到的。两个时刻的瞬时速度和加速度相同是不够的，因为较远处的场依赖于较早时刻的 v 和 a。原则上，v 和 a 及所有高阶导数在 t_1 和 t_2 时刻必须相同。在实际中，因为速度场随着 $\mathscr{r}$ 快速减小，在 t_1 和 t_2 前经过一个小间隔就足够认为 v 和 a 相同。

时间 τ；尽管如此，（我认为）这是哲学上的矛盾，理论应当宽容它[⊖]。

例题 11.4

计算连接着一个弹簧的带电粒子的**辐射阻尼**。弹簧的本征角频率为 ω_0，受迫角频率为 ω。

解： 运动方程是

$$m\ddot{x} = F_{\text{弹簧}} + F_{\text{辐射}} + F_{\text{驱动}} = -m\omega_0^2 x + m\tau\dddot{x} + F_{\text{驱动}}$$

在系统振动角频率 ω 下，

$$x(t) = x_0\cos(\omega t + \delta)$$

故

$$\dddot{x} = -\omega^2\dot{x}$$

所以

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F_{\text{驱动}} \tag{11.83}$$

阻尼系数是

$$\gamma = \omega^2\tau \tag{11.84}$$

[回到第 9 章(式(9.152))，阻尼力写为 $F_{\text{阻尼}} = -\gamma m v$，为简单起见，我假设了阻尼力正比于速度。现在我们知道辐射阻尼至少正比于 $\ddot{v}$。但这几乎没有影响：对正弦振动，对速度 v 的任何偶数次求导均可，因为它们都正比于 v。]

习题 11.17

(a) 带电荷为 q 的粒子，以速度 v 沿半径为 R 的圆周作匀速圆周运动。为了保持这个运动，当然需要提供一个向心力 $(mv^2)/R$。为了抵消辐射反作用，必须施加的附加力($\boldsymbol{F}_e$)是多少？[用瞬时速度 $\boldsymbol{v}$ 表示结果最简单。] 这个附加力传递的功率(P_e)是多少？比较 P_e 和辐射功率(利用拉莫尔公式)。

(b) 对振幅为 A，以角频率 ω 作简谐振动的粒子($\boldsymbol{w}(t) = A\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{z}}$)重复(a)的计算，解释它们的差异。

(c) 考虑一个粒子自由下落的情况(加速度为常数 g)。辐射反作用力是多少？评述这些结果。

习题 11.18

(a) 假设(不可信的)γ 完全产生于辐射阻尼(式(11.84))，证明对于光色散阻尼是“小的”($\gamma \ll \omega_0$)。假设相关的共振处于或接近于光的频率范围。

(b) 利用习题 9.24 的结果，对习题 9.23 的模型，估计反常色散的宽度。

！ 习题 11.19 考虑辐射反作用力(式(11.80))，带电粒子的牛顿第二定律变为

$$a = \tau\dot{a} + \frac{F}{m}$$

式中，F 是作用在粒子上的外力。

(a) 与不带电粒子不同($a = F/m$)，加速度(与位置和速度一样)必须是时间的连续函数，即使力突然变化。(从物理上看，辐射反作用阻碍 a 的快速变化。)通过对上面运动方程从($t-\varepsilon$)到($t+\varepsilon$)积分并取极限 $\varepsilon\to 0$，证明 a 在任何时刻都是连续的。

(b) 一个粒子在 $t=0$ 受到一恒定的力 F，持续时间为 T。求在下面三个时间内最一般的运动方程的解：(i) $t<0$；(ii) $0<t<T$；(iii) $t>T$。

⊖ 这个困难在相对论的亚伯拉罕-洛伦兹公式中也存在，这个公式除了可从拉莫尔公式推出外，还可从李纳公式推出(参见习题 12.70)。也许它们告诉我们不存在这类事情，就像经典电动力学中的点电荷一样，或者它们也许预示着量子力学的开始。相关文献可参见 D. Teplitz 编写的 *Electromagnetism: Paths to Research*(New York: Plenum, 1982)其中 Philip Pearle 一章以及 F. Rohrlich, Am. J. Phys. 65, 1051(1997)。

(c) 在 $t=0$ 和 $t=T$ 施加(a)的连续性条件，证明在(iii)区域可以消除粒子逃逸，或者在区域(i)可以避免预加速，但两者不能同时实现。

(d) 如果你选择消除逃逸，在每个时间间隔内加速度随时间如何变化？速度如何变化？(当然，速度在 $t=0$ 和 $t=T$ 时必须连续。)假设粒子初始时静止：$v(-\infty)=0$。

(e) 对一个不带电粒子和一个(非逃逸)带电粒子施加这个力，画出 $a(t)$ 和 $v(t)$。

11.2.3　辐射反作用的物理基础

在上一节利用能量守恒推导出了辐射反作用的亚伯拉罕-洛伦兹公式。除了指出它一定是粒子自身的场对电荷的反作用外，没有试图确定它的实际机制。很遗憾，点电荷的场在粒子所在的地方为无限大，很难明白如何计算它们施加的力。[㊀]为避免这个问题，让我们考虑扩展电荷分布的情形，这种情形下场在任何地方都是有限值，最后我们考虑电荷的尺寸趋于零时的极限。一般地，一部分(A)对另一部分(B)的电磁力与 B 作用在 A 上的力大小不同，方向不相反(见图 11.17)。如果把分布分为无限小，则每一对都存在着这种不平衡力，对所有的不平衡力求和，结果是电荷作用在自身上的一个净的作用力。正是这种**自作用力**导致在粒子内部牛顿第三定律被打破，这是辐射反作用的作用。

洛伦兹最初用一个球形电荷分布计算电磁自作用力，结果似乎合理，但数学过程复杂。[㊁]因为我仅想说明相关机理，所以我将用一个更理想的模型：一个带总电荷为 q 的“哑铃”，电荷平均分布在两个相距为 d 的球上(见图 11.18)。这是最简单的，能说明机理(内部电磁力不平衡)的可能的电荷分布。不要介意这对一个基本粒子是一个不太可能的模型：在点极限($d\to 0$)下，任何模型都必定会得到亚伯拉罕-洛伦兹公式，在某种程度上可以认为这是能量守恒的结果。

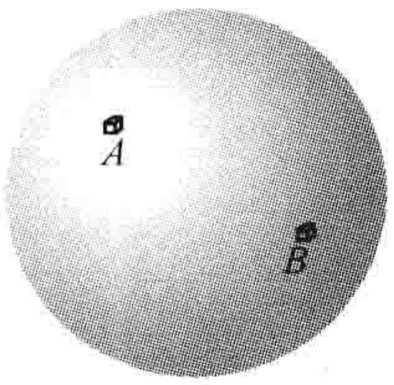


图　11.17

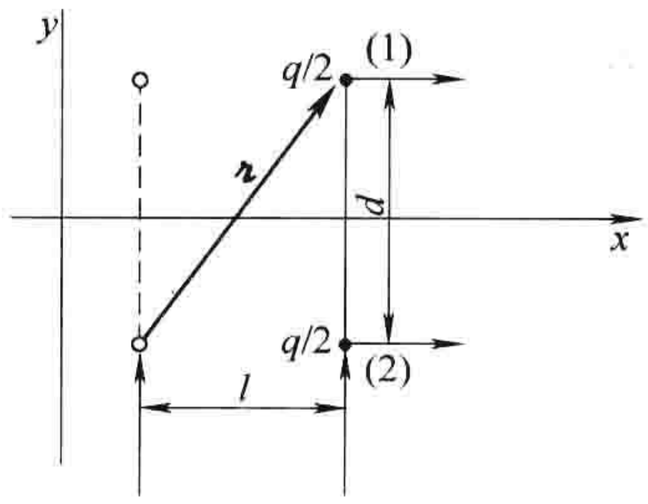


图　11.18

假设哑铃沿 x 方向运动，在推迟时刻(瞬时)静止。(2)在(1)处产生的电场是

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{(q/2)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u})^3}[(c^2+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}] \tag{11.85}$$

(式(10.65))，式中

$$\boldsymbol{u}=c\hat{\boldsymbol{r}},\quad \boldsymbol{r}=l\hat{\boldsymbol{x}}+d\hat{\boldsymbol{y}} \tag{11.86}$$

故

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}=cr,\quad \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=la,\quad r=\sqrt{l^2+d^2} \tag{11.87}$$

㊀ 通过对场适当地平均可以做到，但不容易。参见 T. H. Boyer, Am. J. Phys. 40, 1843(1972)及引用的相关文献。

㊁ 参见 J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3rd ed., Sect. 16.3 (New York: John Wiley, 1999)。

事实上，我们仅对 $\boldsymbol{E}_1$ 的 x 分量感兴趣，因为当我们在两端加力时(由于同样的原因我们不必担心磁力)y 分量抵消了。现在

$$u_x = \frac{cl}{r} \tag{11.88}$$

所以

$$E_{1x} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{(lc^2 - ad^2)}{(l^2 + d^2)^{3/2}} \tag{11.89}$$

由对称性，$E_{2x} = E_{1x}$，所以作用在哑铃上的净力是

$$\boldsymbol{F}_{自} = \frac{q}{2}(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{(lc^2 - ad^2)}{(l^2 + d^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{11.90}$$

到目前为止，推导都是精确的。现在当粒子大小趋于零时按 d 的级数展开，所有 d 的正幂次项都将趋于零。利用泰勒展开

$$x(t) = x(t_r) + \dot{x}(t_r)(t - t_r) + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_r)(t - t_r)^2 + \frac{1}{3!}\dddot{x}(t_r)(t - t_r)^3 + \cdots$$

有

$$l = x(t) - x(t_r) = \frac{1}{2}aT^2 + \frac{1}{6}\dot{a}T^3 + \cdots \tag{11.91}$$

式中，为了简洁，令 $T \equiv t - t_r$。现在 T 由推迟时间条件决定

$$(cT)^2 = l^2 + d^2 \tag{11.92}$$

所以

$$d = \sqrt{(cT)^2 - l^2} = cT\sqrt{1 - \left(\frac{aT}{2c} + \frac{\dot{a}T^2}{6c} + \cdots\right)^2} = cT - \frac{a^2}{8c}T^3 + (\quad)T^4 + \cdots$$

这个方程给出了 d 和 T 的关系，我们需要求出以 d 为变量的函数 T。这有个系统的处理方法，称为**级数的逆**[⊖]，但我们可通过下面的一个近似方法得到前几项：忽略所有 T 的高阶项，

$$d \cong cT \Rightarrow T \cong \frac{d}{c}$$

把这个近似用到三次方项

$$d \cong cT - \frac{a^2}{8c}\frac{d}{c^3} \Rightarrow T \cong \frac{d}{c} + \frac{a^2 d^3}{8c^5}$$

最后

$$T = \frac{1}{c}d + \frac{a^2}{8c^5}d^3 + (\quad)d^4 + \cdots \tag{11.93}$$

回到式(11.91)，我们用 d 构造 l 级数：

$$l = \frac{a}{2c^2}d^2 + \frac{\dot{a}}{6c^3}d^3 + (\quad)d^4 + \cdots \tag{11.94}$$

把它代入式(11.90)，得到

$$\boldsymbol{F}_{自} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{a}{4c^2 d} + \frac{\dot{a}}{12c^3} + (\quad)d + \cdots\right]\hat{\boldsymbol{x}} \tag{11.95}$$

式中，a 和 $\dot{a}$ 是在推迟时间(t_r)时的值，但容易用现在时间 t 表示：

$$a(t_r) = a(t) + \dot{a}(t)(t - t_r) + \cdots = a(t) - \dot{a}(t)T + \cdots = a(t) - \dot{a}(t)\frac{d}{c} + \cdots$$

⊖ 参见 the CRC Standard Mathematical Tables (Cleveland: CRC Press)。

由此，

$$\boldsymbol{F}_{\text{自}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{a(t)}{4c^2 d} + \frac{\dot{a}(t)}{3c^3} + (\quad)d + \cdots \right]\hat{\boldsymbol{x}} \tag{11.96}$$

式中，右边的第一项正比于电荷的加速度。如果把它放在牛顿第二定律的另一边，只需简单地加上哑铃的质量。事实上，带电哑铃的有效总质量是

$$m = 2m_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4dc^2} \tag{11.97}$$

式中，m_0 是哑铃一端的质量。根据相对论，电荷的排斥应当增加哑铃的质量，这不奇怪。这个构型的电势能(静止状态)是

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q/2)^2}{d} \tag{11.98}$$

根据爱因斯坦公式 $E = mc^2$，能量归结到对物体惯性的贡献。[⊖]

式(11.96)的第二项是辐射反作用力

$$\boldsymbol{F}_{\text{辐射}}^{\text{相互}} = \frac{\mu_0 q^2 \dot{a}}{12\pi c} \tag{11.99}$$

它是在“点哑铃”极限 $d \to 0$ 情形下保留的唯一的项(除了质量修正[⊜])。很遗憾，它与亚伯拉罕-洛伦兹公式相差一个因子 2。但这只是与(1)和(2)电荷之间相互作用有关的自作用力——所以有上标“相互”。每一端都有自作用力。当包括后者时(参看习题 11.20)，结果是

$$\boldsymbol{F}_{\text{辐射}} = \frac{\mu_0 q^2 \dot{a}}{6\pi c} \tag{11.100}$$

这与亚伯拉罕-洛伦兹公式完全一致。结论：辐射反作用力是电荷自身的作用力——或者更精确地说，是由分布在不同部分的电荷产生的场对它们彼此施加的净力。

习题 11.20　根据下面的叙述从式(11.99)推导式(11.100)，

(a) 利用亚伯拉罕-洛伦兹公式求哑铃每一端的辐射反作用力，把它加在相互作用项中(式(11.99))。

(b) 方法(a)的缺陷是要利用亚伯拉罕-洛伦兹公式——它是我们正在推导的。为了避免这一点，可沿着垂直于运动方向的 L 抹平电荷分布(这样电荷线密度为 $\lambda = q/L$)，利用式(11.99)求出所有片段对的相互作用力(式中在一端，$q/2 \to \lambda\,dy_1$；另一端 $q/2 \to \lambda\,dy_2$)。注意相同的片段不要计数两次。

第 11 章补充习题

习题 11.21　一个质量为 m，带电荷量为 q 的粒子，固定在一劲度系数为 k 的挂在天花板上的弹簧上(见图 11.19)。它的平衡位置距地板高度为 h。在时刻 $t = 0$，把弹簧向下拉一段距离 d 并释放。

(a) 在通常假设下($d << \lambda << h$)，计算照射到地板上的辐射强度随电荷 q 距地板距离 R 的变化。[注意：这里的强度指的是单位地板面积上的平均功率。]R 是多大时辐射最强？忽略振子的辐射阻尼。[答案：

⊖ 事实上，所得数字的完美应归于这个构型的特点。如果对哑铃横向运动作同样的计算，质量修正仅是“应当值”的一半(式(11.97)中是 2 而不是 4)。对于一个球，它差一个因子 3/4。这个大家知道的佯谬争论了数年。参见 D. J. Griffiths 和 R. E. Owen, Am. J. Phys. 51, 1120(1983)。

⊜ 当然，极限 $d \to 0$ 对质量项是麻烦的。在某种意义上这也没有关系，因为观察到的是总质量 m，也许 m_0 由于某种不明原因是(负)无穷，这样 m 是有限值。这个难题在量子电动力学中也存在，在那里通过所谓的**质量重整**把问题掩盖起来了。

$\mu_0 q^2 d^2 \omega^4 R^2 h / 32\pi^2 c(R^2 + h^2)^{5/2}$]

(b) 为了验证你的结果，假设地板无限大，计算单位时间辐射在整个地板上的平均能量。结果与你预计的一致吗？

(c) 因为振子以辐射的形式损失能量，它的振幅会逐渐减小。经过多长时间 τ 振幅减小为 d/e？(假设一个周期损失的能量占总能量非常小的一部分。)

习题 11.22 一个发射塔高出地面 h，顶端为一个磁偶发射天线，半径为 b，轴竖直取向。FM 电台 KRUD 从这个天线以角频率 ω 广播，发射的总辐射功率为 P(这当然是一个周期的平均)。周围的居民们抱怨一些问题——他们的音响系统受到干扰，车库门神秘地开合以及各种可疑的疾病问题，他们把这些问题归因于塔的辐射。但城市的工程师测量塔下面的强射水平时发现辐射在可接受的标准以下。你受聘于居民区协会，评估工程师的报告。

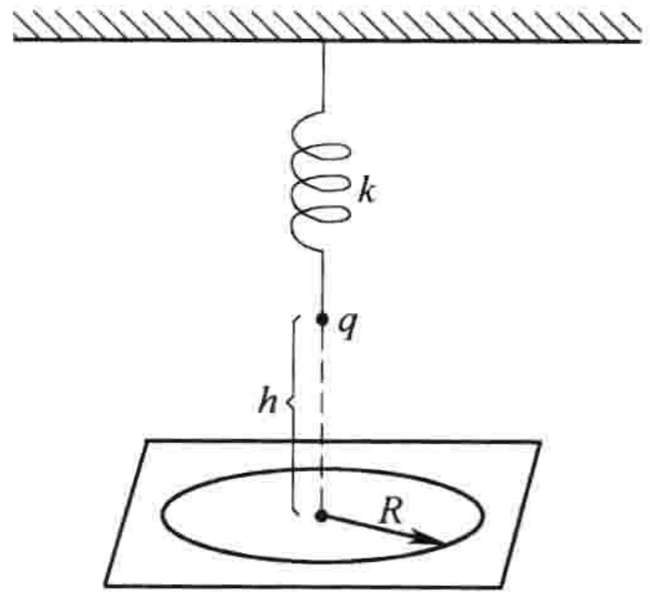


图 11.19

(a) 用给定的量(当然不是所有的都是相关的)，求在地面距塔基 R 处的辐射强度表达式。你可以假设 $b << c/\omega << h$。[注意：我们仅对辐射的强度而不是方向感兴趣——在测量时探测器直接对着天线。]

(b) 工程师测量的地方应距塔基多远？在这个地方辐射强度表达式是什么？

(c) KRUD 施加的输出功率是 35kW，频率是 90MHz，天线的半径是 6cm，塔高 200m。城市电磁波辐射限制是 $200\mu W/cm^2$。KRUD 符合要求吗？

习题 11.23 大家知道地球的磁北极与地理北极不一致——它偏离约 11°。所以，地球的磁偶极矩矢量相对于固定转动轴是随着时间变化的，地球必定有磁偶极辐射。

(a) 用下面的参数表示出总的辐射：ψ(地理北极和地磁北极的夹角)，M(地磁极矩)，ω(地球转动角速度)。[提示：参看习题 11.4 和习题 11.12。]

(b) 地磁场在赤道处的磁场强度约为 0.5Gs[㊀]，由此估计地磁极矩 M。

(c) 求辐射功率。[答案：4×10^{-5}W]

(d) 脉冲星是旋转的中子星，典型的半径为 10km，转动周期为 10^{-3}s，表面磁场是 10^2T。它的辐射功率是多少？[参看 J. P. Ostriker 和 J. E. Gunn, Astrophys. J. 157, 1395(1969)。][答案：2×10^{36}W]

习题 11.24 假设(电中性的)yz 平面流有随时间变化的均匀的表面电流 $K(t)\hat{z}$。

(a) 求出在下面条件下，在距平面高度为 x 处的电场和磁场。

(i) 从 $t=0$ 时刻开始，有一稳恒电流：

$$K(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ K_0, & t > 0 \end{cases}$$

(ii) 从 $t=0$ 时刻开始，有线性增加的电流：

$$K(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \alpha t, & t > 0 \end{cases}$$

(b) 证明推迟矢量势为

$$\boldsymbol{A}(x,t) = \frac{\mu_0 c}{2}\hat{z}\int_0^\infty K\left(t - \frac{x}{c} - u\right)du$$

并由此求出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$。

(c) 证明单位面积表面上辐射的功率是

$$\frac{\mu_0 c}{2}[K(t)]^2$$

在这种源非局域的情况下解释“辐射”的含义。[相关的问题和讨论参看 B. R. Holstein, *Am. J. Phys.* 63, 217(1995), T. A. Abbott and D. J. Griffiths, *Am. J. Phys.* 53, 1203(1985)。]

㊀ $1Gs = 10^{-4}T$。——译者注。

习题 11.25　当一个带电粒子接近(或离开)一个导体表面时，就会产生辐射，这与电荷及其镜像形成的电偶极矩相关。如果粒子质量为 m，带电荷量为 q，求辐射功率随距离表面高度 z 变化的函数关系。[答案：$(\mu_0 cq^2/4\pi)^3/6m^2z^4$]

习题 11.26　利用双变换(习题 7.60)构造一个任意运动的磁单极子 q_m 的电场和磁场，求出辐射功率的“拉莫尔公式”。[相关应用参看 J. A. Heras, *Am. J. Phys.* 63, 242(1995)。]

习题 11.27　假设在习题 11.19 中你排除了逃逸解，计算

(a) 外场力做的功，

(b) 最后的动能(假设初始动能是零)，

(c) 总辐射能。

验证在这个过程中能量守恒。㊀

习题 11.28

(a) 重复习题 11.19，但这次外力是一个狄拉克函数：$F(t)=k\delta(t)$(k 是某一常数)。㊁[注意现在加速度在 $t=0$ 时是不连续的(虽然速度必须是连续的)。利用习题 11.19(a)的方法证明 $\Delta a=-k/m\tau$。在这个问题中仅需考虑两个间隔：(i)$t<0$ 和(ii)$t>0$。]

(b) 和习题 11.27 一样，验证这个过程中能量守恒。

！ **习题 11.29**　一带电粒子，沿 x 轴从 $-\infty$ 处运动过来，遇到一个方形势垒

$$U(x)=\begin{cases}U_0, 0<x<L\\ 0, \text{其他区域}\end{cases}$$

证明由于辐射反作用力，粒子可能**隧穿**通过势垒——也就是即使入射动能小于 U_0，粒子也能够通过势垒。(参看 F. Denef 等人，*Phys. Rev.* E56, 3624 (1997)。)[提示：你的任务是求解方程

$$a=\tau\dot{a}+\frac{F}{m}$$

施加的力是

$$F(x)=U_0[-\delta(x)+\delta(x-L)]$$

参考习题 11.19 和 11.28，但注意这里力是 x 的函数而不是 t 的。需要考虑三个区域：(i)$x<0$，(ii)$0<x<L$，(iii)$x>L$。除了在第三个区域的逃逸解，在每个区域求出一般解(即 $a(t)$，$v(t)$ 和 $x(t)$)，利用在 $x=0$ 和 $x=L$ 处的适当的边界条件。证明最后的速度(v_f)与穿过势垒所用时间 T 之间的关系由下式给出

$$L=v_fT-\frac{U_0}{mv_f}(\tau e^{-T/\tau}+T-\tau)$$

初始速度(在 $x=-\infty$ 处)为

$$v_i=v_f-\frac{U_0}{mv_f}\left[1-\frac{1}{1+\frac{U_0}{mv_f^2}(e^{-T/\tau}-1)}\right]$$

为了简化这些结果(因为要找一个特别的例子)，假设最后的动能是势垒的一半。证明在这种情况下

$$v_i=\frac{v_f}{1-(L/v_f\tau)}$$

特别地，如果选择 $L=v_f\tau/4$，则 $v_i=(4/3)v_f$，初始动能是$(8/9)U_0$。尽管能量小于势垒，粒子还是能穿过！]

！ **习题 11.30**

(a) 一个粒子沿着直线以任意速度运动，通过重新构造 11.2.3 小节中的讨论，不要假设 $v(t_r)=0$，求作用在粒子上的辐射反作用力。[答案：$(\mu_0q^2\gamma^4/6\pi c)(\dot{a}+3\gamma^2a^2v/c^2)$]

(b) 证明该结果与这个粒子的辐射功率(式(11.75))一致(在式(11.78)的意义上)。

㊀ 习题 11.27 和习题 11.28 由 G. L. Pollack 提出。

㊁ 这个例子最初由 P. A. M. Dirac 分析讨论，Proc. Roy. Soc. A167, 148 (1938)。

习题 11.31

(a) 粒子作双曲线运动时(式(10.45))辐射吗?(利用精确公式(式(11.75))计算辐射功率。)

(b) 作双曲线运动的粒子受辐射反作用力吗?(利用精确公式(习题 11.30)求反作用力。)

[评论:这些著名的问题包含等价性原理的重要信息。参看 T. Fulton 和 F. Rohrlich, *Annals of Physics* 9, 499 (1960); J. Cohn, *Am. J. Phys.* 46, 225(1978); R. Peierls, *Surprises in Theoretical Physics*, 第八章(Princeton: Princeton University Press, 1979); P. Pearle 在 *Electromagnetism: Paths to Research* 中的文章, ed. D. Teplitz (New York: Plenum Press, 1982)。]

第 12 章　电动力学与相对论

12.1　狭义相对论

12.1.1　爱因斯坦的假设

经典力学遵从**相对性原理**：相同的定律适用于任何**惯性参考系**。“惯性”是指参考系处于静止或匀速运动的状态。[⊖]例如，想象你把一个台球桌搬到一个列车上，列车沿着平直的光滑轨道匀速行驶。在车上玩台球与车静止在车站时完全一样，你不必因为车在运动而“校正”你的击打——的确，如果你把所有的窗帘都拉上，你将无法知道列车是否在运动。注意，作为比较，如果列车加速或减速，或转弯上坡，你立刻就能知道——台球会沿着奇怪的曲线滚动，你自己也会感到站立不稳。在这些加速参考系中，力学定律当然不再相同。

在经典力学中，相对性原理并不新奇，它曾被伽利略清楚地表述过。我们的问题是：它对电动力学的定律也同样适用吗？乍看起来答案似乎是否定的。毕竟运动的电荷将产生磁场，而静止的电荷不会产生磁场。在车下的人看来，随列车运动的电荷将会产生磁场，但对处在车上的人，电荷是静止的，在这个参考系中应用电动力学的定律，将得不出磁场。事实上，许多以洛伦兹力定律为出发点的电动力学方程都涉及电荷的速度。所以，理所当然地，电动力学理论需要预先假设存在一个唯一的静止参考系，所有的速度都是相对于这个参考系的。

然而，有一个极不寻常的巧合之事动摇了我们的信念。假设我们在车厢里放置一个线圈，并让列车从一个大磁铁的磁极间通过(见图 12.1)。由于线圈切割磁场，将产生动生电动势。根据磁通量规则(式(7.13))，

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

一方面，这个电动势是由于线圈中和火车一起运动的电荷被施加磁力而产生的。另一方面，如果以车为参考系应用电动力学定律，结果会是什么？没有磁力！因为线圈是静止的。但当磁铁经过时，车厢处的磁场将发生变化，根据法拉第定律，变化的磁场将产生电场。产生的电力在线圈中将产生电动势，由式(7.14)：

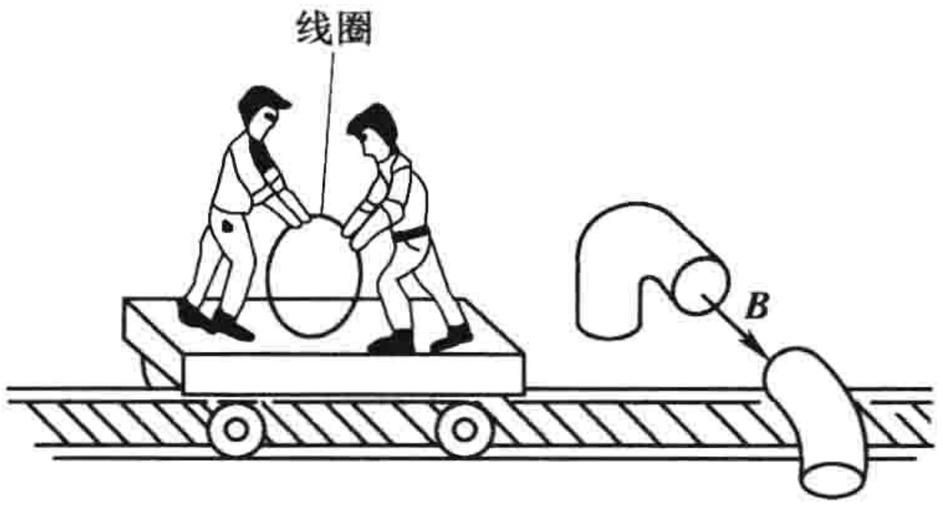


图　12.1

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

由于由法拉第定律和磁通规则可得出同样的电动势，所以在车上的人将得到正确的结果，尽管他们对过程的物理解释是完全错误的。

事情真是如此吗？爱因斯坦不相信这仅是个纯粹的巧合；他把这看做电磁现象，与力学现象

⊖ 由此产生一个棘手的问题：假如物理定理仅在匀速运动的参考系中成立，我们无法确定最初始的静止参考系，所以也就无法检验其他参考系是否在作匀速运动。为了避免这个障碍，我们定义一个惯性系，在此参考系中牛顿第一定律成立。如果你想知道自己是否在一个惯性系中，则可向周围投掷一些石头——如果它们沿直线以固定速度运动，你就在惯性系中，其他相对你匀速运动的参考系也是惯性系(参见习题 12.1)。

一样，遵从相对性原理的一个例证。在他看来，火车上观察者的分析与地面上观察者的分析一样，都是正确的。如果他们的解释不同(一个是电的过程，一个是磁的过程)，也无关紧要；它们的实际结果是一致的。这里是爱因斯坦在1905年介绍**狭义相对论**论文时第一页所写的内容：

> 众所周知，麦克斯韦电动力学——按现在通常的理解——当应用于运动物体时，将导致不对称性，这种不对称性并不是这种现象的内秉特性。举例来说，例如磁体和导体的互易电动力学行为。这里观察的现象仅依赖于导体和磁体间的相对运动，但通常的观点把两种情况“是导体在动还是磁体在动”，作了很明显的区分。对于磁体运动而导体静止的情形，在磁体周围会产生电场……导体的一部分处于其中就会产生电流。但如果磁体静止而导体运动，在磁体周围没有电场产生，但是，在导体中我们发现了产生电流的力……它产生——假设讨论的两种情况的相对运动相同——与前一种情况由电场力产生的电流具有相同的流向和强度的电流。
>
> 这类例子与不成功的试图寻找任何地球相对于“光介质”运动的尝试，都意味着电动力学现象与机械运动一样，没有对应的绝对静止的参考系的性质。㊀

让我先介绍这个故事以前的情形。对于爱因斯坦的前辈们，两个电动势相等仅是个幸运的偶然事件。他们毫无疑问地认为一个观察者是正确的，而另一个是错误的。他们认为电磁场是在某种看不见的称为以太的胶状介质中的应变，以太充满整个空间。电荷的速度是相对于以太而言的——只有这样，电动力学的定律才是有效的。火车上观察者的结论是错误的，因为他的参考系是相对于以太运动的。

但请等等！我们如何知道地面上的观察者相对于以太不是运动的？毕竟地球绕着它的轴一天自转一周，绕着太阳一年公转一周，太阳系围绕着银河系运转。据我所知，整个银河系也许正在宇宙中高速运动。所有这些说明，也许我们相对于以太在以50km/s以上的速度运动。如同在公路上骑行的摩托车手，我们将面对高速的“以太风”——除非由于某些神秘的巧合，我们恰巧顺风，且风的强度恰好合适；或者地球有某种风挡，带着地球上的以太与它一起运动。突然间，实验上寻找以太就变得至关重要了，否则我们的所有计算都是无效的。

这样一来，问题就是确定我们在以太中的运动——测量“以太风”的速度和方向。如何测量？乍看起来，你也许认为实际中的任何电磁实验都可以：如果麦克斯韦方程仅相对于以太参考系正确，任何实验和理论预测的差异都可归因于以太风。很遗憾，正如19世纪的物理学家很快认识到的，在一个典型的实验中可预期的误差非常小。如上面的例子，“巧合”总是导致把我们利用“错误”参考系这个事实遮盖起来。故需要一个极不寻常、非常精巧的实验去澄清它。

