2024秋 代数几何

代数几何：variety scheme stack

例 (Frankel conj.) X紧 Kähler, $K>0 \Rightarrow X \cong \mathbb{C}P^n$ (复几何) } 分析

Hartshone conj. TX ample $\Rightarrow X \cong \mathbb{C}P^n$ (代数几何) (非嵌入)

Mori 1970s 解决

Idea: "bend and break" "blow up"

X上找足够多的射影直线

课程内容：①代数簇 ②概型 层 ③平面上的相交理论 (层论语言)

④ Riemann-Roch

参考书：①③ Fulton ② Hartshone

④ shafarevich

成绩：平时(40%) = 作业(35%) + 考勤(5%)

期末(60%)

1 代数簇

Note 默认 k代数闭域

1.1 仿射代数簇

1.1.1 代数集

n维仿射空间 $\mathbb{A}_k^n \doteq k^n$

代数集 $V(S)=\{(a_1,\cdots a_n) \mid F(a_1,\cdots a_n)=0 \quad \forall F\in S\}$

$V(F)$: 超曲面

以后记: 代数集为有限超曲面之交

Zariski拓扑: 由仿射代数集为闭集决定的拓扑 $\mathcal{A}$

(① ϕ $\mathbb{A}^n\in\mathcal{A}$ ② $\bigcap_{i\in I} V(S_i)=V(\bigcup_{i\in I} S_i)\in\mathcal{A}$

③ $V(F_1,\cdots)\cup V(G_1,\cdots) = V(\{F_iG_j\}_{i,j})\in\mathcal{A}$)

例1: $\mathbb{A}^1$ 闭集为 ϕ $\mathbb{A}^1$ 有限多点.

1.1.2 Noether环

Noether 环: 满足①②之一

① 任意理想有限生成

② Noether条件 ∀理想升链最终稳定

①⇒② $\forall I_1\subset I_2\subset\cdots$ 则 $I=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ 为理想 故有限生成

$I=(x_1,\cdots x_n)$

故 $\exists N$ st. $x_1,\cdots x_n\in I_N$. 则 $I_N=I$.

②⇒① I为理想 任取 $x_1\in I$ 若 $I=(x_1)$ ✓.

否则 取 $x_2\in I\backslash(x_1)$ 若 $I=(x_1,x_2)$ ✓.

…重复. 由条件② 必然有限步终止 故I有限生成

Prop R Noether $I \leq R$ 则 R/I Noether (看升链即可)

Thm (Hilbert基定理) R Noether $\Rightarrow R[x]$ Noether

Cor · $R[x_1, \cdots x_n]$ Noether

[pf of Thm. 设 $J \leq R[x]$ 理想. $J_n = \{ J$中n次多项式$\}$

$I_n = \{J_n$中多项式的首项系数$\} \cup \{0\}$ 则 I_n 为理想.

且 $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots$

故存在 N s.t. $I_N = I_{N+1} = \cdots$

$\forall 0 \leq n \leq N$ $I_n = (a_{n1} \cdots a_{nl_n})$ 则存在 $f_{nk}(x) = a_{nk} x^n + \cdots \in J_n$

只须验证 $J' = (\{f_{nk}\}_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq k \leq l_n}}) = J$. 只须证 $J_n \subseteq J'$ $(\forall n)$

$n=0$. 显然 $J_0 \subseteq J'$

若 $J_0, \cdots J_{n-1} \in J'$ $\forall f \in J_n$ $f = a_n x^n + \cdots$

首先考虑 $n \leq N$ 则 $a_n = b_1 a_{n1} + \cdots + b_{l_n} a_{nl_n}$

故 $f - (b_1 f_{n1} + \cdots b_{l_n} f_{nl_n}) \in J_0 \cup \cdots \cup J_{n-1} \subseteq J' \Rightarrow f \in J'$ ✓

若 $n > N$. 类似可证 #.]

1.3 代数集与理想

给定代数集 $X=V(S)\subseteq A^n$. $S=\{F_1,\cdots F_n\}$ 令 $I=(S)$、则 $X=V(I)$

$$\{k[X_1,\cdots X_n]\text{的理想}\} \longleftrightarrow \{A^n\text{中代数集}\}$$

$$I \longmapsto V(I)$$

$$I(X) \longleftarrow\!\shortmid\; X$$

$$\begin{array}{c} \| \\ \{F\in k[X_1,\cdots X_n] \,/\, F|_X=0\} \end{array}$$

一一对应？

$$\begin{tikzcd} X=V(I) \arrow[r] \arrow[dr, equal, "check"'] & I(X) \arrow[d] \\ & V(I(X)) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & I(X) \arrow[l, bend right, "V"'] \end{tikzcd} \checkmark$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] & V(I) \arrow[l, bend right, "I"'] \end{tikzcd}$$

但 $V(F)=V(F^2)$ $(F)\neq(F^2)$

验证 $\forall X$ $I(X)$为根理想. $I(X)=\sqrt{I(X)}$ $\left(\forall f\in\sqrt{I(X)}\ \ f^m\in I \atop f^m|_{X=0} \Rightarrow f|_{X=0}\Rightarrow f\in I(X)\right)$

{根理想} ⟷ {代数集}？

(若I根理想 $\Rightarrow I = I(V(I))$？

一般 $\sqrt{I}=I(V(I))$ ！)

1.4 Hilbert零点定理

Thm k代数闭域. $I\leq k[x_1,\cdots x_n]\triangleq R$ 则 (1) R中极大理想形如 $m=(x_1-a_1,\cdots x_n-a_n)$
(必要!) (2) $V(I)=\phi \Leftrightarrow I=R$

(1)$\Rightarrow$(2). $V(I)=\phi$. 若 $I\neq R$ $\exists$极大 $\underset{(x_1-a_1,\cdots x_n-a_n)}{\overset{\|}{m}}$ st $V(I)\supseteq V(m)=\{(a_1,\cdots a_n)\}$ 矛盾!)

证略!

Cor. $I(V(I))=\sqrt{I}$

[pf. $\sqrt{I}\subseteq I(V(I))$ 显然

$I(V(I))\subseteq\sqrt{I}$: $\forall f\in I(V(I))$ 令 $J=(I,1-fy)\in k[x,y]$

$(a_1,\cdots a_n,b)\in V(J)\subseteq A^{n+1}\Leftrightarrow \begin{cases}(a_1,\cdots a_n)\in V(I)\\ 1-f(a_1,\cdots a_n)b=0\end{cases} \Leftrightarrow \phi$

故 $V(J)=\phi \Rightarrow J=k[x,y]$

则 $\underset{\overset{\|}{(\overline{1-fy})}}{J/I[y]}=(R/I)[y]$ 从而$\exists g(y)\in(R/I)[y]$ st $g(y)(1-fy)=1$ (在$(R/I)[y]$中)

设 $g(y)=a_0+\cdots a_my^m$. 则 $(a_0+\cdots a_my^m)(1-fy)=\bar{1}$

$\Rightarrow \begin{matrix}a_0=1\\ a_1=a_0f \cdots a_m=f^m\end{matrix}$ $a_mf^m=f^{m+1}=0$

故 $f^{m+1}\in I$ $\Rightarrow I(V(I))\subseteq\sqrt{I}$ #]

$X=V(I)$ X的闭集: $Z=V(I,F_1,\cdots F_l)$
(Zariski) $=V(I)\cap V(F_1,\cdots F_l)\triangleq V_X(F_1,\cdots F_l)$

Prop X中每个开集是

1.5 代数集的不可约分解

定义: $X \subseteq A^n$ 代数集 若 $X = X_1 \cup X_2$. (X_i 为 X 的闭集) 则 $X_1 = X$ 或 $X_2 = X$

则称 X 不可约

命题. X 不可约 $\Leftrightarrow$ $I(X)$ 素理想

[pf $\Rightarrow$) 取 $f. g \in k[x_1, \cdots x_n]$ 设 $fg \in I(X)$

则 $X = V_X(f) \cup V_X(g)$. 则 $\underbrace{V_X(f) = X}_{\Downarrow \atop f \in I(X)}$ 或 $\underbrace{V_X(g) = X}_{\Downarrow \atop g \in I(X)}$ $\Rightarrow I(X)$ 素

$\Leftarrow$ 作业 #]

例: $V(F)$ 不可约 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{(F)}$ 素 $\Leftarrow$ F 不可约

命题: X 仿射代数集. 则

(1) X 的下降闭集链必有限长

(2) X 可表示为 $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$. 其中 X_i 闭集且不可约且互不包含

且该分解在调整次序意义下唯一.

[pf (2). 存在性: 若 X 不可约 ✓ 否则 $X = X_1 \cup X_2$ (X_1, X_2 闭 互不包含)

若 X_1. X_2 可有限分解. 则 ✓ 否则可对某个 X_i 继续分解

$\Rightarrow$ 得到无穷长降闭集链 矛盾!

唯一性: 若 $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m = Y_1 \cup \cdots \cup Y_{m'}$

$\Rightarrow X_1 = (X_1 \cap Y_1) \cup \cdots (X_1 \cap Y_{m'})$

又 X_1 不可约 故存在 i s.t. $X_1 \subseteq Y_i$ 类似存在 j s.t. $Y_i \subseteq X_j$

$\Rightarrow X_1 \subseteq Y_i \subseteq X_j$ 只能 $j=1$ $Y_i = X_1$

利用归纳 则得唯一性 #]

$F = F_1^{n_1} \cdots F_r^{n_r}$ F_i 不可约. 则 $V(F) = V(F_1) \cup \cdots \cup V(F_r)$ 为不可约分解

命题: X不可约 (1) X的每个非空开集U. $\overline{U} = X$

(2) 任意两个X的非空开集U_1和U_2. 有$U_1 \cap U_2 \neq \phi$

定义: X仿射代数集 记 $\mathrm{Func}(X) = \{f: X \to k\}$ 为函数环

η: $k[x_1 \cdots x_n] \to \mathrm{Frac}(X)$

$f \mapsto f|_X$ $\ker(\eta) = I(X)$

记 $\mathrm{Poly}(X) = \mathrm{Im}\,\eta$ 多项式函数环

(1) $\mathrm{Poly}(X) \cong k[x_1, \cdots x_n]/I(X)$

(2) $X = V(I)$. 包含I的极大理想形如 $(x_1 - a_1, \cdots x_n - a_n)$ $(a_1, \cdots a_n) \in X$

故 包含I的极大理想与X中点一一对应

$\Updownarrow$

Poly(X)的极大理想

1.6 仿射代数簇以及其上的函数

定义: 不可约仿射代数集称为仿射代数簇 形如 $X = V(P)$
P素

以下设X为代数簇 $\mathrm{Poly}(X) = k[x_1 \cdots x_n]/P$

记 $K(X) = \mathrm{Frac}\,\mathrm{Poly}(X)$. 有理函数域

例① $X = A^n$ $\mathrm{Poly}(X) = k[x_1, \cdots x_n]$ $K(X) = k(x_1, \cdots x_n)$

$\forall \varphi \in K(X)$ φ形如 $\dfrac{f(x_1, \cdots x_n)}{g(x_1, \cdots x_n)}$

② $X=V(xy-zw)\subseteq \mathbb{A}^4$

$k[x,y,z,w]/(xy-zw)$：非UFD

$\varphi=\frac{x}{z}=\frac{w}{y}\in K(X)$ z≠0或y≠0处定义

③ $X=V(y^2-x^3)$ $\varphi=\frac{y^2}{x^2}=x$ 处处有定义

$\varphi\in K(X)$, $x\in X$ 若取邻域 V_x s.t. $\varphi=\frac{f}{g}$ in V_x $f,g\in Poly(X)$

$g\neq 0$ 则称 φ 在 x 处有定义

命题 (1) $f,g\in Poly(X)$ 若存在非空开集 U s.t. $f|_U=g|_U \Rightarrow f=g$

(2) 设 $\varphi\in k(X)$，则 $Dom(\varphi)$ 非空开集

(3) 设 $\varphi_1,\varphi_2\in K(X)$ 若存在非空开集 U s.t. $\varphi_1|_U=\varphi_2|_U$

则 $\varphi_1=\varphi_2$ in $K(X)$

[pf (1). $\{f-g=0\}$ 为闭集 又包含非空开集 U $\bar{U}=X \Rightarrow \{f-g=0\}=X$]

Fact：可以定义映射 φ map: $Dom(\varphi)\to k$ 不依赖代表元选取！

$x\mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$

1.7 正则函数

定义 X 代数簇，$U\subseteq X$ 非空开集 函数 $f:U\to k$ 满足

$\forall x\in U\ \exists x$ 邻域 V_x $\varphi_x\in K(X)$ s.t. $f|_{V_x}=\varphi_x|_{V_x}$ 则 f 为 U 上正则函数

$(f\in Reg(U))$

注：$Reg(U)\subseteq K(X)$

$f\mapsto \frac{u_x}{v_x}$ 良定性：上面的命题(3)

$(\forall x\ \exists U_x\ s.t.\ f|_{U_x}=\frac{u_x}{v_x})$ (任意两个开集相交！)

例 $X=V(xy-zw)\subseteq \mathbb{A}^4$　　$U=X\setminus V(yz)=\underbrace{X\setminus V(z)}_{U_1}\cup\underbrace{X\setminus V(y)}_{U_2}$

$f: U\to k$

$p\mapsto\begin{cases}\frac{x}{z} & p\in U_1\\ \frac{w}{y} & p\in U_2\end{cases}$　定义了一个 $f\in \mathrm{Reg}(U)$

定义: $x\in X$　$\mathcal{O}_{X,x}=\{$在X的某个邻域有定义的有理函数$\}$

$=\{\varphi\in k(X)\mid \varphi$在$x$有定义$\}$　　X在x处正则函数芽

命题 (1) $\mathrm{Reg}(U)=\bigcap_{x\in U}\mathcal{O}_{X,x}$

(2) $\mathcal{O}_{X,x}=\mathrm{Poly}(X)_{m_x}$　　$m_x=\{f\in \mathrm{Poly}(X)\mid f(x)=0\}$
为$\mathrm{Poly}(X)$在x处的极大理想

(3) $m_{X,x}=\{\varphi\in\mathcal{O}_{X,x}\mid \varphi(x)=0\}$　则$(\mathcal{O}_{X,x}, m_{X,x})$局部环

(4) $\mathrm{Reg}(X)=\mathrm{Poly}(X)$　　$\left(\begin{matrix}\mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x}=k\\ \bar{\varphi}\mapsto\varphi(x)\end{matrix}\right)$

[Pf (2) $\mathrm{Poly}(X)_{m_x}=\left\{\frac{f(x)}{s(x)}\,\middle|\, \begin{matrix}f,s\in\mathrm{Poly}(X)\\ s(x)\neq 0\end{matrix}\right.$ + 交叉相乘等价关系$\}$
故显然

(4) 交换代数 R整 则 $R=\bigcap_{m\in \mathrm{Max}(R)}R_m$　　(*)

则 $\mathrm{Reg}(X)=\bigcap_{x\in X}\mathcal{O}_{X,x}=\bigcap_{x\in X}\mathrm{Poly}(X)_{m_x}\overset{\text{Hilbert}}{\underset{(*)}{=}}\mathrm{Poly}(X)$]

注(1) $\mathcal{O}_{X,x}=\varinjlim_{x\in U}\mathrm{Reg}(U)$

(2) $f\in\mathrm{Poly}(X)$　$D_X(f)=X\setminus V_X(f)=\{f\neq 0\}$ 称为X的主开集

$\mathrm{Reg}(D_X(f))=\mathrm{Poly}(X)_{(f)}$

1.8 仿射簇之间的映射

定义: $X \subseteq A^n$ $Y \subseteq A^m$ 仿射簇 $\varphi: X \to Y$ 称为多项式映射

若 $\exists\, u_1, \dots u_m \in \Gamma(X)$ s.t. $\varphi(x) = (u_1(x), \cdots u_m(x))$

例: ① $\varphi: A^1 \to A^2$ $t \mapsto (t^2, t^3)$

② $V(xy-1) \subseteq A^2 \to A^2$

$(x, y) \mapsto \overline{x^2}$

命题: $\varphi: X \to Y$ 多项式映射诱导 k代数同态 $\varphi^*: \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$

[pf. $X \subseteq A^n$, $Y \subseteq A^m$

$$\Gamma(Y) = k[y_1, \cdots y_m]/I(Y) \to \mathrm{Func}(X)$$

$$\overline{y_i} \mapsto u_i \in I(X)$$

$$\overline{g(y_1, \cdots y_m)} \mapsto g(u_1(x), \cdots u_m(x))$$

]

定理: 多项式映射集 $\mathrm{Poly}(X, Y) \xleftrightarrow{1-1} \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\Gamma(Y), \Gamma(X))$

[$\to$ ✓ $\varphi \mapsto \varphi^*$

$\leftarrow$: $\eta: \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ 记 $u_i = \eta(y_i)$

定义 $\varphi_\eta: X \to A^m$

$x \mapsto (u_1(x), \cdots u_m(x))$ check $\varphi_\eta(X) \subseteq Y$ 即可.]

