第五周作业答案

罗曾宇

题目 1. 半径为 R_0 的导体球外充满均匀绝缘介质 ϵ，导体球接地，离球心为 a 处 $(a > R_0)$ 置一点电荷 Q_f，试用分离变量法求空间各点电势，证明所得结果与镜像法结果相同.

解答.

以球心为坐标原点，设 Q_f 位于 $z = a$ 处，导体球外的定解条件为

$$\nabla^2\varphi = -\frac{Q_f}{\epsilon}\delta(\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{e_z}), (r > R_0)$$

$$r \to \infty, \varphi \to 0,$$

$$r = R_0, \varphi = 0,$$

容易看出，方程的一个特解为 $\varphi_q = \dfrac{Q_f}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2 + r^2 - 2ra\cos\theta}}$，设 $\varphi = \varphi_q + \varphi_1$，可以将球两区域的定解条件改写为

$$\nabla^2\varphi_1 = 0, (r > R_0)$$

$$r \to \infty, \varphi_1 \to 0,$$

$$r = R_0, \varphi_1 = -\frac{Q_f}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2 + R_0^2 - 2R_0 a\cos\theta}},$$

设 $\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$, 由边界条件可知，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos\theta) = -\frac{Q_f}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2 + R_0^2 - 2R_0 a\cos\theta}} = -\frac{Q_f}{4\pi\epsilon a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{R_0}{a})^n P_n(\cos\theta),$$

解得 $B_n=-\frac{Q_f}{4\pi\epsilon}\frac{R_0^{2n+1}}{a^{n+1}}$，

综上所述，

$$\begin{aligned}\varphi&=\frac{Q_f}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2+r^2-2ra\cos\theta}}-\frac{Q_f}{4\pi\epsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R_0^{2n+1}}{a^{n+1}r^{n+1}}P_n(\cos\theta)\\&=\frac{Q_f}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2+r^2-2ra\cos\theta}}-\frac{\frac{R_0}{a}Q_f}{4\pi\epsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{R_0^2}{a})^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)\\&=\frac{Q_f}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2+r^2-2ra\cos\theta}}+\frac{-\frac{R_0}{a}Q_f}{4\pi\epsilon\sqrt{r^2+(\frac{R_0^2}{a})^2-2r\frac{R_0^2}{a}\cos\theta}}\end{aligned}$$

和镜像法的结果完全相同.(相当于在 $z=\frac{R_0^2}{a}$ 处放置一个电荷量为 $-\frac{R_0}{a}Q_f$ 的镜像电荷)

题目 2. 接地的空心导体球内外半径为 R_1 和 R_2，在球内离球心为 $a(a<R_1)$ 处置一点电荷 q，用镜像法求电势，导体球上的感应电荷有多少？分布在内表面还是外表面？

解答. 设点电荷位置为 $z=a$，镜像电荷带电量为 Q'，位置为 $z=b>R_1$，由导体球接地电势为零的要求，有

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q'}{b-R_1}+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_f}{R_1-a}=0,$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q'}{b+R_1}+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_f}{R_1+a}=0,$$

联立解得，$Q'=-\frac{R_1}{a}Q_f, b=\frac{R_1^2}{a}$. 所以 $r<R_1$ 时，

$$\varphi=\frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}+\frac{-\frac{R_1}{a}Q_f}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+(\frac{R_1^2}{a})^2-2r\frac{R_1^2}{a}\cos\theta}},$$

由高斯定理知，由于导体球内电场为零，导体球内表面的感应电荷总量应为 $-Q_f$，因为导体球外表面电势为零，无穷远处电势也为零，即外表面与无穷远处等势，不可能有电场线从外表面发出，伸向无穷远处，所以导体球外表面无感应电荷.

即当 $r > R_1$ 时，$\varphi = 0$.

题目 3. 上题的导体球壳不接地，而是带总电荷 Q_0，或使其有确定电势 φ_0，试求这两种情况的电势. 又问 φ_0 与 Q_0 是何种关系时，两情况的解是相等的？

导体球壳带总电荷 Q_0 时，由上题可知，此时导体球内表面的感应电荷仍为 $-Q_f$，由于整体带总电荷 q_0，所以外表面所带电荷量为 $Q_f + Q_0$.

当 $r > R_2$ 时，

$$\varphi = \frac{Q_0 + Q_f}{4\pi\epsilon_0 r},$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时，

$$\varphi = \frac{Q_0 + Q_f}{4\pi\epsilon_0 R_2},$$

当 $r < R_1$ 时，

$$\varphi = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}} + \frac{-\dfrac{R_1}{a}Q_f}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + (\dfrac{R_1^2}{a})^2 - 2r\dfrac{R_1^2}{a}\cos\theta}} + \frac{Q_0 + Q_f}{4\pi\epsilon_0 R_2},$$

($Q_0 + Q_f$ 将导体球的整体电势抬高)

导体球有确定电势 φ_0 时，导体球外的全部定解条件为

$$\nabla^2\varphi = 0, (r > R_2)$$

$$r \to \infty, \varphi \to 0,$$

$$r = R_2\text{时，}\ \varphi = \varphi_0,$$

设 $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$, 代入边界条件并对比得，$B_0 = R_0\varphi_0, B_n = 0 (n \geq 1)$.