现在，经典电动力学的结果预言电磁波在真空中的传播速度是

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=3.00\times10^8\,\mathrm{m/s}$$

(也许)它是相对于以太的。这样，原则上通过简单测量光沿不同方向的速度就能测量以太风。像在河里行驶的摩托艇，“顺流”的速度应是最大的，对于这种情形，光顺着以太风的方向；在相反方向，它阻碍光波，光的速度应是最小的(见图12.2)。尽管实验的思想不能再简单了，而实现起来则是另一回事，因为光的传播速度太快。假如不是“技术细节”问题，你用闪光灯和秒表就可做这个实验。历史上，迈克尔逊和莫雷设计了一个非常精巧和漂亮的实验，在实验中利用了非常精确的光干涉仪。我不想讨论实验细节，因为不想让你们从两个实质问题上分散注意力：(1)迈克尔逊和莫雷试图要做的是比较光在不同方向的速度，(2)事实上他们的实验发现在所有方向

㊀ 爱因斯坦第一篇相对论文《论动体的电动力学》的翻译在重印本 *The Principle of Relativity*, by H. A. Lorentz et al. (New York: Dover, 1923)。

上光速度都是精确一样的。

如今，当高中生就可窃笑以太模型的天真时，在当时，要领悟这个令人十分困惑的结果还是需要一些想象力的。所有其他波(水波、声波、弦上的波)相对于传播介质(波的载体)都以规定的速度传播。如果介质相对于观察者运动，波沿“顺流”的净速度总是比“逆流”的大。在以后的 20 年中，一系列不太可信的方案被设计出来，以解释为何对光来说不是这样。迈克尔孙和莫雷他们自己解释他们的实验，证实了“携带以太”假说，这个假说认为地球携带着以太一起运动。但这个解释与其他观察到的现象——特别著名的星光光程差实验——不一致。[⊖]各种各样所谓的“发射”理论被提出，在这些理论中电磁波的速度被源的运动所决定——像微粒说理论那样(认为光是粒子流)。这些理论要求对麦克斯韦方程进行难以置信的修改，但无论何种情况，这样的理论被地球外光源的实验证实都是不可信的。另外，菲茨杰拉德和洛伦兹认为以太风会压缩所有的物质(包括迈克尔逊-莫雷实验仪器本身)，从而刚好补偿和抵消了速度在不同方向上的变化。将会看到，这种解释包含某些真实性，但他们对物质收缩理由的思想是完全错误的。

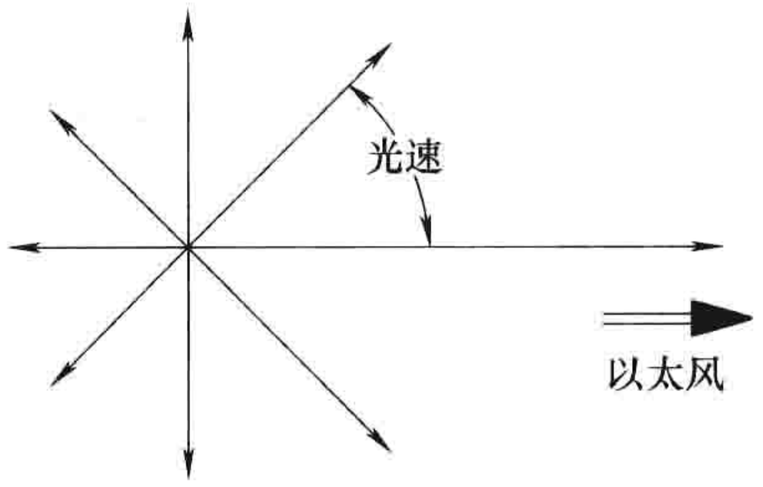


图　12.2

无论如何，只有爱因斯坦才认识到迈克尔逊-莫雷实验的真正价值，他提出光速是一个普适常数，在所有方向都相同，不论观察者和源运动与否。不存在以太风，因为以太不存在。任何惯性系都是一个适当的参考系，在这样的参考系中，麦克斯韦方程都是适用的。电荷速度不是相对于一个(不存在的)绝对静止系的，也不是相对于(不存在的)以太的，而是简单地相对于你所选择的某个参考系。

这样，受理论本身的暗示(即在“错误”的参考系中应用电动力学定律也能给出正确结果)及实验结果(迈克尔逊-莫雷实验[⊖])的启发，爱因斯坦提出了他的两个著名的假设：

1. **相对性原理**。物理定律在所有惯性系中都是适用的。

2. **光速不变原理**。真空中的光速对所有惯性系中的观察者都是相同的，不论光源运动与否。

这两个假设导致了狭义相对论的诞生。第一个假设把伽利略对经典力学的观察结论提升到了适用于所有物理的普适定律的高度。它指出不存在绝对静止参考系。第二个假设可认为是爱因斯坦对迈克尔逊-莫雷实验的回应。它意味着以太是不存在的。(一些作者认为爱因斯坦的第二个假设是多余的——它仅是第一个假设的一种特殊情况。他们坚持认为正是以太的存在才违反了相对性原理，因为这样就可以定义一个唯一的静止参考系。我认为这是毫无道理的。作为声音传播介质的空气的存在与相对性原理并不矛盾。以太与金鱼缸中的水一样也不是一个绝对静止的参考系——而仅是一个特殊参考系，如果你是条金鱼，则绝不可能“绝对”静止。)[⊖]

不像相对性原理，它可追溯到几个世纪前，而光速不变是全新的——它与常识相违背。因为如果我以 5mile/h 的速度在一个速度为 60mile/h 的火车车厢内向前走，我相对于地面的速度“显然”是 65mile/h——A(我)相对于 C(地)的速度等于 A 相对于 B(火车)的速度加上 B 相对于 C 的速度：

$$v_{AC} = v_{AB} + v_{BC} \tag{12.1}$$

但是，如果 A 是光信号(无论它从奔驰的火车上的灯还是从地面上的灯或天空中的星星发出)，

⊖ 有关迈克尔逊和莫雷的实验以及相关的其他实验的讨论可参阅 R. Resnick's *Introduction to Special Relativity*, Chap. 1(New York: John Wiley, 1968)。

⊖ 实际上，在当时爱因斯坦只朦胧地意识到迈克尔逊-莫雷实验。对他来说，唯有理论论证是决定性的。

⊖ 我这样叙述是想消除对由什么组成绝对参考系的误解。1977 年，已经有可能测量地球通过“大爆炸”留下的 3K 背景辐射的速度。这意味着我们发现了一个绝对参考系，并且相对性原理过时了吗？当然不是。

爱因斯坦让我们相信它相对于火车或地面的速度都是 c：

$$v_{AC} = v_{AB} = c \tag{12.2}$$

我们现在称式(12.1)为**伽利略速度叠加原理**(在爱因斯坦以前根本没有人想到要给它取名字)，它与爱因斯坦的第二个假设是不相容的。在狭义相对论中，我们会看到，它被**爱因斯坦速度叠加原理**所代替：

$$\boxed{v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + (v_{AB}v_{BC}/c^2)}} \tag{12.3}$$

对于“通常的”速度($v_{AB} \ll c$，$v_{BC} \ll c$)，式中分母非常接近 1，伽利略公式和爱因斯坦公式的差异可忽略。另外，爱因斯坦公式有预期的性质，如果 $v_{AB} = c$，则自动地有 $v_{AC} = c$：

$$v_{AC} = \frac{c + v_{BC}}{1 + (cv_{BC}/c^2)} = c$$

但基于常识的伽利略原理怎么可能是错误的？如果它是错的，这对整个经典物理学意味着什么？回答是，狭义相对论迫使我们改变对空间和时间的观念，以及由它推导出的一些物理量，如速度、动量和能量。尽管历史上它是由爱因斯坦对电动力学的思考发展而来的，但狭义相对论并不局限于任何特别现象——它是对所有物理现象发生其中的时空“舞台”的描述。尽管在第二个假设中涉及光速，但相对论与光没有关系：c 仅是一个基本速度，光恰好以这个速度传播。但完全可以设想一个宇宙，在其中没有电荷，因此也就没有电磁场或电磁波，但相对论依然成立。因为相对论定义了时空结构，它不仅支配着已知的现存现象，也支配着还没有发现的未知现象。正如康德曾经说过的，它是“任何将来物理的序言”。

习题 12.1 利用伽利略速度叠加原理，设 S 是一惯性参考系。

(a) 设 $\bar{S}$ 相对于 S 以恒定速度运动。证明 $\bar{S}$ 也是惯性系。[提示：利用本小节第 1 个脚注的定义。]

(b) 相反地，证明如果 $\bar{S}$ 是惯性系，它相对于 S 以常速度运动。

习题 12.2 作为相对性原理在经典力学中的一个例子，考虑下面的一般碰撞：在惯性参考系 S 中，粒子 A(质量为 m_A，速度为 $\boldsymbol{u}_A$)与粒子 B(质量为 m_B，速度为 $\boldsymbol{u}_B$)碰撞。在碰撞过程中部分质量从粒子 A 转移给了 B，得到粒子 C(质量为 m_C，速度为 $\boldsymbol{u}_C$)和 D(质量为 m_D，速度为 u_D)。假设在 S 中动量($\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}$)守恒。

(a) 证明动量在惯性系 $\bar{S}$ 中也守恒。$\bar{S}$ 相对于 S 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动。[利用伽利略速度叠加原理——这全部是经典力学的计算。对质量你必须有什么假设?]

(b) 假设在 S 中碰撞是弹性的，证明在 $\bar{S}$ 中碰撞也是弹性的。

习题 12.3

(a) 如 $v_{AB} = 5\text{mile/h}$，$v_{BC} = 60\text{mile/h}$，用伽利略速度叠加原理代替爱因斯坦速度叠加原理，计算产生的误差百分比。

(b) 假设你以一半的光速沿车厢向前跑，火车以 3/4 的光速前进，你对地面的速度是多少?

(c) 利用式(12.3)，如果 $\boldsymbol{v}_{AB} < c$，$v_{BC} < c$，证明 $v_{AC} < c$。解释这个结果。

习题 12.4 当逃犯驾车以 $\frac{3}{4}c$ 的速度逃跑时，警察驾车以 $\frac{1}{2}c$ 的速度追击并开枪(见图 12.3)。子弹(相对于枪)的速度是 $\frac{1}{3}c$。根据(a)伽利略速度叠加原理(b)爱因斯坦速度叠加原理，子弹能击中目标吗?

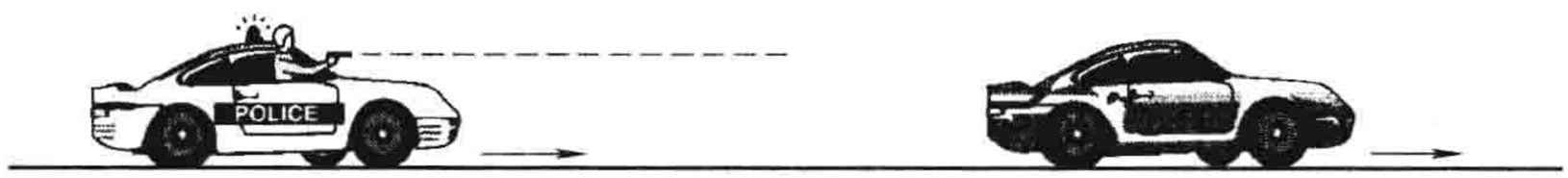


图 12.3

12.1.2　相对论的几何

在本小节我将利用几个想象实验来介绍由爱因斯坦的假设所得出的三个最著名的几何结果：同时相对性、时间延迟和洛伦兹收缩。同样的结果，将在 12.1.3 小节利用洛伦兹变换更系统地推导出。

(i) **同时相对性**。设想一节车厢，沿着光滑平直的轨道以恒定速度运动(见图 12.4)。在车中央悬挂以灯泡。当灯泡被打开时，它发出的光以光速 c 向各个方向传播。由于灯泡两边车厢的长度相同，在车厢的观察者会看到光同时到达车厢前后两端：问题中的两个事件——(a)光到达车厢前端和(b)光到达车厢后端——将同时发生。但对地面上的观察者，这两个事件却是不同时的。因为当光线从灯泡中发出时，火车本身向前运动，所以光线到达车后端的距离较到达前端的距离短(见图 12.5)。根据这个观察，所以有事件(b)先于事件(a)发生。在另一列通过的快车上，观察者会看到事件(a)先于事件(b)。

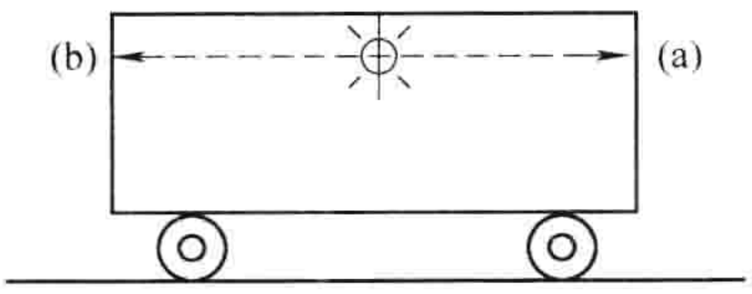


图　12.4

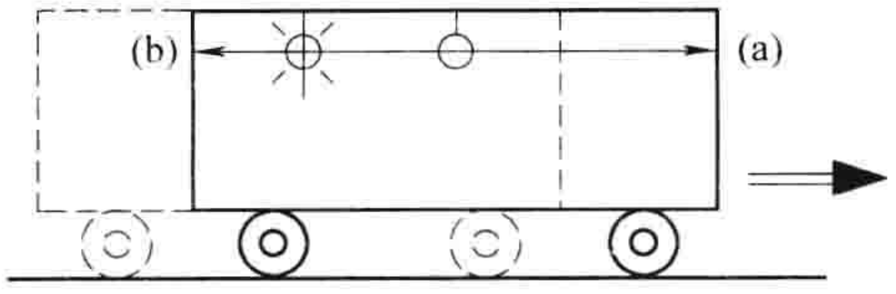


图　12.5

结论：在一个惯性参考系中同时发生的两个事件，一般来说，在另一个参考系中是不同时的。当然，为了探测出两个事件不是同时发生的，火车要非常快，这就是为何你们平常根本注意不到它的原因。

当然，对于没有经验的观察者，对同时总是有些错误的认识：看到闪电后听到雷声，儿童们会推测光和声是不同的源在不同的时间发出的。但这是个常识性的错误，与观察者的运动和相对性没有关系——显然，你必须校正信号(声、光、信鸽或任何其他的信号)到达你的时间。当我说观察者时，意味着他有能力进行这样的校正，而一个观测就是观察者进行这种校正后的结果。因此，你所看到的与你观测到的是不同的。一个观测不能用照相机完成——它需对发生的事件进行人为处理。事实上，聪明的观察者通过在一些关键位置，配置有与主钟同步的时钟助手避免全部问题，这样时间的准确测量可以现场进行。我不厌其烦地说明这一点的目的在于强调同时相对性是由有能力的观察者之间由于相对运动而所得的真正的测量差异，而不是由于错误地计算光信号传播的时间所造成的简单错误。

习题 12.5　在一条直线上每相隔 1×10^6 km 放置一个同步时钟。当你旁边的钟读数为中午 12:00 时：

(a) 你看到的第 90 个钟的读数是多少？

(b) 你观测到的这个钟的读数是多少？

习题 12.6　大约每隔 2 年纽约时报会发表一篇文章，文中报道有些宇航员声称他们发现一个物体以超过光速的速度运动。许多这类报告起源于不能正确区分看到的和观测到的的区别——即来源于对光传播时间错误的计算。这里有一个例子：一个恒星以速度 v 沿与视线成 θ 角的方向运动(见图 12.6)。它掠过天空的表观速度是多少？(假设从 b 发出的光信号到达地球的时间是从 a 发出的光信号到达地球之后 Δt 时间，星球同时在天球上移动的距离为 Δs，“表观速度”，即 $\Delta t/\Delta s$。)夹角 θ 取什么值时可给出最大的表观速度？证明即便 v 比 c 小，表观速度能够远大于 c。

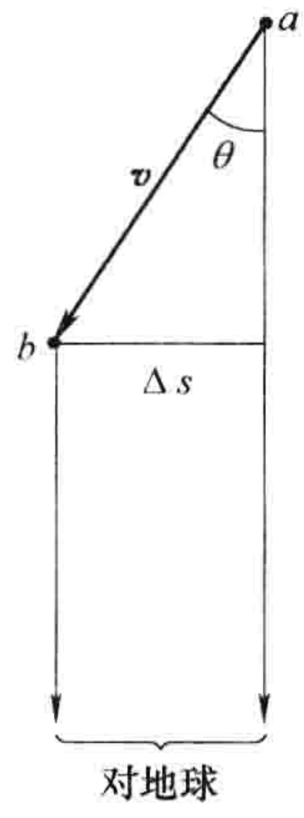


图　12.6

(ii) **时间延迟**。让我们考虑灯泡发出的光线直接照射到它下面的车厢地板上。问题：光线经过这段距离需要的时间是多少？在车上的观察者是容易给出答案的。如果车厢高度是 h，时间为

$$\Delta\bar{t} = \frac{h}{c} \tag{12.4}$$

(在时间量上的一横表示在车上测得的结果。)另一方面，因为火车本身在运动，在地面上的观察者看到这束光线必须行走更长的距离。从图 12.7 可看到这个距离为 $\sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}$，故有

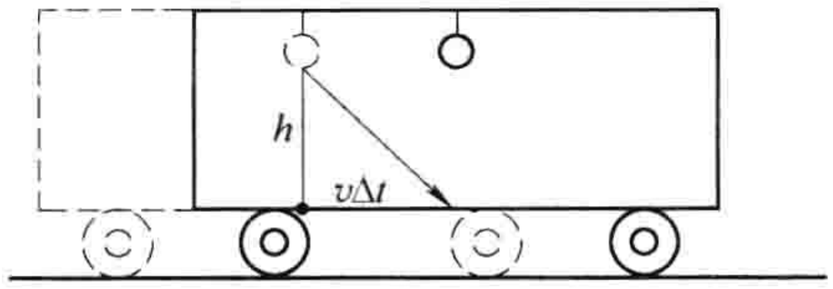


图 12.7

$$\Delta t = \frac{\sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}}{c}$$

解出 Δt，得

$$\Delta t = \frac{h}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\Delta\bar{t} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\Delta t} \tag{12.5}$$

显然，相同的两件事，(a)光离开灯泡；(b)光到达地板中心，它们发生的时间间隔对不同的观察者来说是不同的。事实上，在车上的时钟记录的时间间隔 $\Delta\bar{t}$ 缩短一个因子

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{12.6}$$

结论：

运动的时钟变慢。

这就是所谓的**时间延迟**。它与钟表的机理没有任何关系，它表述的是时间本身的性质，它对任何正常工作的计时装置都是适用的。

在所有爱因斯坦的预言中，没有比时钟变慢更受人关注并得到有说服力的证实了。大多数基本粒子是不稳定的：经过一个特征生存时间后它们衰变成其他粒子。[⊖]中子的寿命是 15min，μ 子的寿命是 2×10^{-6}s，中性 π 介子的寿命是 9×10^{-17}s。但这些都是粒子静止时的寿命。当粒子以接近于光速运动时，它们的寿命会长很多，因为它们的固有时钟(这个时钟显示它们的故有寿命)变慢了，这与爱因斯坦的时间延迟公式一致。

例题 12.1

一个 μ 子以 $\frac{3}{5}c$ 的速度通过实验室。它能持续多久？

解：在这种情况下，

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (3/5)^2}} = \frac{5}{4}$$

故它运动时的寿命比静止时长一个因子 $\frac{5}{4}$：

⊖ 事实上，每个单个粒子持续的时间可以比这长或短。粒子衰变是随机的，此处其实应该说粒子的平均寿命。但为了避免不必要的复杂，我假设每个粒子都在经过平均寿命后衰变。

$$\frac{5}{4}\times(2\times10^{-6})\text{s}=2.5\times10^{-6}\text{s}$$

你也许会感到惊讶，时间延迟与相对性原理不一致。因为如果地面上的观察者认为车上的时钟变慢了，车上的观察者可同样看到地面上的时钟变慢了——毕竟，以车上的观察者的观点来看，地面是在运动的。谁是正确的？答案是：两者都对！进一步检查这个看起来非常明显的矛盾，发现它并不存在。解释是，为了检查车上时钟的快慢，地面上的观察者用两个他自己的时钟（见图 12.8），一个用来比较车上的钟经过 A 点时的间隔开始时间，另一个比较车上的时钟运动到间隔末的时间。当然，在实验前他必须让他的钟严格同步。他发现的是车上的钟走了，比如说 3min，他自己的钟的读数是 5min。他的结论是车上的钟慢了。

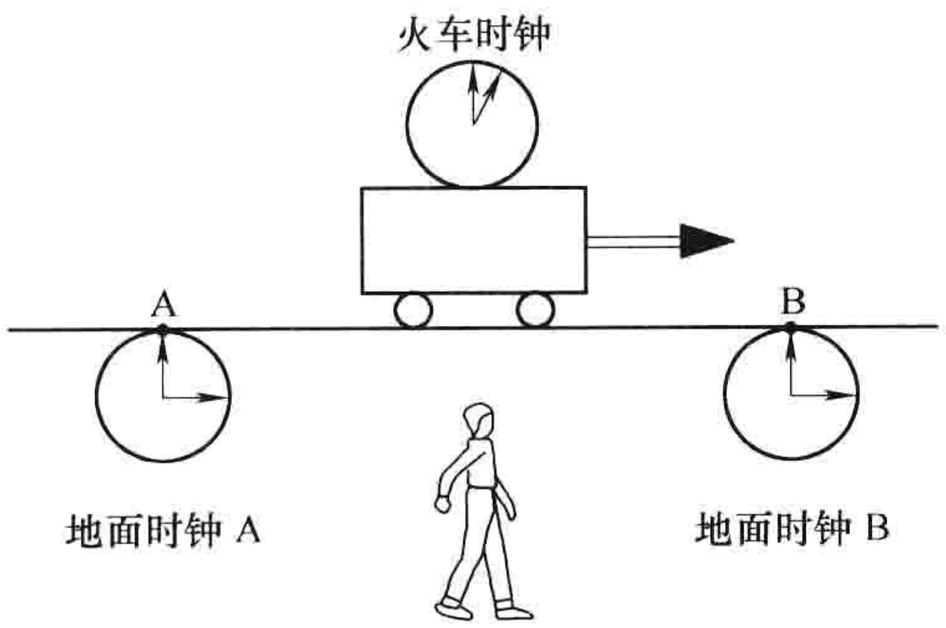


图　12.8

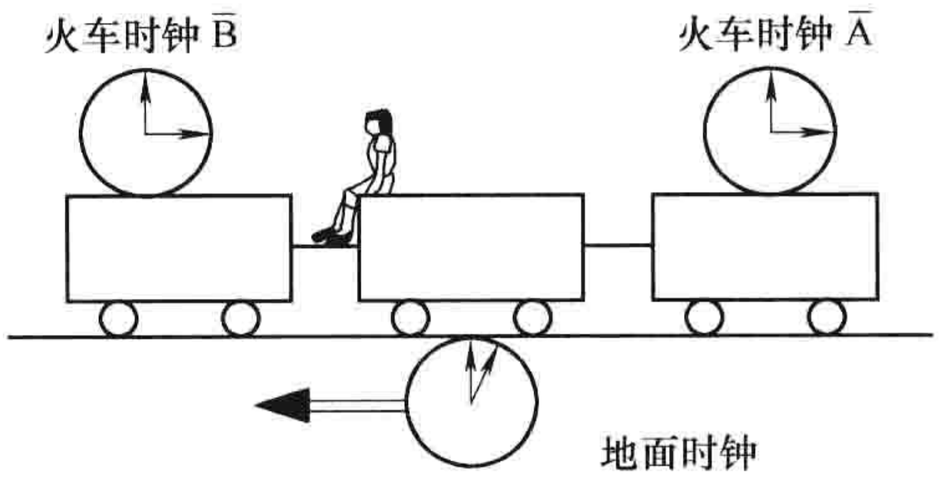


图　12.9

同时，车上的观察者通过同样的过程检查地面上钟的快慢：她用车上两个严格同步的钟，依次经过间隔上的两点，比较车上的时钟和地上的一个时钟的时间（见图 12.9），她发现地面上的钟运行时间为 3min，而她车上的钟经过 5min，她的结论是地面上的钟慢了。有矛盾吗？没有，因为两个观察者观测的是不同的事件。地面上的观察者是把车上的一个钟与地面上的两个钟相比较，而车上的观察者是把地面上的一个钟与车上的两个钟比较。每一个人的观测过程都是正确的，都是把两个静止的钟与一个运动的钟相比较。“所以，”你说，“静止的两个钟在每一时刻都同步，那么用两个和用一个无关紧要。”但要点是：在一个参考系中同步的时钟当从另一个参考系观察时将是不同步的。它们也不能同步，说两个钟同步，是指它们的读数同时为中午 12h。我们已经知道对一个观察者是同时，对另一个观察者则不同时。所以，尽管每个观察者的测量都是完美的，但从他/她自己的立场来看，其他的观察者在观察事件的过程中，犯了最基本的错误，即用了两个不同步的钟。这就是为何尽管是他自己的钟“实际”走慢了，但他得出的结论却是她的钟变慢了（反之亦然）。

因为运动的钟不同步，当检验时间变慢时，只需考虑一个运动的钟。所有运动的钟变慢的因子是一样的，但你不能从一个钟开始计时然后转移到另一个钟去继续计时，因为它们在开始时已不同步。但你利用多少静止的钟（相对于你——观察者而言）都可以，因为它们是可以同步的（运动的观察者对此会有争议，但这是他们的问题）。

例题 12.2

双生子佯谬。在她 21 岁生日时，这个宇航员乘火箭飞船以 $\frac{12}{13}c$ 的速度离开。相对于她自己的时钟，5 年后她以相同的速度回来，与她待在家中的孪生哥哥团聚。问题：团聚时，这对双胞胎各自多大年龄？

解：旅行的双胞胎之一长了 10 岁（去时经过 5 年，回来又经过 5 年），她回到家刚好庆祝她的 31 岁生

日。但从地球上看，运动的钟变慢了，变慢因子为

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(12/13)^2}} = \frac{13}{5}$$

地球上的钟经过了$\frac{13}{5}\times 10 = 26$年，故她的孪生哥哥要庆贺他47岁生日——他现在比他的孪生妹妹年长了16岁！但不要被欺骗了：这里没有旅行的双胞胎变年轻的根源，因为虽然她可能比她的双胞胎哥哥晚去世，但她活的时间并没增加——只是生活的时间变慢了。在飞行过程中，她所有的生物过程——新陈代谢、脉搏、思想及说话——都有与她的手表一样的变慢因子。

所谓的双生子佯谬是这样的：当你试图从旅行的双胞胎的角度看这个过程时，会发现她看到地球以$\frac{12}{13}c$的速度飞离，5年后折回团聚。从她的观点来看，她似乎是处于静止状态，她的双胞胎哥哥在运动，故他在团聚的时候应更年轻。关于双生子佯谬有许多论著，但真实的情况是这里根本不存在这样的佯谬：第二个分析是完全错误的。两个双胞胎不是等同的，旅行的双胞胎在往返过程中要经过加速过程，而她的哥哥却没有。用专业的术语来说就是，旅行的双胞胎不是处在一个惯性系中——更准确地说，她在去时他们是在一个惯性系中，在返回时是在另一个完全不同的惯性系中。在习题12.16中你会看到站在她的立场上怎样正确分析这个问题，但对佯谬本身的解释，只需注意旅行的双胞胎不能声称自己是静止的观察者就足够了，因为你不能经过加速，再保持静止。

习题12.7 在实验室的实验中，一个μ子在衰变前被观察到经过了800m长的距离。一个研究生测量到了μ子的寿命(2×10^{-6}s)，据此计算它的速度：

$$v = \frac{800\text{m}}{2\times10^{-6}\text{s}} = 4\times10^{8}\,\text{m/s}$$

比光速还大！找出这个学生的错误，并求出粒子的实际速度。

习题12.8 一个火箭以$\frac{3}{5}c$的速度离开地球。当火箭上的时钟过去1h时，火箭向地球发出一个光信号。

(a) 根据地球上的时钟，这个光信号是何时发出的？

(b) 根据地球上的时钟，火箭离开后多久这个光信号到达地球？

(c) 根据火箭上的观察者，火箭离开后多久光信号到达地球？

(iii) **洛伦兹收缩**。第三个想象实验，你想象在车厢的一端挂一盏灯，在另一端放一面镜子，所以光线可以被反射回去(见图12.10)。问题：光信号一个来回需多长时间？对于在车上的观察者，答案是

$$\Delta\bar{t} = 2\,\frac{\Delta x}{c} \tag{12.7}$$

式中，$\Delta\bar{x}$是车厢的长度(与前面相同，上面的一横表示测量是在车上进行的)。对于在地面上的观察者，由于车在运动，所以过程比较复杂。如果Δt_1是光信号到达前端的时间，而Δt_2是折回的时间，那么(见图12.11)：

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x + v\Delta t_1}{c},\quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x - v\Delta t_2}{c}$$

解出Δt_1和Δt_2，

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x}{c-v},\quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x}{c+v}$$

故一个来回的时间是

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2\frac{\Delta x}{c}\frac{1}{1 - v^2/c^2} \tag{12.8}$$

由时间延迟公式(12.5)得

$$\Delta \bar{t} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\Delta t$$

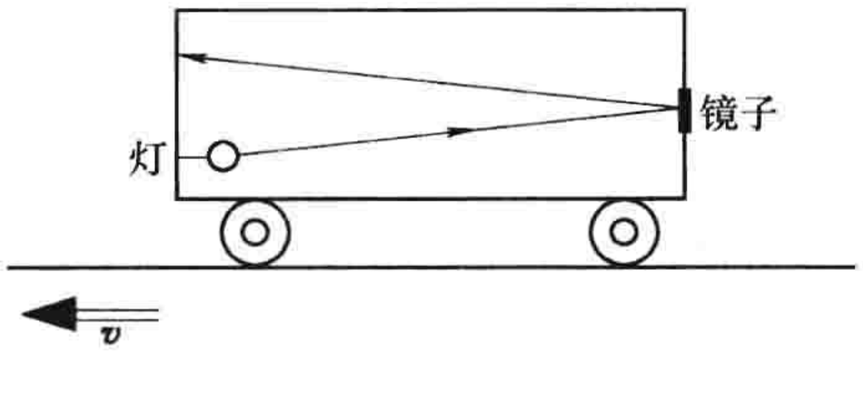


图　12.10

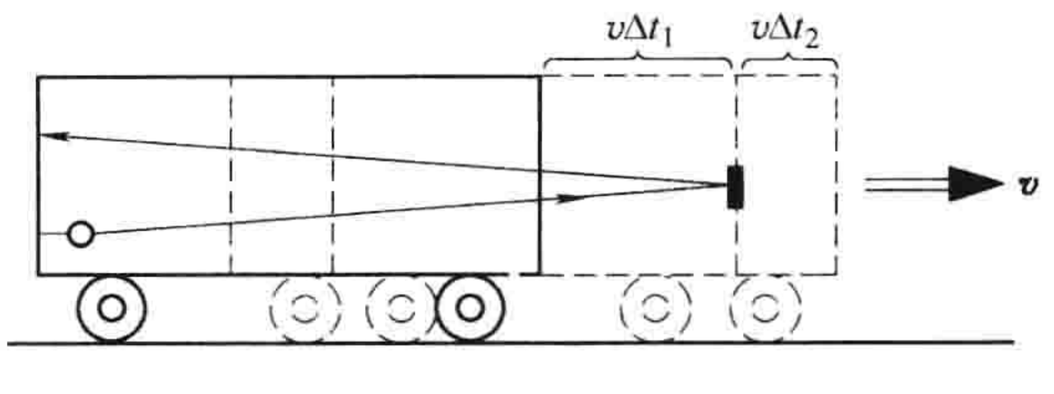


图　12.11

把这个关系应用于式(12.7)和式(12.8)，得到

$$\boxed{\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\Delta x} \tag{12.9}$$