定义: X, Y 仿射簇 有理映射 $\psi: X \to Y$ 由 $\varphi_1, \cdots \varphi_m \in K(X)$ 给出

$$\mathrm{Dom}\,\psi = \bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{Dom}(\varphi_k)$$

$$\psi^*: \Gamma(Y) \to \mathrm{Reg}(\mathrm{Dom}(\psi))$$

$$g \mapsto g(\varphi_1(x), \cdots \varphi_m(x))$$

同样. $\mathrm{Rat}(X,Y) \rightleftarrows \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(\underbrace{\Gamma(Y)}_{\text{不是}K(Y)'}, K(X)) \supsetneq \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(K(Y), K(X))$

例: $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow V(y-x^2) = Y$

$t \mapsto (\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2})$

但 $\frac{1}{y-x^2} \in K(Y)$

无法被拉回到 $K(X)$!

定义 $\varphi \in \mathrm{Rat}(X,Y)$ 称为支配的 若 $\overline{\varphi(\mathrm{Dom}\varphi)} = Y$

例: $\varphi: \mathbb{A}^1 \to V(y-x^2) \hat{=} Y \subseteq \mathbb{A}^2$ 支配 但将 $\mathbb{A}^1$ 视作 Y 则不支配

$t \mapsto (\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2})$

定理: (1) $\varphi: X \to Y$ 支配 $\Leftrightarrow$ $\varphi^*: \Gamma(Y) \to K(X)$ 单

(2) $\{\overset{X \to Y}{\text{支配}}\} \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(K(Y), K(X))$

Pf (1) $\Rightarrow$ $\varphi^*: \Gamma(Y) \to K(X)$

$\overline{g(y_1, \cdots y_m)} \mapsto g(\varphi_1, \cdots \varphi_m)$

$\forall \bar{g} \in \mathrm{Ker}\varphi^*$ $\forall x \in \mathrm{Dom}\varphi$. $g(\varphi_1(x), \cdots \varphi_m(x)) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi \subseteq V_Y(\bar{g})$

若 φ 支配 则必有 $\bar{g} = 0$ $\Rightarrow \varphi^*$ 单. 故可延拓为 $K(Y) \to K(X)$

$\Leftarrow$ 若 $\mathrm{Im}\varphi \subseteq V_Y(\bar{g})$ 则 $\bar{g} \circ \varphi|_{\mathrm{Dom}\varphi} = 0$ 即 $\varphi^*(\bar{g})|_{\mathrm{Dom}\varphi} = 0$

则 $\underset{\text{in } K(X)}{\varphi^*(\bar{g}) = 0}$ $\Rightarrow \bar{g} = 0$ in $\Gamma(Y)$

(2) 作业

#]

注: (1) $X \xrightarrow{\varphi_1} Y \xrightarrow{\varphi_2} Z$: 多项式映射的复合仍为多项式映射

(2) 有理映射不能复合

(3) 支配有理映射可复合为有理映射

(4) $\varphi: X \to Y$ 支配 若 φ 有逆' $\psi: Y \to X$ s.t. $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_X: X \to X$

$\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Y: Y \to Y$

则称 φ 为双有理映射

定理: $\varphi: X\to Y$ 支配. 则双有理 $\Leftrightarrow \varphi^*: K(Y)\xrightarrow{\sim} K(X)$

$\Rightarrow \exists\, U\subseteq X,\ V\subseteq Y$ s.t. $\varphi: U\to V$ 一一对应

例: $\mathbb{A}^1 \xrightarrow{\varphi} \underset{\overset{\|}{V(y-x^2)}}{Y} \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ $\quad t\mapsto (t,t^2)$ $\quad x \mapsto \frac{1}{x}$ $\quad x \downarrow \frac{1}{x}$

$K(V(y-x^2)) = \mathrm{Frac}(k[x,y]/(y-x^2))$

$\overset{\wr\wr}{K(X)} = \mathrm{Frac}(k[x])$

例: ① $k(t,s) \cong \mathrm{Frac}(k[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2+1))$ 球极投影

② $\cong \mathrm{Frac}(k[x,y,z]/(x^3+y^3+z^3+1))$

(1) $F,G\in k[x,y]$ $(F,G)=1$ 则 $V(F)\cap V(G)$ 有限

(2) $F\in k[x,y]$ 不可约. $V(F)$ 无限. 则 $I(V(F))=(F)$ $V(F)$ 不可约 $\Rightarrow \mathbb{A}^2(k)$ 的代数簇: $\emptyset$. $\mathbb{A}^2(k)$ 有限个点. $V(F)$ 如上

(3) k 闭 $F=F_1^{n_1}\cdots F_r^{n_r} \in k[x_1\cdots x_n]$ 则 $V(F)=V(F_1)\cup\cdots V(F_r)$ 不可约分解 $I(V(F))=(F_1\cdots F_r)$

(4) $V(I)$ 有限 $\Leftrightarrow k[x_1\cdots x_n]/I$ 有限维 $\#V(I)\leq \dim(k[x_1\cdots x_n]/I)$

2. 射影代数簇

2.1 射影代数集

$\forall\lambda\neq 0$ $\quad F(\lambda x_0,\cdots\lambda x_n)=0 \Leftrightarrow F_0(x_0,\cdots x_n)=F_1=\cdots=F_d=0$

定义: 射影代数集形如 $V_p(F_0(x_0\cdots x_n), F_1\cdots)$ 其中 F_i 齐次

命题: U_0 与 $\mathbb{A}^n$ 中的Zariski拓扑与 $\mathbb{P}^n$ 中诱导的Zariski拓扑一致

[pf. $\mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n$ $\quad (x_1,\cdots x_n) \mapsto [1,x_1,\cdots x_n]$

$V(f(x_1\cdots x_n))\subset \mathbb{A}^n \mapsto V_p(x_0^{\deg f} f)\subseteq \mathbb{P}^n$

$V_p(f([x_0\cdots x_n]))\subseteq \mathbb{P}^n \mapsto V(f_0,\cdots f_d)\subseteq \mathbb{A}^n$]

分次环. 齐次理想

$I=\bigoplus_d (I\cap S_d)$

例: $(1-x)\subseteq k[x]$ 不齐次

命题：S分次环 (1) $I\leq S$ 齐次理想 $\Leftrightarrow$ I由齐次元生成

(2) I J齐次，则 $I+J$, IJ, $I\cap J$, $\sqrt{I}$ 齐次

[pf. (1) $\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow$：设 $I=\{\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\}$ x_α 齐次 $\deg x_\alpha=d_\alpha$

$\forall a\in I$ $a=a_0+\cdots a_n$ 齐次分解 只须证 $a_d\in I$

可设 $a=\sum_{i=1}^{m} b_{\alpha_i}x_{\alpha_i}$ 其中 b_{α_i} 齐次 则根据次数进行齐次组合即可]

2.2 射影代数集 ↔ 齐次理想

$C(\phi)\triangleq\{0\}$

$X\subseteq\mathbb{P}^n \xleftarrow{\pi} \mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}$ $C(X)=\pi^{-1}(X)\cup\{0\}$ 锥

$$I_p(X)=\{F\in k[x_0,\dots x_n]\mid \forall(a_0,\dots a_n)\in X\ \lambda\in k\quad \underbrace{F(\lambda a_0,\dots\lambda a_n)=0}_{\Updownarrow}\}$$

$F_0(a_0,\dots a_n)=\cdots=F_d=0$

即 $F\in I_p(X)\Leftrightarrow F_0,\cdots F_d\in I_p(X)$

故 $I_p(X)$ 齐次理想

$I_p(X)=I(C(X))$

$I_p(V_p(I))=\bar{I}$
$(X\neq\phi)$

Thm (射影Hilbert) (1) $X=V_p(I)\subseteq\mathbb{P}^n$ $I\neq(1)$. 则 $I_p(X)=\sqrt{I}$

[pf. I齐次. 设 $I=(F_1,\cdots F_m)$ 齐次多项式

则 $I_p(X)=I(C(X))=\sqrt{I}$]

(2) $V_p(I)=\phi\Leftrightarrow\sqrt{I}=(x_0,\dots x_n)\Leftrightarrow\exists N$, s.t. $x_0^N,\cdots x_n^N\in I$

命题：$X=V_p(I)$ 不可约 $\Leftrightarrow$ $I_p(X)$ 素

命题. $X=V_p(I)$ (1) X的闭集降链 有限长

(2) X唯一分解为不可约分支之并

2.3 射影簇

$X=V_p(P)\subseteq P^n$ P素齐次 $S_X=k[x_0,\cdots x_n]/P$

定义. $\hat{K}(X)=\left\{\frac{\overline{F(x_0,\cdots x_n)}}{\overline{G(x_0,\cdots x_n)}} \middle| \deg\bar F=\deg\bar G\quad \bar G\neq 0\right\}$ X上有理函数

$\mathcal{O}_{X,P}=S(X)_{(m_P)}$ (Thm 3.4)

$K(X)=S(X)_{(0)}$

① $\varphi=\frac{\bar F}{\bar G}$ 在 $U=\{\bar G\neq 0\}$ 上是良定的

② $\hat K(X)$ 中定义 $\frac{\bar F_1}{\bar G_1}\sim\frac{\bar F_2}{\bar G_2}\Leftrightarrow F_1G_2-F_2G_1\in P$ $K(X)=\hat K(X)/\sim$ 有理函数域

命题. $X\subseteq P^n$ 射影簇 $Y=X\cap U_0\neq\phi$

(1) $Y\subseteq U_0\cong A^n$ 为仿射簇 (2) $K(X)=K(Y)$

Pf (1) $I_p(X)=(F_1,\cdots F_m)$ $Y=V(\underbrace{F_1(1,x_1,\cdots x_n),\cdots F_m(1,x_1,\cdots x_n)}_{(f_1,\cdots f_m)})$

(点集做法 $\bar Y=X$ Y可约 可推出X可约. 矛盾')

代数做法. 即证 $(f_1,\cdots f_m)$素

若 $fg\in(f_1\cdots f_m)$ $f,g\in k[x_1\cdots x_n]$ $f(x_1,\cdots x_n)=f(\frac{x_1}{x_0},\cdots\frac{x_n}{x_0})$

$\exists N_1,N_2>0$ s.t $x_0^{N_1}f$. $x_0^{N_2}g$ 为 $k[x_0,\cdots x_n]$ 中齐次

又 $V_p((x_0^{N_1}f)\cdot(x_0^{N_2}g))\supseteq\bar Y=X$ $\Rightarrow$ $x_0^{N_1}f\in I_p(X)$ 或 $x_0^{N_2}g\in I_p(X)$

$x_0^{N_1}f=G_1F_1+\cdots G_mF_m$ $\Rightarrow f=x_0^{-N_1}(\cdots)=g_1f_1+\cdots+g_mf_m\in(f_1,\cdots f_m)$

(2) $K(X)\longleftrightarrow K(Y)$

$$\frac{\overline{F(x_0,\cdots x_n)}}{\overline{G(x_0,\cdots x_n)}}\longrightarrow\frac{\overline{F(1,x_1,\cdots x_n)}}{\overline{G(1,x_1,\cdots x_n)}}$$

$$\frac{x_0^N f}{x_0^N g}\longleftarrow\frac{f(x_1,\cdots x_n)}{g(x_1,\cdots x_n)}\quad (x_1=\frac{x_1}{x_0}\cdots)$$

3 抽象代数簇

3.1 代数簇

定义 射影代数簇 $\bar{X} \subseteq P^n$ 中的非空开集 X 称为代数簇

$\varphi \in K(\bar{X})$ 称为 X 上有理函数

$U \subseteq X$ 开 $\Gamma(U) \triangleq \{\varphi \in K(X) \mid \mathrm{Dom}\,\varphi \supseteq U\}$

命题 (1) 代数簇拟紧. 即 X 中开集紧

[pf 只须证代数簇紧即可

对代数簇 $X \subseteq P^n$ $\bar{X}$ 射影代数簇. 设 $\bar{X} = V_p(I)$ $X = \bar{X} \setminus V_p(F_1, \cdots F_m)$

设 X 有开覆盖 $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ 其中 $U_\alpha = \bar{X} \setminus V_p(\underbrace{F_1, \cdots F_m, \cdots}_{I_\alpha})$

则 $\bigcap_\alpha V_p(I_\alpha) = V_p(F_1, \cdots F_m)$

Noether性：射影空间中闭集降链有限步稳定

$\exists$ 有限个 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ s.t. $\bigcap_{i=1}^{n} V_p(I_{\alpha_i}) = V_p(F_1 \cdots F_m)$ 则 $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$]

(2) $f \in \Gamma(X)$ 则 $V_X(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ 为 X 的闭集

[pf. 由(1). 存在有限多个表达式 $f = \frac{F_1}{G_1} = \cdots \frac{F_r}{G_r}$ 使得

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} (\underbrace{X \setminus V_p(G_i)}_{\substack{\| \\ U_i}})$$

$V_X(f) = \bigcup_{i=1}^{r} (\underbrace{U_i \cap V_p(F_i)}_{U_i\text{的闭集}})$ 则为 X 的闭集]

3.2 代数簇的映射

定义. X Y 代数簇 $\varphi: X\to Y$ s.t.

(1) φ 连续

(2) $\forall$ 开集 $U\subseteq X$ $V\subseteq Y$ s.t. $\varphi(U)\subseteq V$.

有 $\varphi^*(\Gamma(V))\subseteq\Gamma(U)$

则称 φ 为一个态射

$\Leftrightarrow \forall x\in X$ $\varphi^*(\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)})\subseteq\mathcal{O}_{X,x}$

[$\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}=\varinjlim\limits_{\varphi(x)\in V}\Gamma(V)$

$\forall f\in\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}$ $\varphi^* f\in\Gamma(\varphi^{-1}V)\subseteq\mathcal{O}_{X,x}$

$\underline{\varphi}$ 连续性

$\Leftarrow$ $\forall f\in\varphi^*(\bigcap\limits_{y\in V}\mathcal{O}_{Y,y})$

$\forall x\in U$ $f\in\varphi^*(\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)})\subseteq\mathcal{O}_{X,x}$

$\Rightarrow f\in\bigcap\limits_{x\in U}\mathcal{O}_{X,x}=\Gamma(U)$]

例: $\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^2$

$[x_0,x_1]\mapsto[x_0^2,x_0x_1,x_1^2]$

定义. X. Y 代数簇. 有理映射 $\varphi: X\to Y$ 由不全为0的 $u_0\cdots u_m\in K(X)$ 表述

$\underset{\mathbb{P}^n}{\cap}$ $\underset{\mathbb{P}^m}{\cap}$

$x\mapsto[u_0(x),\cdots u_m(x)]$

称 $[u_0\cdots u_m]$ 和 $[v_0\cdots v_m]$ 等价.

若 $\exists\varphi\in K(X)$ s.t. $v_i=\varphi u$.