所以

$$\varphi = \frac{\varphi_0 R_2}{r}, (r > R_2)$$

对比知，当 $\varphi_0 = \frac{Q_0 + Q_f}{4\pi\epsilon_0 R_2}$ 时，两种情况的解是相同的.

解答.

题目 4. 在接地的导体平面上有一半径为 a 的半球凸部，半球的球心在导体平面上，点电荷 Q 位于系统的对称轴上，并与平面相距为 $b(b > a)$，试用电像法求空间电势.

点电荷 Q 对于导体半球的镜像电荷为 $Q_1 = -\frac{a}{b}Q$，位于 $z = \frac{a^2}{b}$，但这组电荷在平面上的电势不为零，所以还要引入它们关于平面的镜像电荷 $Q_2 = -Q$，位于 $z = -b$，和 $Q_3 = \frac{a}{b}Q$，位于 $z = -\frac{a^2}{b}$.

所以，空间中的电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}} + \frac{-\frac{a}{b}Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{a^2}{b})^2}} +$$

$$\frac{-Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+b)^2}} + \frac{\frac{a}{b}Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+\frac{a^2}{b})^2}}].$$

解答.

题目 5. 设有两平面围成的直角形无穷容器，其内充满电导率为 σ 的液体. 取该两平面为 xz 面和 yz 面，在 (x_0, y_0, z_0) 和 $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别置正负电极并通以电流 I，求导电液体中的电势.

解答. 导电液体中电流密度 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$，连接电极的导线中 $\boldsymbol{J}'=\sigma'\boldsymbol{E}'$，设 $\sigma'\gg\sigma$，分别作包围正，负电极的闭合曲面，由高斯定理可求出两电极的电量

$$\begin{aligned}q&=\pm\epsilon_0\oint_S\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}\\&=\pm\epsilon_0(\frac{1}{\sigma'}\int_{S_1}\boldsymbol{J}'\cdot d\boldsymbol{S}+\frac{1}{\sigma}\int_{S_2}\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S})\\&=\pm\epsilon_0(-\frac{I}{\sigma'}+\frac{I}{\sigma})\\&=\pm\epsilon_0\frac{I}{\sigma},\end{aligned}$$

平面 xz 与 yz 之外无导电液体，为绝缘体，不妨设求解区域为 $x>0,y>0$，区域的定解条件为

$$\nabla^2\varphi=-\frac{I}{\sigma}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_+)+\frac{I}{\sigma}\delta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_-),$$

$$x=0\text{处，}J_x=\sigma E_x=0,\text{即}E_x=0,$$

$$y=0\text{处，}J_y=\sigma E_y=0,\text{即}E_y=0,$$

$$r\to\infty,\varphi\to 0,$$

其中 $\boldsymbol{r}_+=(x_0,y_0,z_0),\boldsymbol{r}_-=(x_0,y_0,-z_0)$.

注：对边界条件作一些解释. 由于在稳恒情况下，由电流连续性方程可知，$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$，所以在 $x=0$ 平面上，即 yz 平面上，J_x 法向连续. 因为在求解区域之外是绝缘体，不会有电流，即 $\lim\limits_{x\to0^-}J_x=0$，又因为法向连续，有 $\lim\limits_{x\to0^+}J_x=0$，所以 $J_x=0$. 在 $y=0$ 平面上同理.

所以，对于正电极，首先需要引入电荷量为 q，位于 $(-x_0,y_0,z_0)$ 的镜像电荷，使得在 $x=0$ 平面上有 $E_x=0$，但这组电荷并不满足在 $y=0$ 平面上有 $E_y=0$，所以还需引入这组电荷关于 $y=0$ 平面的镜像电荷：电荷量为 q，位于 $(x_0,-y_0,z_0)$ 的和电荷量为 q，位于 $(-x_0,-y_0,z_0)$ 的镜像电荷. 负电极同理.

综上所述

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}+$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}}-$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}-$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2}}).$$

题目 6. 证明：

(1)$\delta(ax)=\frac{1}{a}\delta(x),(a>0)$(若 $a<0$，结果如何？)

(2)$x\delta(x)=0.$

解答.

(1) 由 $\delta(x)$ 定义有，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1,$$

令 $x=am$，当 $a>0$ 时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(am)d(am)=a\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(am)dm=1,$$

即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(ax)dx=\frac{1}{a}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}\delta(x)dx$，所以 $\delta(ax)=\frac{1}{a}\delta(x)$.

当 $a<0$ 时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(am)d(am)=-a\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(am)dm=1,$$

即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(ax)dx=-\frac{1}{a}=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}\delta(x)dx$，所以 $\delta(ax)=-\frac{1}{a}\delta(x)$.