对在地面上的观察者来说，测量的车厢的长度与车上的观察者测得的长度不同——从地面上的观察者来看，车厢变短了。

结论：

运动的物体长度变短。

我们称之为**洛伦兹收缩**。注意，在时间变慢和长度收缩公式中出现同样的因子

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

这使这些公式容易记忆：运动的钟变慢，运动的尺子变短，变化因子均为 γ。

当然，在车上的观察者不认为她的车厢变短了——她的米尺收缩了同样的因子，所有她的测量结果与火车静止时测得的完全一样。事实上，从她的观点来看是地面上物体的长度缩短了。这又产生了一个悖论：假如 A 认为 B 的尺子短了，而 B 认为 A 的尺子短了，那么谁是正确的？答案：两者都对！但为了协调这相反的观点，我们必须仔细研究长度测量的实际过程。

假设你想测量一个木板的长度。如果它(相对于你)静止，你只要用米尺靠近它，记录下米尺两端的读数，然后相减就得出木板的长度了(见图 12.12)。(如果你足够聪明，把尺子的左端与木板的左端对齐——这样你只需读一个数就可以了。)

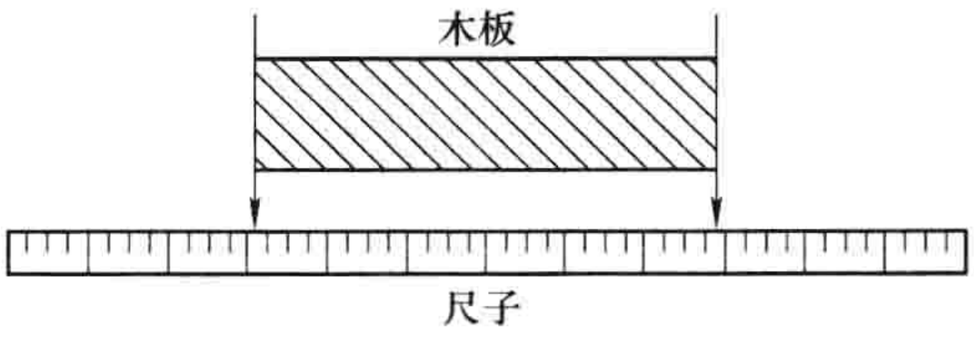


图　12.12

但如果木板在运动，情况会怎样？按同样的方法测量，当然只是这次你必须细心地在同一瞬时读出两端的读数。如果你不同时读出，在测量的过程中木板的运动将使你得到完全错误的结果。但这里存在一个问题：因为同时的相对性，两个观察者对“同一瞬间”的认识是不同的。当地面上的人测量车厢的长度时，他在他自己的参考系内同一瞬间读出两端的位置。但在车上的人，她观察地面上人的测量，她抱怨地面上的人先读前端的位置，然后等了片刻才读后端的位置。自然，地面上的人测量的结果是缩短了的，尽管事实上对她来说地面上的人用的是一个缩短的米尺，测量的读数应该大。两个观察者都正确地进行了测量(从各自的惯性系来看)，各自发现对方的尺子短了。但这里不存在不一致，因为他们测量了不同的事物，每个人认为对方的方法不适当。

例题 12.3

谷仓和梯子佯谬。不像时钟变慢，对洛伦兹收缩没有直接的实验验证。原因很简单，因为要得到一个以接近光速运动且大小可测量的物体太困难了。下面的一个故事说明如果光速很容易接近的话，世界就会变得非常神奇。

从前有一个农夫，他有一个梯子，但梯子太长不能放进谷仓中(见图 12.13a)。一天，他偶然读到相对论，他想到了一个主意。他让他的女儿带着梯子以尽可能快的速度奔跑——运动的梯子由于洛伦兹收缩因此它能够较容易地放进谷仓，当女儿冲近谷仓门，于是那个农夫把门关上，使梯子能够放在谷仓里(见图 12.13b)。然而，他的女儿学了更多的有关相对论的知识，她指出在她自己所在的参考系，谷仓会缩短而不是梯子要缩短，这样谷仓比两者静止时更放不下梯子(见图 12.13c)。问题：谁是对的？梯子能够，还是不能被装下？

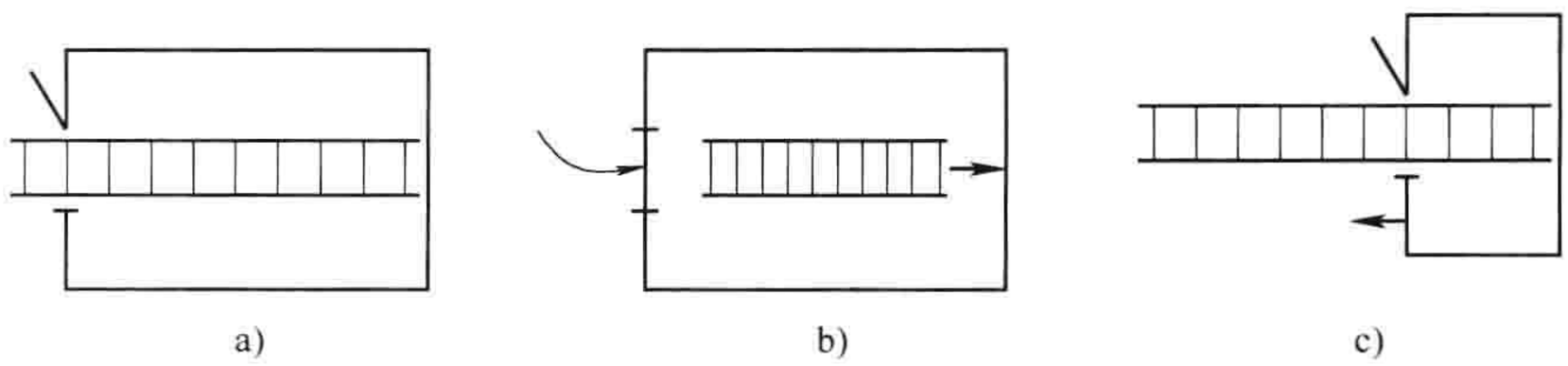


图 12.13

解：他们两个都对！当你说“梯子在谷仓里”时，你的意思是梯子的所有部分同时在谷仓中。但根据同时的相对性，同时是有条件的，依赖于观察者。这里其实有两个相关事件：

a. 梯子尾端进入谷仓门。

b. 梯子前端碰到谷仓门对面墙壁。

农夫说事件 a 先于事件 b 发生，故存在一个梯子完全进入谷仓的时间；她的女儿说 b 先于 a 发生，故不可能存在一个梯子完全进入谷仓的时间。这矛盾吗？一点也不矛盾——仅是观察的角度不同而已。

“但是，”你抗议道，“当事件发生过后，梯子是否在谷仓中，事情应该是清楚的，对此不应该有争执。”也许如此，但现在你在故事中引进了一个新因素：当梯子停下来时会发生什么？假设农夫用一只手紧紧抓住梯子最后一截，另一只手关门。假设梯子不受损伤，梯子现在必须伸长到其原长。显然，当梯子的后端停止后，梯子前端必须继续前移！像一个手风琴展开一样，梯子的前端撞向谷仓里面的墙。的确，在相对论中“刚体”失去了它的名字所具有的意义，因为当它的速度改变时，一般来讲，不同部分的瞬时加速度是不同的——这样，材料的各部分会扩张或收缩，以适应它的新速度。

现回到目前的问题：当梯子最终停下时，它是否在谷仓？答案是不确定的。当梯子前端撞到谷仓里面的墙时，某些事情发生了，农夫要么拿着剩余的一截梯子在谷仓里，要么与没折断的梯子一起在墙壁上撞开一个洞。在任何情况下，他都不可能对结果满意。

对洛伦兹收缩的最后一个评述。一个运动的物体仅在它运动的方向上收缩：

在垂直于速度的方向不收缩。

的确，在推导时间延迟公式中，我事先假定对两个观察者来说车厢的高度是一样的。我现在利用一个由泰勒和惠勒提出的生动的想象实验来证实这一点。[㊀]想象我们在铁轨旁建一堵墙，在墙上画出一条水平蓝线，蓝线距地面高度为 1m。当火车经过墙时，一个乘客举着一把油漆刷子，在

㊀ E. F. Taylor 和 J. A. Wheeler, Spacetime Physics (San Francisco: W. H. Freeman, 1966)。不同版本的同样论证参见 J. H. Smith 的 Introduction to Special Relativity (Champaign, IL: Stipes, 1965)。

墙上画一条水平红线，从车上测量，红线距地面的高度也是 1m。问题：红线是在蓝线的上方还是下方？假如尺子在垂直方向缩短，地面上的人将预言红线在蓝线下面，而车上的人将预言蓝线在红线下面(对于后者，当然是地面在移动)。相对性原理认为两个观察者的结果同样合理，但不可能他们都是正确的。没有微妙的同时或同步来合理解释这种矛盾；要么蓝线高，要么红线高——除非它们完全一样高，这是不可避免的结论。不可能有垂直速度方向的缩短(或膨胀)，因为这将导致不可解释的相互矛盾的预言。

习题 12.9　当处于静止时，林肯轿车是甲壳虫轿车长度的两倍。当林肯追上甲壳虫时正通过一个汽车超速监视区，一个(静止的)警察看到这两辆车长度一样。甲壳虫是以光速一半的速度在行驶。林肯轿车的速度是多少？(答案以光速 c 为单位。)

习题 12.10　一个帆船的桅杆和甲板成角度 $\bar{\theta}$。一个观察者站在码头上看到船以速度 v 经过(见图 12.14)，这个观察者观测到的桅杆与甲板之间的角度是多少？

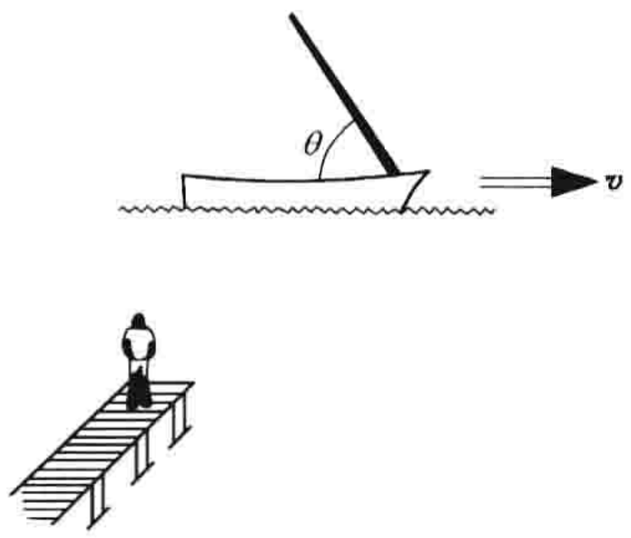


图　12.14

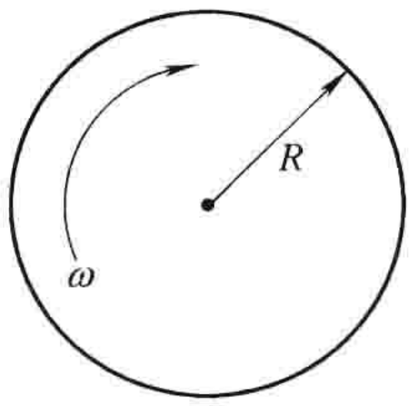


图　12.15

！ **习题 12.11**　一个半径为 R 的唱片转盘以角速度 ω 转动(见图 12.15)。周长很有可能发生洛伦兹收缩而半径不收缩(因为垂直于速度方向)。用 ω 和 R 表示的周长和直径的比值是多少？[这称为**埃伦费斯特悖论**；详细的讨论参见 H. Arzelies, *Relativistic Kinematics*, Chap. ⅠX (Elmsford, NY: Pergamon Press, 1966) 和 T. A. Weber, Am. J. Phys. 65, 486(1997)。

12.1.3　洛伦兹变换

任何物理过程都由一个或多个**事件**组成。一个“事件”发生在空间一个确定的位置(x, y, z)和确定的时间(t)。例如爆竹的爆炸就是一个事件，而在欧洲的一个旅行不是。假设我们知道一个事件 E 在一惯性参考系 S 中的坐标(x, y, z, t)，我们想计算这个事件在另一个惯性参考系 $\bar{S}$ 中的坐标$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$。为此，我们所需要的是一本“字典”，通过它把 S 中的语言翻译成 $\bar{S}$ 中的语言。

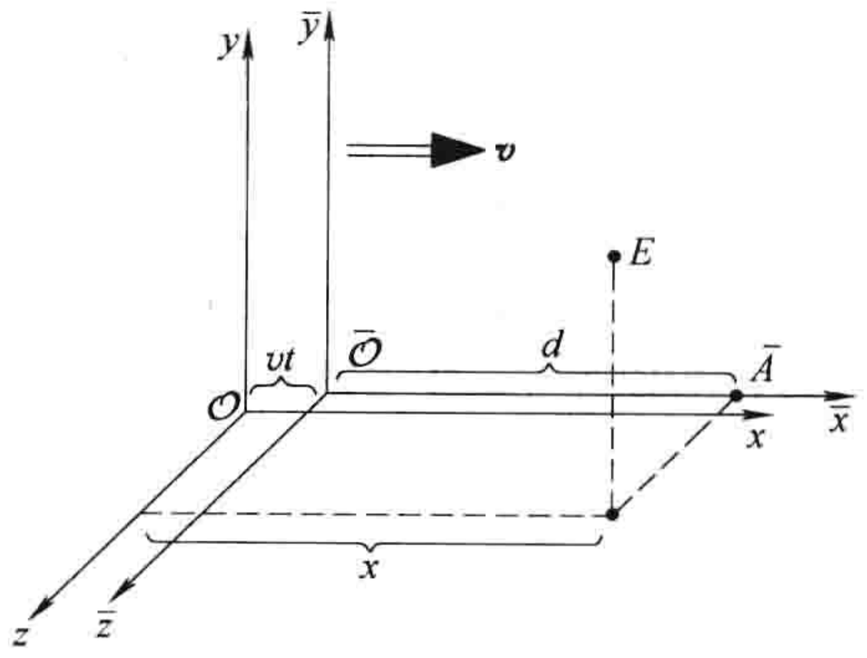


图　12.16

我们让坐标轴的方向如图 12.16 所示，这样 $\bar{S}$ 系沿着 x 轴以速度 v 运动。假如我们在时钟开始的时刻$(t=0)$让原点(O和$\bar{O}$)重合，那么在 t 时刻，$\bar{O}$距O的距离是 vt，故

$$x = d + vt \tag{12.10}$$

式中，d 是在 t 时刻$\bar{O}$距 $\bar{A}$ 的距离($\bar{A}$ 是 $\bar{x}$ 轴上的点，当事件发生时与事件 E 相联系)。在爱因斯坦以前，任何人都会立刻得到

$$d = \bar{x} \tag{12.11}$$

并由此构造出“字典”

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i)}\ \bar{x} = x - vt \\ &\text{(ii)}\ \bar{y} = y \\ &\text{(iii)}\ \bar{z} = z \\ &\text{(iv)}\ \bar{t} = t \end{aligned}\right\} \tag{12.12}$$

这种变换现在被称为**伽利略变换**，尽管没必要给它们定义一个名字——特别是最后一个变换，没有给出任何理由，因为每个人都认为对所有观察者来说时间流逝都是一样的，是不言而喻的。但在狭义相对论中，我们必须希望(iv)中包含时间延迟、同时的相对性及运动时钟不同步的规则代替。同样，考虑到洛伦兹收缩，式(i)也需修正。对于式(ii)和式(iii)，它们保持不变，因为我们已经看到垂直于运动方向的长度没有变化。

但是在导出经典关系式(i)时哪些地方不成立了？答案是：在式(12.11)中，因为 d 是在 S 系中测得的$\bar{\mathcal{O}}$距 $\bar{A}$ 的距离，而 $\bar{x}$ 是在 $\bar{S}$ 系中测得的$\bar{\mathcal{O}}$距 $\bar{A}$ 的距离。由于在 $\bar{S}$ 系中$\bar{\mathcal{O}}$和 $\bar{A}$ 是静止的，$\bar{x}$ 是一个“移动的木棒”，在 S 系中它缩短为

$$d = \frac{1}{\gamma}\bar{x} \tag{12.13}$$

当把这个式子代入式(12.10)时，得到具有相对论效应的表达式(i)

$$x = \gamma(x - vt) \tag{12.14}$$

当然，从 $\bar{S}$ 系来看会有同样的结果。图 12.17 看上去类似，但在这种情形下，说明的是在 $\bar{t}$ 时刻的情况，而图 12.16 表示的是在 t 时刻的情形(注意，t 和 $\bar{t}$ 表示的是在 E 处的相同物理时刻，但由于同时的相对性而在其他地点不同)。如果我们假设 $\bar{S}$ 系中的钟在原点重合时也开始计时，那么在时刻 $\bar{t}$，$\mathcal{O}$与$\bar{\mathcal{O}}$的距离是 $v\bar{t}$，所以有

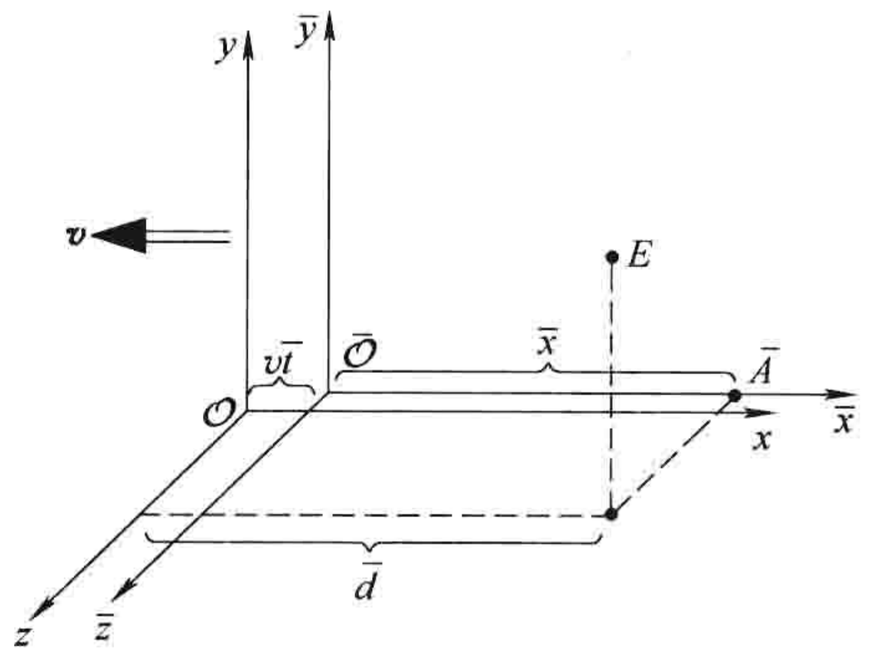


图 12.17

$$\bar{x} = \bar{d} - v\bar{t} \tag{12.15}$$

式中，$\bar{d}$ 是在 $\bar{t}$ 时刻$\mathcal{O}$距 A 的距离。A 是 x 轴上的点，当事件发生时其与 E 的坐标相同。经典物理学家认为 $x = \bar{d}$，并利用(iv)得到(i)。但是，如同前面所讲的，在相对论中不同观察者观测的结果是不同的：x 是在 S 系中$\mathcal{O}$到 A 的距离，d 是 S 系中$\mathcal{O}$到 A 的距离。因为$\mathcal{O}$和 A 在 S 系中是静止的，所以 x 是“移动的木棒”，有

$$\bar{d} = \frac{1}{\gamma}x \tag{12.16}$$

由此得

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) \tag{12.17}$$

这最后一个方程的得出一点也不奇怪，因为对称性要求用 $\bar{x}$ 和 $\bar{t}$ 表示的 x，除了 v 符号的变化外，应当与用 x 和 t 表示的 $\bar{x}$ 相同(式(12.14))。(假如 $\bar{S}$ 系相对于 S 系以速度 v 向右运动，则 S 系相对于 $\bar{S}$ 系以速度 v 向左运动。)不管怎样，这是个有用的结果，因为我们从式(12.14)中替换 $\bar{x}$，解出 $\bar{t}$，得出相对论“字典”：

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{(i)}\ \bar{x}=\gamma(x-vt)\\&\text{(ii)}\ \bar{y}=y\\&\text{(iii)}\ \bar{z}=z\\&\text{(iv)}\ \bar{t}=\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)\end{aligned}} \tag{12.18}$$

这就是著名的**洛伦兹变换**，爱因斯坦用它们代替了伽利略变换。如下面的例子说明的那样，它们包含了狭义相对论中所有的几何信息。从 $\bar{S}$ 系到 S 系的反向字典通过解(i)和(iv)求出 x 和 t 得到，或更简单地通过把 v 的符号变化得到：

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i}'\text{)}\ x=\gamma(\bar{x}+v\,\bar{t})\\&\text{(ii}'\text{)}\ y=\bar{y}\\&\text{(iii}'\text{)}\ z=\bar{z}\\&\text{(iv}'\text{)}\ t=\gamma\left(\bar{t}+\frac{v}{c^2}\bar{x}\right)\end{aligned}\right\} \tag{12.19}$$

例题 12.4

同时、同步及时钟变慢。假设事件 A 发生在 $x_A=0$，$t_A=0$，事件 B 发生在 $x_B=b$，$t_B=0$，两事件在 S 系中是同时的(它们都发生在 $t=0$ 时刻)。但因为洛伦兹变换有 $\bar{x}_A=0$，$\bar{t}_A=0$ 和 $\bar{x}_B=\gamma b$，$\bar{t}_B=-\gamma(v/c^2)b$，所以它们在 $\bar{S}$ 系中是不同时的。根据 $\bar{S}$ 系中的钟，B 事件早于 A 事件发生。这当然没有什么新东西——只是同时的相对性而已。但是我想让你们明白它是如何从洛伦兹变换得出的。

现在假设在时刻 $t=0$，在 S 系的观察者决定检查 $\bar{S}$ 系中的所有的钟。他发现它们的读数不同，读数依赖于它们的位置。由(iv)：

$$\bar{t}=-\gamma\frac{v}{c^2}x$$

那些在原点左边的(负 x)钟提前，而在原点右边的钟落后，提前或落后的量与它们的距离成正比增加(见图 12.18)。仅在原点处的钟读数为 $\bar{t}=0$。故运动时钟的不同步也直接遵循洛伦兹变换。当然，从 $\bar{S}$ 系看 S 系中的钟也是不同步的，把 $\bar{t}=0$ 代入(iv′)式就可以验证。

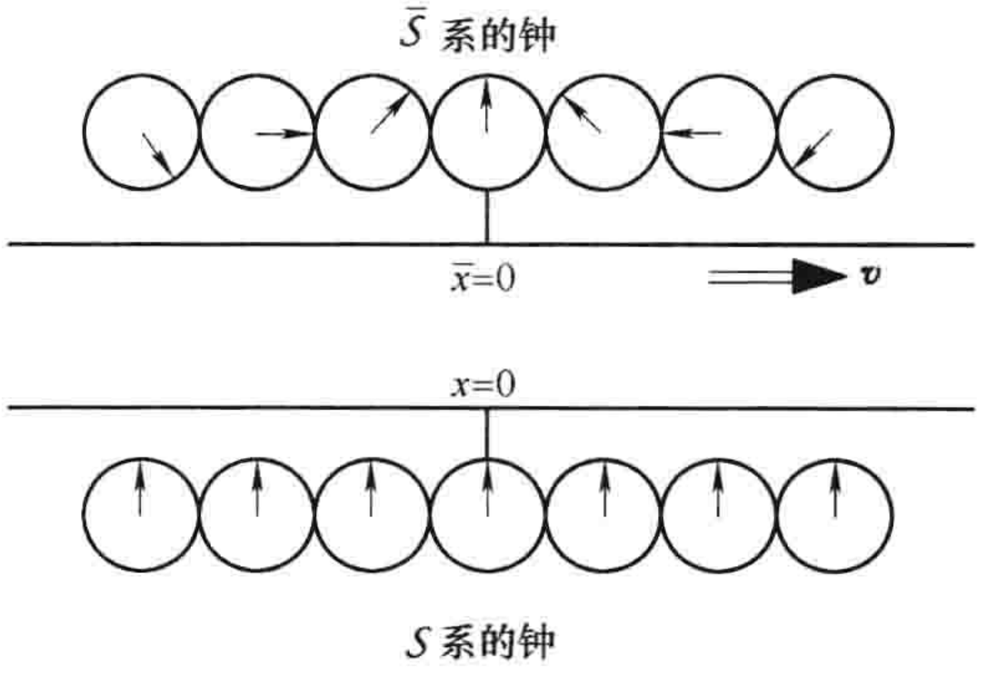


图　12.18

最后，假设 S 系中的观察者只关注 $\bar{S}$ 系中的一个钟(如，在 $\bar{x}=a$ 处的那个钟)，并注视它一段时间 Δt。运动的钟走过了多长时间？因为 $\bar{x}$ 是固定的，由(iv′)给出 $\Delta t=\gamma\Delta\bar{t}$，或

$$\Delta\bar{t}=\frac{1}{\gamma}\Delta t$$

这就是原来的时间延迟公式，现在从洛伦兹变换把它推导出来了。请注意，我们这里是把 $\bar{x}$ 固定，因为我们观察的是一个运动的钟。如果把 x 固定，你看到的将是 $\bar{S}$ 系中整个一系列的钟经过，这样不能得出它们中的任何一个钟是变慢的。

例题 12.5

洛伦兹收缩。设想一个以速度 v 向右运动的木棒，它静止时的长度(即在参考系 $\bar{S}$ 中测得的长度)是 $\Delta\bar{x}=\bar{x}_r-\bar{x}_l$，式中下标表示木棒的右端和左端。假如 S 系中的观察者测量木棒的长度，他将在他自己的某一瞬时 t，由木棒两端的坐标差得到木棒长度：$\Delta x=x_r-x_l$。根据(i)，有

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma}\Delta\bar{x}$$

这是原来所得的洛伦兹收缩公式。注意，这里我们固定的是 t，因为讨论的是在 S 系中的测量，他在他自己的同一瞬时标记木棒两端的坐标。（在 $\bar{S}$ 系中不用这么复杂，因为木棒在这个参考系中是静止的。）

例题 12.6

爱因斯坦速度叠加原理。设一个粒子在时间 dt 内移动一段距离 dx（在 S 系中），它的速度为

$$u = \frac{dx}{dt}$$

同时，由式(i)，在 $\bar{S}$ 系中移动的距离为

$$d\bar{x} = \gamma(dx - vdt)$$

所用时间由式(iv)给出：

$$d\bar{t} = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

故在 $\bar{S}$ 系中的速度为

$$\bar{u} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - v/c^2\,dx)} = \frac{(dx/dt - v)}{1 - (v/c^2)(dx/dt)} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \tag{12.20}$$

这就是**爱因斯坦速度叠加原理**。为了回到更明晰的式(12.3)，令 A 为粒子，B 为 S 参考系，C 为 $\bar{S}$ 参考系，这样 $u = v_{AB}$，$\bar{u} = v_{AC}$，而 $v = v_{CB} = -v_{BC}$，故式(12.20)变为

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + (v_{AB}v_{BC}/c^2)}$$

这与以前的形式相同。

习题 12.12 解出式(12.18)的 x，y，x，t，用 $\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$，$\bar{t}$ 表示，验证你得到的式(12.19)。

习题 12.13 千里眼 Sophie Zabar，由于她在 500km 外的双胞胎哥哥用锤子砸到了手指的同时而疼痛地叫喊，一个抱有怀疑态度的科学家在速度为 $\frac{12}{13}c$ 的向右飞行的飞机上（见图 12.19），观察到这两个事件（哥哥砸手和 Sophie 叫喊），根据这个科学家的观察，哪一个事件先发生？以秒为单位，这个事件比另一个早了多久？

习题 12.14

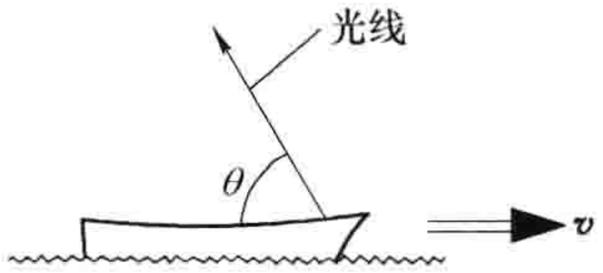
(a) 在例题 12.6 中，我们求出在 x 方向的速度从 S 系到 $\bar{S}$ 系的变换关系。推导出在 y 和 z 方向类似的速度变换公式。

(b) 一个聚光灯悬挂在一个船上，光线与甲板成角度 $\bar{\theta}$（见图 12.20）。如果这只船以速度 v 运动，在码头上的观察者看到的光线与甲板的夹角 θ 是多少？与习题 12.10 比较，解释两者的不同。

习题 12.15 你可能是以站在地面上的观察者的观点对习题 12.4 求解的。现在从警车、逃犯和子弹的观点分别求解，把下面的表格中的空白处填上求解的结果。

速度→相对↓	地面	警车	逃犯	子弹	可以逃脱吗？
地面	0	$\frac{1}{2}c$	$\frac{3}{4}c$		
警车				$\frac{1}{3}c$	
逃犯					
子弹					

图　12.19



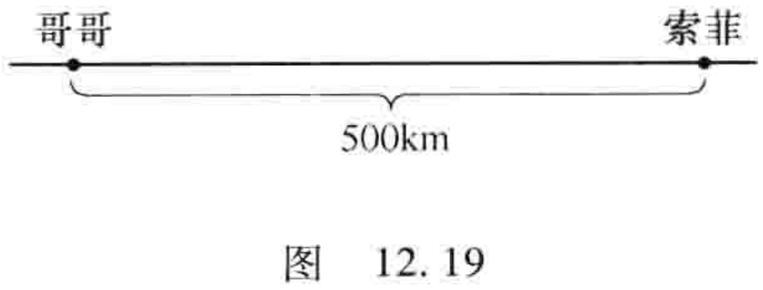


图　12.20

！习题 12.16　双生子佯谬的再讨论。在他们 21 岁生日那天，双胞胎中的一个乘上以速度$\frac{4}{5}c$向 X 星球运行的人行道，她的双胞胎哥哥待在家中。当她到达 X 星球时，她立刻跳上以同样速度返回的人行道。在她 39 岁时回到家(以她自己的表计算的时间)。

(a) 她双胞胎哥哥的年龄是多少(他待在家中)?

(b) 地球距 X 星球多远?(以光年表示。)

把向外运行的人行道记为 $\bar{S}$ 系，向回运行的人行道记为 $\tilde{S}$ 系(地球为 S 系)。所有三个参考系调整它们的主钟并选择原点，使在离开那一瞬间有 $x=\bar{x}=\tilde{x}=0$，$t=\bar{t}=\tilde{t}=0$。

(c) 在 S 系中，换乘(从去的人行道换到回来的人行道)处的坐标(x，t)是什么?

(d) 在 $\bar{S}$ 系中换乘处的坐标($\bar{x}$，$\bar{t}$)是什么?

(e) 在 $\tilde{S}$ 系中换乘处的坐标($\tilde{x}$，$\tilde{t}$)是什么?