称 φ 在 $x\in X$ 处有定义. 若 x 处有表述式 $\varphi=[\frac{F_0}{G_0},\cdots\frac{F_m}{G_m}]$ 且 $G_i(x)\neq0$ $F_i(x)$ 不全为0

$[\frac{F_0}{G_0}\cdots\frac{F_m}{G_m}](x)\in Y$

同样显然有定义的点构成开集

且在X的某个开集上相同的有理函数相同

Fact: ① 开嵌入 闭嵌入 为态射

② 态射的复合为态射

定理 $X.Y$代数簇 Y仿射 则 $\mathrm{Mor}(X,Y) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-}Alg}(\Gamma(Y), \Gamma(X))$

特别 当X也仿射时 $\mathrm{Mor}(X,Y) \cong \mathrm{Poly}(X,Y)$

Pf. $\Rightarrow$: $\varphi \mapsto \varphi^*$

$\Leftarrow$. 给定 η: $\Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ 令 $\varphi_\eta: X \to Y$

$\overset{\Gamma(Y)}{\overset{\shortparallel}{k[y_1 \cdots y_m]/_{I(Y)}}}$ $\qquad x \mapsto (u_1(x), \cdots u_m(x))$

$u_i = \eta(y_i) \in \Gamma(X)$

φ_η是态射 (1)连续: 对Y中闭集 $V_Y(g_1(y_1 \cdots y_m), \cdots g_r)$

$$\varphi_\eta^{-1}(V_Y(g_1, \cdots g_r)) = V_X(\underbrace{g_1(u_1 \cdots u_m)}_{\in \Gamma(X)}, \cdots g_r(u_1 \cdots u_m)) \quad \text{闭}$$

(2) $\varphi_\eta^* \mathcal{O}_{Y,\varphi_\eta(x)} \subset \mathcal{O}_{X,x}$: $x \in X$. 对$\varphi = \dfrac{f(y_1 \cdots y_m)}{\underbrace{g(y_1 \cdots y_m)}_{\neq 0}} \in \mathcal{O}_{Y,\varphi_\eta(x)}$

$$\varphi_\eta^* \varphi = \frac{f(u_1 \cdots u_m)}{\underbrace{g(u_1 \cdots u_m)}_{\neq 0}} \in k(X) \cap \mathcal{O}_{X,x}$$

直接验证 $\varphi_\eta^* = \eta$ 即可 #]

定理 $X.Y$代数簇 $\varphi: X \to Y$ 映射 则 φ为态射 $\Leftrightarrow$ 有理映射且 $\mathrm{Dom}\,\varphi = X$

Pf. $\Rightarrow$ 设 $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ $\quad Y_i' = Y \cap U_i \subseteq \mathbb{A}^m$ $\quad X_i' = \varphi^{-1}(Y_i')$

则 φ $X_i' \to Y_i' \subseteq \mathbb{A}^m$ 由φ连续 X_i'开集

φ_i: $X_i' \to Y_i' \to \mathbb{A}^m \subseteq \mathbb{P}^m$ 也是态射

以φ_0为例) $\exists u_1, \cdots u_m \in \Gamma(X_0')$ s.t. φ_0 $X_0' \to \mathbb{A}^m \subseteq \mathbb{P}^m$

$(u_i = \varphi_i^* y_i = \varphi_i^* \frac{Y_i}{Y_0})$ $\qquad x \mapsto [1, u_1, \cdots u_m]$

故φ_i为有理映射

又 $\varphi_0|_{X_0' \cap X_i'} = \varphi_i|_{X_0' \cap X_i'}$ $\to \varphi_0$ φ_i等价 $\Rightarrow \varphi$有理映射 $\mathrm{Dom}\,\varphi = X$

$\Leftarrow$ 存在φ的有限个表述 $\varphi = \left[\frac{F_{t,0}}{G_{t,0}}, \cdots \frac{F_{t,m}}{G_{t,m}}\right]$ $t=1,\cdots r$

$$\text{s.t. } X = \bigcup_{t=1}^{r} \underbrace{\left(X \setminus \left(V_p(G_{t,0}, \cdots, G_{t,m}) \cup V_p(F_{t,0} \cdots F_{t,m})\right)\right)}_{\overset{\parallel}{X_t'}}$$

验证φ正则且φ^*: $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$

$$X_t' = \bigcup_{j=0}^{m} X'_{t,j} = \bigcup_{j=0}^{m} X_t \cap \{F_{t,j} \neq 0\}$$

只须验证φ: $X'_{t,j} \to Y'_j \subseteq \{Y_j \neq 0\} \subseteq A^m$符合即可

以$j=0$为例. $\varphi|_{X'_{t,0}}$: $X'_{t,0} \to Y'_0 \subseteq A^m \subset P^m$

形如 $x \mapsto [1, u_1, \cdots u_m]$ $u_i \in \Gamma(X'_{t,0})$

验证$\varphi|_{X_{t,0}}$为态射同上个定理 #]

称代数簇X为仿射代数簇 是指X同构于某个仿射代数簇

例: $A^1 \setminus \{0\}$ 仿射

$$\overset{\parallel}{A^1} \setminus V(x) \cong V(xy-1) \subseteq A^2$$

φ: $x \mapsto (x, \frac{1}{x})$

$x \leftarrow\!\shortmid (x,y)$

命题: X仿射 $f \in \Gamma(X)$ $f \neq 0$ $D_X(f) = X \setminus V(f)$ 主开集也仿射

Pf $X = V(P) \subseteq A_n$ $f = \overline{F(x_1, \cdots x_m)} \in \Gamma(X)$

φ $D_X(f) \to Y = V(P, yF-1)$

$x \mapsto (x, \frac{1}{F(x)})$

ψ: $Y \to D_X(f)$ $\Rightarrow D_X(f) \cong Y$ #]

$(x,y) \mapsto x$

命题 X代数簇 (1) 仿射开集为 X 的开集基

(2) X 为有限个仿射开集之并

pf (1) $X\subseteq P^n$ 设 $x\in\{X_0\neq 0\}$ 设 $x\in U\subseteq\{X_0\neq 0\}\subseteq A^n$

U在A^n中闭包 $\bar{U}$为仿射簇 $\bar{U}=V(I)$ $U=\bar{U}\setminus V(J)$ $x\notin V(J)$

不妨 $U\neq\bar{U}$ $J\neq(0)$ 可取 $f\in J$ s.t. $f(x)\neq 0 \Rightarrow x\in D_{\bar{U}}(f)$

故找到仿射开集包含x $=\bar{U}\setminus V(f)\subset U$

(2) 由(1)和X紧立得 #]

抽象代数簇定义 ⟿ 流形

$P^1\times P^1$ $U_{ij}=\{X_i\neq 0\ Y_j\neq 0\}\subseteq A^2$

$U_{00}\cap U_{01}=A^1\times A^1\setminus\{0\}$ ⇒定义代数簇结构

$P^1\times P^1\to P^3$

$[X_0,X_1,Y_0,Y_1]\mapsto[X_0Y_0,X_0Y_1,X_1Y_0,X_1Y_1]\subseteq V_p(Z_0Z_3-Z_1Z_2)$

可证 $X\cong V_p(Z_0Z_3-Z_1Z_2)$

2.4 维数

定义: K/k 有限生成域扩张 $K=k(x_1,\cdots x_n)$ $x_i\in K$

(1) $\exists x_1 \cdots x_r \in K$ 满足 (i) $x_1, \cdots x_r$ 在k上代数无关

(ii) $K/k(x_1 \cdots x_r)$ 代数扩张

则称 $x_1 \cdots x_r$ 为 K/k 的超越基

(2) r 不依赖于超越基选取 记 $r=\mathrm{tr.deg}\, K/k$ 为超越次数

pf 引理: 记号如上 x_n 在$k(x_1,\cdots x_{n-1})$ 上代数

$\Leftrightarrow$ $\exists$不可约多项式 $F(T_1,\cdots T_n)\in k[T_1,\cdots T_n]$

s.t. $F(x_1,\cdots x_n)=0$ 且 x_n 在F中出现

(1) 逐次添加即可

(2) 对两组超越基 $x_1 \cdots x_r$ 和 $y_1 \cdots y_s$. 不妨 $r\leq s$

已知 y_1 在 $k(x_1,\cdots x_r)$ 代数 $\exists F(x_1,\cdots x_r, y_1)=0$

至少一个x_i出现 不妨为x_1. 则x_1在 $k(x_2,\cdots x_r, y_1)$ 代数

则 $K/k(y_1, x_2 \cdots x_r)$ 代数 $\exists y_2$ 在$\cdots$代数

类似地 $K/k(y_1, y_2, x_3 \cdots x_r)$ 代数 $\therefore$ $(y_1 \cdots y_r)$ 超越基 #)

定义: X 代数簇 $\dim X \triangleq \mathrm{tr.deg}\, K(X)/k$

例: (1) $\dim \mathbb{A}^n=n$

(2) F不可约. 则 $\dim V(F)=n-1$

$K(X)=k(\bar{x}_1,\cdots \bar{x}_n)$ $F(\bar{x}_1,\cdots \bar{x}_n)=0$ 不妨x_n出现在F中

则 $\bar{x}_n$ 在 $k(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_{n-1})$ 代数 $\Rightarrow \dim X\leq n-1$

Claim: $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_{n-1}$ 无关. 否则 $G(\bar{x}_1, \cdots \bar{x}_{n-1})=0 \Leftrightarrow G(x_1 \cdots x_{n-1})\in(F)$

但F包含x_n. 矛盾!

$\Rightarrow \dim X=n-1$

命题 char $k=0$ X为n维代数簇 则$X \overset{bir}{\sim} V(F) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ F不可约

[pf 由定义 $\exists\, x_1, \dots x_n \in k(X)$ $k(X)/k(x_1 \dots x_n)$ 有限扩张

$k(x_1 \dots x_n) \cong k(\mathbb{A}^n)$

char $k=0$ $\exists\, \alpha \in k(X)$ s.t. $k(X) = k(x_1, \dots x_n)(\alpha) \cong k[x_1 \dots x_n][y]/(F)$

其中 $F \in k[x_1, \dots x_n, y]$ 不可约. 令 $Y = V(F)$. 则 $X \overset{bir}{\sim} Y$ #]

命题 (1) $U \subseteq X$ 非空开 则 $\dim U = \dim X$

(2) $Z \subseteq X$ 闭(不可约) 则 $\dim Z \le \dim X$ 取等 $\Leftrightarrow Z = X$

[pf (2) 不妨设 $Z \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ 仿射闭子集 $\Gamma(X) = k[T_1 \dots T_n]/I(X)$ $\bar{T}_i$

$\Gamma(Z) = k[T_1 \dots T_n]/I(Z)$ $\bar{\bar{T}}_i$

若 $\bar{\bar{T}}_{i_1}, \dots \bar{\bar{T}}_{in}$ 无关 则 $\bar{T}_{i_1} \dots \bar{T}_{in}$ 无关 $\Rightarrow \dim X \ge \dim Z$

若 $\dim X = \dim Z = n$ 若 $Z \ne X$ 则 $\exists f \in \Gamma(X)$ s.t. $f \ne 0$ 但 $f|_Z = 0$

设 $\bar{\bar{T}}_1 \dots \bar{\bar{T}}_n$ 为 $K(Z)$ 的超越基 则 $\bar{T}_1 \dots \bar{T}_n$ 超越基 of $K(X)$

$\Rightarrow$ 有关系 $a_m(\bar{T}_1 \dots \bar{T}_n) f^m + \dots + a_0(\bar{T}_1 \dots \bar{T}_n) = 0$ in $\Gamma(X)$

$f|_Z = 0 \Rightarrow a_0(\bar{\bar{T}}_1, \dots \bar{\bar{T}}_n) = 0$ 与 $\bar{\bar{T}}_1 \dots \bar{\bar{T}}_n$ 超越基矛盾! #]

命题 X为代数簇

(1) $\dim X = 0 \Leftrightarrow X = \{pt\}$

(2) $\dim X = 1$ 则 $I(X) = (f)$ $f \in k[x, y]$ 不可约
$X \subseteq \mathbb{A}^2$

(3) $\dim X = 1$ 则 $X \overset{bir}{\sim} V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ $f \in k[x, y]$ 不可约 (要求 $k = \bar{k}$)

[pf (2) 若 I 不为主理想 则 $\exists f, g \in I$ $(f, g) = 1$

则 $V(f, g)$ 有限 $\Rightarrow X$ 有限 矛盾!

(3) 只需考虑 $\mathrm{char}\, k = p > 0$ 时情形　取 $x \in K(X)$ s.t $K(X)/k(x)$ 代数扩张

若此扩张可分 则划归到上面情形

否则、取可分闭包　$\underset{\text{可分}}{k(x) \subset} \underset{\text{纯不可分}}{L \subset} K(X)$　$\left(\begin{matrix}\forall \beta \in K(X) \\ \beta^{p^r} \in L\end{matrix}\right)$

有限扩张链　$K_0 = L \subseteq K_1 = K_0(\beta_1) = K_0(\beta_0^{\frac{1}{p}})$

$\subseteq K_2 = K_1(\beta_1^{\frac{1}{p}}) \subset \cdots \subset K_r = K(X)$

$$\begin{tikzcd}
k(x) \arrow[r, "n\text{次可分}"] \arrow[d, "p\text{次}"] & k(x,\alpha) \arrow[r, "p\text{次}"] & K_1 = K_0(\beta_0^{\frac{1}{p}}) \arrow[d, hook] \\
k(x^{\frac{1}{p}}) \arrow[rr, "\le n\text{次}", "\text{可分}"'] \arrow[d, phantom, "\supseteq"] & & k(x^{\frac{1}{p}}, \alpha^{\frac{1}{p}}) \arrow[d, hook] \\
k(x^{\frac{1}{p^r}}) \arrow[rr] & & k(x^{\frac{1}{p^r}}, \alpha^{\frac{1}{p^r}})
\end{tikzcd}$$

(用到 $k = \bar{k}$. 可开 p 次根)

$\vdots$

则 $K(X) = k(x^{\frac{1}{p^r}}, \alpha^{\frac{1}{p^r}}) \cong k(x,y)/(F(x,y))$　#]

定理. X. Y 代数簇　则 (0) $X \overset{bir}{} Y$ ⇔ (1) $\exists\ \begin{matrix}U \subseteq X \\ V \subseteq Y\end{matrix}$ 开 s.t. $U \cong V$

(Cor 4.5)　⇔ (2) $K(X) \underset{k\text{-alg}}{\cong} K(Y)$

Pf. (0) ⇒ (1)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed, "\varphi"] & Y \arrow[r, dashed, "\psi"] & X \arrow[r, dashed, "\varphi"] & Y \\
U_1 \arrow[ru] & V_1 \arrow[ru] & U_1 & \\
U \arrow[r] \arrow[r, bend left] & V \arrow[r] \arrow[ru] & U \arrow[u, squiggly] &
\end{tikzcd}$$

取 $U = \varphi^{-1}(V_1) \cap U_1$

$V = \psi^{-1}(U_1) \cap V_1$

U 良定地打到 X 恒等. 故仍包含于 U_1　则 φ 将 U 打入到 V ⇒ $U \cong V$

(1) ⇒ (0) ✓

(0) ⇒ (2)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\text{复合}"] & Y \arrow[r, dashed, "\psi"] & X \\
K(X) & K(Y) \arrow[l, "\varphi^*"'] & K(X) \arrow[l, "\psi^*"']
\end{tikzcd}$$

$\varphi^* \circ \psi^* = 1$ ⇒ $K(X) \cong K(Y)$

(2)⇒(10) 给定 $\eta: K(X)\to K(Y)$ 不妨设 $Y\subseteq \mathbb{P}^m$ 且 $Y\cap U_0\neq\phi$

$\phi_\eta: X \dashrightarrow Y$ $\quad v_i=\frac{Y_i}{Y_0}\in K(Y)$

$x\mapsto [1,\eta(v_1),\cdots\eta(v_m)]$ #]

2.5 光滑与奇异

定理. $T^*_{X,x}=m_{X,x}/m^2_{X,x}$

$\Big(\mathcal{O}_{X,x}=S^{-1}\Gamma(X)=S^{-1}\big(k[x_1,\cdots x_n]/P\big)$

$m_{X,x}=S^{-1}(\underbrace{m_x}_{\substack{\shortparallel\\(x_1-a_1,\cdots x_n-a_n)}}+P)\Big)$

pf $T_{X,x}\in k^n=\bigoplus_{i=1}^n k\partial_{x_i}$

$0\leftarrow T^*_{X,x}\leftarrow (k^n)^*=\bigoplus_{i=1}^n k\underset{\substack{\shortparallel\\ d(x_i-a_i)}}{dx_i}\leftarrow \mathrm{span}_k\{df_i\}$