综上所述，

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x).$$

(2) 观察可发现 $f(x)\delta(x)$ 的“函数值”和 $f(0)\delta(x)$ 的“函数值”完全相同，因为 $\delta(x)$ 在除 $x=0$ 之外的点全为零，(这里打双引号是因为 $\delta(x)$ 是广义函数，表示的是分布)

所以

$$f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x),$$

也就是说

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta(x)dx=f(0),$$

当 $\delta(x)$ 作用于 $f(x)$ 时，相当于把 $x=0$ 处 $f(x)$ 的值挑出来了，如果想要挑另外位置的值，比如 $x=a$ 处的函数值，只需要将 $\delta(x)$ 平移即可，这里就体现了 $\delta(x)$ 是一种“分布”的特点，所以 $\delta(x)$ 也叫单位冲激函数.

题目 7. 一块极化介质的极化矢量为 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')$，根据偶极子静电势的公式，极化介质所产生的静电势为

$$\varphi=\int_V \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}dV',$$

另外，根据极化电荷公式 $\rho_p=-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')$ 及 $\sigma_p=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}$，极化介质所产生的电势又可表为

$$\varphi=-\int_V \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{4\pi\epsilon_0 r}dV'+\oint_S \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\cdot d\boldsymbol{S}'}{4\pi\epsilon_0 r},$$

试证明以上表达式是等同的.

解答.

$$
\begin{aligned}
\varphi &= -\int_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{4\pi\epsilon_0 r} dV' + \oint_S \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') \cdot d\boldsymbol{S}'}{4\pi\epsilon_0 r} \\
&= -\int_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{4\pi\epsilon_0 r} dV' + \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla' \cdot (\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{r}) dV' \\
&= \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') \cdot \nabla' \frac{1}{r} dV' \\
&= -\int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') \cdot \nabla \frac{1}{r} dV' \\
&= \int_V \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV'.
\end{aligned}
$$

题目 8. 证明下述结果，并熟悉面电荷和面偶极层两侧电势和电场的变化.

(1) 在面电荷两侧，电势法向微商有跃变，而电势是连续的.

(2) 在面偶极层两侧，电势有跃变，

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P},$$

而电势的法向微商是连续的. (各带等量正负面电荷密度 $\pm\sigma$ 而靠的很近的两个面，形成面偶极层. 面偶极矩密度 $\boldsymbol{P} = \lim\limits_{\substack{\sigma\to\infty \\ l\to 0}} \sigma \boldsymbol{l}$)

解答.

(1) 作圆柱形高斯面包裹住面电荷，圆柱形的高趋于零，由高斯定理有

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

即

$$-\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

电势法向有跃变，而

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = E_{1n} \frac{dl}{2} + E_{2n} \frac{dl}{2} = \frac{E_{1n} + E_{2n}}{2} dl,$$

当 $dl \to 0$ 时，因为 E_{1n}, E_{2n} 有限，所以

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0,$$

电势在面电荷两侧是连续的.

注：这里有个问题，为何在面电荷附近 $\boldsymbol{E}$ 是有限的？当电荷以其他形式分布时，$\boldsymbol{E}$ 仍然有限吗？我们不妨看一看电场的表达式，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \int_{V'} \frac{dq(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \int_{V'} \frac{dq(\boldsymbol{x}')}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}},$$

当电荷为面电荷形式分布时，$dq(\boldsymbol{x}') = \sigma(\boldsymbol{x}')dS$，假设 $\sigma(\boldsymbol{x}')$ 为常数，这个假设并不特殊，因为即便 $\sigma \propto \dfrac{1}{r}$ 或者 $\sigma \propto \dfrac{1}{r^2}$，总可以用叠加定理将电荷分成一层层均匀面电荷分布的共同作用，因为 $dS \propto r^2$，分母也有一个 r^2，所以这个积分在 $r \to 0$ 时不会发散，也就是说，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ 有限.

接下来看看其他分布形式的情况：如果是点电荷分布，$dq(\boldsymbol{x}')$ 就是 $dq(\boldsymbol{x}')$，积分在 $r \to 0$ 发散，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ 不是有限的；如果是线电荷分布，$dq(\boldsymbol{x}') = \lambda(\boldsymbol{x}')dl$，因为 $dl \propto r$，所以积分在 $r \to 0$ 发散，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ 不是有限的；如果是体电荷分布，$dq(\boldsymbol{x}') = \rho(\boldsymbol{x}')dV$，因为 $dV \propto r^3$，所以积分在 $r \to 0$ 不会发散，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ 有限.

根据上面的讨论的四种情况，我们可以总结一下：在边界处，如果电荷为体电荷分布或面电荷分布，电势连续，如果电荷为线电荷分布或点电荷分布，电势不连续. 当然，还有其他的电荷分布形式，比如第二问中的面偶极层，这里不作讨论.

(2) 作圆柱形高斯面包裹住面偶极层微元，圆柱形的高趋于零，由高斯定理有

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma - \sigma}{\epsilon_0} = 0,$$

即

$$-\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0,$$

电势法向无跃变，而

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = E_n dl = \frac{\sigma}{\epsilon_0} dl = \frac{1}{\epsilon_0} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P}.$$