(f) 如果旅行的双胞胎之一想让她的表与 $\tilde{S}$ 系中的一致，她应该在她换乘的瞬间如何调整她的表?如果她这样做了，她回到家时她表的读数会是多少?(这不会改变她的年龄，她当然还是 39 岁——这仅仅使她的表与 $\tilde{S}$ 系中的标准同步。)

(g) 如果旅行的双胞胎之一被问到“你的哥哥现在多大了?”对下面两种情形正确的回答是什么?(i)在她换乘以前那时刻，(ii)在她换乘以后那时刻。(当然，对他哥哥来说在她从(i)变到(ii)时没有发生任何事情。突然的变化是他妹妹的“现在，回家”的含义。)

(h) 返回过程花费的时间是地球上的多少年?把这加到(g)中的(ii)上，确定她预期的他的哥哥在他们团聚的时候是多大年龄。与你的(a)的答案比较。

12.1.4　时空结构

(i) 4-矢量。当用下面的量表示洛伦兹变换时形式会简化：

$$x^0 \equiv ct,\quad \beta \equiv \frac{v}{c} \tag{12.21}$$

利用 x^0(代替 t)和 β(代替 v)把时间的单位从秒变为米——x^0 的 1 米对应光传播 1 米用的时间(在真空中)。如果同时也给 x，y，z 坐标编号，有

$$x^1=x,\quad x^2=y,\quad x^3=z \tag{12.22}$$

这样洛伦兹变换为

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}^0&=\gamma(x^0-\beta x^1)\\ \bar{x}^1&=\gamma(x^1-\beta x^0)\\ \bar{x}^2&=x^2\\ \bar{x}^3&=x^3\end{aligned}\right\} \tag{12.23}$$

或者用矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{12.24}$$

让希腊字母从 0 到 3 取值，式(12.24)可以缩减为一个方程：

$$\bar{x}^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} (\boldsymbol{\Lambda}^\mu_{\ \nu}) x^\nu \tag{12.25}$$

式中，$\boldsymbol{\Lambda}$ 是式(12.24)中的**洛伦兹变换矩阵**(上标 μ 标记行，下标 ν 标记列)。以这种简略的形式表示的一个优点是，我们能用相同的形式处理更加一般的变换，其中的相对移动可不沿 x $\bar{x}$ 方向；对这种情况变换矩阵会更复杂，但式(12.25)的形式不变。

如果这使你回想起我们在 1.1.5 小节学习过的转动，则它并非偶然。那里我们关注的是当坐标系转动时坐标的变换。而这里我们感兴趣的是运动坐标系的坐标变换。在第 1 章我们定义了一个(3 -)矢量，在转动情况下它的三个分量变换与用(x，y，z)表示时的变换相同。把它推广，现在我们定义一个 4 - **矢量**来表示任何一组四分量，在洛伦兹变换

$$\bar{\alpha}^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_{\ \nu} \alpha^\nu \tag{12.26}$$

下，它们与(x^0，x^1，x^2，x^3)有相同的变换形式。对于一个沿 x 轴变换的特殊情形，

$$\left.\begin{aligned} a^0 &= \gamma(a^0 - \beta a^1) \\ \bar{a}^1 &= \gamma(a^1 - \beta a^0) \\ \bar{a}^2 &= a^2 \\ \bar{a}^3 &= a^3 \end{aligned}\right\} \tag{12.27}$$

有一个类似矢量点积($A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$)的 4-矢量点积，但它不只是相同分量乘积的相加；它的第零分量的乘积还有一个负号：

$$-a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \tag{12.28}$$

这就是**四维标量积**；你们可以自己验证(习题 12.17)，在所有的惯性系中它的值是一样的：

$$-\bar{a}^0 \bar{b}^0 + \bar{a}^1 \bar{b}^1 + \bar{a}^2 \bar{b}^2 + \bar{a}^3 \bar{b}^3 = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \tag{12.29}$$

正如普通的点积在转动下是**不变的**，这个点积在洛伦兹变换下也是不变的。

为了使负号明了，引入**协变矢量** a_μ 是方便的，它与**逆变矢量** α^μ 的不同仅在于第零分量的符号上：

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) \equiv (-a^0, a^1, a^2, a^3) \tag{12.30}$$

你必须对指标的位置非常小心：上标表示逆变矢量；下标表示协变矢量。升或降时间分量的指标要改变正、负号($a_0 = -a^0$)；升或降空间分量的指标没有变化($a_1 = a^1$，$a_2 = a^2$，$a_3 = a^3$)。现在标量积可以写成和的形式，

$$\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu \tag{12.31}$$

或更简洁的形式有

$$a_\mu\ b^\mu \tag{12.32}$$

无论何时，当一个希腊字母指标在一个乘积中重复出现时——一个是作为协变量，另一个是作为逆变量——就意味着求和。这称为**爱因斯坦求和惯例**，以发明者爱因斯坦命名，被爱因斯坦认为是他的最重要贡献之一。当然，我们也要留心改变协变量 b 时的那个负号：

$$a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \tag{12.33}$$

习题 12.17　利用式(12.27)来验证式(12.29)。[这仅证明了标量积对沿 x 方向的变换的不变性。但标量积在转动变换下也保持不变，因为第一项根本不受影响，最后三项由三维点积 $a \cdot b$ 构成。通过适当旋转，x 轴可指向任何方向，故四维标量积在任意洛伦兹变换下实际上是不变的。]

习题 12.18

(a) 写出描述一个伽利略变换的矩阵(式(12.12))。

(b) 写出描述一个沿 y 轴的洛伦兹变换的矩阵。

(c) 找出描述先以速度 v 沿 x 轴运动，然后又以速度 $\bar{v}$ 沿 y 轴运动的洛伦兹变换的矩阵。

习题 12.19　如果引进**快度**

$$\theta = \operatorname{artanh}(v/c) \tag{12.34}$$

则旋转和洛伦兹变换的相似性会更加明显

(a) 用 θ 表示洛伦兹变换矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$(式(12.24))，并把它与旋转矩阵比较(式(1.29))。在某些方面快度比速度描述运动更自然。[参见 E. F. Taylor 和 J. A. Wheeler, *Spacetime Physics* (San Francisco: W. H. Freeman, 1966)。] 其中之一是它的范围为 $-\infty \sim +\infty$，而不是 $-c \sim +c$。更有意义的是，快度是可加的，而速度是不可加的。

(b) 用快度表示爱因斯坦速度叠加原理。

(ii) 间隔不变性。假设事件 A 发生在 $(x_A^0, x_A^1, x_A^2, x_A^3)$，事件 B 发生在 $(x_B^0, x_B^1, x_B^2, x_B^3)$。它们的差，

$$\Delta x^\mu \equiv x_A^\mu - x_B^\mu \tag{12.35}$$

称为 **4-位移矢量**。它自身的标量积是一个特别重要的量，我们称它为两事件的间隔：

$$I \equiv (\Delta x)_\mu (\Delta x)^\mu = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -c^2 t^2 + d^2 \tag{12.36}$$

式中，t 是两事件的时间之差；d 是它们的空间距离。当变换到一个运动参考系中时，A 和 B 间的时间之差发生变化($\bar{t} \neq t$)，空间距离也发生变化($\bar{d} \neq d$)，但间隔 I 保持不变。

依赖于问题中的两事件，间隔可以是正的、负的或零：

1. 如果 $I<0$，我们称间隔是**类时**的，因为这是当两个事件发生在同一地点($d=0$)时的情况，两事件的区别仅在于时间之差。

2. 如果 $I>0$，我们称间隔是**类空**的，因为这是当两个事件发生在同一时刻($t=0$)时的情况，两事件的区别仅在于空间距离。

3. 如果 $I=0$，我们称间隔是**类光**的，因为这是两个事件存在通过以光速传播的信号相联系的关系的情况。

如果两个事件的间隔是类时的，则存在一惯性系(可进行洛伦兹变换)，两事件在这个惯性系中可在同一地点发生。因为如果我搭乘火车以速度 $v = d/t$ 从(A)到(B)，当事件 A 发生时离开 A，当事件 B 发生时刚好经过它。在火车这个参考系里，A 和 B 就发生在同一地点。对类空间隔无法这样做，因为那样的话需要 v 比 c 大，但没有观察者能超过光速(γ 会是虚数，洛伦兹变换没有意义)。另一方面，如果间隔是类空的，则存在一个参考系，在该参考系中两事件可同时发生(参见习题 12.21)。

习题 12.20

(a) 事件 A 发生在位置($x_A=5$，$y_A=3$，$z_A=0$)及时刻 t_A，且 $ct_A=15$；事件 B 发生在位置(10，8，0)，且 $ct_B=5$，两事件都在 S 系。

(i) A 和 B 间的间隔是多少？

(ii) 有一个它们同时发生的惯性系吗？如果有，求出它相对于 S 系的速度(大小和方向)。

(iii) 有一个它们发生在同一地点的惯性系吗？如果有，求出它相对于 S 系的速度。

(b) 对于 A = (2, 0, 0)，$ct = 1$ 及 B = (5, 0, 0)，$ct = 3$，重复(a)的计算。

习题 12.21 事件 A 的坐标是$(x_A, 0, 0)$，t_A，事件 B 的坐标是$(x_B, 0, 0)$，t_B。假设它们的间隔是类空的，求它们同时发生的参考系的速度。

(iii) 时空图。如果你想用图表示一个粒子的运动，通常的做法是画出位置随时间变化的图(即位置 x 为纵轴，时间 t 为横轴)。对这样的图形，速度可由曲线的斜率求出。由于某些原因，这在相对论中通常是倒置的：水平轴是位置，时间(或更好，$x^0 = ct$)是竖直轴。速度由斜率的倒数给出。静止的粒子由一条竖直线表示，以光速运动的光子由一条 45°的斜线表示。以某个中间速度运行的火箭具有斜率 $c/v = 1/\beta$(见图 12.21)。我们称这类图为**闵可夫斯基图**。

在闵可夫斯基图中一个粒子的轨迹称为一个**世界线**。假设你在时刻 $t = 0$ 时从原点出发。因为没有物体的运动速度超过光速，你的世界线的斜率不会小于 1。这样，你的运动被限制在由两个 45°线为边界的阴影楔形区内(见图 12.22)。我们称这为你的“未来”，因为只有这些点你才可以到达。当然，随着时间的流逝，你沿着你选择的世界线运动，你的选择逐渐狭窄：在任何时刻你的未来是以你所处的地点构成的向前的楔形区。同时，“向后”的楔形区代表你的“过去”，因为你只能来自于这个区域中的点。对于其他区域(在向前和向后的楔形区外)，它只是广义的“存在”。你不能到达那里，也不能来自于那里。事实上，你没有任何方法影响那里任何现存的事件(那样的话，信息传播的速度要大于光速)。这是一个你完全不能进入的巨大的时空区域。

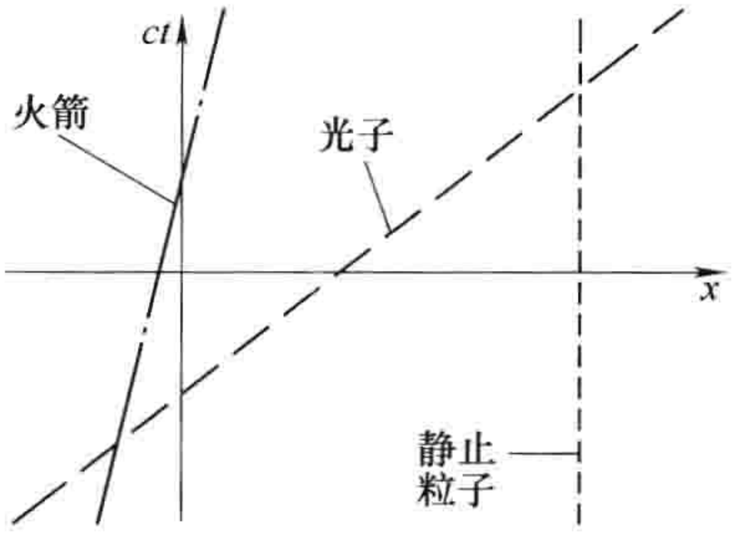


图 12.21

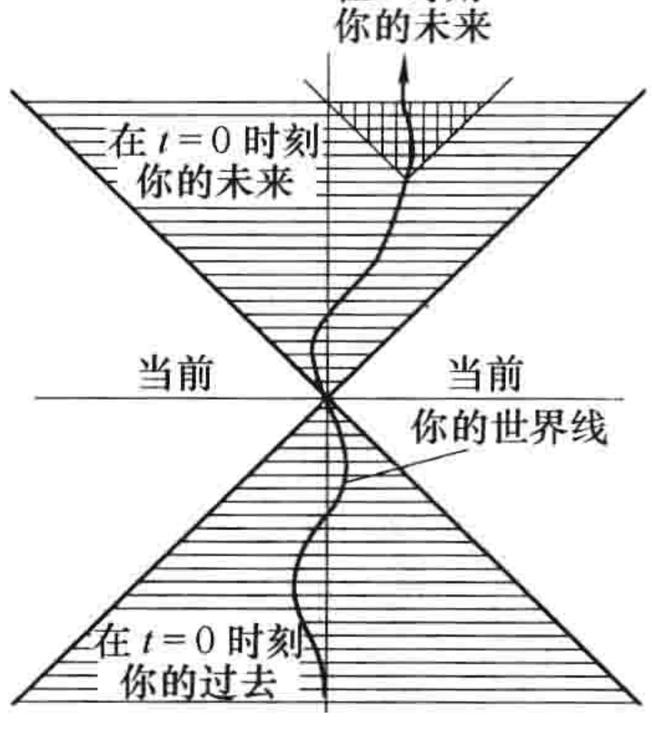


图 12.22

上面的讨论没有涉及 y 和 x 的方向。如果包括垂直纸面的 y 轴，“楔形”就变成锥形——加上不能画出来的 z 轴，变成超圆锥。因为它们的边界是光线的轨迹，我们称它们为**向前光锥**和**向后光锥**。你的未来在向前的光锥中，而过去在向后的光锥中。

注意，在时空图中，连接两个事件的线的斜率告诉你它们的间隔是类时的(斜率大于 1)，类空的(斜率小于 1)，还是类光的(等于 1)。例如，相对于你现在位置的所有光锥内的过去和将来的点都是类时的，而在光锥外的点是类空的，光锥面上的点是类光的。

赫尔曼·闵可夫斯基，是他首先认识到狭义相对论的几何意义，并在他的一篇经典文章中以这样的话开头：“从今以后，空间自身和时间自身的概念将淡化，而只有两者结合才能作为独立的实体而存在。”这是一个优美的思想，但你必须小心去理解它。因为“时间就是一个与 x，y，z 有同等地位的坐标”(除了因为不起眼的原因，即我们测量它用时钟而不是尺子)的说法并不完全准确。的确，时间与其他坐标完全不同，其标志是在不变间隔中的负号。这个负号使时空为双曲几何，比三维空间的圆形几何有更丰富的内容。

在绕着 z 轴旋转时，xy 平面内的一点对应一个圆：圆上所有的点距原点的距离相同，为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$（见图 12.23）。但在洛伦兹变换下，是间隔 $I=(x^2-c^2t^2)$ 保持不变，对于一个给定的 I，所有的点是一个双曲线——或者，如果包含 y 轴，则是旋转双曲面。当间隔是类时的，它是一个“两片双曲面”（见图 12.24a）；当间隔是类空的，它是一个“单片双曲面”（见图 12.24b）。当你进行洛伦兹变换（即进入一个运动惯性系）时，一个给定事件的坐标 (x, t) 将变为 $(\bar{x}, \bar{t})$，但这些新坐标将和 (x, t) 处在同一个双曲面上。通过适当的洛伦兹变换与旋转的组合，在一个给定的双曲面上的一个点可以随意移动。但对类时空间不能从上片移到下片，或移到一个类空双曲面上。

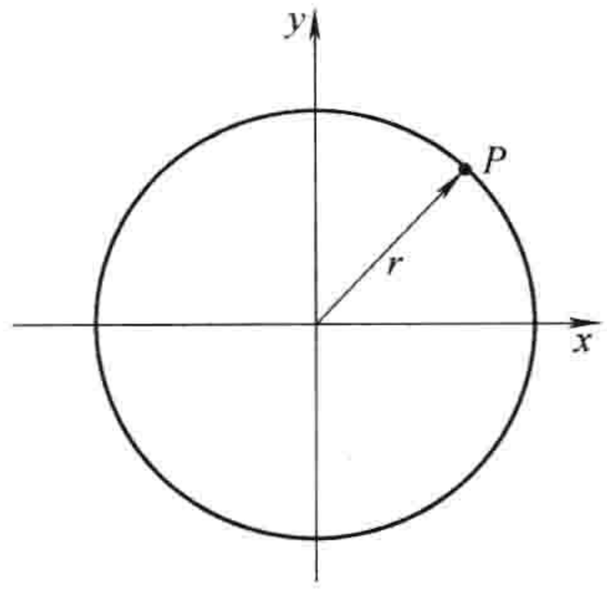
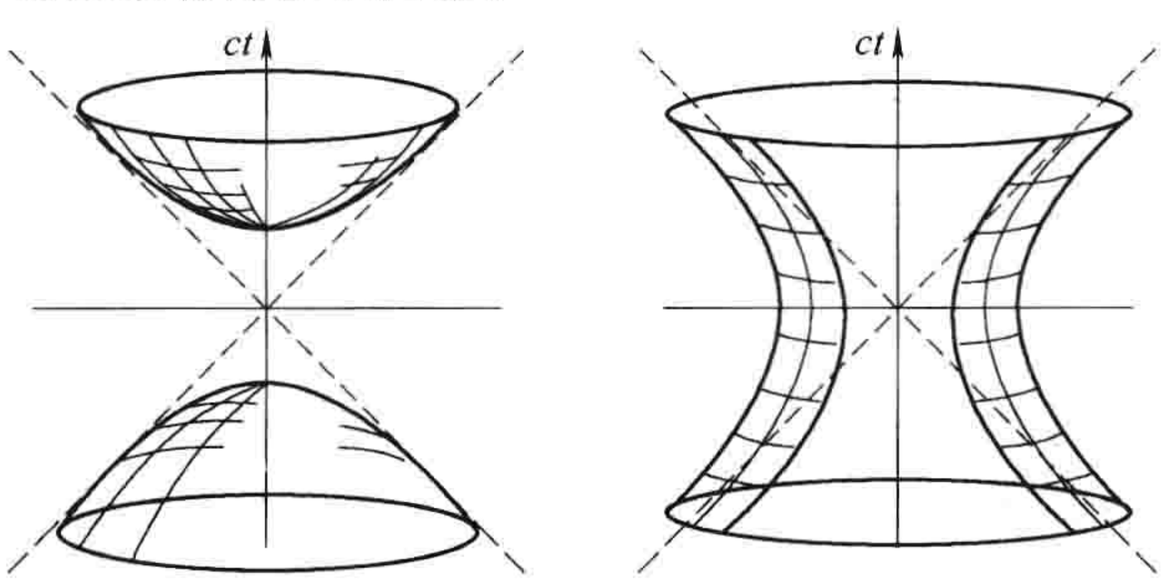


图　12.23

当讨论同时性时我要指出，两个事件的时间顺序在某些情况下，当变换到另一个运动参考系中时会反转。但现在看来并不总是可能的：如果两个事件的不变间隔是类时的，则它们的顺序是绝对的；如果间隔是类空的，则它们的顺序依赖于观察者所在的参考系。在时空图中，在类时双曲面的上片上的一个事件确定地要在 $(0, 0)$ 后面发生，而下片上的事件要早于 $(0, 0)$ 发生。但在类空双曲面上的事件，其发生可以在正的和负的时刻 t，依赖于你所处的参考系。这不是一个无意义的问题，因为它挽救了因果律，而因果律是所有物理的基石。如果总是可以使两事件的时间顺序反转，那么我们就不能说“A 引起了 B”，因为一个有敌意的观察者会先于 A 而对付 B。假如两个事件是类时间隔的，这种窘境就可以避免。因果律联系的时间是类时间隔的——否则影响不能从一个事件传播到另一个事件。结论：因果相联系的事件的不变间隔总是类时的，它们的时间顺序对所有惯性系中的观察者都是相同的。



a)　　b)

图　12.24

习题 12.22

（a）画出时空图，表示两个静止的相距 10ft 的人的一个投接球游戏（或交谈）。如果他们的间隔是类空的，他们怎样进行通信？

（b）一个过去的五行打油诗这样写道：

从前有个女孩叫布莱特，

她跑得比光还快。

她在某一天离开，

沿爱因斯坦之路，

于前一天夜里归来。

你对此有什么想法？即使她跑的速度超过光速，她能早于她出发时回来吗？她能早于她出发前到达中途某点吗？画出这个旅行的空时图。

习题 12.23 惯性系 $\bar{S}$ 沿 x 方向以相对于 S 以 $\frac{3}{5}c$ 的速度运动($\bar{x}$ 沿 x 轴运动，和通常一样，原点在 $t=\bar{t}=0$ 时重合。)

(a) 在图纸上建立一个以 ct 和 x 为轴的笛卡尔坐标系，仔细画线表示出 $\bar{x}=-3$，-2，-1，0，1，2，3)。把对应 $c\bar{t}=-3$，-2，-1，0，1，2，3 的线也画出来，并清楚地标出你画的线。

(b) 在 $\bar{S}$ 系，观察到自由粒子在时间 $c\bar{t}=-2$，从点 $\bar{x}=-2$ 运动到 $\bar{x}=2$，时间 $c\bar{t}=+3$。在图中指出位移。从直线的斜率确定粒子在 S 系中的速度。

(c) 利用速度叠加原理确定在 S 系中的速度，验证你的结果与(b)中用图形解出的结果一致。

12.2 相对论力学

12.2.1 固有时间和固有速度

当你沿着世界线运动时，你的表变慢了。墙上的时钟走过了一段时间 dt，而你的表仅运行了 $d\tau$：

$$d\tau = \sqrt{1-u^2/c^2}\,dt \tag{12.37}$$

(我用 u 表示特别的对象——你的速度，在这种情况下——v 是两惯性系的相对速度。)你的表显示的时间 τ(或更一般的，与运动物体相联系的时间)称为**固有时间**。(这个词意味着一个法语 propre 的误译，意思是“自己”。)在一些情形下 τ 比 t 可能更有用处。首先，固有时间是不变的，而“通常的”时间依赖于你考虑的参考系。

现在，设想你在一个飞往洛杉矶的飞机上，机长宣称飞机的速度是 $\frac{4}{5}c$，向南。他说的“速度”的精确含义是什么？当然，他的意思是位移除以时间：

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{l}}{dt} \tag{12.38}$$

因此，他说的大概是对地的相对速度，$d\boldsymbol{l}$ 和 dt 两个量都是地面上的观察者测得的。如果你关心你在洛杉矶的约会是否能准时，这确实是个重要数据。但如果你想知道你在飞行中是否饥饿，你也许对每单位固有时间走过的距离更感兴趣：

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \frac{d\boldsymbol{l}}{d\tau} \tag{12.39}$$

这个混合的量——距离是地面上观察者测的，时间是在飞机上测的——称为**固有速度**。作为对比，我将称 $\boldsymbol{u}$ 为**平常速度**。两者由式(12.37)联系在一起：

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\boldsymbol{u} \tag{12.40}$$

当然，对于速度远低于 c 的情形，平常速度与固有速度的差别可以忽略。

然而，从理论上来看，固有速度比平常速度具有巨大的优越性：当你从一个惯性系变换到另一个惯性系时，它的变换非常简单。事实上，$\boldsymbol{\eta}$ 是一个 4-矢量的空间部分，

$$\eta^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{12.41}$$

它的第零分量是

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c\frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{12.42}$$

分子 dx^μ 是一个 4-位移矢量，分母 $d\tau$ 是不变量。故，当你从 S 系变换到以速度 v 沿着 x $\bar{x}$ 轴运动的 $\bar{S}$ 系，有

$$\left.\begin{aligned}\bar{\eta}^0 &= \gamma(\eta^0 - \beta\eta^1)\\ \bar{\eta}^1 &= \gamma(\eta^1 - \beta\eta^0)\\ \bar{\eta}^2 &= \eta^2\\ \bar{\eta}^3 &= \eta^3\end{aligned}\right\} \tag{12.43}$$

更一般地，

$$\eta^\mu = \Lambda^\mu_\nu \eta^\nu \tag{12.44}$$

η^μ 称为**固有 4-速度矢量**，或简称 **4-速度**。

相反，平常速度的变换规则却非常繁琐，例题 12.6 及习题 12.14 给出结果：

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_x &= \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{u_x - v}{(1 - vu_x/c^2)}\\ \bar{u}_y &= \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_x/c^2)}\\ \bar{u}_z &= \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = \frac{u_z}{\gamma(1 - vu_x/c^2)}\end{aligned}\right\} \tag{12.45}$$

变换复杂的原因很明显：我们对分子 $d\boldsymbol{l}$ 和分母 dt 都必须进行变换；而对固有速度，分母 $d\tau$ 是不变量，故变换只需对分子进行。

习题 12.24

(a) 式(12.40)用平常速度定义了固有速度。反过来用 $\boldsymbol{\eta}$ 表示 $\boldsymbol{u}$。

(b) 固有速度和快度(式(12.34))有什么关系？假设速度沿着 x 方向，求出以 θ 为变量的函数 η。

习题 12.25　一辆轿车在 S 系中沿 45°线运动(见图 12.25)，(平常)速度为 $(2/\sqrt{5})c$。

(a) 求(平常)速度的分量 u_x 和 u_y。

(b) 求固有速度分量 η_x 和 η_y。

(c) 求 4-速度矢量的第零分量 η^0。

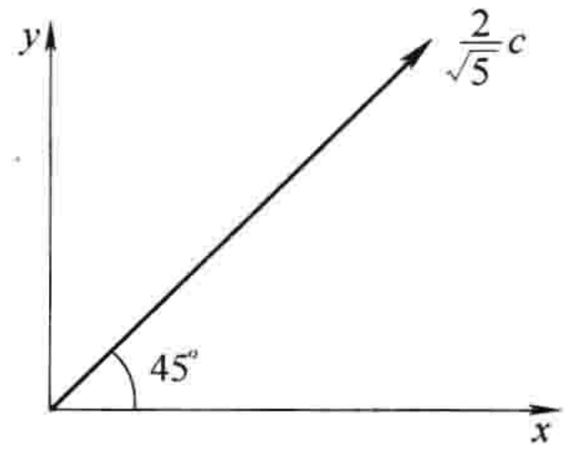


图　12.25

$\bar{S}$ 系以相对于 S 系的(平常)速度 $(\sqrt{2/5})c$ 沿 x 方向运动。利用适当的变换规则，

(d) 在 $\bar{S}$ 系求(平常)速度分量 $\bar{u}_x$ 和 $\bar{u}_y$。

(e) 在 $\bar{S}$ 系求固有速度分量 $\bar{\eta}_x$ 和 $\bar{\eta}_y$。

(f) 验证

$$\bar{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\bar{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1 - \bar{u}^2/c^2}}$$

习题 12.26　求 4-速度自身的不变乘积 $\eta^\mu \eta_\mu$。

习题 12.27　考虑一个粒子作双曲线运动，

$$x(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2},\quad y = z = 0$$

(a)求以 t 为变量的固有时间 τ，设时钟为当 $t=0$ 时，$\tau=0$。[提示：积分式(12.37)。]

(b)求以 τ 为变量的 x 和 v(平常速度)。

(c)求以 t 为变量的 η^μ(固有速度)。

12.2.2 相对论能量和动量

在经典力学中，动量是质量乘以速度。我要把这个定义推广到相对论的情形，但立刻出现一个问题：我应当用平常速度还是固有速度？在经典力学中 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 是相同的，故不必区分。但在相对论中我们要用固有速度，这是至关重要的。这是因为，如果定义动量为 $m\boldsymbol{u}$，则动量守恒和相对性原理会不一致(习题 12.28)。所以

$$\boxed{\boldsymbol{p} \equiv m\boldsymbol{\eta} = \frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}} \tag{12.46}$$

这就是**相对论动量**。

相对论动量是 4-矢量，

$$p^\mu \equiv m\eta^\mu \tag{12.47}$$

的空间部分。这样，我们自然会问它的时间分量

$$p^0 = m\eta^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{12.48}$$

代表什么。爱因斯坦称

$$m_{\text{rel}} \equiv \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{12.49}$$

为**相对论质量**(所以 $p^0 = m_{\text{rel}}c$，$\boldsymbol{p} = m_{\text{rel}}\boldsymbol{u}$；$m$ 本身则称为**静止质量**)，但在现在的应用中放弃了这个术语，而更喜欢用**相对论能量**：

$$\boxed{E \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}} \tag{12.50}$$

(所以 $p^0 = E/c$)。[⊖]因为 p^0(除了因子 $1/c$)是相对论能量，p^μ 称为**能量-动量 4-矢量**(或简称**动量 4-矢量**)。

注意，即使物体静止，相对论能量也不为零，我们称之为**静止能量**，

$$E_{\text{静}} \equiv mc^2 \tag{12.51}$$

剩余的部分来自于运动，称为动能

$$E_{\text{动}} \equiv E - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1\right) \tag{12.52}$$

对于非相对论情形($u \ll c$)，方根可以展开成 u^2/c^2 的幂级数，

$$E_{\text{动}} = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{3}{8}\frac{mu^4}{c^2} + \cdots \tag{12.53}$$

第一项正是经典力学的动能。

到目前为止，所讨论的仅是术语概念。基于实验事实的物理证明(由式(12.46)和式(12.50)定义)E 和 $\boldsymbol{p}$ 是守恒的：

对任何封闭体系[⊜]，总的相对论能量和动量是守恒的。

“相对论质量”(如果你想用这个术语)也是守恒的——但这与能量守恒等价。静止质量不守恒——这是 1945 年以来每个人都熟知并感到痛苦的事实(尽管所谓的“质量能量转化”事实上是静止能量转化为动能)。注意，**不变量**(在所有惯性系值都相同)和**守恒量**(某些过程前后值保持

⊖ 因为 E 和 m_{rel} 间仅相差一个因子(c^2)，所以没有必要使用两个术语。

⊜ 如果存在外力做功，则(如同经典情况一样)体系本身的能量和动量一般来讲是不守恒的。

不变)的区别。质量是不变量，但不是守恒量；能量是守恒量但不是不变量。电荷(正如我们将要看到的)既是守恒量也是不变量。速度既不是守恒量也不是不变量。

p^μ 自身的标积是

$$p^\mu p_\mu = -(p^0)^2 + (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}) = -m^2c^2 \tag{12.54}$$

利用习题 12.26 的结果你可很快验证它。利用相对论能量，有

$$\boxed{E^2 - p^2c^2 = m^2c^4} \tag{12.55}$$

这个结果非常有用，因为不用求速度，仅由此式就可计算 E(如果知道 p)，或 p(如果知道 E)。

习题 12.28

(a) 用(不正确的)定义 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}$ 及(正确的)爱因斯坦速度叠加原理重做习题 12.2。注意，假如动量(这样定义的)在 S 系中守恒，在 $\bar{S}$ 系中不守恒。假设所有的运动沿 x 轴。

(b) 现在用正确的定义 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{\eta}$ 重复求解。注意，如果动量(这样定义的)在 S 系中守恒，在 $\bar{S}$ 系中它自动守恒。[提示：利用式(12.43)变换固有速度。]对于相对论能量必须做何假设？

习题 12.29　如果一个粒子的动能是它静止能量的 n 倍，它的速度是多少？

习题 12.30　假设你有许多粒子，均沿 x 方向运动，能量为 E_1，E_2，E_3，…，动量为 p_1，p_2，p_3，…。求动量中心参考系的速度，在这个参考系中总动量为零。

12.2.3　相对论运动学

在这部分我们将学习守恒律在粒子衰变和碰撞中的一些应用。

例题 12.7

两块泥土，每个的(静止)质量为 m，以速度 $\frac{3}{5}c$ 迎面碰撞(见图 12.26)并粘在一起。问：粘在一起的泥块质量(M)是多少？

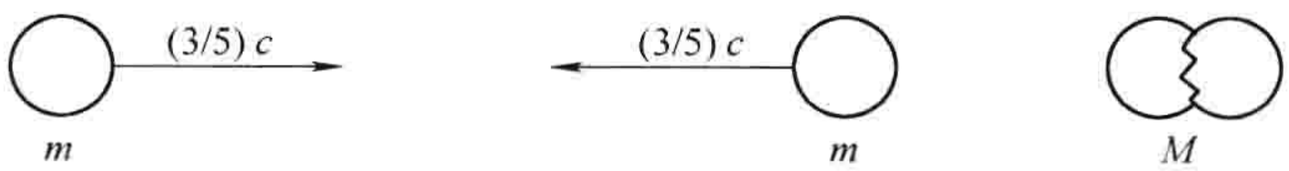


图　12.26

解：在这个例子中动量守恒很平凡：碰撞前后动量均为零。碰撞前每个泥块的能量是

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = \frac{5}{4}mc^2$$

碰撞后结合在一起的泥块的能量是 Mc^2(因为它是静止的)。故由能量守恒得到

$$\frac{5}{4}mc^2 + \frac{5}{4}mc^2 = Mc^2$$

所以

$$M = \frac{5}{2}m$$

注意，这个质量大于最初的质量之和！质量在碰撞中不守恒，动能转化为了静止质量，所以质量增加了。

在经典力学中分析这类碰撞时，我们说动能转化成了热能——粘在一起的泥块比碰前的两泥块“热”。这在相对论理论中当然也是对的。但什么是热能？它是物体中所有的原子、分子的随机动能和势能的总和。相对论告诉我们，这些微观能量都可用物体的质量表示：一个热的马铃薯比冷的重；一个压缩的弹簧比自

由的重。差别不是很多——内能(U)对质量的贡献是 U/c^2，c^2 比我们日常碰到的标准大很多。你在任何地方都找不到速度足够大的两个泥块，以探测它们在碰撞时的质量不守恒。但在基本粒子世界，这个效应可以很明显。例如，当中性的 π 介子(质量 $2.4\times10^{-28}\,\mathrm{kg}$)衰变成一个电子和正电子(每个的质量为 $9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$)时，静止能量几乎全部转变成了动能——只保留了不到原来质量的 1%。

在经典力学中，没有无质量的粒子——其动能($mu^2/2$)和动量($m\boldsymbol{u}$)会是零。因为你不能对它施加力($\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$)，所以(由牛顿第三定律)它对其他物体也不能施加力——对于关注的物理它什么也没有。在相对论中，你或许认为情况也是如此：毕竟 $\boldsymbol{p}$ 和 E 仍然正比于 m。但仔细观察式(12.46)和式(12.50)可发现一个有价值的线索：如果 $u=c$，分子和分母均为零，则使 $\boldsymbol{p}$ 和 E 不确定(零除以零)。所以，如果一个无质量的粒子运动的速度总是光速，则它携带能量和动量是可能的。尽管式(12.46)和式(12.50)不足以确定 E 和 $\boldsymbol{p}$，但由式(12.55)它们可通过下式联系起来，

$$E=pc \tag{12.56}$$

我个人认为这个争论是一个玩笑，不是因为在自然界至少存在一个无质量的粒子：光子。[㊀] 光子确实是以光速运动，且遵守式(12.56)。[㊁] 它们迫使我们认真地对待它们。(附带说明，你也许要问带较多能量的光子与较少能量的光子的区别—毕竟它们有相同的质量(零)和速度(c)。相对论没有回答这个问题，让人感到奇怪的是量子力学回答了这个问题：根据普朗克公式，$E=h\nu$，这里 h 是**普朗克常数**，ν 是频率。一个蓝光光子的能量比一个红光光子的能量大!)