$T^*_{X,x}\cong (k^n)^*/\mathrm{span}\,\underbrace{J_x}_{\text{Jacobi行向量}}$

$f_i=\underbrace{l_i}_{\text{线性部分}}+h_i$

$l_i=\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1-a_1)+\cdots\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x_n-a_n)$

$\cong (k^n)^*/\mathrm{span}_k\{l_i\}$

$$m_{X,x}/m^2_{X,x}=S^{-1}\left(\frac{m_x+P}{m_x^2+P}\right)\cong\frac{m_x+P}{m_x^2+P}\cong\frac{m_x/m_x^2}{m_x^2+P/m_x^2}\cong\frac{\mathrm{span}_k\{x_1,\cdots x_n\}}{\mathrm{span}_k\{l_1,\cdots l_n\}}$$

定义: X代数簇 $x\in X$光滑: 若 $\dim_k m_{X,x}/m^2_{X,x}=\dim X$ 否则奇异

例 $X=V(y^2-x^3)\subseteq\mathbb{A}^2$ $\quad P=(x_0,y_0)\in X$

$J=(-3x^2,2y)$

$$\boxed{\dim T^*_{X,x}=n-\mathrm{rank}(J_x)}$$

P光滑 ⇔ $\mathrm{rank}(J_x)+\dim X=n$

⇔ $\mathrm{rank}(-3x^2,2y)=1$

例： $X=V(y^2-x^3)\subseteq A^2$

$T^*_{X,0}=(x,y)/m^2$ $m=(x,y)+(y^2-x^3)$

$m^2=(x^2,xy,y^2)+(y^2-x^3)=(x^2,xy,y^2)$

$=(x,y)/(x^2,xy,y^2)$ m/m² 计算 ↗

$=k\bar{x}\oplus k\bar{y}$ $\Rightarrow \dim T^*_{X,0}=2$ 奇异

命题：① $\dim X\le \dim_k m_{X,x}/m_{X,x}^2$

② $F(x_1,\cdots,x_n)$ 不可约. $X=V(F)\subseteq A^n$ 的光滑点集 X^{sm} 为非空开集

③ 若 char $k=0$ 或 $\dim X=1$ 则 X^{sm} 非空开集

1维代数簇

↕

曲线的光滑点

组合维数 $X_0=X\supsetneq X_1\supsetneq\cdots\supsetneq X_n=\{pt\}$

不可约闭集

↕ 最大长度称为X的组合维数 ↕

R Noether $P_0\subsetneq P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_n\subsetneq R$

素理想链的极大长度 Krull维数

定理. X为仿射曲线 $A=\Gamma(X)$ 则 A的非零素理想极大

Pf. 否则. 有 $(0)\subsetneq P\subsetneq Q$ 取 $u\in P$ $v\in Q\setminus P$

则 $K(X)/k(u)$ 代数扩张 特别地 v 为 $k(u)$ 上代数元

则∃不可约多项式 $F(x,y)\in k[x,y]$ $F(u,v)=0$

设 $F(x,y)=xG+H(y)$ $F(u,v)=\underbrace{uG(u,v)}_{\uparrow P}+\underset{\Downarrow}{H(v)}=0$

设 $H(y)=a(y-b_1)\cdots(y-b_n)\Rightarrow a(v-b_1)\cdots(v-b_n)\in P$ $H(v)\in P$

则∃ $y-b_i\in P\subseteq Q$ 由 $v\notin P$. $b_i\neq 0$ 但 $b_i\neq0$时 $v_i\notin Q$ 矛盾!]

定义: R整环 $K=\mathrm{Frac}(R)$.

$R^\vee=\{\alpha\in K \mid \alpha$ 在R上整 即∃首一多项式 $f\in R[x]$ s.t. $f(\alpha)=0\}$

为R的整闭化

若 $R=R^\vee$ 则R为整闭环

命题: UFD → 整闭

定理: R代数闭域. R整环且有限生成k代数. 则 $R^\vee$ 在 R上有限扩张. 特别地. $R^\vee$ 也有限生成

例). $R=k[x,y]/(y^2-x^3)$ $\qquad K(R)\simeq k(t)$

$\frac{y}{x}\mapsto t$ $\qquad$ 整闭

$\uparrow$

$\left(\frac{y}{x}\right)^2=x\in R \Rightarrow \frac{y}{x}\in R^\vee \qquad \Rightarrow R^\vee\supseteq R[\frac{y}{x}]=k[\frac{y}{x}=t]$

$x=\left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad y=\left(\frac{y}{x}\right)^3$

故 $R^\vee=k[t]\neq R$ $\qquad \Rightarrow$ R非整闭

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1 \arrow[r] & V(y^2-x^3) \\ t \arrow[r, mapsto] & (t^2,t^3) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} k[t] \arrow[d, equal] & R \arrow[l, hook'] \\ R^\vee & \end{tikzcd}$$

定义: R整环. $K=\mathrm{Frac}(R)$ 称R为DVR 若存在赋值 $v: K\setminus\{0\}\to\mathbb{Z}$

满足 (1) $v(1)=0$ $\qquad$ (2) $v(r_1r_2)=v(r_1)+v(r_2)$

(3) $v(r_1+r_2)\geq\min\{v(r_1),v(r_2)\}$ $\qquad$ (4) $\exists x\in K$ $v(x)=1$

例子 $R=\{a\in K \mid v(a)\geq 0\}\cup\{0\}$

命题: R为DVR. 则 (1) $m=\{a\in K \mid v(a)>0\}\cup\{0\}$ 极大理想

(2) (R,m) 局部环

(3) $m=(x)$ 且 R为PID

[pf (1)⇒(2) 若 $s \notin R\backslash m$ 则 $v(s)=0$ ⇒ $v(\frac{1}{s})=0$ ⇒ $\frac{1}{s}\in R$

故 s 为单位 ⇒ (R,m) 局部环

(3) $(x)\subseteq m$ 对 $a\neq 0\in m$ $v(a)=r$ 则 $v(\frac{a}{x^r})=0$

⇒ $\frac{a}{x^r}\in R$ 故 $a=\frac{a}{x^r}x^r\in m$ ⇒ $(x)=m$

若 $I\subseteq R$ 取 $a_0\in I$ s.t $v(a_0)=\min\{v(a) \mid \overset{a\neq 0}{a\in I}\}$

可验证 $I=(a_0)$ 故 R 为PID #]

定理: X 代数曲线 $P\in X$ TFAE

(1) P 为 X 的光滑点 (2) $(\mathcal{O}_{X,P}, m_{X,P})$ 为DVR

(3) P 为 X 的正规点, 即 $\mathcal{O}_{X,P}$ 正规

例: X维数为1条件不可去

如 $X=V(xy-z^2)\subseteq A^3$ $k[x,y,z]/(xy-z^3)$ 正规 但非光滑

[pf. (2)⇒(1)(3) ✓

(3)⇒(1) 即证 $\dim_k m_{x,p}/m_{x,p}^2=1$

取 $u,v\in m_{x,p}/m_{x,p}^2$ 只需证 $\bar{u},\bar{v}$ 线性相关

由 u v 代数相关 ∃不可约多项式 f s.t $\underset{f_d+\cdots f_N}{f(u,v)}=0$

$$f_d(u,v)=\sum_{i+j=d}a_{ij}u^iv^j \xrightarrow[\text{不妨}]{\text{对}u,v\text{线性变换}} u^d+a_{d-1}u^{d-1}v+\cdots+a_0v^d$$

则 $F(u,v)/v^d=\overset{\text{可逆}}{\boxed{(1+\underbrace{c_d(u,v)}_{m})}}(\frac{u}{v})^d+\cdots \quad (a_0+c_0(u,v))$ c_i 多项式

由正规性 $f=\frac{u}{v}\in\mathcal{O}_{x,p}$ ⇒ $\bar{u}=\bar{v}\bar{f}$ $\bar{f}\in\mathcal{O}_{x,p}/m_{x,p}=k$ ✓

(1)⇒(2) 用Nakayama引理.略 #]

命题 X 曲线 P光滑 则 $\forall \varphi: X \to \mathbb{P}^n$ 有理映射在P有定义

[pf $\varphi: X \to \mathbb{P}^n$

$x \mapsto [u_0 \cdots u_n]$ $u_i \in K(X)$

由$\mathcal{O}_{X,P}$ DVR. 设 $v: K(X) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的赋值

不妨 $v(u_0)$最小. 则 $v(\frac{u_i}{u_0}) \geq 0$ 从而 $\frac{u_i}{u_0} \in \mathcal{O}_{X,P}$

故 $\varphi: [1, \frac{u_1}{u_0} \cdots \frac{u_n}{u_0}]$ 在P有定义 #]

2. 概型

2.1 层

定义: X 拓扑空间　S: X 上开集范畴（态射 = 包含）

Abel 群预层为 $\mathcal{F}: S^{op}\to \mathcal{A}$ 的一个函子　其中 $\mathcal{A}$ 为 Abel 群范畴

即: $\forall$ 开集 $U\subseteq X$ 给一个 Abel 群 $\mathcal{F}(U)$. s.t.

(0) $\mathcal{F}(\phi)=0$　(1) $\forall V\subseteq U$ 存在 $r_{UV}: \mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(V)$ 为 Abel 群同态 称为限制映射

(2) $r_{UU}=\mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$

(3) 若 $W\subseteq V\subseteq U$ 有 $r_{UW}=r_{UV}\circ r_{VW}$

例: X 流形　$C_X^\infty(U)=\{U\text{上光滑函数}\}$　层

$X=\mathbb{R}$　$L_X^1(U)=\{U\text{上绝对可积函数}\}$　预层

X 拓扑空间　A Abel 群　$A_X(U)=\bigoplus_{U\text{的连通分支}V} A_V$

定义: $s\in\mathcal{F}(U)$ 为 U 上截面　$V\subseteq U$. 则 $r_{UV}(s)$ 记为 $s|_V$

若 $\mathcal{F}_x=\varinjlim_{U\ni x}\mathcal{F}(U)=\bigsqcup_{U\ni x}\mathcal{F}(U)/\sim$　$s_U\sim t_V\iff\exists W$ s.t. $s_U|_W=t_V|_W$

$\alpha\in\mathcal{F}_x$ 可表达为 $\bar{s}_U$

Fact (1) $\alpha=\bar{s}_U=0\iff\exists V\subseteq U$ s.t. $s_U|_V=0$

(2) $\alpha=\bar{s}_U$. $\beta=\bar{t}_V$　$\alpha=\beta\iff\exists W$ s.t. $s_U|_W=t_V|_W$

(3) $s\in\mathcal{F}(U)$　$\{x\in U \mid s_x=0 \text{ in } \mathcal{F}_x\}$ 为开集

若预层 $\mathcal{F}$ 满足: $U\subset X$ 开集　$\{V_i\}$ 开覆盖 U　$s_i\in\mathcal{F}(V_i)$

且令 $V_{ij}=V_i\cap V_j$. 有 $s_i|_{V_{ij}}=s_j|_{V_{ij}}$.

则 $\exists !\ s\in\mathcal{F}(U)$ s.t. $s|_{V_i}=s_i$. 则称 $\mathcal{F}$ 为层

定义：η $\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 预层同态 由如下形式表述

$\forall U$开 $\eta_U: \mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$ 群同态

且 对 $V\subseteq U$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\eta_U"] \arrow[d, "r_{UV}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r_{UV}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\eta_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$ 交换

命题 (1) $s\in\mathcal{F}(U)$ $\{x\in U \mid s_x=0\}$ 为开集

(2) $\mathcal{F}$的支集. $\mathrm{supp}\,\mathcal{F}=\{x\in X \mid \mathcal{F}_x\neq 0\}$

(3) $\mathcal{F}$为层. $s\in\mathcal{F}(U)$ $s=0 \Leftrightarrow \forall x\in U.\ s_x=0$

[pf (3) $\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow$ $\forall x$ $\exists$邻域V_x s.t. $\overset{t_{V_x}\in\mathcal{F}(V_x)}{\overset{\|}{s|_{V_x}}}=0$

则 (V_x, t_{V_x}) 可粘成 0 由唯一性. $s=0$]

命题：η: $\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 层同态

(1) $\ker\eta$ 为 $\mathcal{F}$ 的子层

(2) $(\ker\eta)_x=\ker\eta_x$

[pf (2) $(\ker\eta)_x=\{\overline{s_U} \mid \eta(s_U)=0\}$

$\ker\eta_x=\{\underset{\overline{s_U|_V}}{\overset{\|}{\overline{s_U}}} \mid \eta(\overline{s_U})=0\}$ $\overset{\text{in } \mathcal{G}}{\downarrow}$ $\exists V$ s.t. $\eta(s_U)|_V=0$ $=\{\overline{s_V} \mid \eta(s_V)=0\}$]

(3) η单 $\Leftrightarrow \forall x\in X$ $\eta_x: \mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$ 单 $\Leftrightarrow \ker\eta=0$

(4) 预层 $\eta(F): U\to\eta(F(U))$. $(\eta(F))_x=\eta_x(F_x)$

定理 $\mathcal{F}$为X上预层 则∃层$\mathcal{F}^+$与预层同态 $\mathcal{F}\xrightarrow{\theta}\mathcal{F}^+$ 有泛性质（对层G)

且① $\mathcal{F}^+$在同构意义下唯一 ② $\theta_x: \mathcal{F}_x\to\mathcal{F}^+_x$为同构 $(\forall x\in X)$

[pf 定义 $\mathcal{F}^+$: $U\to\{f: U\to\bigsqcup_{x\in U}\mathcal{F}_x \mid \forall z\in U$ ∃开邻域 $V_z\ni z$ $s_{V_z}\in\mathcal{F}(V_z)$ $f|_{V_z}=s_{V_z}: V_z\to\bigsqcup_{x\in V_z}\mathcal{F}_x\to\bigsqcup_{x\in U}\mathcal{F}_x\}$

$\mathcal{F}^+$可自然粘合⇒为层

$\theta: \mathcal{F}\to\mathcal{F}^+$ $\quad\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}^+(U)$

$s\mapsto s: U\to\bigsqcup\mathcal{F}_x$

$\forall f\in\mathcal{F}^+(U)$ ∃V_i开覆盖 $s_i\in\mathcal{F}(V_i)$ s.t. $f|_{V_i}=s_i: V_i\to\bigsqcup\mathcal{F}_x$

故f可由(V_i, s_i)粘成 $\quad(s_i)_x=(s_j)_x$

给 $\eta_U: \mathcal{F}(U)\to G(U)$ 定义 $\eta^+_U: \mathcal{F}^+(U)\to G(U)$

$f=(V_i,S_i)\to(V_i,\eta(S_i))$所粘成的截面]

定义 $\eta: \mathcal{F}\to G$层同态 预层

$$\begin{tikzcd} \eta(F) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\theta"] & G \\ \eta(F)^+ \arrow[ur, "\iota^+"] & \end{tikzcd}$$

ι^+单

视 $\eta(F)^+\subseteq G$子层

称 $\mathrm{Im}(\eta)=\iota^+(\eta(F)^+)$为η的像（为层）

称η满 若 $\mathrm{Im}(\eta)=G$

命题 (1) η满 ⇔ $\eta_x: \mathcal{F}_x\to G_x$满

(2) η同构 ⇔ η_x同构 ⇔ 单+满

[pf (1) ⇒: $\eta(F_x)=\eta(\mathcal{F})_x=(\mathrm{Im}\,\eta)_x=G_x$

⇐: $(\mathrm{Im}\,\eta)(U)=\eta(F)^+(U)$

$f^U=(V_i,\eta(s_{V_i}))$

取 $t\in G(U)$ $\forall x\in U$ $\eta(\overline{s_V})=t_x$

$\Rightarrow \exists V'_x$ s.t $\eta(s_{V'_x})=t|_{V'_x}$

$(V'_x, \eta(s_{V'_x}))$ 粘成 $\mathrm{Im}\,\eta(U)$ 截面 f $\Rightarrow \mathrm{Im}\,\eta=G$ #]