例题 12.8

一个静止的 π 介子衰变成一个 μ 子和一个中微子(见图 12.27)。求 μ 子的能量，用质量 m_π 和 m_μ 表示(设 $m_\nu=0$)。

解： 在这种情况下

$$E_{前}=m_\pi c^2,\quad \boldsymbol{p}_{前}=0$$

$$E_{后}=E_\mu+E_\nu,\quad \boldsymbol{p}_{后}=\boldsymbol{p}_\mu+\boldsymbol{p}_\nu$$

动量守恒要求 $\boldsymbol{p}_\nu=-\boldsymbol{p}_\mu$，能量守恒要求

$$E_\mu+E_\nu=m_\pi c^2$$

现在，由式(12.56)，得 $E_\nu=|\boldsymbol{p}_\nu|c$，而由式(12.55)，得 $|\boldsymbol{p}_\mu|=\sqrt{E_\mu^2-m_\mu^2c^4}/c$，所以

$$E_\mu+\sqrt{E_\mu^2-m_\mu^2c^4}=m_\pi c^2$$

从上面的方程解得

$$E_\mu=\frac{(m_\pi^2+m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}$$

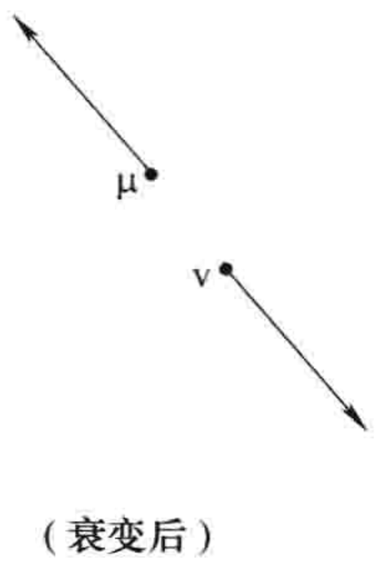


图 12.27

在经典力学碰撞中动量和质量总是守恒的，但动能一般不守恒。“粘在一起”的碰撞中动能转化成热能；“爆炸”的碰撞中化学能(或一些其他形式的能)转化为动能。如果动能守恒，如两个台球的理想碰撞，我们称碰撞是弹性碰撞。在相对论情形，动量和总能量总是守恒的，但质量和动能一般不守恒。如果碰撞中动能守恒，我们也称它为**弹性**碰撞。在这种情况下静止能量(总能减去动能)也是守恒的，故质量也守恒。实际中这意味着碰撞后的粒子与碰撞前粒子相同。例题 12.7 和 12.8 是非弹性碰撞，下面这个例子是弹性碰撞。

㊀ 直到最近中微子还普遍被认为是无质量的，但 1998 年的实验指出它们事实上是有一个(很小的)质量的。

㊁ 光子是电磁场的**量子**，电磁波的能量和动量的比与此相同并非偶然。

例题 12.9

康普顿散射。一个能量为 E_0 的光子与一个静止的电子发生碰撞。作为散射角 θ 的函数，求出射光子的能量 E（见图 12.28）。

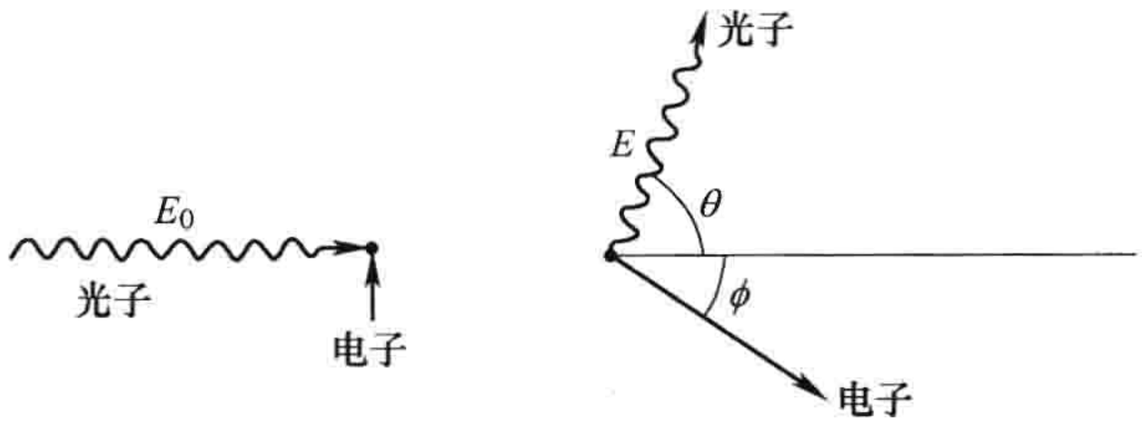


图　12.28

解："竖直"方向上的动量守恒给出 $p_e \sin\phi = p_p \sin\theta$，或因 $p_p = E/c$，有

$$\sin\phi = \frac{E}{p_e c}\sin\theta$$

"水平"方向上的动量守恒给出

$$\frac{E_0}{c} = p_p \cos\theta + p_e \cos\phi = \frac{E}{c}\cos\theta + p_e \sqrt{1 - \left(\frac{E}{p_e c}\sin\theta\right)^2}$$

或

$$p_e^2 c^2 = (E_0 - E\cos\theta)^2 + E^2 \sin^2\theta = E_0^2 - 2E_0 E\cos\theta + E^2$$

最后，由能量守恒

$$\begin{aligned} E_0 + mc^2 &= E + E_e = E + \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \\ &= E + \sqrt{m^2 c^4 + E_0^2 - 2E_0 E\cos\theta + E^2} \end{aligned}$$

解出 E，得

$$E = \frac{1}{(1 - \cos\theta)/mc^2 + (1/E_0)} \tag{12.57}$$

用光子的波长表示结果会更简洁：

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

所以

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \tag{12.58}$$

量 (h/mc) 称为电子的**康普顿波长**。

习题 12.31　求例题 12.8 中 μ 子的速度。

习题 12.32　质量为 m 的一个粒子，它的总能是静止能量的 2 倍。它与静止的相同粒子碰撞。如果它们结合在一起，复合体的质量是多少？速度是多少？

习题 12.33　一个（静止）质量为 m，（相对论）动量为 $p = \frac{3}{4}mc$ 的中性 π 介子衰变为两个光子。一个光子的出射方向与原来的 π 介子运动方向一致，另一个沿相反方向。求出每个光子的（相对论）能量。

习题 12.34　过去，大多数粒子物理实验涉及静止靶标：一个粒子（通常是质子或电子）加速到高能量 E，与静止的靶标粒子碰撞（见图 12.29a）。如果两个粒子都加速至能量 E（用相同的加速器），再让它们碰撞，则能获得更高的相对能量（见图 12.29b）。经典力学中，一个粒子相对于另一个粒子的能量 $\overline{E}$ 仅为 $4E$

(为什么?)——增益不是特别高(仅为 E 的 4 倍)。但在相对论中可获得巨大的增益。假设两粒子有相同的质量 m，证明

$$\overline{E} = \frac{2E^2}{mc^2} - mc^2 \tag{12.59}$$

a) b)

图 12.29

假设你使用 $E = 30\text{GeV}$ 的质子($mc^2 = 1\text{GeV}$)，$\overline{E}$ 是多少？是 E 的多少倍？($1\text{GeV} = 10^9\text{eV}$。)[由于相对论的增强效应，大多数现代基本粒子实验用碰撞的束流代替固定靶标。]

习题 12.35 在一个电子对湮灭实验中，动量为 p_e 的电子(质量为 m)碰撞一静止的正电子(质量与电子相同，电荷符号相反)。它们湮灭时产生两个光子。(为何不能仅产生一个光子?)如果一个光子的出射方向与入射的电子方向的夹角为 60°，它的能量是多少?

12.2.4 相对论动力学

牛顿第一定律包含在相对性原理中。下面形式的牛顿第二定律，

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}} \tag{12.60}$$

在相对论力学中依然成立，只不过式中的动量要用相对论动量。

例题 12.10

在恒定力作用下的运动。一个质量为 m 的粒子被施加一个恒定力 F。假如在时刻 $t = 0$ 它静止于原点并开始运动，作为时间的函数，求它的坐标(x)。

解:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F \Rightarrow p = Ft + \text{常数}$$

但因在 $t = 0$ 时，$p = 0$，式中的常数必为零，所以

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = Ft$$

解出速度 u，得到

$$u = \frac{(F/m)t}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}} \tag{12.61}$$

式中的分子当然就是经典力学的解——如果 $(F/m)t \ll c$。这个近似是正确的。但相对论性的分母保证 u 永远不会大于 c。事实上，当 $t \to \infty$，$u \to c$。

为了求出坐标，必须积分

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F}{m}\int_0^t \frac{t'}{\sqrt{1 + (Ft'/mc)^2}}\mathrm{d}t' \\ &= \frac{mc^2}{F}\sqrt{1 + (Ft'/mc)^2}\Big|_0^t \\ &= \frac{mc^2}{F}\left[\sqrt{1 + (Ft/mc)^2} - 1\right] \end{aligned} \tag{12.62}$$

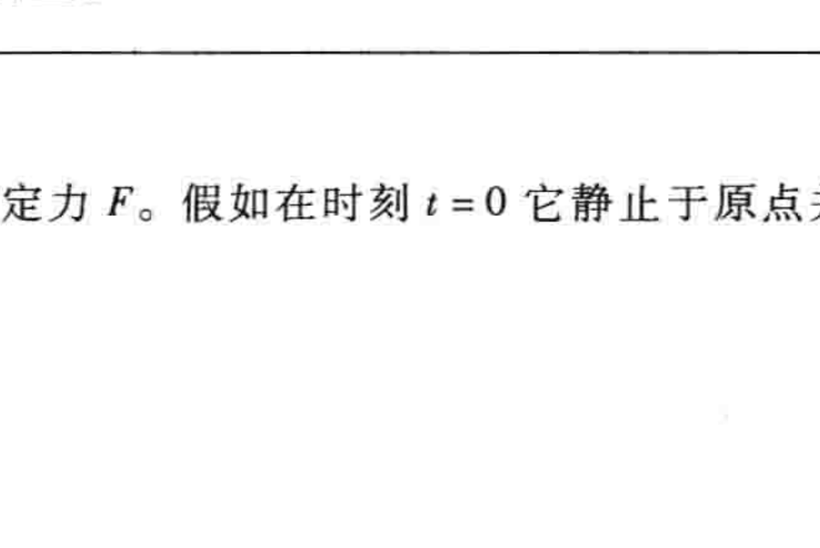


图 12.30

不同于经典的抛物线 $x(t)=(F/2m)t^2$，这里得到的图形是一个双曲线(见图 12.30)。由于这个原因，在恒力作用下的运动常称为**双曲线运动**。例如，一个置于均匀电场中的带电粒子的运动就是受恒力的运动。

与通常一样，功是力的线积分：

$$W \equiv \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{12.63}$$

功能原理("对粒子做的净功等于粒子增加的动能")在相对论中依然成立：

$$W = \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{u}\mathrm{d}t$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) \cdot \boldsymbol{u}$$

$$= \frac{m\boldsymbol{u}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \tag{12.64}$$

故

$$W = \int \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = E_{末} - E_{初} \tag{12.65}$$

(因为静止能量是常数，所以这里用总能或是动能都没有关系。)

与前两个定律不同，牛顿第三定律一般不能推广到相对论的情形。的确，如果涉及的两个物体在空间上是分开的，牛顿第三定律与同时的相对性是不相容的。假如在某时刻 t，A 对 B 施加力 $\boldsymbol{F}(t)$，在同一瞬时 B 施加在 A 上的力为 $\boldsymbol{F}(t)$，则在这个参考系中牛顿第三定律适用。但一个运动的观察者将会认为这两个大小相等、方向相反的力不是同时发生的。因此在他的参考系中牛顿第三定律不成立。仅在两物体相互接触作用情形下，两个力施加在相同的物理地点时(通常恒力的情形)，牛顿第三定律才能保持成立。

因为力 $\boldsymbol{F}$ 是动量对平常时间的导数，它与(平常)速度有相同的令人生厌的特性：当你从一个参考系变换到另一个参考系时，分子和分母都必须变换。所以，[⊖]

$$\overline{F}_y = \frac{\mathrm{d}\overline{p}_y}{\mathrm{d}\overline{t}} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma\mathrm{d}t - \frac{\gamma\beta}{c}\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)} \tag{12.66}$$

对 z 分量类似有：

$$\overline{F}_z = \frac{F_z}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$$

x 分量更复杂：

$$\overline{F}_x = \frac{\mathrm{d}\overline{p}_x}{\mathrm{d}\overline{t}} = \frac{\gamma\mathrm{d}p_x - \gamma\beta\mathrm{d}p^0}{\gamma\mathrm{d}t - \frac{\gamma\beta}{c}\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} - \beta\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}t}}{1 - \frac{\beta}{c}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{F_x - \frac{\beta}{c}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right)}{1-\beta u_x/c}$$

把式(12.64)中的 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 代入上式，得到

$$\overline{F}_x = \frac{F_x - \beta(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F})/c}{1-\beta u_x/c} \tag{12.67}$$

仅在一种特殊情况下这些方程才容易处理：如果粒子(瞬时)在 S 系中静止，这样 $\boldsymbol{u}=0$，有

$$\overline{\boldsymbol{F}}_\perp = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{F}_\perp,\quad \overline{\boldsymbol{F}}_\parallel = \boldsymbol{F}_\parallel \tag{12.68}$$

即，$\boldsymbol{F}$ 平行于 $\overline{S}$ 系运动方向的分量不变，垂直方向分量是 $\boldsymbol{F}$ 除以 γ。

类似于固有速度，通过引进"固有"力可以避免复杂化。固有力是动量对固有时间求导：

⊖　记住：γ 和 β 仅含有 $\overline{S}$ 系相对于 S 系的速度——它们是常数，$\boldsymbol{u}$ 是粒子在 S 系中的运动速度。

$$K^{\mu} \equiv \frac{\mathrm{d}p^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} \tag{12.69}$$

它称为**闵可夫斯基力**。很明显，它是一个4-矢量，因为 p^{μ} 是一个4-矢量，而固有时间是不变量。K^{μ} 的空间部分通过下式与“平常”力相联系

$$\boldsymbol{K} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\boldsymbol{F} \tag{12.70}$$

第零分量

$$K^0 = \frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau} \tag{12.71}$$

除了因子 $1/c$，它是(固有)比率，粒子能量以该比率增加——换句话说，传递给粒子的是(固有)功率。

相对论动力学的公式可由平常力或闵可夫斯基力表示。用后者表示的公式一般比较简洁，但因为在一个长距离的运动中，我们对它的轨迹随“平常”时间的变化感兴趣，所以前者更加有用。当我们想把经典力的定律，如洛伦兹力，推广至相对论情形时，问题出现了：经典公式中的力是平常力还是闵可夫斯基力？换句话说，我们应该把公式写成

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B})$$

还是

$$\boldsymbol{K} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B})?$$

因为固有时间和平常时间在经典力学中是相同的，所以现在还没办法区分。洛伦兹力被证明是平常力——稍后将解释原因，并给出如何构造电磁场的闵可夫斯基力。

例题 12.11

一带电粒子在均匀磁场中的典型轨迹是回旋运动(见图12.31)。粒子受到的磁力指向中心，

$$F = QuB$$

这提供了维持圆周运动的向心力。但是要注意——在狭义相对论中向心力不是像在经典力学中的那样为 mu^2/R，而是如在图12.32中所见的那样，$\mathrm{d}p = p\mathrm{d}\theta$，故

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = p\frac{u}{R}$$

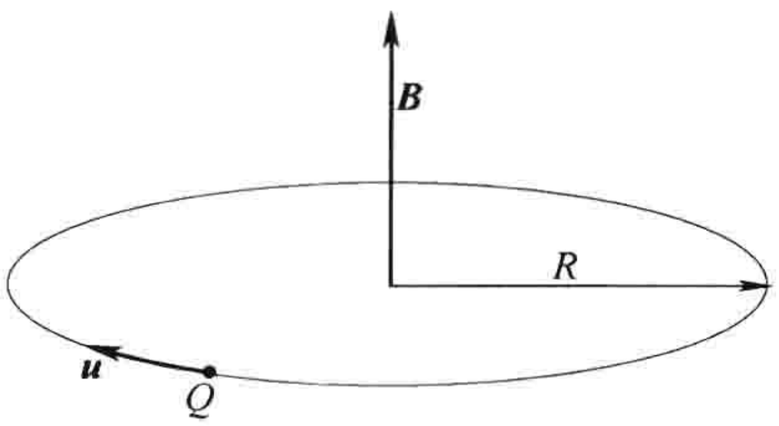


图 12.31

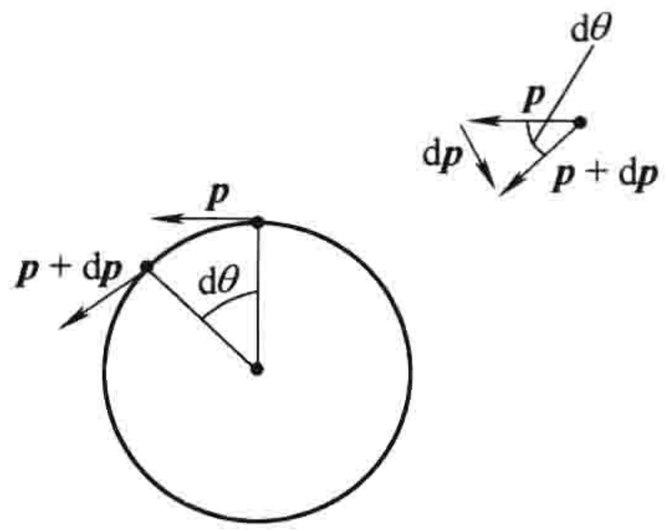


图 12.32

(当然，经典力学中，$p = mu$，所以 $F = mu^2/R$。)所以

$$QuB = p\frac{u}{R}$$

或

$$p = QBR \tag{12.72}$$

在这个形式中，相对论回旋公式与非相对论公式(5.3)相同——唯一不同之处是，现在 p 是相对论动量。

例题 12.12

隐藏动量。作为一个磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 的模型，考虑一个有恒流的矩形线框。把电流想象成在导线内无相互作用、自由运动的电子流。当施加一个均匀电场时(见图 12.33)，在左边导线中的电荷加速，而在右边的减速。[⊖]求在线圈中所有电荷的总动量。

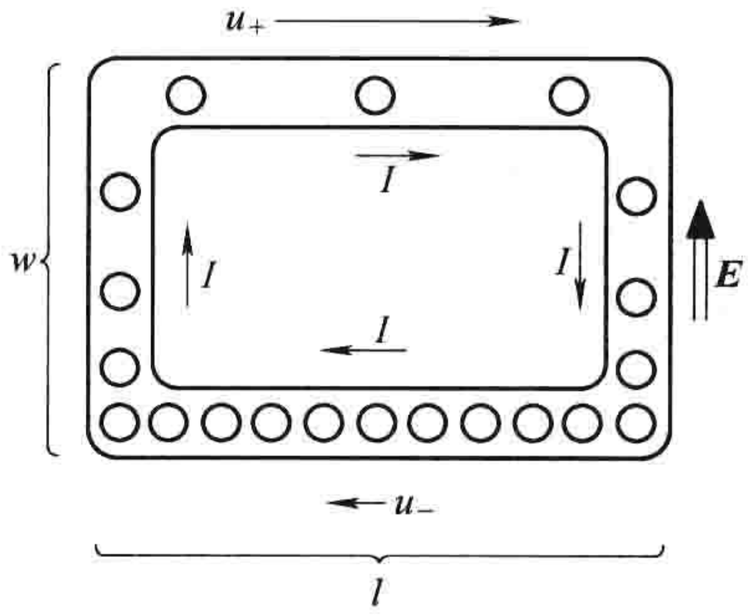


图　12.33

解：左边和右边部分的动量抵消，故只需考虑顶部和底部。顶部 N_+ 电荷以速度 u_+ 向右运动，底部 N_- 电荷以(较慢的速度) u_- 向左运动。电流($I=\lambda u$)在所有四段导线中都相同(否则电荷在某处就会聚集)；特别地，

$$I=\frac{QN_+}{l}u_+=\frac{QN_-}{l}u_-,\ \text{故}\ N_\pm u_\pm=\frac{Il}{Q}$$

式中，Q 是每个粒子的电荷；l 是矩形的长度。经典物理中，单个粒子的动量 $\boldsymbol{p}=M\boldsymbol{u}$($M$ 是质量)，总动量是(向右边)

$$p_{\text{经典}}=MN_+u_+-MN_-u_-=M\frac{Il}{Q}-M\frac{Il}{Q}=0$$

正如预想的一样(毕竟整个线圈作为一个整体是不动的)。但在相对论中，$\boldsymbol{p}=\gamma M\boldsymbol{u}$，我们得到

$$p=\gamma_+MN_+u_+-\gamma_-MN_-u_-=\frac{MIl}{Q}(\gamma_+-\gamma_-)$$

这不是零，因为上一部分的粒子移动得快。

事实上，当粒子在左边导线中向上运动时，得到的能量(γMc^2)等于电场力做的功 QEw，其中 w 是矩形的高度，故

$$\gamma_+-\gamma_-=\frac{QEw}{Mc^2}$$

所以

$$p=\frac{IlEw}{c^2}$$

但 Ilw 是线圈的磁偶极矩，矢量 $\boldsymbol{m}$ 指向纸面内，$\boldsymbol{p}$ 指向右，所以

$$\boldsymbol{p}=\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{E})$$

所有在电场中的磁偶极矩都携带动量，尽管它不运动！这个所谓的**隐藏动量**是严格的相对论效应，是纯力学上的。它与电磁场动量精确相消(参见例题 8.3，注意两个结果都可表示成 $p=IlV/c^2$ 的形式)。

习题 12.36　在经典力学中牛顿第二定律可写成更常用的形式 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$。在相对论方程中，$\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$，不能这样简单地表示。证明它是如下形式

$$\boldsymbol{F}=\frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left[\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})}{c^2-u^2}\right]\tag{12.73}$$

式中，$\boldsymbol{a}=\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t$ 是**平常加速度**。

习题 12.37　证明如果你起跑有力，且脚下受到一个恒定的力，你有可能超过光速。

习题 12.38　固有加速度的定义如下

$$\alpha^\mu\equiv\frac{\mathrm{d}\eta^\mu}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}\tag{12.74}$$

⊖　显然，这是一个不太现实的电流线圈模型，但其他模型得到相同的结果。参见 V. Hnizdo, Am. J. Phys. 65, 92 (1997)。

(a)求 α^0 和 $\boldsymbol{\alpha}$，用 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{a}$(平常加速度)表示。

(b)用 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 表示 $\alpha_\mu\alpha^\mu$。

(c)证明 $\eta^\mu\alpha_\mu=0$。

(d)写出牛顿第二定律式(12.69)的闵可夫斯基形式，用 α^μ 表示。求不变乘积 $K^\mu\eta_\mu$。

习题 12.39 证明

$$K_\mu K^\mu=\frac{1-(u^2/c^2)\cos^2\theta}{1-u^2/c^2}F^2$$

式中，θ 是 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 间的夹角。

习题 12.40 质量为 m，电荷为 q 的粒子，在电磁场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的影响下以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动，证明其(平常)加速度由下式给出：

$$\boldsymbol{a}=\frac{q}{m}\sqrt{1-u^2/c^2}\left[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{E})\right]$$

[提示：利用式(12.73)。]

12.3 相对论电动力学

12.3.1 相对论中的磁现象

与牛顿力学不同，经典电动力学与狭义相对论已经相容。麦克斯韦方程和洛伦兹力定律适用于任一惯性系。当然，对于一个电磁现象，一个观察者会认为是电过程，而另一个观察者可能认为是磁过程，但他们预测的实际粒子的运动是相同的。从某种意义上看，洛伦兹或其他人没有解决这个问题，他们在 19 世纪后期研究过这个问题。他们的错误在于运用了非相对论力学，而不是电动力学本身有问题。有了对牛顿力学的相对论修正，我们现在就可以推导出完整协调的相对论电动力学。但需要强调的是，这对电动力学的原理没有丝毫修改——而仅是用符号重新表示这些原理，使它们的相对论特性得以凸显。我将利用洛伦兹变换重新推导那些我们在较早时用较费力的方法推出的结果。但本节的主要目的是深刻理解电动力学的结构——以前看到的那些随意的无关联的定律在相对论中呈现出一致和必然性。

首先从静电学和相对论来讨论为何有磁性，而且不利用磁学定律便能够计算通有电流的导线与运动电荷之间的磁力。[㊀]假设你有一个以速度 v 向右运行的带正电荷的线，假设电荷彼此靠得很近，可认为是连续分布，电荷线密度是 λ。在其上叠加一个电荷线密度为 $-\lambda$，以速度 v 向左运动的另一个带负电的线。这样，总的向右的电流为

$$I=2\lambda v \tag{12.75}$$

同时，一个距离电荷线为 s，带电荷量为 q 的点电荷以速度 $u<v$ 向右运动(见图 12.34a)。因为在电荷线中正负电荷抵消，在这个参考系(S)中对点电荷没有静电力。

然而，让我们在 $\bar{S}$ 系中来讨论这个问题，该参考系以速度 u 向右运动(见图 12.34b)。在这个参考系中点电荷 q 静止。由爱因斯坦速度叠加公式，正电荷线和负电荷线的速度是

$$v_\pm=\frac{v\mp u}{1\mp vu/c^2} \tag{12.76}$$

因为 v_- 比 v_+ 大，负电荷间的空间收缩比正电荷间的大，所以在这个参考系中线携带有净的负电荷！事实上，

㊀ 部分讨论从 E. M. Purcell 的 Electricity and Magnetism, 2d ed. (New York: McGraw-Hill, 1985) 改编而来。

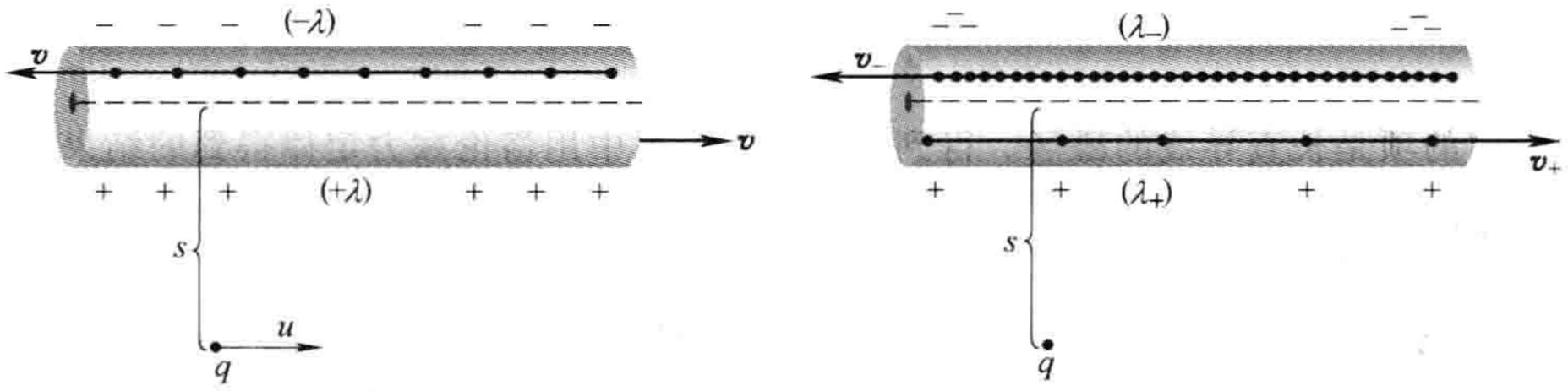


图　12.34

$$\lambda_{\pm} = \pm(\gamma_{\pm})\lambda_0 \tag{12.77}$$

式中

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\pm}^2/c^2}} \tag{12.78}$$

λ_0 是在静止参考系中的正电荷线密度。这当然不同于 λ——在 S 系中它们以速度 v 运动，故

$$\lambda = \gamma\lambda_0 \tag{12.79}$$

式中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{12.80}$$

通过运算 $\gamma_{\pm}$ 可取下面简单形式

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(v \mp u)^2(1 \mp vu/c^2)^{-2}}} = \frac{c^2 \mp vu}{\sqrt{(c^2 \mp vu)^2 - c^2(v \mp u)^2}}$$

$$= \frac{c^2 \mp vu}{\sqrt{(c^2 - v^2)(c^2 - u^2)}} = \gamma\frac{1 \mp vu/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{12.81}$$

显然，在 $\bar{S}$ 系中线的净电荷密度是

$$\lambda_{\text{总}} = \lambda_+ + \lambda_- = \lambda_0(\gamma_+ - \gamma_-) = \frac{-2\lambda vu}{c^2\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{12.82}$$

结论：由于正电荷线和负电荷线的洛伦兹收缩不同，导致在一个惯性系中呈电中性的线在另一参考系中带电了。

现在一个线电荷 $\lambda_{\text{总}}$ 产生一个电场

$$E = \frac{\lambda_{\text{总}}}{2\pi\varepsilon_0 s}$$

故在 $\bar{S}$ 系中对 q 有一电场力，

$$\bar{F} = qE = -\frac{\lambda v}{\pi\varepsilon_0 c^2 s}\frac{qu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{12.83}$$

但如果在 $\bar{S}$ 系中对 q 有一个力，则在 S 系中必定也有一个力。事实上我们可以通过力的变换定理来计算它。因为 q 在参考系 $\bar{S}$ 中静止，$\bar{F}$ 垂直于 u，在 $\bar{S}$ 系中的力由式(12.68)给出：

$$F = \sqrt{1 - u^2/c^2}\,\bar{F} = -\frac{\lambda v}{\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{qu}{s} \tag{12.84}$$

在 $\bar{S}$ 系中，电荷对线的吸引是纯粹的静电力(这里线是带电的，点电荷 q 静止)，但在 S 系中不是静电力(这里线是中性的)。把它们结合起来，静电力学和相对论暗示着存在另一个力。这“另一个力”当然就是磁力。事实上，我们利用 $c^2 = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1}$ 及把 λv 用电流表示(式(12.75))，可以把式(12.84)变成更熟悉的形式：

$$F = -qu\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\right) \tag{12.85}$$

式中,括号中的项是长直导线的磁场。得到的力与在 S 系中用洛伦兹力定律得到的结果完全一样。

12.3.2 场如何变换

在各种特别情形中，我们知道一个观察者看到的是电场，对另一个观察者则是磁场。知道普遍的电磁场变换规律将是有益的：在 S 系中的场，在 $\bar{S}$ 系中是什么？你最初的猜测也许认为 E 是一个 4-矢量的空间部分，$\boldsymbol{B}$ 是另一个的空间部分。如果这样，你的直觉就错了——实际比这要复杂。让我们明确一个假定，这个假定在 12.3.1 小节作为暗含的假定已经用过：电荷是不变量。像质量那样，但与能量不一样，粒子的电荷是一个固定数值，不依赖于它运动多快。我们也将假定不论场是怎样产生的，变换规律都相同——变化的磁场产生的电场与静止电荷产生的电场变换规律相同。这并不是意味着我们需要完全抛弃场公式，因为场论的实质是，在给定点场告知你那一个点电磁场的所有信息。你不必附加额外的它的源的信息。

据此，考虑可能最简单的电场：一个大的平行板电容器两板间的均匀电场（见图 12.35a）。设电容器在 S_0 中静止，电荷面密度是 $\pm\sigma_0$，则

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{y}} \tag{12.86}$$

但该电容器在以 v_0 的速度向右运动的参考系 S 中的情形如何（见图 12.35b）？在这个参考系中电容器板向左运动，但电场仍然取下面的形式

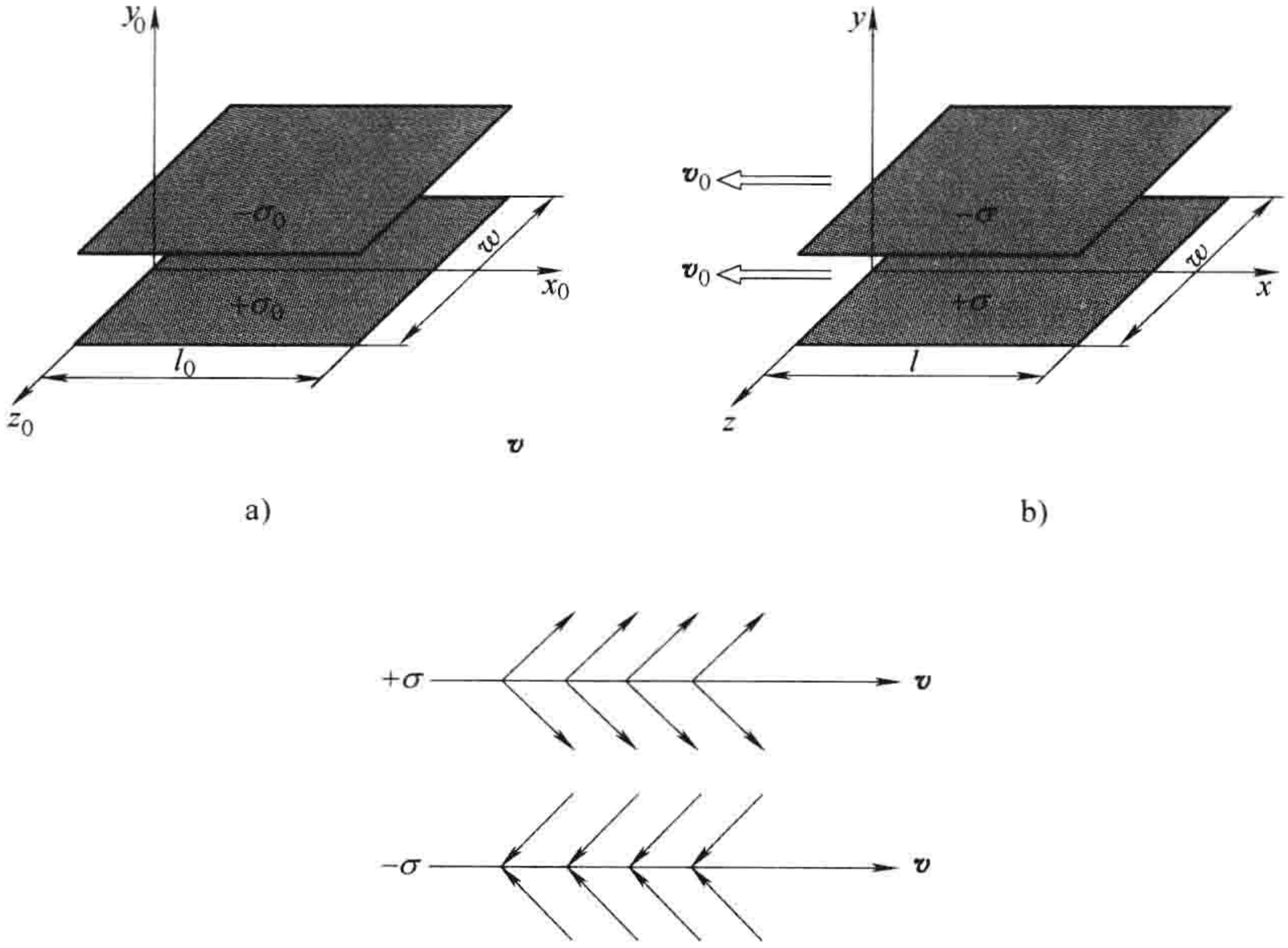


图 12.35

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{y}} \tag{12.87}$$

唯一的不同是电荷面密度 σ。[等一等！这是仅有的不同吗？平行板电容器公式 $\boldsymbol{E} = \sigma/\varepsilon_0$ 来自高斯定理。尽管对于运动电荷高斯定理是有效的，此处的应用也依赖于对称性，但我们确信电场依然垂直于板吗？如果电场倾斜，比如说向运动方向倾斜（见图 12.35c），倾斜多少？即使倾斜

（实际上它不倾斜），平行板间的电场，因其是由 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 面电荷的电场叠加而产生，还是会垂直于板面的。因为 $-\sigma$ 电场的方向如图 12.35c 所示（电荷符号变化使电场的方向反转），取矢量和，则平行方向分量抵消。]

现在在每个板上的总电荷不变，宽度(w)不变，但长度(l)因洛伦兹收缩变小，因子为

$$\frac{1}{\gamma_0} = \sqrt{1 - v_0^2/c^2} \tag{12.88}$$

故单位面积电荷增加了因子

$$\sigma = \gamma_0 \sigma_0 \tag{12.89}$$

结果有

$$\boldsymbol{E}^{\perp} = \gamma_0 \boldsymbol{E}_0^{\perp} \tag{12.90}$$

标记上标符号 $\perp$ 是为了清楚说明这个规则只对 $\boldsymbol{E}$ 垂直于 S 系运动方向的分量起作用。为了得到平行分量的情况，考虑电容器平行板平行于 yz 面排列(见图 12.36)。在这种情况下，平板间距(d)将发生洛伦兹收缩，l 和 w(所以也即电荷面密度 σ)在两参考系中是不变的。因为电场不依赖于距离 d，有

$$E^{\parallel} = E_0^{\parallel} \tag{12.91}$$

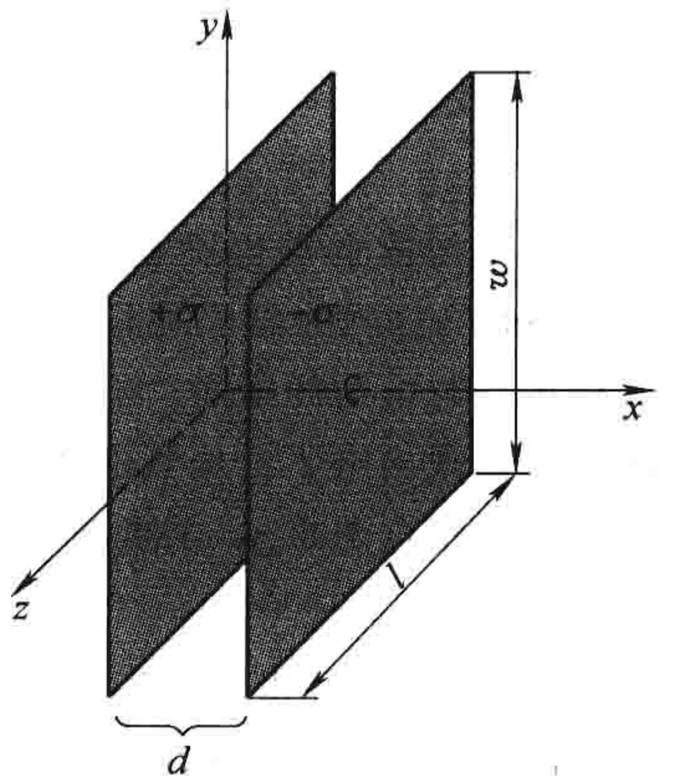


图　12.36

例题 12.13

匀速运动点电荷的电场。一个电荷量为 q 的点电荷静止于参考系 S_0 中的坐标原点。问题：这个电荷的电场在 S 系中情形如何？S 系以速度 v_0 相对于 S_0 系向右运动。

解： 在 S_0 系中，电场为

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_0^2} \hat{\boldsymbol{r}}_0$$

或

$$\begin{cases} E_{x0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_{y0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{qy_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_{z0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{qz_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \end{cases}$$

由变换规则(式(12.90)和式(12.91))，我们有

$$\begin{cases} E_x = E_{x0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_y = \gamma_0 E_{y0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\gamma_0 qy_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_z = \gamma_0 E_{z0} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\gamma_0 qz_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \end{cases}$$

式中，场点(P)是用 S_0 系中的坐标(x_0，y_0，z_0)表示的，用 S 系中的 P 点坐标表示更好。由洛伦兹变换(或，实际上是逆变换)，

$$\begin{cases} x_0 = \gamma_0 (x + v_0 t) = \gamma_0 R_x \\ y_0 = y = R_y \\ z_0 = z = R_z \end{cases}$$

式中，$\boldsymbol{R}$ 是从 q 到 P 的矢量(见图 12.37)。故

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma_0 q\boldsymbol{R}}{(\gamma_0^2 R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(1-v_0^2/c^2)}{[1-(v_0^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\frac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2} \tag{12.92}$$

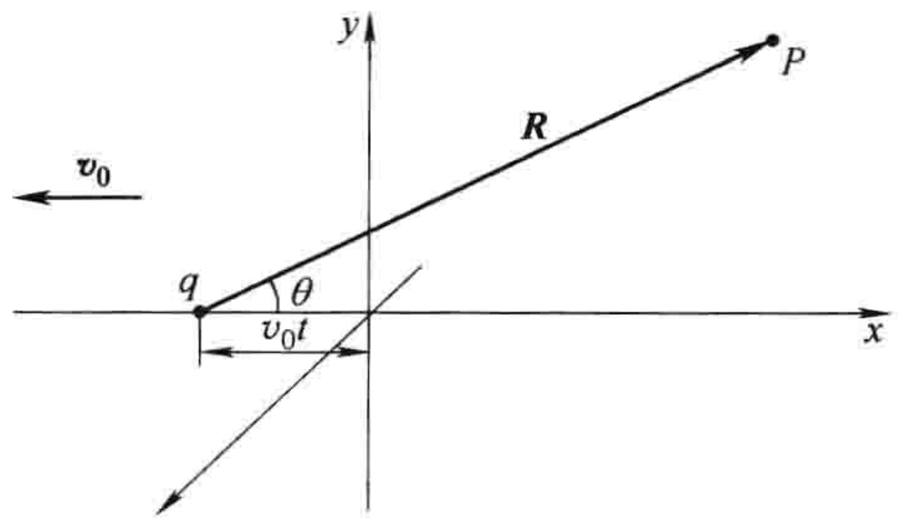


图 12.37

这就是匀速运动电荷的电场，与第 10 章中用推迟势(式(10.68))得到的结果相同。这个推导远比以前的更清晰，使场点与电荷的瞬时(与推迟位置相反)位置远离的事实清楚地显现出来了：从洛伦兹的坐标变换得出 E_x 附带一个因子 γ_0，E_y 和 E_z 通过场的变换得到它们的形式。正是由于这两个 γ_0 才使 $\boldsymbol{E}$ 平行于 $\boldsymbol{R}$。

但式(12.90)和式(12.91)不是变换规则最一般的形式，因为我们是由电荷静止的 S_0 系开始的，相应地，在这个参考系中当然没有磁性。为了推导出一般的规则，在参考系中电场和磁场均需存在。对此目的，考虑 S 系很合适。除了电场

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{12.93}$$

由于有表面电流(见图 12.35b)，

$$\boldsymbol{K}_{\pm} = \mp\sigma v_0\hat{\boldsymbol{x}} \tag{12.94}$$

因此还有磁场(见图 12.35b)。根据右手定则，磁场方向沿负 z 方向，大小由安培定理给出，

$$B_z = -\mu_0\sigma v_0 \tag{12.95}$$

在第三个参考系 $\bar{S}$ 中——该参考系相对 S 系向右以速度 v 运动(见图 12.38)，场是

$$\bar{E}_y = \frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon_0},\quad \bar{B}_z = -\mu_0\bar{\sigma}\,\bar{v} \tag{12.96}$$

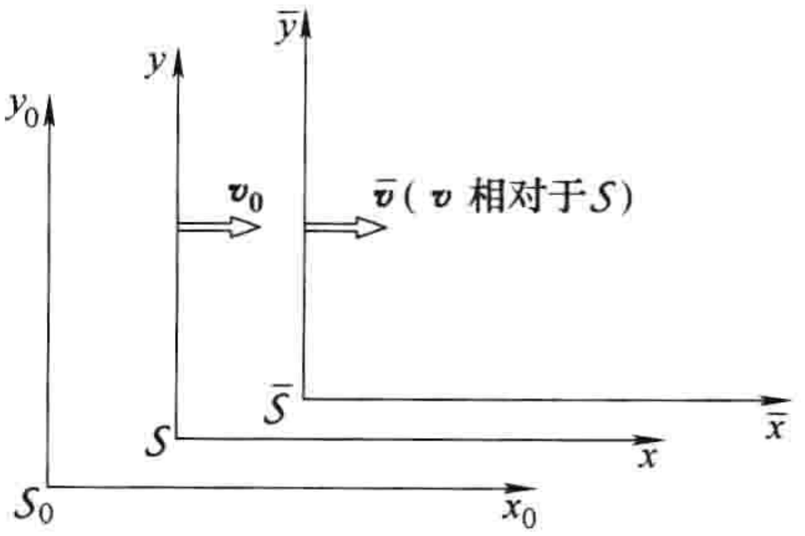


图 12.38

式中，$\bar{v}$ 是 $\bar{S}$ 相对于 S_0 的速度：

$$\bar{v} = \frac{v+v_0}{1+vv_0/c^2},\quad \bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{v}^2/c^2}} \tag{12.97}$$

而

$$\bar{\sigma} = \bar{\gamma}\sigma_0 \tag{12.98}$$

剩下的只是用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$(式(12.93)和式(12.95))表示 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{B}}$(式(12.96))。观察式(12.89)和式(12.98)，我们有

$$\bar{E}_y = \left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0}\right)\frac{\sigma}{\varepsilon_0},\quad \bar{B}_z = -\left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0}\right)\mu_0\sigma\,\bar{v} \tag{12.99}$$

通过简单的代数运算，得到

$$\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}{\sqrt{1-\bar{v}^2/c^2}} = \frac{1+vv_0/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma\left(1+\frac{vv_0}{c^2}\right) \tag{12.100}$$

式中，与通常一样

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{12.101}$$

所以，

$$\overline{E}_y = \gamma\left(1 + \frac{vv_0}{c^2}\right)\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma\left(E_y - \frac{v}{c^2\mu_0\varepsilon_0}B_z\right)$$

而

$$\overline{B}_z = -\gamma\left(1 + \frac{vv_0}{c^2}\right)\mu_0\sigma\left(\frac{v + v_0}{1 + vv_0/c^2}\right) = \gamma(B_z - \mu_0\varepsilon_0 vE_y)$$

或者，因为 $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$，

$$\left.\begin{aligned}\overline{E}_y &= \gamma(E_y - vB_z)\\ \overline{B}_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\end{aligned}\right\} \tag{12.102}$$

这给出了 E_y 和 B_z 的变换——对于 E_z 和 B_y，只要把平行板电容器从平行于 xz 平面变成平行于 xy 平面即可(见图 12.39)。在 S 系中场为

$$E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},\quad B_y = \mu_0\sigma v_0$$

(利用右手定则得出 B_y 的符号。)其余的讨论都是相同的——以前是 E_y 的地方，变成 E_z，以前是 B_z 的地方变成 $-B_y$：

$$\left.\begin{aligned}\overline{E}_z &= \gamma(E_z + vB_y)\\ \overline{B}_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)\end{aligned}\right\} \tag{12.103}$$

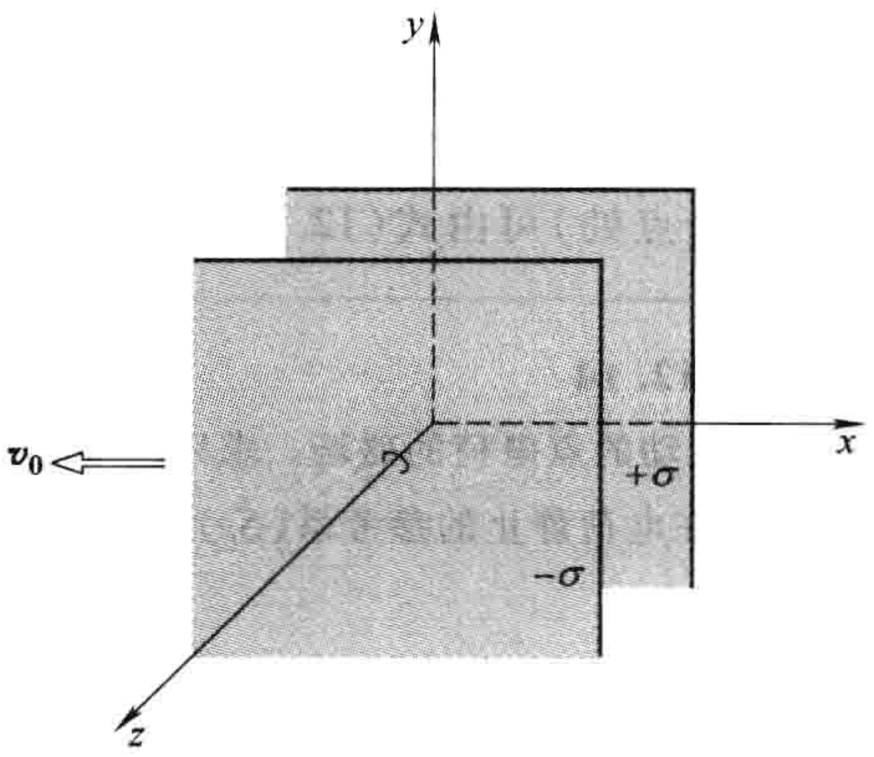


图　12.39

对于 x 分量，我们已经看到(通过使电容器的方向平行于 yz 面)

$$\overline{E}_x = E_x \tag{12.104}$$

因为在这个例子中没有伴随的磁场，不能推出 B_x 的变换规则。但另一个例子可解决这个问题：设想一个平行于 x 轴的长直螺线管(见图 12.40)，在 S 系中静止。在螺线管内的磁场是

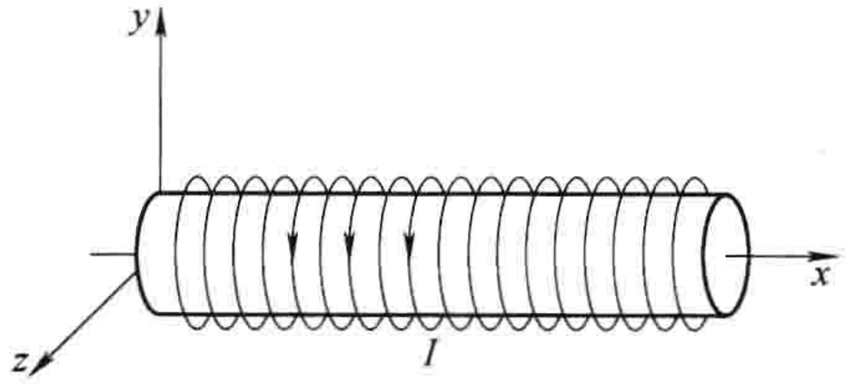


图　12.40

$$B_x = \mu_0 nI \tag{12.105}$$

式中，n 是单位长度上的匝数；I 是电流。在 $\overline{S}$ 系中，长度收缩，故 n 增大，

$$\overline{n} = \gamma n \tag{12.106}$$

另一方面，时间变慢：S 系的钟沿着螺线管运动，它会变慢。故在 $\overline{S}$ 系中，电流(单位时间内流过的电荷)是

$$\overline{I} = \frac{1}{\gamma}I \tag{12.107}$$

两个 γ 消去，得到

$$\overline{B}_x = B_x$$

与 $\boldsymbol{E}$ 相同，$\boldsymbol{B}$ 平行于运动方向的分量保持不变。

现在把所有的变换规则写在一起：

$$\boxed{\begin{aligned}&\overline{E}_x = E_x,\ \overline{E}_y = \gamma(E_y - vB_z),\ \overline{E}_z = \gamma(E_z + vB_y)\\ &\overline{B}_x = B_x,\ \overline{B}_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right),\ \overline{B}_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\end{aligned}} \tag{12.108}$$

两种特殊的情况要特别注意：

1. 假如在 S 系中 $\boldsymbol{B}=0$，则

$$\overline{\boldsymbol{B}}=\gamma\frac{v}{c^2}(E_z\hat{\boldsymbol{y}}-E_y\hat{\boldsymbol{z}})=\frac{v}{c^2}(\overline{E}_z\hat{\boldsymbol{y}}-\overline{E}_y\hat{\boldsymbol{z}})$$

或，因为 $\boldsymbol{v}=v\hat{\boldsymbol{x}}$

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{B}}=-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\times\overline{\boldsymbol{E}})} \tag{12.109}$$

2. 假如在 S 系中 $\boldsymbol{E}=0$，那么

$$\overline{\boldsymbol{E}}=-\gamma v(B_z\hat{\boldsymbol{y}}-B_y\hat{\boldsymbol{z}})=-v(\overline{B}_z\hat{\boldsymbol{y}}-\overline{B}_y\hat{\boldsymbol{z}})$$

或

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{v}\times\overline{\boldsymbol{B}}} \tag{12.110}$$

换句话说，如果在一个参考系中 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 中任一个为零(在一特殊点)，那么在任何其他参考系中场(在那个点处)可由式(12.109)或式(12.110)简单联系起来。

例题 12.14

匀速运动的点电荷的磁场。求以速度 $\boldsymbol{v}$ 匀速运动的电荷 q 的磁场。

解：在电荷静止的参考系(S_0)中，磁场为零(任何地方)，故在以速度 v 向右运动的 S 系中，

$$\boldsymbol{B}=-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})$$

在例题 12.13 中，我们计算了电场，这样磁场为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv(1-v^2/c^2)\sin\theta}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{R^2} \tag{12.111}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 为当你面对运动过来的电荷时的逆时针方向。顺便提及，在非相对论情形($v^2\ll c^2$)，式(12.111)简化为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}q\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{R}}{R^2}$$

这与对点电荷应用毕奥-萨伐尔定律得到的结果完全相同。

习题 12.41 为何图 12.35b 中的电场没有 z 分量？毕竟磁场有 z 分量。

习题 12.42 一个平行板电容器在 S_0 系中静止，板面与 x_0 轴成 45°角，两板的电荷面密度是 $\pm\sigma_0$(见图 12.41)。参考系 S 相对于 S_0 以速度 v 向右运动。

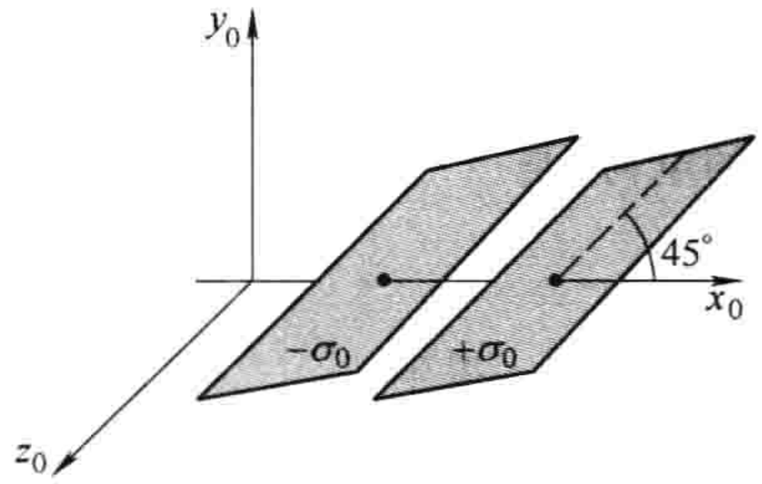


图 12.41

(a)求在 S_0 系中的场 $\boldsymbol{E}_0$。

(b)求在 S 系中的场 $\boldsymbol{E}$。

(c)板面与 x 轴的夹角是多少？

(d)在 S 系中场垂直于板面吗？

习题 12.43

(a)通过对以点电荷为球心、半径为 R 的球的积分，验证匀速运动的点电荷的场符合高斯定理

$$\oint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=(1/\varepsilon_0)Q_{\mathrm{enc}}$$

(b)求匀速运动的点电荷的坡印廷矢量。(例如设电荷以速度 v 沿 z 方向运动，计算 q 通过原点时的 $\boldsymbol{S}$。)

习题 12.44

(a)电荷 q_A 在 S 系中静止在原点；电荷 q_B 以速度 v 沿着平行于 x 轴的直线运动，直线距 x 轴距离为 $y=d$。求当 q_B 经过 y 轴时它受到的电磁力是多大？

(b)现在从 $\bar{S}$ 系考虑同样的问题。$\bar{S}$ 系以速度 v 向右运动。当 q_A 经过 $\hat{y}$ 轴时，作用在 q_B 上的力是多大？[用两种方法求解：(i)用(a)求出结果，通过力的变换求解；(ii)在 $\bar{S}$ 中计算场，用洛伦兹力公式求解。]

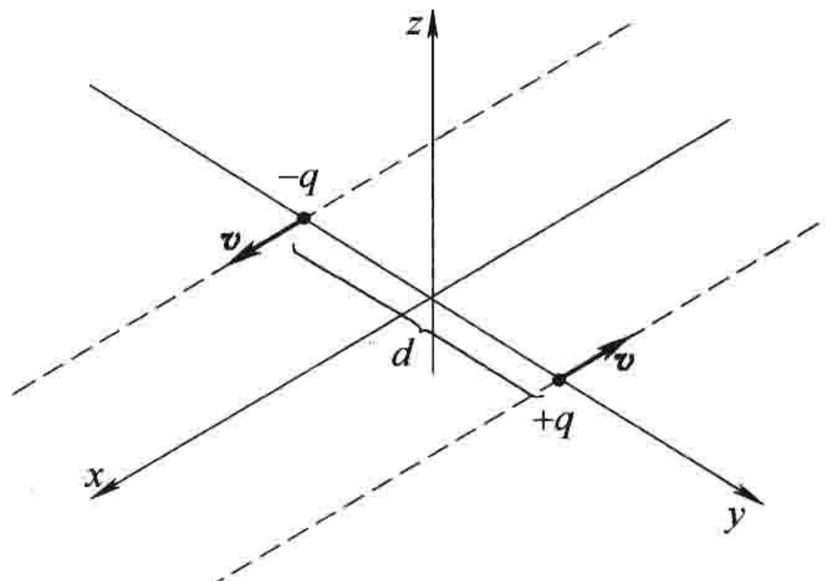


图　12.42

习题 12.45　两电荷 $\pm q$，以速度 v 反方向运动，相距为 d。我们对它们交汇瞬间(见图 12.42) $-q$ 对 $+q$ 的作用力感兴趣。填充下面表格，并检验它们的一致性。

	系统 A (见图 12.42)	系统 B ($+q$ 静止)	系统 C ($-q$ 静止)
$-q$ 在 $+q$ 处的 $\boldsymbol{E}$			
$-q$ 在 $+q$ 处的 $\boldsymbol{B}$			
$-q$ 施加在 $+q$ 上的 $\boldsymbol{F}$			

习题 12.46

(a)证明($\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$)是相对论不变量。

(b)证明($E^2-c^2B^2$)是相对论不变量。

(c)假设在一个惯性系中，$\boldsymbol{B}=0$，但 $\boldsymbol{E}\neq 0$(在某点 P)。有无可能找到另一个参考系，在这个系中 P 点电场为零？

习题 12.47　角频率为 ω 的平面电磁波沿 x 轴方向在真空中传播。它的偏振方向沿 y 轴，电场振幅为 E_0。

(a)写出电场 $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$和磁场 $\boldsymbol{B}(x, y, z, t)$。[对你引入的任何辅助量都要以 ω，E_0 和自然常数进行定义。]

(b)在相对于 S 系以速度 v 沿 x 轴运动的惯性系 $\bar{S}$ 中，观察同样的波，求在 $\bar{S}$ 系中的电场和磁场，并用 $\bar{S}$ 系中的坐标表示它们：$\boldsymbol{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$，$\bar{\boldsymbol{B}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$[同样要定义你引入的任何辅助量]。

(c)在 $\bar{S}$ 系中的波的角频率 $\bar{\omega}$ 是多少？解释这个结果。在 $\bar{S}$ 系中的波的波长 $\bar{\lambda}$ 是多少？由 $\bar{\omega}$ 和 $\bar{\lambda}$ 求 $\bar{S}$ 系中波的速度。结果与你的预期一样吗？

(d) $\bar{S}$ 系中的波强度与 $\bar{S}$ 系的波强度的比值是多少？年轻的爱因斯坦对这样的事情感到好奇：当你能以光速在电磁波旁边奔跑时，电磁波看上去像什么。你能告诉他，当 v 接近 c 时，波的振幅、频率和强度吗？

12.3.3　场张量

如式(12.108)所指出的，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 显然不是两个 4-矢量空间部分的变换——事实上当你从一个惯性系变换到另一个惯性系时 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的分量是联系在一起的。这种根据式(12.108)的变换，有 6 个分量的家伙属于哪一类？答案：它是一个**反对称的二阶张量**。

如前所述，一个 4-矢量遵循变换规则

$$\bar{a}^{\mu}=\Lambda^{\mu}_{\nu}a^{\nu} \tag{12.112}$$

(隐含对 ν 指标的求和)，式中，$\boldsymbol{\Lambda}$ 是洛伦兹变换矩阵。如果 $\bar{S}$ 以速度 v 沿 x 轴运动，$\boldsymbol{\Lambda}$ 有下面的形式