商层：$\mathcal{F}.\mathcal{F}'$ 层 $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ 为 预层 $G: U\to \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ 的层化

定义 $f: X\to Y$ 连续 $\mathcal{F}$ 为 X 上层 $f_*\mathcal{F}: V\to \mathcal{F}(f^{-1}V)$ 为层

G 为 Y 上层 $f^{-1}G$ 为 $U\to \varinjlim_{f(U)\subseteq V} G(V)$ 的层化

命题：(1) $\forall x\in X$ $(f^{-1}G)_x=G_{f(x)}$

(2) $\mathrm{Hom}_X(f^{-1}G, \mathcal{F})=\mathrm{Hom}_Y(G, f_*\mathcal{F})$

命题 $0\to \mathcal{F}_1\xrightarrow{\eta_1}\mathcal{F}_2\xrightarrow{\eta_2}\mathcal{F}_3\to 0$ 正合 $\Leftrightarrow$ $\forall x\in X$ $0\to\mathcal{F}_{1x}\to\mathcal{F}_{2x}\to\mathcal{F}_{3x}\to 0$ 正合

此时有正合列 $0\to\mathcal{F}_1(X)\xrightarrow{\eta_{1X}}\mathcal{F}_2(X)\xrightarrow{\eta_{2X}}\mathcal{F}_3(X)$ (视 $\mathcal{F}_1$ 为 $\mathcal{F}_2$ 的子层)

[Pf. 只需验证 $\forall s_2\in \mathrm{Ker}(\eta_{2X})$ 有 $s_2\in\mathcal{F}_1(X)$

$\eta_{2X}(s_2)=0 \Leftrightarrow \forall x\in X$ $(s_2)_x\in\mathcal{F}_{1,x}$

$\forall x\in X$ $\exists \overline{t_{V_x}}\in\mathcal{F}_{1,x}$ s.t $(s_2)_x=\overline{t_{V_x}}$. $t_{V_x}\in\mathcal{F}_1(V_x)$

故 $\exists V'_x\subseteq V_x$ s.t. $s_2|_{V'_x}=t|_{V'_x}$

一系列局部截面 $(V'_x, t_{V'_x}\in\mathcal{F}_1(V'_x))$ 且符合粘合条件 $\Rightarrow$ 粘成 t

$t\in\mathcal{F}_1(X)$ 故 $s_2=t\in\mathcal{F}_1(X)$. #]

命题. X 拓扑空间 开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ $\mathcal{F}_i$ 为 U_i 上的层 $U_{ij}=U_i\cap U_j$

$\varphi_{ij}: \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \simeq \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}$ 为同构 且 $\varphi_{ik}=\varphi_{ij}\circ\varphi_{ik}$

则 $\exists$ X 上的层 $\mathcal{F}$. s.t. $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{F}_i$.

命题: $\mathcal{F}$ 为 X 上预层

$\mathcal{F}$ 为层 $\Leftrightarrow$ $\forall$ 开集 U 开覆盖 $\{V_i\}$, 序列 $0\to\mathcal{F}(U)\xrightarrow{\varphi}\prod_i\mathcal{F}(V_i)\xrightarrow{\psi}\prod_{i,j}\mathcal{F}(V_{ij})$ 正合

$s\mapsto(s_i)_{i\in I}\mapsto(s_j-s_i)|_{V_{ij}}$

2.2 概形

定义. 环化空间为 $(X,\mathcal{O}_X)$ X 为拓扑空间. $\mathcal{O}_X$ 为 X 上环层

环化空间之间的态射 $(f,f^{\#}):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$. f 连续

$f^{\#}: f^{-1}\mathcal{O}_Y\to\mathcal{O}_X$ 为环层同态

$$\begin{tikzcd} f^{-1}\mathcal{O}_Y \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X \arrow[d] \\ (f^{-1}\mathcal{O}_Y)_x=\mathcal{O}_{Y,f(x)} \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd}$$

诱导 $(f^{-1}\mathcal{O}_Y)_x=\mathcal{O}_{Y,f(x)}\to\mathcal{O}_{X,x}$

$f^{-1}m_{Y,y}=m_{X,x}$

$(X,\mathcal{O}_X)$ 为局部环化空间: $\forall x\in X$ $\mathcal{O}_{X,x}$ 为局部环

它们间的态射要求 $f^{\#}: \mathcal{O}_{Y,f(x)}\to\mathcal{O}_{X,x}$ 为局部环同态

例. $(\underset{\text{流形}}{X}, C_X^{\infty})$ 局部环化空间

代数簇 $(X,\mathcal{O}_X)$ $\mathcal{O}_X(U)=\{U$ 上正则函数$\}$ 代数簇间态射

$\pitchfork$

局部环化空间的态射

设A为Noether环　$X=\mathrm{Spec}A=\{A$的素理想$\}$

定义闭集 $V(I)=\{P\in\mathrm{Spec}A \mid I\subseteq P\}$　$(I\subseteq A)$

$V(I)\cap V(J)=V(I+J)$　$V(I)\cup V(J)=V(IJ)$

例: $A=k[x,y]$　$k=\bar{k}$.　$X=\mathrm{Spec}A$　$(x)\subseteq A$

$V((x))=\{(x)\}\cup\{(x,y-a)\mid a\in k\}$

回顾: (1) $\varphi: A\to S^{-1}A$ 诱导 f_φ, $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)\to\mathrm{Spec}A$

$\updownarrow$

{与S不交的素理想}

(2) $s\in A$.　$\mathrm{Spec}(A_s)=\{P\in\mathrm{Spec}A \mid s\notin P\}$

$D(s)=\mathrm{Spec}(A_s)=\mathrm{Spec}A\setminus V((s))$. 主开集

(3) $\sqrt{I}=\bigcap_{P\in V(I)} P$

(4) $X=\mathrm{Spec}A$的主开集为开集基

(pf 若$U=X\setminus V(I)$　$P\in U$　$I=(f_1,\cdots f_n)$　$I\nsubseteq P$.
故$\exists f_i\notin P$　$\Rightarrow P\in D(f_i)\subseteq U$)

(5) M为A-模. $x\in M$　① $x=0$ in $S^{-1}(M)$ $\Leftrightarrow$ $\exists s\in S$. $sx=0$ in M

② 若$\forall P\in\mathrm{Spec}A$　$x=0$ in M_P. 则$x=0$ in M

定义环层 $\mathcal{O}_X$ $\mathcal{O}_X(U)=\{f: U\to\bigsqcup_{p\in U}A_p \mid \forall p\in U$ ∃p的邻域V和 $\frac{h}{s}\in A_p$ s.t. $f|_V=\frac{h}{s}$. $V\to\bigsqcup_{p\in U}A_p\}$

(默认 $V\subseteq D(f)$) $Q\mapsto\frac{h}{s}\in A_Q$

等价定义 $\mathcal{O}_X(U)=\{f: U\to\bigsqcup_{p\in U}A_p \mid \forall p\in U.\ \exists h,s\in A$ s.t. $p\in D(s)$ $f|_{D(s)}=\frac{h}{s}: D(s)\to\bigsqcup_{p\in U}A_p\}$

故 $f\in\mathcal{O}_X(U)$ 由 $(D(s_i),\frac{h_i}{s_i})$ 粘合得到

粘合性: $\frac{h_i}{s_i}=\frac{h_j}{s_j}$ in A_p $(\forall p\in D(s_is_j)))$

closed/generic pt

(Eg 2.3.3 2.3.4)

$\Leftrightarrow\frac{h_i}{s_i}=\frac{h_j}{s_j}$ in $A_{s_is_j}$

$\Leftrightarrow\exists N$ s.t. $s_i^{N-1}s_j^{N}h_i-s_i^{N}s_j^{N-1}h_j=0$

命题: $(X,\mathcal{O}_X)$为局部环化空间. $\mathcal{O}_{X,p}\cong A_p$ Prop 2.2

[pf ① $\mathcal{O}_{X,p}\to A_p$

$[f_U]\mapsto[\frac{h}{s}]\in A_p$

$f_U=\frac{h}{s}$

② $A_p\to\mathcal{O}_{X,p}$

$[\frac{h}{s}]\mapsto[\frac{h}{s}]$

$\frac{h}{s}: D(s)\to\bigsqcup_{Q\in D(s)}A_Q$

良定性. 若 $\frac{h_1}{s_1}=\frac{h}{s_2}$ in A_p

$\Rightarrow\exists s\notin p$. s.t. $ss_2h_1-shs_1=0$

$\Rightarrow\frac{h_1}{s_1}=\frac{h_2}{s_2}$ in $D(ss_1s_2)$ $\Rightarrow[\frac{h_1}{s_1}]=[\frac{h_2}{s_2}]$ in $\mathcal{O}_{X,p}$]

定理. (1) $\mathcal{O}_X X=A$ Prop 2.2

(2) 对 $f\in A$. 则 $(X_f=\operatorname{Spec}A_f.\ \mathcal{O}_{X_f})\cong(D(f).\ \mathcal{O}_X|_{D(f)})$

[pf (1) ① $A\to\mathcal{O}_X X$ 显然单射

② $\mathcal{O}_X X\to A$

取 $f\in\mathcal{O}_X X$ $f=(D(s_i).\frac{h_i}{s_i})$ $X=\bigcup D(s_i)\Leftrightarrow V(\{s_i\})=\emptyset$

$\Leftrightarrow(\{s_i\})=1$

故 $\exists s_1\cdots s_n$ s.t. $(s_1,\cdots s_n)=(1)$ 且 $\forall N$ $(s_1^N\cdots s_n^N)=1)$ (*)

又 $\exists N>0$ s.t. $s_i^{N-1}s_j^{N}h_i = s_i^{N}s_j^{N-1}h_j$ in A

由(*) $\exists\, a_1,\cdots a_n\in A$ s.t. $a_1 s_1^N + \cdots + a_n s_n^N = 1$

$$\Rightarrow \tilde{f} = a_1 s_1^{N-1}h_1 + a_2 s_2^{N-1}h_2 + \cdots a_n s_n^{N-1}h_n \in A$$

可证 $\tilde{f}=f$ in $\mathcal{O}_X(X)$

(2) 作为拓扑空间 $D(f)\cong X_f$

$\mathcal{O}_{X_f}(U)=\{f: U\to \bigsqcup_{p\in U}(A_f)_p \mid \cdots\}$

$\mathcal{O}_X(U)=\{f: U\to \bigsqcup_{p\in U}A_p \mid \cdots\}$ #]

2.3 概型

定义 一个概型为局部环化空间 $(X,\mathcal{O}_X)$ 且 $(X,\mathcal{O}_X)=\bigcup(U_i=\operatorname{Spec}A_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}\cong\mathcal{O}_{U_i})$

概型的态射 $(f,f^\#):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ 为局部环化空间的态射

① $f: X\to Y$ 连续

② $f^\#: f^{-1}\mathcal{O}_Y\to\mathcal{O}_X$. $f_x^\#: \mathcal{O}_{Y,f(x)}\to\mathcal{O}_{X,x}$ 局部环同态.

定理: $X=\operatorname{Spec}A$, $Y=\operatorname{Spec}B$ 有一一对应 $\operatorname{Hom}(B,A)\cong\operatorname{Mor}(X,Y)$

Cpf. ① $\operatorname{Hom}(B,A)\to\operatorname{Mor}(X,Y)$

$$\eta\longmapsto f_\eta: \operatorname{Spec}A\to\operatorname{Spec}B$$

取U为X的开集

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}\mathcal{O}_Y(U) \arrow[r] & \mathcal{O}_X(U) \\
\text{“}=\text{''}\ \varinjlim_{f_\eta(U)\subseteq V}\mathcal{O}_Y(V) & \\
\mathcal{O}_Y(V) \arrow[r] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[uu] \\
f=(D(s_i),\frac{h_i}{s_i}) \arrow[r, mapsto] & (D(\eta(s_i)),\frac{\eta(h_i)}{\eta(s_i)})
\end{tikzcd}$$

故 f_η: $\operatorname{Spec}A\to\operatorname{Spec}B$
$P\mapsto Q=\eta^{-1}(P)$

且 $\underset{A_P}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{O}_{X,P}}} \longleftarrow \underset{B_Q}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{O}_{Y,Q}}}$ 为局部环同态

② $\mathrm{Mor}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(B,A)$

$(f,f^{\#}) \mapsto \eta = f^{\#}: \mathcal{O}_Y Y \to (f^{-1}\mathcal{O}_Y)(X) \to \mathcal{O}_X X$

验证 $f = f_\eta \Leftarrow \forall P \in X$ $Q = f(P)$ 有 $Q = f_\eta(P) = \eta^{-1}(P)$

又 $f_P^* = \eta_P: \mathcal{O}_{Y,Q} \to \mathcal{O}_{X,P}$ 为局部环同态 有 $\eta^{-1}(PA_P) = QB_Q$

$\Rightarrow \eta^{-1}(P) = Q$]

概型粘合

X 拓扑空间 $\{U_i\}$ 开覆盖 $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ 概型

且 $f_{ij}: (U_{ij}, \mathcal{O}_{U_i}|_{U_{ij}}) \to (U_{ij}, \mathcal{O}_{U_j}|_{U_{ij}})$ 同构

若 $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$ 则得到概型 $(X, \mathcal{O}_X)$ st $\mathcal{O}_X|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_U$

验证态射: $(X,\mathcal{O}_X)$ $(Y,\mathcal{O}_Y)$ 概型 $f: X \to Y$ 连续

取 $Y = \cup(Y_i = \mathrm{Spec}B_i, \mathcal{O}_{Y_i})$

$f^{-1}Y_i = \bigcup_j (\mathrm{Spec}A_{ij} = X_{ij}, \mathcal{O}_{X_{ij}})$

只需 $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$. 已有 $f_{ij}: X_{ij} \to Y_i$

定义 $\eta_{ij}: B_i \to A_{ij}$ s.t. $f_{\eta_{ij}} = f_{ij}$

设R为环. $\mathbb{A}_R^n = (\operatorname{Spec} R[x_1, \cdots x_n], \mathcal{O}_{\mathbb{A}_R^n})$

$\mathbb{P}_R^n$. $[X_0, \cdots X_n]$ $U_i := \operatorname{Spec} R[\overset{x_1}{\overset{\shortparallel}{\frac{X_1}{X_0}}}, \cdots \overset{x_n}{\overset{\shortparallel}{\frac{X_n}{X_0}}}]$

$(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ $\mathbb{P}_R^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$ (集合意义)

$U_{0i} := U_0 \cap U_i \triangleq \operatorname{Spec}(R[x_1, \cdots x_n]_{x_i}) = D_{U_0}(x_i = \frac{X_i}{X_0})$

$$U_{0i} \overset{\phi_0}{\underset{\sim}{\hookrightarrow}} D_{U_0}(x_i = \frac{X_i}{X_0}) \subset U_0$$

$$\underset{\varphi_i}{\overset{\sim}{\hookrightarrow}} D_{U_i}(x_0 = \frac{X_0}{X_i}) \subset U_i$$

$$\begin{tikzcd}
\varphi_{0i} & \mathcal{O}_{U_0}|_{U_{0i}} = \phi_0^{-1}(\mathcal{O}_{U_0}|_{D_{U_0}(x_i)}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \mathcal{O}_{U_i}|_{U_{0i}} \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
 & \mathcal{O}_{U_{0i}} & \mathcal{O}_{U_{0i}}
\end{tikzcd}$$

故可以进行层的粘合

$$(\operatorname{Spec} R[\tfrac{X_1}{X_0}, \cdots \tfrac{X_n}{X_0}]_{\frac{X_i}{X_0}}, \mathcal{O}_{U_0}|_{U_{0i}}) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Spec} R[\tfrac{X_0}{X_i}, \cdots \tfrac{X_n}{X_i}]_{\frac{X_0}{X_i}}, \mathcal{O}_{U_i}|_{U_{0i}})$$

$$\begin{aligned}
R &\overset{\mathrm{Id}}{\longleftarrow\!\shortmid} R \\
\left(\frac{X_i}{X_0}\right)^{-1} &\longleftarrow\!\shortmid \frac{X_0}{X_i} \\
\frac{\frac{X_1}{X_0}}{\frac{X_i}{X_0}} &\longleftarrow\!\shortmid \frac{X_1}{X_i}
\end{aligned}$$

R-概型. $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} R$

若X, Y为R-概型. R-概型态射

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
 & \operatorname{Spec} R &
\end{tikzcd}$$

在R上为恒等

射影概型 P76 $\mathcal{O}_p = S_{(p)}$

Proj S

2.4 闭子概型

定义 $(X,\mathcal{O}_X)$概型. 一个闭子概型 $(Z,\mathcal{O}_Z)$ 满足

$I(u)$?

I_Z ?

(1) $Z \overset{i}{\hookrightarrow} X$ 闭集

(2) $\exists$理想层 $I_Z \subseteq \mathcal{O}_X$ s.t. $i_* \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X / I_Z$ 　$\downarrow$ +局化 I_p

此时称 I_Z为Z的定义理想层 　Ex 3.11/3.12

命题. $(X=\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_X)$ 设 $I \subseteq A$ $(Z=V(I) \simeq \operatorname{Spec} A/I \, . \, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Z的结构层}}}{\mathcal{O}_Z})$

则$(Z,\mathcal{O}_Z)$为闭子概型

Pf. 只须找 I_Z

任意开集$U \subseteq X$ 　$I_Z(U) = \{ f \cdot U \to \coprod_{p\in U} I_p \mid \cdots \} \subseteq \mathcal{O}_X(U)$ 则I_Z为理想层

$$i_* \mathcal{O}_Z(U) = \{ \bar{f} \cdot U \to \coprod_{p \in U} (A/I)_p \mid \cdots \}$$

(若$p \notin Z$ 则$(A/I)_p = 0$)

$$\mathcal{O}_X / I_Z(U) = \{ f \cdot U \to \coprod_{p \in U} \underset{\substack{\| \\ (A/I)_p}}{A_p / I_p} \mid \cdots \}$$

#]

例 　$X = \mathbb{A}^1_k$ 　$(\underset{\substack{\| \\ (\bar{x})}}{Z} = \operatorname{Spec} {}^{k[x]}/(x^2) \, , \underset{\substack{\| \\ k[x]/(x^2)}}{\mathcal{O}_Z}) \subseteq \mathbb{A}^1$

命题 Z为X的闭子概型 则$\exists$X的仿射开覆盖 $X = \bigcup (U_i = \operatorname{Spec} A_i \, , \mathcal{O}_i)$

s.t. $(Z \cap U_i = \operatorname{Spec} \underset{\substack{\| \\ V_i}}{(A_i/I_i)} , \ \mathcal{O}_Z|_{Z\cap U_i} = \mathcal{O}_{V_i})$

定理 　$X = \operatorname{Spec} A$仿射概型 则X的闭子概型形如$\operatorname{Spec} A/I$

定义: k域 $\mathbb{P}^n_k$ 中的闭子概型称为一个射影概型 (同构意义下)

射影概型的开子概型称为拟射影概型

2.5 基本性质

定义. X为概型　　不可约: X作为拓扑空间不可约

既约: ∀开集U　$\mathcal{O}_X(U)$ 作为环既约

($\mathcal{O}_X(U)$的幂零理想平凡)

整: ∀开集U. $\mathcal{O}_X(U)$为整环

命题: 概型X整 ⟺ 不可约+既约

pf. ⇒: 整环⇒既约

X不可约: 否则 $X=X_1\cup X_2$. X_i真闭子集

$U_1=X\setminus X_2$. $U_2=X\setminus X_1$ 不交开集

但 $\mathcal{O}_X(U_1\cup U_2)=\mathcal{O}_X(U_1)\times\mathcal{O}_X(U_2)$ 不为整环 矛盾

⇐ 作业　　∎

定义. X为概型　$\mathcal{N}\subseteq\mathcal{O}_X$ 为幂零理想层

定义X的既约概型 ($X_{red}=X$, $\mathcal{O}_{X_{red}}=\mathcal{O}_X/\mathcal{N}$) 为X的闭子概型

例. $\left(\operatorname{Spec} k[x]/(x^2)\right)_{red}=\left(\operatorname{Spec} k[x]/(x)\right)$　　计算约化

$\left(\operatorname{Spec} k[x,y]/(x^2y)\right)_{red}=\left(\operatorname{Spec} k[x,y]/(xy)\right)$

2.6 概型与簇

设 $k=\bar{k}$ $\quad Var/k=\{k上代数簇\} \longrightarrow Sch/k=\{k\text{-}概型\}$

$$X_{var} \mapsto X_{sch}$$

先: $\mathrm{Aff}\text{-}Var_{/k} \to \mathrm{Aff}\text{-}Sch_{/k}$

$$X=V(I)\subseteq A^n \longmapsto X_{sch} \triangleq \mathrm{Spec}\, k[X_1\cdots X_n]/I(X)$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{Var/k}(X_{var}, Y_{var}) \arrow[r, shift left] \arrow[d, phantom, "||"] & \mathrm{Mor}_{Sch/k}(X_{sch}, Y_{sch}) \arrow[l, shift left] \arrow[d, phantom, "||"] \\ 又\ \mathrm{Hom}_{k\text{-}Alg}(\Gamma(Y), \Gamma(X)) & \mathrm{Hom}_{k\text{-}Alg}(\Gamma(Y), \Gamma(X)) \end{tikzcd}$$

故可以进行粘合

2.7 可逆层

定义 X为概型. 一个$\mathcal{O}_X$模层是一个层M. $\forall$开集$U\subseteq X$

$M(U)$为$\mathcal{O}_X(U)$模且

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U)\times M(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(U) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_X(V)\times M(V) \arrow[r] & \mathcal{O}_X(V) \end{tikzcd}$$

模层同态: $M_1\to M_2$层同态且$\mathcal{O}_X$线性

定义: X上的可逆层为秩为1的局部自由模层L

即存在X的开覆盖 $X=\bigcup_{i\in I} U_i$ $\quad \eta_i: L|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}$

$$\left(\eta_j\circ\eta_i^{-1}: \mathcal{O}_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} L|_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_{ij}} \right)$$

$$1 \longmapsto f_{ij}\in \mathcal{O}(U_{ij})^*$$

$$f_{ik}=f_{ij}f_{jk}$$

(粘合定义: $\mathcal{L}|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}$ $s_i = \eta_i^{-1}(1)$

$\eta_{ij}: \mathcal{L}|_{U_{ij}} = \mathcal{O}_{U_{ij}} s_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_{ij}} s_j$

$s_i \mapsto f_{ij} s_j$. $f_{ik} = f_{ij} f_{jk}$)

例: $\mathcal{O}_X$ $\mathcal{I}_Z$ $i_*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Z$ 均为模层

设 $x_0 \cdots x_n$ 为 $\mathbb{P}_k^n$ 的齐次坐标 $U_i = \{x_i \neq 0\} = \operatorname{Spec} k[\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \cdots \frac{x_n}{x_i}]$

$\simeq \mathbb{A}_k^n$

$\mathcal{O}_X(d)|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}$ $(s_i = x_i^d)$

在 $U_{ij} = \operatorname{Spec} k[\frac{x_0}{x_i} \cdots \frac{x_n}{x_i}]_{\frac{x_j}{x_i}}$ 中 $\frac{x_i}{x_j}, \frac{x_j}{x_i} \in \mathcal{O}_{U_{ij}}^*$

粘合方式: $s_i|_{U_{ij}} = (\frac{x_i}{x_j})^d s_j|_{U_{ij}}$ ⇒ 得到层 $\mathcal{O}(d)$

$x_i^d \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}(d)) = \mathcal{O}(d)(U_i)$

$d \geq 0$ 时 $(\frac{x_i}{x_j})^d \in \mathcal{O}(U_{ij}) \Rightarrow x_i^d = (\frac{x_i}{x_j})^d x_j^d \in \mathcal{O}(d)(U_j)$

故∃整体截面 $s \in \Gamma(\mathcal{O}(d))$ s.t. $s|_{U_i} = x_i^d$ 记为 x_i^d

$s|_{U_j} = (\frac{x_i}{x_j})^d x_j^d$

注: X 为整概型 $\mathcal{L}$ 可逆层 $\mathcal{L}|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} s_i$

取定 $U_0 \neq \phi$ $s \in \mathcal{L}(X)$ $s|_{U_0} = f_0 s_0$ 则 f_0 决定了 s

$s|_{U_i} = f_i s_i = f_0 s_0 \Rightarrow f_i = f_0 f_{0i}$ $f_{0i} = \frac{s_0}{s_i}$

$f_0 s_0$ 可延拓到 U_i 上 $\Leftrightarrow f_0 f_{0i} \in \mathcal{O}_X(U_i)$

除子

$\{(\underset{||}{U_i}, f_i)\}$

定义 X为整概型 一个Cartier除子D由以下方式表示：

开覆盖 $X=\bigcup_{i\in I}U_i$. $f_i\in K(X)$ 满足 $\underset{\underset{u_{ij}}{||}}{\frac{f_i}{f_j}}\in O(U_{ij})^*$

例 $\mathbb{P}^n_k$ $d\geq 0$ $F\in k[x_0,\dots,x_n]_d$ d次齐次

$D_F=(U_i, f_i=\frac{F}{x_i^d})$ $\frac{f_i}{f_j}=u_{ij}=(\frac{x_j}{x_i})^d\in O(U_{ij})^*$

$C=V_p(x_0^3-x_1^3-x_2^3)\subseteq\mathbb{P}^2_k$

$\underset{P=[1,1,0]}{\rotatebox{90}{$\in$}}$

$\underbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(D_F)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(d)}$

$\Big(C\cap U_0=V(1-x_1^3-x_2^3)\subseteq\mathbb{A}^2_k$. $x_1=\frac{x_1}{x_0}-1)$ ∃除子.

$C(C\cap U_1, \frac{x_0}{x_1}-1)$ $C(C\cap U_2, 1)$

$\mathcal{O}_X(U_i)$.

称 (U_i, f_i) 和 (V_j, g_j) 定义相同的除子

是指对 $\{W_{ij}=U_i\cap V_j\}$ 为X的开覆盖. $\exists u_{ij}\in O(W_{ij})^*$ s.t. $f_i=u_{ij}g_j$

$\underset{||}{(U_i, f_i)}$

定义: D为X上除子 定义 $O(D)|_{U_i}=O(U_i)\overset{s_i}{\overset{||}{\frac{1}{f_i}}}\subseteq K(X)|_{U_i}$

$s_i|_{U_{ij}}=\frac{f_j}{f_i}s_j|_{U_{ij}}$ 其中K(X)为X上常值层

粘成可逆层

(故 $O_{U_{ij}}(\frac{1}{f_i})=O_{U_{ij}}(\frac{1}{f_j}\frac{f_j}{f_i})$
$=O_{U_{ij}}(\frac{1}{f_j})\subseteq K(X)|_{U_{ij}}$)

定义 $D_1=(U_i, f_i)$ $D_2=(U_i, g_i)$

称 D_1, D_2 线性等价 是指 $\exists h\in K(X)^*$. $u_i\in O(U_i)^*$ s.t. $f_i=hu_ig_i$

记 $D_1\sim D_2$

命题：$D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow \mathcal{O}(D_1) \simeq \mathcal{O}(D_2)$

[pf $\Rightarrow \mathcal{O}_X(D_1)(U_i) = \mathcal{O}_X(U_i)\frac{1}{f_i} \subseteq K(X)|_{U_i}$ $\quad \frac{1}{f_i}$

$\downarrow$ 乘h

$\mathcal{O}_X(D_2)(U_i) = \mathcal{O}_X(U_i)\frac{1}{g_i} \subseteq K(X)|_{U_i}$ $\quad \frac{1}{u_i g_i}$ $\quad$ 且$\mathcal{O}_X(U_i)\frac{1}{u_i g_i}$

$= \mathcal{O}_X(U_i)\frac{1}{u_i}$

故
$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(D_1) \arrow[r, "\sim", "\cdot h"'] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] & \mathcal{O}_X(D_2) \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] \\ K(X) \arrow[r, "\sim", "\cdot h"'] & K(X) \end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$. 类似 #]

X整概型 $\quad \forall U \subseteq X$ $\mathcal{O}_X(U)$整环

$$\begin{tikzcd} U & \mathcal{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Frac}(\ ) \arrow[d] \\ V \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] & \mathcal{O}_X(V) \arrow[r] & \mathrm{Frac}(\cdot) \end{tikzcd}$$

取仿射开集 $U = \mathrm{Spec}A \subseteq X$. 定义 $K(X) = \mathrm{Frac}(A)$.

任取V. $V \cap U \neq \phi \Rightarrow \exists f \in A$ $\quad \mathrm{Spec}A_f \hookrightarrow U$, $\hookrightarrow V$

$k = \mathrm{Frac}(A_f) \leftarrow \mathrm{Frac}(\mathcal{O}(V))$

$\forall x \in X$. $\quad \mathcal{O}_{X,x} \to K(X)$ (称它为常层. $\to$ 取群G

$\forall U \subseteq X$ $\quad G(U) = G$ 得常层G)

例：$k = \bar{k}$. $\quad C = \mathbb{P}_k^1$ $\quad x = \frac{X}{Y}$ $\quad y = \frac{Y}{X}$ $\quad U = \{x \neq 0\}$ $\quad V = \{y \neq 0\}$

$\Omega_C^1|_U = \mathcal{O}_U dy$ $\qquad \Omega_C^1|_V = \mathcal{O}_V dx$

$U \cap V$上 $\quad dy = d\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}dx = -\frac{Y^2}{X^2}dx$.

$\Rightarrow \Omega_C^1 \simeq \mathcal{O}(-2)$

有效除子 $D\ (U_i, f_i)$ 满足 $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ 则称有效. 记 $D \geq 0$.

$$\mathcal{O}(D)|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} \frac{1}{f_i}$$

定义 $s_D|_{U_i} = f_i \cdot \frac{1}{f_i}$ ↪ 称截面　　典截面

$(s_D = 0) = D$,　　$\eta_i: \mathcal{O}(D)|_{U_i} \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathcal{O}_{U_i}$

$s_D \longmapsto f_i$

命题. Z 为 X 的闭子概型 L 为 X 上可逆层 $L_Z = L/I_Z L$ 为 X 上的层

$$0 \to I_Z L|_{U_i} \to L|_{U_i} \to L_Z|_{U_i} \to 0$$

$$0 \to \overset{\parallel}{I_Z|_{U_i}} s_i \to \mathcal{O}_{U_i} s_i \to \mathcal{O}_{Z \cap U_i} s_i \to 0$$

故 L_Z 可视为 Z 上可逆层

$L_{Z\cap U_i} = \mathcal{O}_{Z \cap U_i} s_i$　　$s_i = f_{ij} s_j$.