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{12.113}$$

Λ^{μ}_{ν} 是行指标为 μ、列指标为 ν 的矩阵元。一个(二阶)张量具有两个指数，它用两个 $\boldsymbol{\Lambda}$ 来进行变换(每一个对应一个指数)：

$$\bar{t}^{\mu\nu}=\Lambda^{\mu}_{\lambda}\Lambda^{\nu}_{\sigma}t^{\lambda\sigma} \tag{12.114}$$

一个张量(对 4 维情况)有 $4\times4=16$ 个分量，它们可以用一个 4×4 的阵列表示：

$$\boldsymbol{t}^{\mu\nu}=\begin{Bmatrix}t^{00} & t^{01} & t^{02} & t^{03}\\ t^{10} & t^{11} & t^{12} & t^{13}\\ t^{20} & t^{21} & t^{22} & t^{23}\\ t^{30} & t^{31} & t^{32} & t^{33}\end{Bmatrix}$$

但这 16 个元素不必都不同。例如，一个对称张量有性质

$$\boldsymbol{t}^{\mu\nu}=\boldsymbol{t}^{\nu\mu}(\textbf{对称张量}) \tag{12.115}$$

在这种情况下有 10 个不同的分量，16 中有 6 个重复出现($t^{01}=t^{10}$，$t^{02}=t^{20}$，$t^{03}=t^{30}$，$t^{12}=t^{21}$，$t^{13}=t^{31}$，$t^{23}=t^{32}$)。类似的，反对称张量遵从

$$\boldsymbol{t}^{\mu\nu}=-\boldsymbol{t}^{\nu\mu}(\textbf{反对称张量}) \tag{12.116}$$

这样的张量仅有 6 个不同的元素——原来的 16 个元素中，6 个重复(和前面的一样，仅差一个符号)，4 个为零(t^{00}，t^{11}，t^{22}和 t^{33})。故一般的反对称张量的形式是

$$\boldsymbol{t}^{\mu\nu}=\begin{Bmatrix}0 & t^{01} & t^{02} & t^{03}\\ -t^{01} & 0 & t^{12} & t^{13}\\ -t^{02} & -t^{12} & 0 & t^{23}\\ -t^{03} & -t^{13} & -t^{23} & 0\end{Bmatrix}$$

让我们来看对于一个有 6 个不同元素的反对称张量，变换规则式(12.114)是如何进行的。从 $\bar{t}^{01}$ 开始，我们有

$$\bar{t}^{01}=\Lambda^{0}_{\lambda}\Lambda^{1}_{\sigma}t^{\lambda\sigma}$$

但根据式(12.113)，$\Lambda^{0}_{\lambda}=0$ 除非 $\lambda=0$ 或 1；$\Lambda^{1}_{\sigma}=0$ 除非 $\sigma=0$ 或 1。故在求和中仅有 4 项：

$$\bar{t}^{01}=\Lambda^{0}_{0}\Lambda^{1}_{0}t^{00}+\Lambda^{0}_{0}\Lambda^{1}_{1}t^{01}+\Lambda^{0}_{1}\Lambda^{1}_{0}t^{10}+\Lambda^{0}_{1}\Lambda^{1}_{1}t^{11}$$

另一方面，$t^{00}=t^{11}=0$，而 $t^{01}=-t^{10}$，所以

$$\bar{t}^{01}=(\Lambda^{0}_{0}\Lambda^{1}_{1}-\Lambda^{0}_{1}\Lambda^{1}_{0})t^{01}=(\gamma^{2}-(\gamma\beta)^{2})t^{01}=t^{01}$$

我要求你求出其他的——全部的变换规则是

$$\left.\begin{aligned}&\bar{t}^{01}=t^{01},\quad \bar{t}^{02}=\gamma(t^{02}-\beta t^{12}),\quad \bar{t}^{03}=\gamma(t^{03}+\beta t^{31})\\ &\bar{t}^{23}=t^{23},\quad \bar{t}^{31}=\gamma(t^{31}+\beta t^{03}),\quad \bar{t}^{12}=\gamma(t^{12}-\beta t^{02})\end{aligned}\right\} \tag{12.117}$$

这正是我们从物理基础上推导出的电磁场式(式(12.108))的变换规则——事实上，通过直接对比，我们能构造场张量 $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$：[⊖]

$$F^{01}\equiv\frac{E_x}{c},\quad F^{02}\equiv\frac{E_y}{c},\quad F^{03}\equiv\frac{E_z}{c},\quad F^{12}\equiv B_z,\quad F^{31}\equiv B_y,\quad F^{23}\equiv B_x$$

写成阵列的形式，

⊖ 一些作者偏向于用 $F^{01}\equiv E_x$，$F^{12}\equiv cB_z$ 等等，有的符号相反。所以，从现在开始大多数的方程在不同教科书上看上去有些小的区别。

$$\boldsymbol{F}^{\mu\nu}=\begin{Bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{Bmatrix} \tag{12.118}$$

这样我们完成了始于奥斯特的工作，把电场和磁场写进了同一个量，$\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$。

如果你细致敏锐，你也许会注意到把 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 纳入一个反对称张量中的方式是不同的：如果不是比较式(12.108)的第一行与式(12.117)的第一行，及它们间的第二行，而是比较式(12.108)的第一行与式(12.117)的第二行，且第二行与第一行比较。便可导出**对偶张量**，$\boldsymbol{G}^{\mu\nu}$：

$$\boldsymbol{G}^{\mu\nu}=\begin{Bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{Bmatrix} \tag{12.119}$$

$\boldsymbol{G}^{\mu\nu}$可直接由 $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$通过替换 $\boldsymbol{E}/c\rightarrow\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\rightarrow -\boldsymbol{E}/c$ 得到。注意，这种操作使式(12.108)没有变化——这就是为何两个张量都可生成对 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 正确的变换规则。

习题 12.48　求出式(12.117)其余的 5 个部分。

习题 12.49　证明通过洛伦兹变换后一个张量的对称性(或反对称性)仍被保持(即：如果 $\boldsymbol{t}^{\mu\nu}$是对称的，证明 $\bar{\boldsymbol{t}}^{\mu\nu}$也是对称的。反对称也是这样)。

习题 12.50　前面讲过一个**协变** 4-矢量可由改变一个逆变量的第零分量的符号得到。对张量同样如此：当“降低一个指数”产生协变量时，如果指数是零，则改变符号。以 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 计算张量不变量

$$\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\boldsymbol{F}_{\mu\nu},\ \boldsymbol{G}^{\mu\nu}\boldsymbol{G}_{\mu\nu}\text{和}\ \boldsymbol{F}^{\mu\nu}\boldsymbol{G}_{\mu\nu}$$

并与习题 12.46 比较。

习题 12.51　一个沿 z 轴的长直线，电荷线密度为 λ，以速度 v 沿 $+z$ 方向运动。构造在点 $(x, 0, 0)$ 处的场张量和对偶张量。

12.3.4　张量形式的电动力学

既然我们知道了如何用相对论形式表示场，现在就用这种语言来重新写出电动力学的定律(麦克斯韦方程和洛伦兹力公式)。作为开始，我们必须确定场源，ρ 和 $\boldsymbol{J}$，是如何变换的。想象一朵电荷云飘浮过来，我们研究其中一无限小体积 V，它带电荷为 Q，运动速度为 $\boldsymbol{u}$(见图 12.43)。电荷密度是

$$\rho=\frac{Q}{V}$$

电流密度是[⊖]

$$\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{u}$$

我想用**固有电荷密度** ρ_0 表示这些量，这里固有电荷密度是静止系中的电荷的密度：

$$\rho_0=\frac{Q}{V_0}$$

式中，V_0 为静止体积。因为一个维度(运动方向)上是洛伦兹收缩的，

$$V=\sqrt{1-u^2/c^2}\,V_0 \tag{12.120}$$

⊖ 假设在 V 中的电荷是同种电荷，速度相同。如果不同，你必须分开处理 $\boldsymbol{J}=\rho_+\boldsymbol{u}_-+\rho_+\boldsymbol{u}_-$。但问题的讨论是一样的。

所以

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \boldsymbol{J} = \rho_0 \frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{12.121}$$

与式(12.40)和式(12.42)比较可看出，这是固有速度的分量乘以不变量 ρ_0。很显然，电荷密度和电流密度可写成一个 4-矢量：

$$J^\mu = \rho_0 \eta^\mu \tag{12.122}$$

它的分量是

$$\boxed{J^\mu = (c\rho,\ J_x,\ J_y,\ J_z)} \tag{12.123}$$

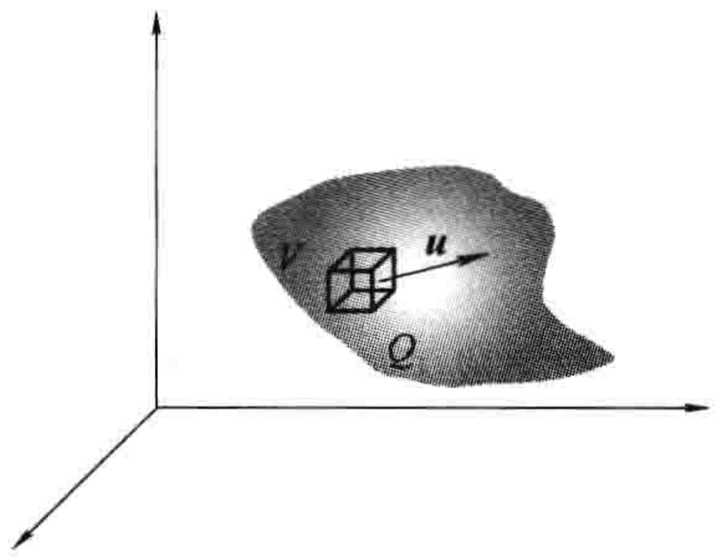


图 12.43

我们称它为**电流密度 4-矢量**。

连续性方程(式(5.29))，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

表示了局域电荷守恒，用 J^μ 可以写成更紧凑的形式，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial J^i}{\partial x^i}$$

而

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial J^0}{\partial t} = \frac{\partial J^0}{\partial x^0} \tag{12.124}$$

把 $\partial\rho/\partial t$ 代入左边，有

$$\boxed{\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0} \tag{12.125}$$

式中暗含着对 μ 的求和。$\partial J^\mu/\partial x^\mu$ 是 J^μ 的四维散度，所以电流连续性方程指出电流密度 4-矢量散度为零。

对于麦克斯韦方程，它们可写成

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad \frac{\partial \boldsymbol{G}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0} \tag{12.126}$$

式中隐含着对 ν 的求和。每一个表示四个方程——每一个 μ 有一个方程。如果 $\mu = 0$，则第一个方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} \\ &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \frac{1}{c}(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) \\ &= \mu_0 J^0 = \mu_0 c\rho \end{aligned}$$

或者

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

当然这是高斯定理。如果 $\mu = 1$，我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{B}\right)_x \end{aligned}$$

$$= \mu_0 J^1 = \mu_0 J_x$$

把这个结果和 $\mu=2$ 及 $\mu=3$ 的结果组合在一起，有

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

这是麦克斯韦修正后的安培定理。

式(12.126)中的第二个方程，对于 $\mu=0$，有

$$\frac{\partial G^{0\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial G^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial G^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial G^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial G^{03}}{\partial x^3}$$

$$= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

(这是第三个麦克斯韦方程)，对于 $\mu=1$，

$$\frac{\partial G^{1\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial G^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial G^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial G^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial G^{13}}{\partial x^3}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{E}\right)_x = 0$$

把这个结果和 $\mu=2$ 及 $\mu=3$ 的结果组合在一起，有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

这就是法拉第定律。以相对论的形式，麦克斯韦的四个比较复杂的方程化简为两个优美、简单的方程。

利用 $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ 和固有速度 η^μ，作用在电荷 q 上的闵可夫斯基力为

$$\boxed{K^\mu = q\eta_\nu \boldsymbol{F}^{\mu\nu}} \tag{12.127}$$

如果 $\mu=1$，有

$$K^1 = q\eta_\nu F^{1\nu} = q(-\eta^0 F^{10} + \eta^1 F^{11} + \eta^2 F^{12} + \eta^3 F^{13})$$

$$= q\left[\frac{-c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left(\frac{-E_x}{c}\right) + \frac{u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}(B_z) + \frac{u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}(-B_y)\right]$$

$$= \frac{q}{\sqrt{1-u^2/c^2}}[\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B})]_x$$

对 $\mu=2$ 和 $\mu=3$ 有类似的形式，所以有

$$\boldsymbol{K} = \frac{q}{\sqrt{1-u^2/c^2}}[\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B})] \tag{12.128}$$

参见前面的洛伦兹力公式式(12.70)

$$\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B})]$$

因此，式(12.127)表示洛伦兹力公式的相对论形式。我把解释第零分量的问题留给你们自己(习题 12.54)。

习题 12.52　从麦克斯韦方程直接推导出连续性方程(式 12.125))。

习题 12.53　证明式(12.126)中的第二个方程可用 $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ 表示为

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0。 \tag{12.129}$$

习题 12.54　求出并解释电磁力式(12.127)的 $\mu=0$ 分量。

12.3.5 相对论势

由第 10 章我们知道,电磁场可用一个标势 V 和一个矢势 $\boldsymbol{A}$ 表示:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{12.130}$$

你或许推测 V 和 $\boldsymbol{A}$ 可以一起构成一个 4-矢量:

$$\boxed{A^{\mu} = (V/c, A_x, A_y, A_z)} \tag{12.131}$$

利用这个 4-矢量势,场张量可写成

$$\boxed{\boldsymbol{F}^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}} \tag{12.132}$$

(注意,微分是对协变量 x_{μ} 和 x_{ν} 进行的,记住第零分量改变符号:$x_0 = -x^0$。参看习题 12.55。)

为了检验式(12.132)与式(12.130)等价,我们来明确地求几项。对于 $\mu = 0, \nu = 1$,

$$F^{01} = \frac{\partial A^1}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial (ct)} - \frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla V\right)_x = \frac{E_x}{c}$$

这(和它的 $\nu = 2$ 及 $\nu = 3$)是式(12.130)中的第一个方程。对于 $\mu = 1, \nu = 2$,有

$$F^{12} = \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\nabla \times \boldsymbol{A})_z = B_z$$

它(与 F^{13} 和 F^{23} 对应的结果一起)是式(12.130)中的第二个方程。

势形式的公式可自动得到齐次麦克斯韦方程($\partial G^{\mu\nu}/\partial x^{\nu} = 0$)。对于非齐次方程($\partial F^{\mu\nu}/\partial x^{\nu} = \mu_0 J^{\mu}$),它变为

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\nu}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) = \mu_0 J^{\mu} \tag{12.133}$$

这是个难以处理的方程。前面讲过,势不能由场唯一确定——事实上,从式(12.132)清楚地看到,可以对 A^{μ} 增加任何标量函数 λ 的梯度

$$A^{\mu} \rightarrow A^{\mu\prime} = A^{\mu} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_{\mu}} \tag{12.134}$$

而不改变 $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$。这就是在第 11 章中提到的**规范不变性**。我们可以研究它以化简式(12.133)。特别地,洛伦兹规范条件(式(10.12))

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$$

在相对论形式中变为

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \tag{12.135}$$

所以在洛伦兹规范中,式(12.133)简化为

$$\boxed{\Box^2 A^{\mu} = -\mu_0 J^{\mu}} \tag{12.136}$$

式中,$\Box^2$ 是**达朗贝尔算子**

$$\Box^2 \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{12.137}$$

结合前面的结果,式(12.136)成为一个 4-矢量方程——它是麦克斯韦方程组最优美(和最简洁)的

表示[⊖]。

习题 12.55　你也许注意到**四维梯度**算子$\partial/\partial x^\mu$与一个协变 4-矢量功能类似——事实上，为了简洁，它常写为∂_μ。例如，连续性方程$\partial_\mu J^\mu = 0$，有两个矢量乘积的不变量的形式。相应的逆变量梯度是$\partial^\mu \equiv \partial x_\mu$。利用递推关系，通过求解变换规则，证明如果$\phi$是一个标量函数，$\partial^\mu \phi$则是一个(逆变量)4-矢量。

习题 12.56　证明势表示式(12.132)自动满足$\partial G^{\mu\nu}/\partial x^\nu = 0$。[建议：利用习题 12.53 的结果。]

第 12 章补充习题

习题 **12.57**　惯性系$\bar{S}$相对于另一惯性系 S 以速度$\boldsymbol{v} = \beta c(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}})$运动。它们的坐标轴互相平行，在$t = \bar{t} = 0$时它们的原点重合。求洛伦兹变换矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$(式(12.25))。

$$\left[\text{答案：}\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta\cos\phi & -\gamma\beta\sin\phi & 0 \\ -\gamma\beta\cos\phi & (\gamma\cos^2\phi + \sin^2\phi) & (\gamma-1)\sin\phi\cos\phi & 0 \\ -\gamma\beta\sin\phi & (\gamma-1)\sin\phi\cos\phi & (\gamma\sin^2\phi + \cos^2\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

习题 12.58　为使过程$\pi + p \to K + \sum$发生，计算π介子的**临界**(最小的)动量。质子 p 初始时处于静止状态。利用$m_\pi c^2 = 150$，$m_K c^2 = 500$，$m_p c^2 = 900$，$m_\sum c^2 = 1200$(所有的单位均为 MeV)。[提示：为了求临界条件，以碰撞的动量中心为参考系(习题 12.30)。答案：1133 MeV/c]

习题 12.59　质量为 m 的粒子与一个同样的处于静止的粒子发生完全弹性碰撞。在经典力学中两出射粒子的轨迹总是成 90°。在相对论理论中，计算这个角度。在动量中心系中，角度用散射角ϕ和速度 v 表示。[答案：$\arctan(2c^2/v^2\gamma\sin\phi)$]

习题 12.60　求在沿 x 方向恒定的闵可夫斯基力作用下，一个质量为 m，最初静止在原点的粒子运动时其坐标 x 随时间 t 的变化。结果以隐变量的形式表示(t 作为 x 的函数)。[答案：$2Kt/mc = z\sqrt{1+z^2} + \ln(z + \sqrt{1+z^2})$，式中$z \equiv \sqrt{2Kx/mc^2}$]

！ **习题 12.61**　质量为 m 的两个点电荷($\pm q$)组成的电偶极子，固定在(无质量)长为 d 的细杆的两端。(不要假设 d 是小的。)

(a)设电偶极子沿垂直于它的轴的直线作双曲线运动(式(12.62))时，求作用在它上面的净自作用力。[提示：从适当修改式(11.90)开始。]

(b)注意，这种自作用力是恒力(不依赖 t)，并指向运动的方向——正好使其作双曲线运动。所以，电偶极子在没有外力情况下可自身作持续加速运动![⊜][你认为能量从哪来？]确定持续的自作用力 F，以 m、q 和 d 表示。[答案：$(2mc^2/d)\sqrt{(c\mu_0 q^2/8\pi md)^{2/3} - 1}$]

习题 12.62　一个理想的磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$，处在惯性系$\bar{S}$的原点。$\bar{S}$系相对于 S 系以速度 v 沿 x 轴运动。在$\bar{S}$系中矢势为

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\bar{\boldsymbol{m}} \times \hat{\bar{\boldsymbol{r}}}}{\bar{r}^2}$$

(式(5.83))，且标势$\bar{V}$是零。

⊖ 从相对论的观点看，库仑规范不是一个好的规范，因为它的定义条件，$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$，在洛伦兹变换下不成立。为了恢复这个条件，每次进入一个新的惯性系，除了进行洛伦兹变换外还要进行一个适当的规范变换。在这个意义上在库仑规范中 A^μ 不是一个真正的 4-矢量。

⊜ F. H. J. Cornish, Am. J. Phys. 54, 166(1986)。

(a)求在 S 系中的标势 V。[答案:$(1/4\pi\varepsilon_0)(\hat{\boldsymbol{R}}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{m})/c^2R^2)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)/(1-(v^2/c^2)\sin^2\theta)^{3/2}$]

(b)在非相对论极限下,证明在 S 系中的标势是一个位于 $\overline{O}$ 处、电偶极矩为

$$\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{m}}{c^2}$$

的理想电偶极子所产生的标势。

! 习题 12.63 一个静止的磁偶极子,$\boldsymbol{m}=m\hat{\boldsymbol{z}}$,位于一个具有均匀表面电流 $\boldsymbol{K}=K\hat{\boldsymbol{x}}$ 的无限大的平面上方(见图 12.44)。

(a)利用式(6.1)求作用在磁偶极子上的力矩。

(b)假设表面电流是由电荷面密度 σ 以速度 $\boldsymbol{v}=v\hat{\boldsymbol{x}}$ 运动而产生的,所以 $\boldsymbol{K}=\sigma\boldsymbol{v}$,而磁偶极子是由电荷线密度 λ 以速度 v(与前面的 v 大小相同)绕边长为 l 的矩形线圈运动产生的,所以 $m=\lambda v l^2$。设 $\overline{S}$ 系以速度 v 沿 x 轴运动,在 $\overline{S}$ 系中来考虑这个构型。在 $\overline{S}$ 系中表面电荷静止,故它不产生磁场。证明在这个参考系中电流线圈产生了一个电偶极矩,用式(4.4)计算力矩。

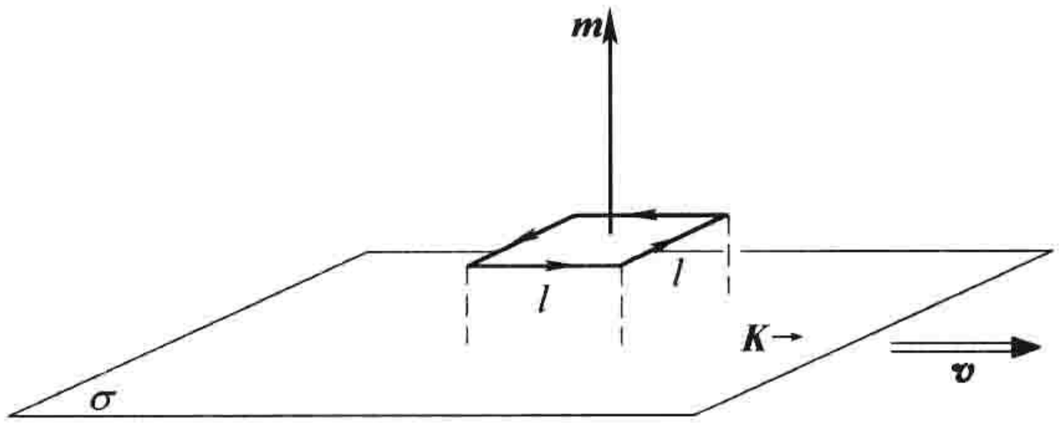


图 12.44

习题 12.64 在某一惯性系 S 中,在某一空间-时间点,电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 既不平行也不垂直。证明在另一相对于 S 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的惯性参考系 $\overline{S}$ 中,$\boldsymbol{v}$ 由下式给出

$$\frac{\boldsymbol{v}}{1+v^2/c^2}=\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2+E^2/c^2}$$

则场 $\overline{\boldsymbol{E}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 在此点相互平行。存在一个使它们相互垂直的参考系吗?

习题 12.65 两个电荷 $\pm q$ 以相反的恒定速度从 x 轴两侧向原点靠近。它们碰撞并粘在一起构成一个中性粒子并静止。简要叙述碰撞前后的电场分布(记住电磁场"信息"以光速传播)。你如何从物理上解释碰撞后的场?[㊀]

习题 12.66 按下面的步骤"推导"洛伦兹力公式:让电荷 q 在 $\overline{S}$ 系中静止,所以 $\overline{\boldsymbol{F}}=q\overline{\boldsymbol{E}}$。让 $\overline{S}$ 系相对于 S 系以速度 $\boldsymbol{v}=v\hat{\boldsymbol{x}}$ 运动。利用变换规则(式(12.68)和式(12.108)),用 $\boldsymbol{F}$ 表示 $\overline{\boldsymbol{F}}$,$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示 $\overline{\boldsymbol{E}}$。由此得出用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示的 $\boldsymbol{F}$。

习题 12.67 在均匀电场 $\boldsymbol{E}=E_0\hat{\boldsymbol{z}}$ 和均匀磁场 $\boldsymbol{B}=B_0\hat{\boldsymbol{x}}$ 中,一个电荷 q 初始时静止于原点。变换到一个 $\boldsymbol{E}=0$ 的参考系,在该系中求出电荷的轨迹,然后变换回原来的参考系,并求出电荷在原来参考系中的运动轨迹。假设 $E_0<cB_0$。比较例题 5.2 和你的结果。

习题 12.68

(a)用 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 构造一个张量 $\boldsymbol{D}^{\mu\nu}$(类似 $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$)。利用它表示有自由电流 J_{f}^{μ} 的物体内的麦克斯韦方程。[答案:$D^{01}\equiv cD_x$,$D^{12}\equiv H_z$,etc.;$\partial\boldsymbol{D}^{\mu\nu}/\partial x^{\nu}=J_{\mathrm{f}}^{\mu}$。]

(b)构造对偶张量 $\boldsymbol{H}^{\mu\nu}$(类似 $\boldsymbol{G}^{\mu\nu}$)。[答案:$H^{01}\equiv H_x$,$H^{12}\equiv -cD_z$,etc。]

(c)闵可夫斯基提出的线性介质的相对论性的基本关系:

$$\boldsymbol{D}^{\mu\nu}\eta_\nu=c^2\varepsilon\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\eta_\nu \quad 和 \quad \boldsymbol{H}^{\mu\nu}\eta_\nu=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu}\eta_\nu$$

式中,ε 是固有[㊁]介电常数,μ 是固有磁导率,η^{μ} 是材料的 4-速度。证明当材料静止时,闵可夫斯基公式约化为式(4.32)和式(6.31)。

㊀ 参看 E. M. Purcell, Electricity and Magnetism, 2d ed. (New York: McGraw-Hill, 1985), Sect. 5.7 和附录 B(那里,Purcell 通过对一个类似的几何构造的精巧分析得到了拉莫尔公式),以及 R. Y. Tsien, Am. J. Phys. 40, 46 (1972)。

㊁ 总是如此,"固有"指的是"在材料的静止参考系中"。

㊂ 有关相对论辐射反应的有趣评述,参看 F. Rohrlich, Am. J. Phys. 65, 1051(1997)。

(d)对于以(平常)速度 $\boldsymbol{u}$ 移动的介质,求出 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的关系。

！习题 12.69　利用拉莫尔公式(式(11.70))和狭义相对论推导出李纳公式(式(11.73))。

习题 12.70　亚伯拉罕-洛伦兹公式(式(11.80))的相对论自然推广是

$$K^{\mu}_{\text{辐射}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\frac{\mathrm{d}\alpha^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}$$

这当然是一个 4-矢量,它在非相对论极限 $v \ll c$ 下化为亚伯拉罕-洛伦兹公式。

(a)证明这不是一个可能的闵可夫斯基力。[提示:参看习题 12.38d。]

(b)找出一个修正项,其加在右边时能使上式成为闵可夫斯基力,但不能影响公式的 4-矢量特性及非相对论极限。[㊀]

习题 12.71　把相对论电动力学(式(12.126)和式(12.127))加以推广,以包含磁荷。[参看 7.3.4 小节。]

附　　录

附录 A　曲线坐标系中的矢量分析

附录 A.1　引言

在附录 A 中我将给出有关矢量分析的三个基本定理的简略证明。我的目的是关注定理的要点，而不是证明每一个细节。一个更精致、时尚和统一——当然也会更长一些——的处理见 M. Spivak 的著作《流形分析》(New York: Benjamin, 1965)。

为更一般起见，我将使用任意的(正交的)曲线坐标系(u, v, w)，求出其中的梯度、散度、旋度和拉普拉斯算子公式。然后，你们可以把它应用到直角、球、柱坐标系，或者任何你们想使用的坐标系。在初学时，这个一般性会使你感到迷惑，你还想使用直角坐标系，当遇到(u, v, w)时就把它们当做(x, y, z)并作相应的简化即可。

附录 A.2　术语

我们由三个坐标 u, v, w 来指定空间的一个点，(在直角坐标系中为(x, y, z)；在球坐标系中为(r, θ, ϕ)；在柱坐标系中为(s, ϕ, z)。我将假定坐标系是正交的，即指向对应坐标增加方向的三个单位矢量 $\hat{\boldsymbol{u}}$, $\hat{\boldsymbol{v}}$, $\hat{\boldsymbol{w}}$ 是相互垂直的。请注意，这三个单位矢量是位置的函数，因为它们的方向是随位置变换的(除了直角坐标系外)。任何矢量可以 $\hat{\boldsymbol{u}}$, $\hat{\boldsymbol{v}}$, $\hat{\boldsymbol{w}}$ 表示——特别有，从(u, v, w)到($u+\mathrm{d}u$, $v+\mathrm{d}v$, $w+\mathrm{d}w$)的无限小位移矢量可以写作

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = f\mathrm{d}u\hat{\boldsymbol{u}} + g\mathrm{d}v\hat{\boldsymbol{v}} + h\mathrm{d}w\hat{\boldsymbol{w}} \tag{A.1}$$

式中，f、g、h 是位置的函数，与使用的特定坐标系有关(在直角坐标系中 $f=g=h=1$；在球坐标系中 $f=1$，$g=r$，$h=r\sin\theta$；在柱坐标系中 $f=h=1$，$g=s$)。你们将会看到，这三个函数能告诉你们所使用坐标系的全部信息。

附录 A.3　梯度

当从点(u, v, w)移动到点($u+\mathrm{d}u$, $v+\mathrm{d}v$, $w+\mathrm{d}w$)时，一个标量函数 $t(u, v, w)$ 的变化为

$$\mathrm{d}t = \frac{\partial t}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial t}{\partial v}\mathrm{d}v + \frac{\partial t}{\partial w}\mathrm{d}w \tag{A.2}$$

这便是微分的标准定理。[⊖]我们可以把它写作点积的形式

$$\mathrm{d}t = \nabla t \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\nabla t)_u f\mathrm{d}u + (\nabla t)_v g\mathrm{d}v + (\nabla t)_w h\mathrm{d}w, \tag{A.3}$$

只要我们定义

$$(\nabla t)_u \equiv \frac{1}{f}\frac{\partial t}{\partial u}, (\nabla t)_v \equiv \frac{1}{g}\frac{\partial t}{\partial v}, (\nabla t)_w \equiv \frac{1}{h}\frac{\partial t}{\partial w}$$

则 t 的**梯度**是

$$\boxed{\nabla t \equiv \frac{1}{f}\frac{\partial t}{\partial u}\hat{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{g}\frac{\partial t}{\partial v}\hat{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{h}\frac{\partial t}{\partial w}\hat{\boldsymbol{w}}} \tag{A.4}$$

⊖　M. Boas,《物理科学中的数学方法》,第二版,第 4 章,第 3 节(New York:John Wiley, 1983)。

如果你从表 A.1 中选择 f、g、h 的适当的表示，就可以很容易得到梯度在直角坐标系、球坐标系和柱坐标系中的表示，它们在课本的封底给出。

表　A.1

坐标系	u,v,w	f,g,h
直角坐标系	x,y,z	$1,1,1$
球坐标系	r,θ,ϕ	$1,r,r\sin\theta$
柱坐标系	s,ϕ,z	$1,s,1$

由公式(A.3)可得出从点 a 到点 b 时 t 的总变化(见图 A.1)：

$$t(b) - t(a) = \int_a^b \mathrm{d}t = \int_a^b (\nabla t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{A.5}$$