定义 X 为概型 M_1, M_2 为 $\mathcal{O}_X$ 模层

$M_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} M_2$ 为 $U \mapsto M_1(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} M_2(U)$ 的层化

$$(M_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} M_2)_x = M_{1x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} M_{2x}$$

命题 X 上可逆层同构类在 $\otimes$ 下构成交换群 $\mathrm{Pic}(X)$

[Pf. $L|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} s_i$　　$L^{-1}|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}(\frac{1}{s_i})$

$L \otimes L^{-1}|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}(s_i \cdot \frac{1}{s_i}) = 1 \Rightarrow L \otimes L^{-1} = \mathcal{O}_X$]

定义: $D_1\ (U_i, f_i)$　$D_2 (U_i, g_i)$　$D_1 + D_2 = (U_i, f_i g_i)$

$D_1 - D_2 = (U_i, f_i / g_i)$

命题: ① $\mathcal{O}_X(D_1+D_2)=\mathcal{O}_X(D_1)\otimes\mathcal{O}_X(D_2)$

② X上除子在加法下构成群$\mathrm{Div}(X)$

③ $\eta: \mathrm{Div}(X)\to \mathrm{Pic}(X)$ 同态

$D\mapsto \mathcal{O}_X(D)$

$\mathrm{Ker}\,\eta=\{D \mid D\sim 0\}$: 主除子

$D\sim 0 \Leftrightarrow \exists h\in K(X)^*$ $\quad D(U_i,h)$

$\mathbb{P}^1$上 $\quad x=\frac{X}{Y}$ $\quad \mathrm{div}(x)|_V=\mathcal{O}_V\cdot x$

$\mathrm{div}(x)|_U=\mathcal{O}_U\,\frac{1}{y}$

$k=\bar{k}$. C光滑曲线. $\quad P\in C$得到一个除子

$(\mathcal{O}_{C,P}.\ m_{C,P}=(t))$

存在P的邻域U s.t. $t\in\mathcal{O}_X(U)$

t在U上有唯一零点P

$D_P \qquad (U,t) \qquad (C\setminus\{P\},1)$

命题: $D\geq 0$. 在X上$D(U_i,f_i)$ $\quad f_i\in\mathcal{O}(U_i)$ $\qquad 0\to\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X(D)\to\mathcal{O}_D\to 0$

$\mathcal{O}(-D)|_{U_i}=\mathcal{O}_{U_i}\cdot f_i$

称$\mathcal{O}(-D)$为$\mathcal{O}_X$的理想层. 决定的闭子概形. 记作D

$$0\to\mathcal{O}_X(-D)\to\mathcal{O}_X\to i_*\mathcal{O}_D\to 0$$

若$\mathcal{L}$可逆层 则 $0\to\mathcal{O}_X(-D)\otimes\mathcal{L}\to\mathcal{L}\to\mathcal{L}_D\to 0$

D上可逆层

命题. ① $\underbrace{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}}_{\text{层}}(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) \simeq \mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2$

② $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) \simeq \Gamma(X,\mathcal{L}_1^{-1}\otimes\mathcal{L}_2)$

[Pf ① $\mathcal{H}om^{pre}(U)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{L}_1(U),\mathcal{L}_2(U))$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om^{pre} \arrow[r, "\eta:"] \arrow[d] & \mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2 \\
\mathcal{H}om(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) \arrow[ur, "\eta^+"'] &
\end{tikzcd}$$

② 设 $\mathcal{L}_1|_{U_i}=\mathcal{O}_{U_i}\cdot s_i$　　U_i上构造 $\lambda:\mathcal{H}om^{pre}|_{U_i}\to\mathcal{O}_{U_i}s_i^{-1}\cdot t_i$

$\mathcal{L}_2|_{U_i}=\mathcal{O}_{U_i}\cdot t_i$　　$\forall V\subseteq U_i$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(V)}(\mathcal{O}(V)\cdot s_i,\mathcal{O}(V)\cdot t_i)\to\mathcal{O}(V)\frac{s_i}{t_i}$

$\phi\mapsto\frac{\phi(s_i)}{t_i}\frac{t_i}{s_i}$]

Chap 3 P^2上相交理论

3.1 Artin环

R为Artin环$\Leftrightarrow$理想降链终止

例: $\mathbb{Z}$ $\downarrow$ 不是 $\quad k[X]$ $\downarrow$ 不是 $\quad \mathbb{Z}/(m) \quad k[X]/(f(x))$

命题: R为k代数（k ↑ 域）若R为有限维k线性空间 $\Rightarrow R$为Artin环

命题. R为Artin环. 则 (1) R的素理想极大

(2) R只有有限个极大理想 $m_1 \cdots m_r$

(3) $\exists N.$ s.t. $(m_1 \cdots m_r)^N=0$

[pf. (1) $P\in \operatorname{Spec}R$ 若 R/P不为域 取 $\bar{a}\in R/P$ $\bar{a}\neq 0$且不可逆

则 $(a)\supsetneq(a^2)\supsetneq\cdots\supsetneq(a^n)\supsetneq\cdots$

(3) 额外设 Noether.

$m_i \supseteq m_i^2 \supseteq \cdots$ 由Nakayama $\exists N$ s.t. $m_i^N=0$ in R_{m_i}

$\Rightarrow (m_1,\cdots m_r)^N=0$ in $\forall R_{m_i}$ $\Rightarrow (m_1 \cdots m_r)^N=0$]

(4) $R\cong R/m_1^N \times\cdots\times R/m_r^N$

$\cong R/m_i^N$
$= R_{m_i}$

命题: 记号如上. (1) $(X=\operatorname{Spec}R, \mathcal{O}_X)= \sqcup(\underbrace{P_i=m_i}_{\text{既开又闭}=V(m_i)}, \mathcal{O}_X|_{\{P_i\}}=\mathcal{O}_{X,P_i})$

(2) 设L为X上可逆层. 则 $L\cong\mathcal{O}_X$

命题: $k=\bar{k}$ $R=k[X_1\cdots X_n]/I$ (1) 则R为Artin环$\Leftrightarrow V(I)$有限$=\{P_1\cdots P_r\}$

(2) $I=Q_1\cdots Q_r$ $\sqrt{Q_i}=m_{P_i}$ $Q_1\cdots Q_r$互为极大 $R\cong k[X_1\cdots X_n]/Q_1\times\cdots\times k[X_1\cdots X_n]/Q_r$

[Pf (1) ⇒ I的零点 ⟷ 包含I的极大理想 ⟷ R的极大理想

⇐ 记 $m_{p_i} = m_i$, $\sqrt{I} = m_1 \cdots m_r = (u_1, \cdots u_t)$

则 $\exists N'$ s.t. $m_1^{N'} \cdots m_r^{N'} \subseteq I \subseteq m_1 \cdots m_r$

由 $k[X_1 \cdots X_n]/m_1^{N'} \cdots m_r^{N'} = \underbrace{k[X_1 \cdots X_n]/m_1^{N'}}_{A\text{-tin}} \times \cdots \times k[X_1 \cdots X_n]/m_r^{N'}$

$\Rightarrow \dim k[X_1 \cdots X_n]/I < +\infty \Rightarrow R$ 为 A-tin 环

(2) $(X = \operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_X) = \sqcup \big(\underset{(\bar{m}_i) \subset R}{\overset{\shortparallel}{P_i}}$ $\quad R/\bar{m}_i^{N'} \simeq k[X_1 \cdots X_n]/\underbrace{I + m_i^{N'}}_{\overset{\shortparallel}{Q_i}} \quad \big(\simeq k[X_1 \cdots X_n]_{m_i}/I_{m_i} \big)$

$V(Q_i) = \{P_i\} \Rightarrow \sqrt{Q_i} = m_i$

从而 $R \simeq k[X_1 \cdots X_n]/Q_1 \times \cdots \times k[X_1 \cdots X_n]/Q_r$]

(或 $Q_i = I_{m_i} \cap m_i$)

例. $R = k[x,y]/(y-x^2, x-y)$

$V(I) = \{(0,0), (1,1)\}$ $\quad \sqrt{Q_1} = (x,y)$

$(y-x^2, x-y)_{(0,0)} = (\underbrace{x-x^2}_{x(1-x)}, x-y)_{(0,0)}$

$= (x, x-y)_{(0,0)} = (x,y)_{(0,0)}$

$\Rightarrow Q_1 = (x,y)$

类似 $Q_2 = (x-1, y-1)$

3.2 拟射影0维子概型

下均设 $k=\bar{k}$

定义. $X\subseteq \mathbb{P}_k^n$ 为拟射影概型. 则 $X=X_1\cup\cdots\cup X_r$ (拓扑空间)不可约分解

$$\dim X_i := \operatorname{tr\,deg} K(X_i)$$

则定义 $\dim X = \max\limits_{1\le i\le r} \dim X_i$

$\{k$ 上代数簇$\} \longleftrightarrow \{k$ 上概型$\}$

$X_{var} \to X_{sch}$ 也概型

$K(X_{var}) = K(X_{sch})$

例 $X=\operatorname{Spec} k[x,y]/(xy,\ x(x-1))$

$I=(x)\,(y,x-1)$ $\quad \dim X = 1$

$X=\operatorname{Spec} k[x,y]/(x(y-1),\ x(x-1))$ $\quad I=(x)\cdot(y-1,x-1)$

$\Rightarrow X=\operatorname{Spec} k[x,y]/(x) \cup \operatorname{Spec} k[x,y]/(x-1,y-1) \subseteq \mathbb{A}^2$

定理. $X\subseteq \mathbb{P}^n$ 为0维拟射影子概型. 则 $\quad$ ($X\simeq \prod \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,p_i}$)

(1) $(X,\mathcal{O}_X)=\coprod\limits_{i=1}^{r}(p_i,\ \mathcal{O}_{X,p}\simeq k[x_1\cdots x_n]/Q_i)$ $\quad \sqrt{Q_i}=m_i$ 从而仿射

(2) X 为 $\mathbb{P}^n$ 的闭子概型 $\quad$ 射影闭子 ?

(3) 可作线性变换使 $X\subseteq \mathbb{A}_k^n$ 闭子概型

此时 $X=\operatorname{Spec} k[x_1\cdots x_n]/I$ $\quad I=I_1\cdots I_r$

$\sqrt{I_i}=m_{p_i}$

[pf. (1) $X = \underset{开}{U} \cap \underset{射影)}{Z}$ $X \cap U_i = (U \cap U_i) \cap Z$

$U \cap U_i$ 写为有限主开集的并 ⟹ X为有限个主开集的闭子集的并

$X \cap D_{U_i}(f) \subseteq D_{U_i}(f) \cong \mathrm{Spec}\, k[x_1, \dots x_n]_f \cong \mathrm{Spec}\, k[x_1, \dots x_n, y]/(yf-1)$ 为闭子概型

(Fact(承认): $X \subseteq A^n$ 0维闭子概型 则 $X = \mathrm{Spec}\, \underbrace{k[x_1 \dots x_n]/I}_{\text{Artin环}}$) $\subseteq A^{n+1}$

故 $X \cap D_{U_i}(f) \cong \mathrm{Spec}\, k[x_1, \dots x_n, y]/I$ 0维

且 $X \cap D_{U_i}(f) = \bigsqcup_{i=1}^{r} (P_i, \mathrm{Spec}\, k[x_1, \dots x_n, y]/\underset{\overset{\|}{\mathcal{O}_{X,P_i}}}{O_i})$

再对 i 求并即得

(2) (闭子概型 $Z \subseteq X$ ⟺ $\forall z \in Z$ ∃ $z \in X$ 的仿射开邻域 $U_i = \mathrm{Spec}\, A_i$

有 $Z \cap U_i = \mathrm{Spec}\, A_i/I$)

只须证 $\forall P_i$ ∃仿射开邻域 $V_i \subseteq P^n$ 只包含 P_i 且 $(P_i, \mathcal{O}_{X,P_i}) \to (V_i, \mathcal{O}_{V_i})$

$\forall P_i$ 不妨设 $(P_i, \mathcal{O}_{X,P_i}) \subseteq D_{U_0}(f)$ 又 $U_0 \setminus \{P_2 \dots P_r\}$ 开集 由理想对应

∃g s.t. $X \cap D_{U_0}(fg) = P_i$ 从而 $(P_i, \mathcal{O}_{X,P_i})$ 为 $D_{U_0}(fg)$ 的闭集]

回顾: $V_P(J) \subseteq P^n$ $J \subseteq k[x_0, \dots x_n]$ 齐次

则 $V_P(J) \cap U_0 = V(I) \subseteq A^n$ $I = \{\frac{F}{x_0^{\deg F}} \mid F \in J\}$

对I 取J为I的齐次化 J为最大的齐次理想 s.t. $J_{x_0}^{(0)} = I$

X=V_P(I)仿射 $J = \{x_0^{\deg F} F(\frac{x_1}{x_0}, \dots \frac{x_n}{x_0}) \mid F \in I\}$ 有 $V_P(J) \cap \{x_0 = 0\} = \phi$

则 $X = V_P(J)$ 射影)

例 A^2 $I = (x^2, y^3)$ → $J = (X^2, Y^3) \subseteq k[X, Y, Z]$

$I = J_Z^{(0)}$ $V_P(J) = \mathrm{Spec}\, k[x,y]/I$

$I = (x^2 + x, y^3)$ → $J = (X^2 + XZ, Y^3)$

$\mathbb{P}^2_k$ 的子概型: $k=\bar{k}$ $x=\frac{X}{Z}$ $y=\frac{Y}{Z}$ $F(X,Y,Z)$ 齐次

则 $f(x,y)=\frac{F(X,Y,Z)}{Z^{\deg F}}\in k[x,y]$

Fact. (1) F 不可约 $\Leftrightarrow$ f 不可约. 且 $Z\nmid F$

(2) $\deg F\geq \deg f$

曲线:

$\dim V_p(F)=1$. 记 $C_F=V_p(F)$ 为 F 定义的曲线

命题: F 不可约 $\Leftrightarrow$ C_F 为整概型

若 $F=F_1^{r_1}\cdots F_m^{r_m}$ 可记 $C_F=r_1C_{F_1}+\cdots+r_mC_{F_m}$

0维概型.

定理 $F.G\in k[X,Y,Z]$ 齐次 设 $F.G$ 互素

(1) $V_p(F.G)$ 为零维概型 (2) $V_p(F,G)=\bigsqcup_{i=1}^{r}(P_i,\mathcal{O}_{P_i})$

局部Artin环

[pf. (1) 仿射片上 $V_p(F.G)\cap\{Z\neq 0\}$

$=\operatorname{Spec}k[x,y]/(f,g)$ 由作业题知 $V(f,g)$ 有限]

(若 $T\subseteq\mathbb{A}^2(x,y)$ 则 $T=\operatorname{Spec}k[x,y]/I$ $I=Q_1\cdots Q_r$)

Artin环 $\sqrt{Q_i}=m_{P_i}$

Max Noether Thm.