这就是**梯度的基本定理**(当然，对此种情况无需更多的证明)。注意，积分是不依赖于从点 a 到点 b 的路径的。

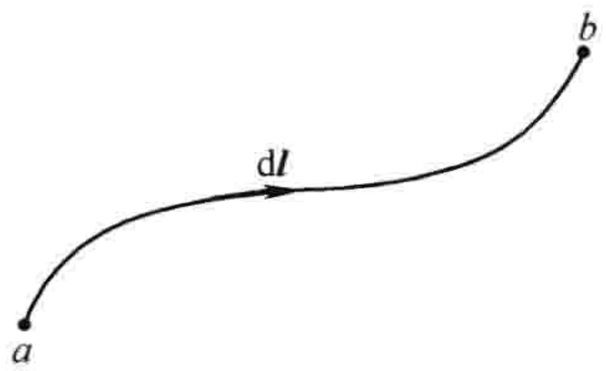


图　A.1

附录 A.4　散度

假定我们有一个矢量函数

$$\boldsymbol{A}(u,v,w) = A_u\hat{\boldsymbol{u}} + A_v\hat{\boldsymbol{v}} + A_w\hat{\boldsymbol{w}}$$

我们想计算面积分 $\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$，积分面是一个无限小体积的表面，这个无限小体积如图 A.2 所示，由于坐标轴是正交的，因此它是一个立方体(至少在无限小极限下)，其边长为 $\mathrm{d}l_u = f\mathrm{d}u$，$\mathrm{d}l_v = g\mathrm{d}v$，$\mathrm{d}l_w = h\mathrm{d}w$，因此，体积为

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}l_u\mathrm{d}l_v\mathrm{d}l_w = (fgh)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \tag{A.6}$$

(这些边长并不仅是 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}w$——因为，$v$ 也许是一个角度，在这种情况下 $\mathrm{d}v$ 连长度的量纲也不具有。正确的表示由式(A.1)给出)

对前表面

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = -(gh)\mathrm{d}v\mathrm{d}w\hat{\boldsymbol{u}}$$

所以

$$\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = -(ghA_u)\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

对后表面，表示式相同(除了正负号外)，不过量 ghA_u 现在是在 $(u + \mathrm{d}u)$ 取值的，而不是在 u。因为对任何(可微)函数 $F(u)$(在极限下)都有

$$F(u + \mathrm{d}u) - F(u) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u$$

前表面和后表面合在一起有

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}(ghA_u)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \frac{1}{fgh}\frac{\partial}{\partial u}(ghA_u)\mathrm{d}\tau$$

由同样的考虑，右表面和左表面的和为

$$\frac{1}{fgh}\frac{\partial}{\partial v}(fhA_v)\mathrm{d}\tau$$

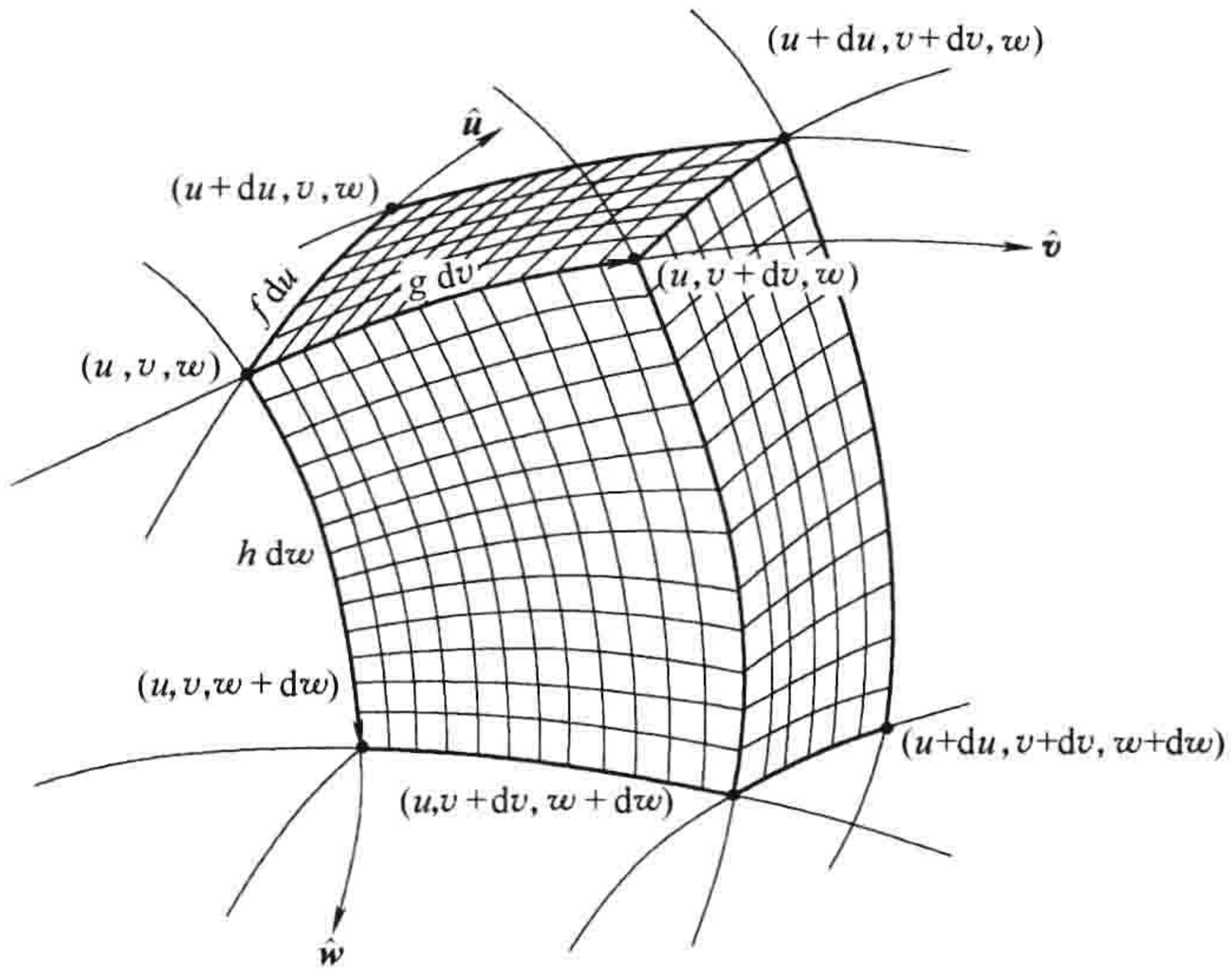


图 A.2

顶和底表面的和为

$$\frac{1}{fgh}\frac{\partial}{\partial w}(fgA_w)\,\mathrm{d}\tau$$

所有项合在一起,有

$$\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{fgh}\left[\frac{\partial}{\partial u}(ghA_u) + \frac{\partial}{\partial v}(fhA_v) + \frac{\partial}{\partial w}(fgA_w)\right]\mathrm{d}\tau \tag{A.7}$$

$\mathrm{d}\tau$ 前面的系数定义为 $\boldsymbol{A}$ 在曲线坐标系中的**散度**

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{A} \equiv \frac{1}{fgh}\left[\frac{\partial}{\partial u}(ghA_u) + \frac{\partial}{\partial v}(fhA_v) + \frac{\partial}{\partial w}(fgA_w)\right]} \tag{A.8}$$

这样,式(A.7)变为

$$\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}\tau \tag{A.9}$$

利用表 A.1,现在可以得出直角坐标系、球坐标系和柱坐标系中的散度公式,它们在课本的封底给出。

如它的表示,式(A.9)并没有证明散度定理,因为它仅对无限小体积成立。但是,一个有限的体积可以分割成很多无限小的体积,式(A.9)可以对每一个小体积进行应用。麻烦在于,当你把所有的这些加在一起,式(A.9)的左边并不是这个有限体积外表面的积分,而是所有这些无限小体积表面的积分。幸运的是,每一个内表面都是两个相邻的无限小体积的边界面,由于对两个无限小体积而言,$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 总是外指的,相邻边界面的 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 符号相反(见图 A.3),积分时相互抵消,仅有限体积的外表面对积分有贡献。所以对有限体积,有

$$\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}\tau \tag{A.10}$$

左边的积分仅需对有限体积的外表面进行。[⊖]这建立了**散度定理**。

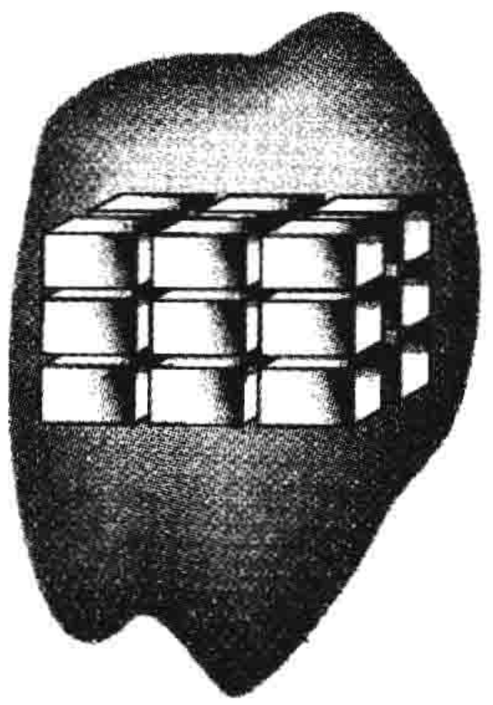


图 A.3

⊖ 对无论如何小都不能完全拟合立方体的区域又该如何——比如相对坐标轴切一个角度的面?处理这种情况并不难;请你们自己想出一个办法处理,或者参考 H. M. Schey 的著作《梯度、散度、旋度及全貌》(New York: W. W. Norton 1973),由习题Ⅱ-15 开始。

附录 A.5　旋度

为得到曲线坐标系中的旋度，我们对图 A.4 所示的无限小闭合路径计算线积分

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

这个无限小闭合路径是由点(u,v,w)和由此点沿 u,v 坐标的无限小增量组成的，并且 w 坐标保持不变。以该路径为边界的面是一个正方形（至少在无限小极限下），其长度为 $\mathrm{d}l_u = f\mathrm{d}u$，宽度为 $\mathrm{d}l_v = g\mathrm{d}v$，面积为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = (fg)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\hat{\boldsymbol{w}} \tag{A.11}$$

设坐标系为右手系，图 A.4 中的 $\hat{\boldsymbol{w}}$ 方向指向纸外。一旦选定它为 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的正方向，我们必须遵从右手规则，线积分要沿如图所示的逆时针方向。

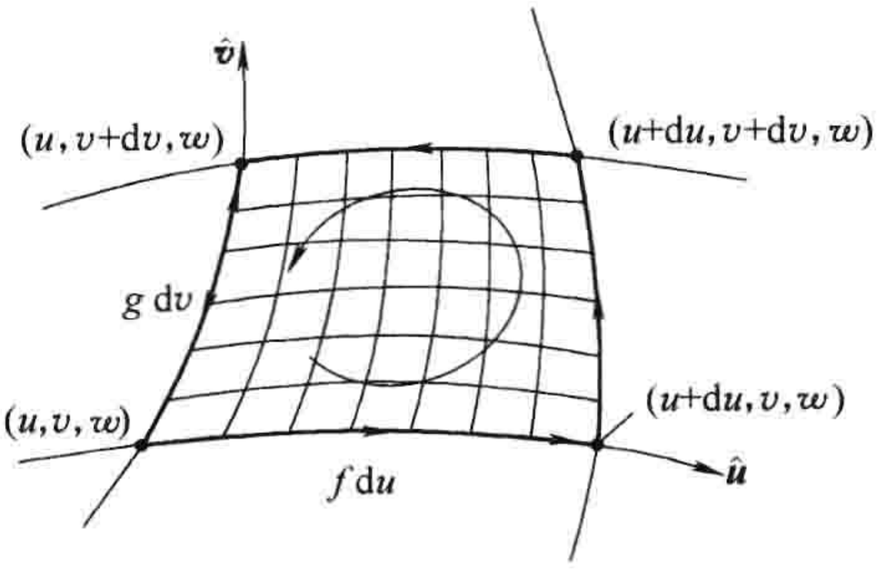


图　A.4

沿底部一段积分：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = f\mathrm{d}u\hat{\boldsymbol{u}}$$

所以

$$\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = (fA_u)\,\mathrm{d}u$$

沿顶部一段积分，符号反转，并且 fA_u 是在$(v+\mathrm{d}v)$处取值，而不是在 v 处。两段贡献合在一起有

$$\left[-(fA_u)\big|_{v+\mathrm{d}v} + (fA_u)\big|_v\right]\mathrm{d}u = -\left[\frac{\partial}{\partial v}(fA_u)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

类似地，右边和左边的和为

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}(gA_v)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

所以总的线积分为

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \left[\frac{\partial}{\partial u}(gA_v) - \frac{\partial}{\partial v}(fA_u)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{fg}\left[\frac{\partial}{\partial u}(gA_v) - \frac{\partial}{\partial v}(fA_u)\right]\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}\end{aligned} \tag{A.12}$$

此式右边 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 前的系数定义了**旋度**的 w 分量。同样的方法可得 u、v 分量，我们有

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} \equiv{}& \frac{1}{gh}\left[\frac{\partial}{\partial v}(hA_w) - \frac{\partial}{\partial w}(gA_v)\right]\hat{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{fh}\left[\frac{\partial}{\partial w}(fA_u) - \frac{\partial}{\partial u}(hA_w)\right]\hat{\boldsymbol{v}} + \\ & \frac{1}{fg}\left[\frac{\partial}{\partial u}(gA_v) - \frac{\partial}{\partial v}(fA_u)\right]\hat{\boldsymbol{w}}\end{aligned} \tag{A.13}$$

式(A.11)可推广为

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{A.14}$$

利用表 A.1，你们现在可以导出在直角坐标系、球坐标系和柱坐标系中旋度的公式。

但是，式(A.14) 本身并没有证明斯托克斯定理，因为它现在仅对无限小面元而言。再一次，我们可以把一个有限面分割成许多无限小面元，对每一个小面元可以应用式(A.14)(见图 A.5)。当我们把它们加在一起时，除了一个环绕外边界的线积分外，内部还有许多小的环路积分。幸运的是，同前一样，这些积分相互抵消，因为每一个内部的积分是两个方向相反环路的共同边。这样，式(A.14) 可以推广到有限曲面，

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{A.15}$$

式中,左边的线积分仅对外边界进行。[⊖]这就是**斯托克斯定理**。

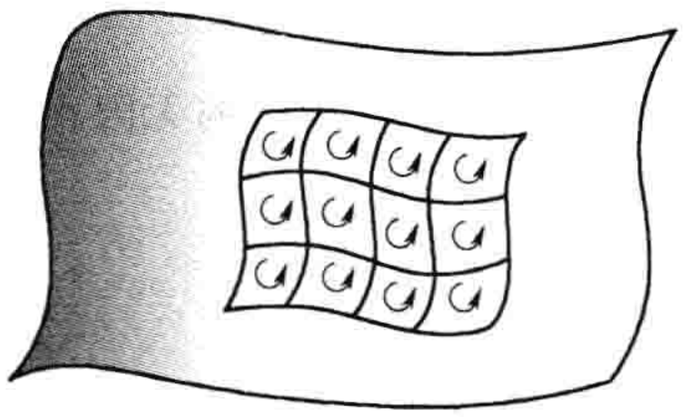


图 A.5

附录 A.6 拉普拉斯算子

由于拉普拉斯算子的定义是梯度的散度,它是一个标量,我们可以从 A.4 和 A.8 写出一般公式

$$\boxed{\nabla^2 t = \frac{1}{fgh}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{gh}{f}\frac{\partial t}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{fh}{g}\frac{\partial t}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{fg}{h}\frac{\partial t}{\partial w}\right)\right]} \tag{A.16}$$

同样,你们需要利用表 A.1 得出拉普拉斯算子在直角系、球坐标系和柱坐标系中的表示,这证实了前面所用的形式。

⊖ 对不能用微小矩形拟合的曲面,无论这些矩形如何微小(比如三角形),或者一个坐标不保持固定的曲面又该怎样?如果这种情况困惑你并且你自己解决不了,可参看 H. M. Schey 的著作《梯度、散度、旋度及全貌》,习题Ⅲ-2(New York:W. W. Norton,1973)。

附录 B　亥姆霍兹定理

假定我们知道一个矢量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 的散度是一个给定的标量函数 $D(\boldsymbol{r})$：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = D \tag{B.1}$$

旋度是一个给定的矢量函数 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$：

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{C} \tag{B.2}$$

为保持协调性，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$ 必须是无散的，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{C} = 0 \tag{B.3}$$

因为旋度的散度总是零。问题：在所给的信息基础上，我们能够确定 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 吗？如果 $D(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$ 在无限远处能很快地趋于零，答案是可以，我将具体推导来证明。

我断言

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U + \nabla \times \boldsymbol{W} \tag{B.4}$$

式中

$$U(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{1}{4\pi}\int \frac{D(\boldsymbol{r}')}{\imath} \mathrm{d}\tau' \tag{B.5}$$

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}')}{\imath} \mathrm{d}\tau' \tag{B.6}$$

式中的积分是对整个空间，同前一样，$\imath = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$。如果 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 是由式(B.4)给出的，则它的散度(利用式(1.102))为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = -\nabla^2 U = -\frac{1}{4\pi}\int D\, \nabla^2\left(\frac{1}{\imath}\right)\mathrm{d}\tau' = \int D(\boldsymbol{r}')\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' = D(\boldsymbol{r})$$

(由于旋度的散度总是零，所以含 $\boldsymbol{W}$ 的项消失，并注意微分是对包含在 $\imath$ 中的 $\boldsymbol{r}$ 的。)

所以散度的计算是正确的；那么旋度如何？

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{W}) = -\nabla^2 \boldsymbol{W} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{W}) \tag{B.7}$$

(由于梯度的旋度总为零，所以含 U 的项消失。)而

$$-\nabla^2 \boldsymbol{W} = -\frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{C}\, \nabla^2\left(\frac{1}{\imath}\right)\mathrm{d}\tau' = \int \boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{\delta}^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$$

这很不错——如果我能使你相信式(B.7)右边的第二项为零，我的任务就完成了。利用分部积分(式(1.59))并注意对 $\imath$ 中带撇和不带撇坐标的求导相差一个负号，我们有

$$4\pi \nabla \cdot \boldsymbol{W} = \int \boldsymbol{C} \cdot \nabla\left(\frac{1}{\imath}\right)\mathrm{d}\tau' = -\int \boldsymbol{C} \cdot \nabla'\left(\frac{1}{\imath}\right)\mathrm{d}\tau' = \int \frac{1}{\imath}\nabla' \cdot \boldsymbol{C}\mathrm{d}\tau' - \oint \frac{1}{\imath}\boldsymbol{C} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{B.8}$$

但是由式(B.3)，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$ 的散度为零，面积分(在无限远处)为零，只要 $\boldsymbol{C}$ 足够快地趋于零。

当然，我不言而喻地假设了在式(B.5)和式(B.6)中的积分是收敛的——否则的话它们根本不存在。在 r' 取大的极限时，$\imath \approx r'$，积分为

$$\int^{\infty} \frac{X(r')}{r'} r'^2 \mathrm{d}r' = \int^{\infty} X(r') r' \mathrm{d}r' \tag{B.9}$$

(这里 X 表示相应情况中的 D 或 $\boldsymbol{C}$)。显然，对大的 r'，$X(r')$ 必须为零——但是这还不充分：如果 $X \sim 1/r'$，则被积函数是常数，所以积分为无限大，即使 $X \sim 1/r'^2$，积分为对数函数，当 $r' \to \infty$ 时仍然为无限大。显然 $\boldsymbol{F}$ 的散度和旋度必须比 $1/r^2$ 更快地趋于零，我们的证明才能成立。(顺便提及，这个条件比要求面积分式(B.8)为零更充分。)

现在假设 $D(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$ 满足这些条件，那么式(B.4)的解唯一吗？答案显然为不是，因为我们可对 $\boldsymbol{F}$ 添入任何散度和旋度都为零的矢量函数，其散度和旋度仍然为 D 和 $\boldsymbol{C}$。不过，凑巧没有散

度和旋度处处为零并在无限远处趋于零的函数(见 3.1.5 小节)。所以如果我们加入 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 在 $r\to\infty$ 时趋于零的要求,则式(B.4)的解就是唯一的。㊀

现在所有的预备工作都做好了,我可以更严格地陈述亥姆霍兹定理了:

如果一个矢量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 的散度 $D(\boldsymbol{r})$ 和旋度 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})$ 给定,并且当 $r\to\infty$ 时两者都比 $1/r^2$ 更快地趋于零,且 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 也趋于零,则 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 由式(B.4)唯一确定。

亥姆霍兹定理有一个有趣的推论:

任何当 $r\to\infty$ 时比 $1/r$ 更快地趋于零的(可微)矢量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$,可以被表示为一个标量函数的梯度加上一个矢量函数的旋度:㊁

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla\left(\frac{-1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})'}{\imath}\mathrm{d}\tau'\right)+\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})'}{\imath}\mathrm{d}\tau'\right) \tag{B.10}$$

例如,在静电场情况下 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$ 及 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$,所以

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\imath}\mathrm{d}\tau'\right) = -\nabla V \tag{B.11}$$

式中,V 是标势。而在静磁场情况下 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 及 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$,所以

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{\imath}\mathrm{d}\tau'\right) = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{B.12}$$

式中,$\boldsymbol{A}$ 是磁矢势。

㊀ 通常,我们确实预期远离电荷和电流处的由它们产生的电场和磁场为零,所以这不是一个不合理的约束。偶尔我们也会遇到人造的问题,在其中电荷或电流自身扩展到无限远处——例如,无限长的导线,无限大的平板。在这种情况下,必须发现其他方法来建立麦克斯韦方程解的存在性与唯一性。

㊁ 事实上,任何可微矢量函数(不考虑它在无限远处的行为)都可以被写成一个梯度加上一个旋度,但是这个更一般的结果并不能直接从给定具体构型的亥姆霍兹定理或式(B.10)导出,因为积分一般是发散的。

附录C　单　位　制

以我们所用单位(**国际单位制**,SI),库仑定律表述为

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\text{(SI)} \tag{C.1}$$

力学量是用米、千克和秒来量度的,电荷的单位为库仑(见表 C.1)。在**高斯单位制**中,上式中等号右侧的常数被吸收到电荷中,所以

$$\boldsymbol{F}=\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\text{(高斯单位制)} \tag{C.2}$$

力学量用厘米、克和秒来量度,电荷的单位为**静电单位**(esu)。1 静电单位 $=1$(达因)$^{1/2}$ · 厘米。把静电学的方程从 SI 转换到高斯单位制并不困难:仅需作代换

$$\varepsilon_0\rightarrow\frac{1}{4\pi}$$

例如,静电场的能量(式(2.45))

$$U=\frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\,\mathrm{d}\tau\text{(SI)}$$

变为

$$U=\frac{1}{8\pi}\int E^2\,\mathrm{d}\tau\text{(高斯单位制)}$$

(对涉及介质中场的公式并没有这么容易转换,因为电位移矢量、介电常数等的定义存在差异;见表 C.2)

表 C.1　转换因子

物理量	SI	因子	高斯单位制
长度	米(m)	10^2	厘米
质量	千克(kg)	10^3	克
时间	秒(s)	1	秒
力	牛顿(N)	10^5	达因
能量	焦耳(J)	10^7	尔格
功率	瓦特(W)	10^7	尔格/秒
电荷	库仑(C)	3×10^9	静电单位(esu)
电流	安培(A)	3×10^9	静电单位/秒
电场	伏特/米(V/m)	$(1/3)\times10^{-4}$	静电伏特/厘米
势	伏特(V)	1/300	静电伏特
电位移	库仑/米^2	$12\pi\times10^5$	静电库仑/厘米^2
电阻	欧姆(Ω)	$(1/9)\times10^{-11}$	秒/厘米
电容	法拉(F)	9×10^{11}	厘米
磁场	特斯拉(T)	10^4	高斯
磁通量	韦伯(Wb)	10^8	麦克斯韦
H	安培/米	$4\pi\times10^{-3}$	奥斯特
自感/互感	亨利(H)	$(1/9)\times10^{-11}$	秒^2/厘米

注:除了指数因子,每一个“3”是 $\alpha\equiv2.997\,924\,58$(光速值)的缩写,“9”意味着 α^2,而 12 表示 4α。

在 SI 中毕奥-萨伐尔定律为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} (\mathrm{SI}) \tag{C.3}$$

在高斯单位制中为

$$\boldsymbol{B} = \frac{I}{c} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} (\text{高斯单位制}) \tag{C.4}$$

式中，c 是光速；电流的单位是 esu/s。高斯单位制中的磁场单位（**高斯**）是这个单位制中经常使用的量：人们对伏特、安培、亨利等都用 SI，但是由于某些原因他们倾向于用（高斯单位制中的）高斯量度磁场；而流行的 SI 中磁场的单位是**特斯拉**（1 特斯拉 $= 10^4$ 高斯）。

高斯单位制的一个主要优点是在其中电场与磁场有相同的量纲（在原则上，可以用高斯来量度电场，尽管没人这样用。）这样，在 SI 中我们把洛伦兹力定律写作

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) (\mathrm{SI}) \tag{C.5}$$

（它表明 E/B 的量纲为速度的量纲），在高斯单位制中为

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}\right) (\text{高斯单位制}) \tag{C.6}$$

这样，磁场被除以了一个因子 c。这更明显地展示了磁与电的平行结构。例如，电磁场的总能量为

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) \mathrm{d}\tau (\text{高斯单位制}) \tag{C.7}$$

它消除了 SI 公式

$$U = \frac{1}{2} \int \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \mathrm{d}\tau (\mathrm{SI}) \tag{C.8}$$

中损伤对称性的 ε_0 和 μ_0。

表 C.2 列出了在两种单位制中电动力学的基本公式。对没有列出的公式，以及海氏-洛伦兹（Heaviside-Lorentz）单位制，请参阅 J. D. Jackson 所著的《经典电动力学》第 3 版的附录（New York: John Wiley, 1999），那里有更完整的内容。[⊖]

表 C.2 国际单位制与高斯单位制中的基本公式

SI	高斯单位制
麦克斯韦方程组	
一般形式：$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$	$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$
$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$	$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\partial \boldsymbol{B}/\partial t$
$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$
$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial \boldsymbol{E}/\partial t$	$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + \frac{1}{c}\partial \boldsymbol{E}/\partial t$
物质中：$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{f}}$	$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{\mathrm{f}}$
$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$	$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\partial \boldsymbol{B}/\partial t$
$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$
$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} + \partial \boldsymbol{D}/\partial t$	$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} + \frac{1}{c}\partial \boldsymbol{D}/\partial t$

⊖ 关于电的 SI 的一个有趣的“入门读物”，可参见 N. M. Zimmerman, Am. J. Phys. 66, 324 (1998)。

（续）

SI	高斯单位制
D 和 ***H***	
定义：$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} \end{cases}$	$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$ $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}$
线性介质中：$\begin{cases} \boldsymbol{P} = \varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{M} = \chi_m\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\mu}\boldsymbol{B} \end{cases}$	$\boldsymbol{P} = \chi_e\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{M} = \chi_m\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$
洛伦兹力定律　$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$	$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}\right)$
能量和功率	
能量：　$U = \dfrac{1}{2}\int(\varepsilon_0 E^2 + \dfrac{1}{\mu_0}B^2)\,\mathrm{d}\tau$	$U = \dfrac{1}{8\pi}\int(E^2 + B^2)\,\mathrm{d}\tau$
坡印廷矢量：　$\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$	$\boldsymbol{S} = \dfrac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$
拉莫尔公式：　$P = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2}{3}\dfrac{q^2a^2}{c^3}$	$P = \dfrac{2}{3}\dfrac{q^2a^2}{c^3}$

矢量微分

直角坐标系。$d\boldsymbol{l} = dx\hat{\boldsymbol{x}} + dy\hat{\boldsymbol{y}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$；　　$d\tau = dxdydz$

梯度：$\nabla t = \dfrac{\partial t}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \dfrac{\partial t}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \dfrac{\partial t}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$

散度：$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$

旋度：$\nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$

拉普拉斯算子：$\nabla^2 t = \dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

球坐标系。$d\boldsymbol{l} = dr\hat{\boldsymbol{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$；　　$d\tau = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

梯度：$\nabla t = \dfrac{\partial t}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$

散度：$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\theta) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

旋度：$\nabla \times \boldsymbol{v} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\phi) - \dfrac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\boldsymbol{r}} +$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

拉普拉斯算子：$\nabla^2 t = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial t}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$

柱坐标系。$d\boldsymbol{l} = ds\hat{\boldsymbol{s}} + sd\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$；　　$d\tau = sdsd\phi dz$

梯度：$\nabla t = \dfrac{\partial t}{\partial s}\hat{\boldsymbol{s}} + \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dfrac{\partial t}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$

散度：$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial}{\partial s}(sv_s) + \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$

旋度：$\nabla \times \boldsymbol{v} = \left[\dfrac{1}{s}\dfrac{\partial v_z}{\partial \phi} - \dfrac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{s}} + \left[\dfrac{\partial v_s}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dfrac{1}{s}\left[\dfrac{\partial}{\partial s}(sv_\phi) - \dfrac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\boldsymbol{z}}$

拉普拉斯算子：$\nabla^2 t = \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial}{\partial s}\left(s\dfrac{\partial t}{\partial s}\right) + \dfrac{1}{s^2}\dfrac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \dfrac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

矢量恒等式

三重积

(1) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

(2) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$

积规则

(3) $\nabla(fg)=f(\nabla g)+g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$

(5) $\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})=f(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\cdot(\nabla f)$

(6) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$

(7) $\nabla\times(f\boldsymbol{A})=f(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\times(\nabla f)$

(8) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$

二阶导数

(9) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$

(10) $\nabla\times(\nabla f)=0$

(11) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$

基本定理

梯度定理： $\int_a^b(\nabla f)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=f(b)-f(a)$

散度定理： $\int(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}\tau=\oint\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$

旋度定理： $\int(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\oint\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

电动力学基本公式

麦克斯韦方程组

一般形式：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{cases}$$

介质中：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{\mathrm{f}}\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{cases}$$

辅助场

定义：

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M}\end{cases}$$

线性介质中：

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_{\mathrm{e}}\boldsymbol{E},\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{M}=\chi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\end{cases}$$

势

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\qquad\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

洛伦兹力定律

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

能量、动量和功率

能量：$$U = \frac{1}{2}\int(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)\,\mathrm{d}\tau$$

动量：$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\int(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})\,\mathrm{d}\tau$$

坡印廷矢量：$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$$

拉莫尔公式：$$P = \frac{\mu_0}{6\pi c}q^2 a^2$$

基本常数

真空介电常数：$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\mathrm{C}^2/(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)$

真空磁导率：$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{N/A}^2$

光速：$c = 3.00 \times 10^8\mathrm{m/s}$

电子电荷：$e = 1.60 \times 10^{-19}\mathrm{C}$

电子质量：$m = 9.11 \times 10^{-31}\mathrm{kg}$

球坐标与柱坐标

球坐标

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} = \sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\boldsymbol{y}} = \sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \\ \phi = \arctan(y/x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}} = \sin\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}} \end{cases}$$

柱坐标

$$\begin{cases} x = s\cos\phi \\ y = s\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} = \cos\phi\hat{\boldsymbol{s}} - \sin\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\boldsymbol{y}} = \sin\phi\hat{\boldsymbol{s}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{s}} = \cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \end{cases}$$

[General Information]
书名=电动力学导论 原书第3版 翻译版
作者=（美）格里菲斯著
丛书名=时代教育·国外高校优秀教材精选
页数=362
SS号=13489404
出版日期=2014.02
出版社=北京市：机械工业出版社
ISBN号=978-7-111-44404-6
中图法分类号=O442
原书定价=43.50
参考文献格式=（美）格里菲斯著．电动力学导论 原书第3版 翻译版．北京市：机械工业出版社，2014.02．
内容提要=本书译自美国著名物理教育家DavidJ.Griffiths教授所著的《IntroductiontoElelctrodynamics》（第3版），是“时代教育：国外高校优秀教材”系列之一，其内容包含了我国大学本科电动力学的主要内容，也涵盖了部分电磁学的内容。本书以其丰富的内容、清晰的物理概念和新颖的叙述风格得到广泛好评，在世界范围内，被许多大学选为本科生电动力学课程的教材。本书以清晰易懂的方式介绍经...