即 $f.g$ 的这些点处 $h=0$ (在局部环中)

定理1 $f.g.h\in k[x,y]$ 若 $\forall\overset{\text{闭点}}{P}\in\mathbb{A}^2$ 有 $h\in(f,g)_{m_P}$ 则 $h\in(f,g)$

(R-模中 $M=0\Leftrightarrow M_m=0$ ($\forall m\in\max(R)$))

定理2 $F.G.H\in k[X,Y,Z]$ 齐次 $J=(F,G)$

若 $\forall\overset{\text{闭点}}{P}\in\mathbb{P}^2$. $H\in J_P$ 则 $H\in(F,G)$

(对应齐次素理想)

分次环的局部化：　$S=k[X,Y,Z]=\bigoplus_{d\geq 0} S_d$

$P\subseteq S$ 齐次理想

$$S_P=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{A}{T}\,\middle|\,\begin{matrix}A,T\text{齐次}\\ T\notin P\\ \deg A-\deg T=d\end{matrix}\right\}/\sim$$

一般. J乘性集元素齐次　则 $J^{-1}S$ 分级环

例. $P=[0,0,1]$　$P=(X,Y)$

$$S_P=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{A(X,Y,Z)}{T(X,Y,Z)}\right\}/\sim=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}\left\{\overset{\substack{\text{在P处定义}\\ \uparrow}}{\frac{A(X,Y,1)}{T(X,Y,1)}}Z^d\right\}/\sim$$

$$=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_{P,P}\,Z^d$$

$J\subseteq S$ 齐次理想. 则 $J_P=JS_P$

pf of 定理2　若 $P\in\mathbb{A}^2$

$H\in(F,G)_P \Leftrightarrow H=U_PF+V_PG$　$U_P\ V_P\in k[X,Y,Z]_P$ 齐次

$\overset{Z^{-\deg H}}{\Longleftrightarrow} h=u_Pf+v_Pg$

$u_P,v_P\in k[x,y]_P$

$\Leftrightarrow h\in(f,g)_P$

从而 $h\in(f,g)$ in $k[X,y]$

故 $\exists N$ s.t. $Z^NH=UF+VG$

$(U\ V\in \underset{\text{齐次}}{k[X,Y,Z]})$

希望 $N=0$　设 N 是最小的

可设 $V_P(Z,F,G)=\emptyset$ (线性变换)

$\Leftrightarrow F_1(X,Y)=F(X,Y,0)$

$G_1(X,Y)=G(X,Y,0)$　互素

记 $U=U_1(X,Y)+ZU_2$　$V=V_1+ZV_2$

$$Z^NH=(U_1+ZU_2)(F_1+ZF_2)+(V_1+ZV_2)(G_1+ZG_2)$$

若 $N>0$. 则 $U_1F_1+V_1G_1=0\Rightarrow G_1\mid U_1$　设 $U_1=G_1U_1'=(G-ZG_2)U_1'$

$\Rightarrow Z^NH=(GU_1'-ZG_2U_1'+ZU_2)F+VG=Zu''F+v''G\Rightarrow Z\mid V''$

则可消去Z 与N最小矛盾

命题 F.G.H如前. P为C_F上光滑点. 即P($\mathcal{O}_{x,P}$. $m_{C_F,P}$)为DVR

v_P为对应赋值 若 $v_P(H) \geq v_P(G)$ 则 H在P处满足Noether条件

[pf. 不妨设 $P=[0,0,1] \subseteq A^2$ $C_F|_{A^2} = C_f$ $f = ax+by+\cdots$ (比如 $a \neq 0$)

$m_{C_f,P} = \frac{(x,y)_P}{(f)_P} = (\bar{y})$ $v_P(H) \overset{\triangle}{=} v_P(h = \frac{H}{Z^{\deg H}}) = n_1$. $h = u\bar{y}^{n_1}$

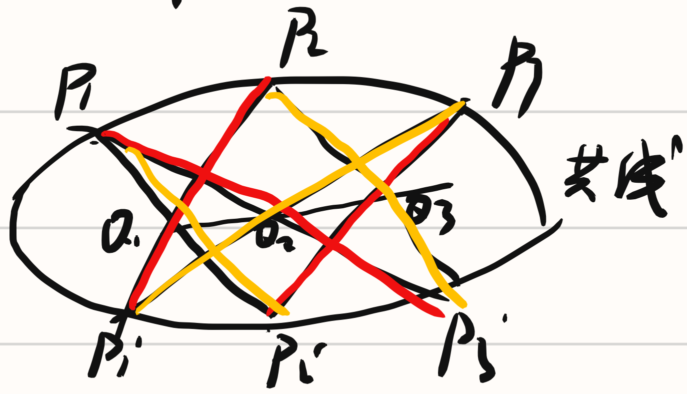
从而发现 $n_1 = \dim \mathcal{O}_{C_f,P}/(h)_P$

$v_P(h) \geq v_P(g = \frac{G}{Z^{\deg G}}) \Leftrightarrow \bar{h} \in (\bar{g}) \subseteq \mathcal{O}_{C_f,P} = k[x,y]_P/(f)_P$

$\Leftrightarrow h \in (f,g)_P \subseteq k[x,y]_P$

$\Leftrightarrow H \in (F,G)_P$.]

Picard定理 Q为二次曲线



命题: F.G为三次曲线. 设 $C_F \cap C_G = \{P_1 \cdots P_9\}$ $P_1 \cdots P_6$为C_F的光滑点且互异

且这6个点在同个二次曲线C_Q上. 则$P_7 \sim P_9$共线

(取F为红线. G为黄线 则得Pascal定理)

[pf. $\underline{G \in (F,Q)}$ $G = F + Q\underset{1次}{L}$ 则 $P_7, P_8, P_9 \in L$]

$\Uparrow$

对$P_1 \sim P_6$满足Noether条件

$\Uparrow$

$v_{P_i}(G) \geq v_{P_i}(Q)$

$\quad \|$ $\quad\quad \|$

$\quad 1$ $\quad\quad 1$

$F.G\in k[X,Y,Z]$ $(F\ G)=1$ $T=V_p(F,G)$ 有限 $T=\coprod_{i=1}^{t}(P_i,\mathcal{O}_{T,P_i})$

(特别: $T\in\mathbb{A}^2$. 则 $T=k[x,y]/I$ $I=Q_1\cdots Q_t$ $\sqrt{Q_i}=m_{P_i}$

$$\mathcal{O}_{T,P_i}=k[x,y]/Q_i\cong k[x,y]_{(P_i)}/(f,g)_{(P_i)}$$

视 $\mathcal{O}_T$ 为 $\mathbb{P}^2$ 的层 $i_*\mathcal{O}_T=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/I_T$ $i: T\to\mathbb{P}^2$

定义: 设 $P\in\mathbb{P}^2$ 闭点. $I_P(F,G)=\dim_k(i_*\mathcal{O}_T)_P$

局部相交数 $=\begin{cases}0. & P\notin T\\ \dim_k\mathcal{O}_{T,P_i} & P=P_i\in T\end{cases}$

(特别: $P\in\mathbb{A}^2$. $I_P(F,G)=\dim_k k[x,y]_{(P)}/(f,g)_{(P)}$)

$$I(F,G)=\sum_{P\in\mathbb{P}^2}I_P(F,G)$$

例: $F=X$ $G=X^2+YZ$ $P_1=[0,0,1]$ $P_2=[0,1,0]$

$$I_{P_1}(F,G)=\dim_k\frac{k[x,y]_{(0,0)}}{(x,x^2+y)_{(0,0)}}=1 \qquad (x,x^2+y)=(x,y)$$

$$I_{P_2}(F,G)=\dim_k\frac{k[x,y]_{(0,1)}}{(x,x^2+y)_{(0,1)}}=1.$$

$F=X$ $G=XZ-Y^2$ $P=[0,0,1]$

$$I_P(F,G)=\dim_k\frac{k[x,y]_{(0,0)}}{(x,x-y^2)_{(0,0)}}=\dim_k\frac{k[y]_{(0,0)}}{(y^2)_{(0,0)}}=2$$

命题: $F_1,F_2,G,H\in k[X,Y,Z]$ 齐次. $P\in\mathbb{P}^2$

(1) $I_P(F_1F_2,G)=I_P(F_1,G)+I_P(F_2,G)$

(2) $I_P(F,G)=I_P(F,G+\lambda FH)$

[pf. (4) $\dim_k \dfrac{k[x,y]_p}{\underline{(f_1f_2,g)_p}} \overset{?}{=} \dim_k \dfrac{k[x,y]_p}{(f_1,g)_p} + \dim_k \dfrac{k[x,y]_p}{(f_2,g)_p}$

$\downarrow \| \quad R/(\bar{f_1}\bar{f_2})$

令 $R = k[x,y]_p/(g)_p$

正合列) $0 \to R/(\bar{f_1}) \to R/(\bar{f_1}\bar{f_2})_p \to R/(\bar{f_2})_p \to 0$

$\bar{h} \mapsto \bar{f_2}\cdot\bar{h}$

(单射: $\bar{f_2}\cdot\bar{h} = 0 \Leftrightarrow \bar{f_2}\bar{h} \in (\bar{f_1}\bar{f_2})$ in R

$\Leftrightarrow \exists a$ s.t. $\bar{f_2}\bar{h} - \bar{a}\bar{f_1}\bar{f_2} = 0$ in R

$\Leftrightarrow g \mid f_2(h - af_1)$ in $\underbrace{k[x,y]_p}$ → UFD

$\Leftrightarrow g \mid h - af_1 \Leftrightarrow \bar{h} = \bar{a}\bar{f_1}$ in $R \Leftrightarrow \bar{h} = 0$ in $R/(\bar{f_1})$)]

例: $f = x^2 - y^3 \quad g = y^2 - x^3 = y^2(1-xy)$

$I_0(f,g) = I_0(x^2-y^3,\ y^2(1-xy)) = 2I_0(x^2-y^3,\ y) = 4$

命题: $I_p(F,G) = 1$. 则 C_F, C_G 在P点光滑且 C_F, C_G $\underbrace{\text{横截相交}}$

[pf. $f = ax + by + \cdots$

$g = cx + dy + \cdots$

$\dim_k \dfrac{k[x,y]_{(0,0)}}{(f,g)_{(0,0)}} = 1 = I_p(F,G)$ $\quad T_{\bar{p},p} = T_{C_F,p} + T_{C_G,p}$

$\Leftrightarrow (f,g)_{(0,0)} = (x,y)_{(0,0)}$ $\quad m_{\bar{p},p}/m^2_{\bar{p},p} \to m_{C_F,p}/m^2_{C_F,p} \oplus m_{C_G,p}/m^2_{C_G,p}$

$\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$]

命题: C_F 在P光滑. H, G $\quad I_p(H,F) \geq I_p(G,F) \Leftrightarrow \frac{h}{g} \in \mathcal{O}_{C_F,p}$

$\Leftrightarrow H \in (F,G)_p$

Bezout定理. $F,G\in k[X,Y,Z]$ 齐次多项式. 则 $I(F,G)=\deg F\deg G$

pf. $T=V_P(F,G)$ 有限的集合

$$0\to I_T\to \mathcal{O}_{P^2}\to \mathcal{O}_T\to 0$$

$$0\to \mathcal{O}(-F-G)\to \begin{matrix}\mathcal{O}(-F)\\ \oplus \\ \mathcal{O}(-G)\end{matrix}\to I_T\to 0 \quad (※)$$

$(※)$: $\mathcal{O}(-F)|_{\underset{\underset{\{Z\neq 0\}}{\|}}{A^2}}=\mathcal{O}_{A^2}\cdot f\leq \mathcal{O}_{A^2}$ ✓

$$\Rightarrow 0\to \mathcal{O}_{A^2}(fg)\to \begin{matrix}\mathcal{O}_{A^2}f\\ \oplus\\ \mathcal{O}_{A^2}g\end{matrix}\to (f,g)\mathcal{O}_X$$

$(af,bg)\mapsto af-bg$

核: $af=bg \Leftrightarrow g|a,\ f|b$

$\Leftrightarrow fg|af$

张量 $\mathcal{O}(d)$

$$0\to I_T(d)\to \mathcal{O}_{P^2}(d)\to \mathcal{O}_T(d)\to 0$$

$$0\to \mathcal{O}(-F-G+d)\to \mathcal{O}(d-F)\oplus \mathcal{O}(d-G)\to I_T(d)\to 0$$

$(T=\sqcup(p_i,\mathcal{O}_{p_i}))$

① $\dim_k\Gamma(\mathcal{O}_T(d))=I(F,G)$:

$\mathcal{O}_{P^2}(d)|_{A^2}=\mathcal{O}_{A^2}Z^d$

$\mathcal{O}_T(d)=\mathcal{O}_T\cdot Z^d\Rightarrow \mathcal{O}_T(d)_{p_i}=\mathcal{O}_{T,p_i}Z^d$

故 $\Gamma(\mathcal{O}_T(d))=\bigoplus\limits_i \mathcal{O}_{T,p_i}Z^d$

② d充分大 $\Gamma(\mathcal{O}_{P^2}(d))\to\Gamma(\mathcal{O}_T(d))\to 0$.

③ $\underbrace{\Gamma(\mathcal{O}(d-F))}_{\underset{(d次齐次在F为0)}{\updownarrow}}\oplus\Gamma(\mathcal{O}(d-G))\to\underset{\underset{(d次齐次在T为0)}{\wr}}{\Gamma(I_T(d))}\to 0.$ ⇐ Max-Noether

- - -

④⑤ $\Rightarrow$ $0\to\Gamma(I_T(d))\to\Gamma(\mathcal{O}_{P^2}(d))\to\Gamma\mathcal{O}_T(d)\to 0$

$0\to\Gamma(\mathcal{O}(-F-G+d))\to\Gamma(\mathcal{O}(d-F))\oplus\Gamma(\mathcal{O}(d-G))\to\Gamma(I_T(d))\to 0$

$\Rightarrow I(F,G)=\dim_k\Gamma(\mathcal{O}_T(d))=\dim_k\Gamma(\mathcal{O}_{P^2}(d))-\dim_k\Gamma(\mathcal{O}(d-F))-\dim_k\Gamma(\mathcal{O}(d-G))$

$+\dim_k\Gamma(\mathcal{O}(d-F-G))$

又 $\mathcal{O}(-F)\cong\mathcal{O}(-d_1)$

$\nearrow \dim_k\Gamma(\mathcal{O}(d))=\frac{(d+2)(d+1)}{2}$

$\Rightarrow I(F,G)=\dim_k\Gamma(\mathcal{O}(d))-\dim_k\Gamma(\mathcal{O}(d-d_1))-\dim_k\Gamma(\mathcal{O}(d-d_2))+\dim_k\Gamma(\mathcal{O}(d-d_1-d_2))\overset{计算}{=}d_1d_2$

② : $\Gamma(\mathcal{O}(d)) = \{ f(x,y) \cdot z^d \mid \deg f \le d \}$

$k[x,y]_{\le d}\, z^d \longrightarrow k[x,y]/_{(f,g)} \cdot z^d$

d足够大时满射显然 故成立

③ $\Gamma(I_T(d)) = \{ h(x,y) z^d \mid \forall P.\ \underbrace{h \in \overset{\deg h \le d}{I_{T,P}} = (f,g)_P}_{\Leftrightarrow H \in (F,G)_P} \}$

$\Leftrightarrow H \in (F,G)$ (Max Noether)

$\Gamma(\mathcal{O}(d-F)) = \{ h(x,y) z^d \mid \begin{matrix} \deg h \le n \\ h(x,y) \in (f) \end{matrix} \}$

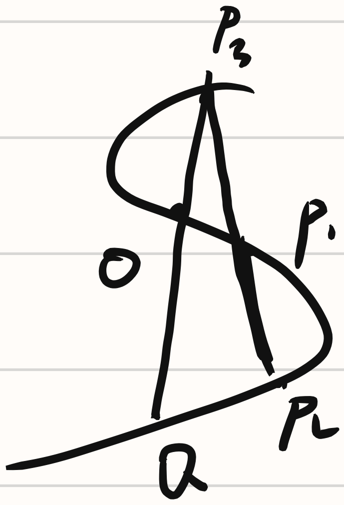
$= \{ f h' z^d \mid \cdots \} = \{ F H' z^{\cdot\cdot} \mid \cdots \}$

$\Gamma(\mathcal{O}(d-G)) = \{ G H' z^{\cdot\cdot} \mid \cdots \}$

故满射 $\Gamma(\mathcal{O}(d-F)) \oplus \Gamma(\mathcal{O}(d-G)) \to \Gamma(I_T(d))$. #]

Bezout 应用

(1) C_F 为3次光滑平面曲线 定义 $P_1 \oplus P_2 = Q$



交换
单位: O
逆元: $P \oplus Q = O$

O处作切线交C于Q

结合律: $(P_1 \oplus P_2) \oplus P_3 = P_1 \oplus (P_2 \oplus P_3)$

Cor. $\overset{C_G}{\overset{\parallel}{C}}$ 为 $\mathbb{P}^2$ 上光滑射影曲线 则 $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) = k$

[Pf 任取 $f \in \Gamma(C, \mathcal{O}_C)$. 记 $f = \overline{\frac{F_1}{F_2}}$ → 齐次 $\Rightarrow \overline{\frac{F_1}{F_2}} \in \mathcal{O}_{C,P}\ (\forall P)$

$\Rightarrow F_1 \in (F_2, G)$

$F_1 = \lambda F_2 + GH \Rightarrow \overline{\frac{F_1}{F_2}} = \lambda$ #]

定理：设 $\underset{V_p(J)}{\underset{\shortparallel}{X}} \subseteq \mathbb{P}^n$ 射影代数簇，则 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$

$$S_X = \bigoplus_{d\geq 0} k[x_0, \dots, x_n]_d / J_d$$

cpf. 设 $S_X = k[x_0, \dots x_n]/J$　　取 $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$

$U_i = \{x_i \neq 0\}$　$V_i = X \cap U_i \subseteq \mathbb{A}^n$ 则 $f|_{V_i} = \dfrac{F_i(x_0, \dots x_n)}{x_i^{N_i}} \Rightarrow x_i^{N_i} f \in S_X^{(N_i)}$

仿射

则取 $N = \max N_i$.　此时 $\forall i$　$x_i^N f \in S_X^{(N)}$

再 $N' = nN+1$ 则 $\forall G \in S_X^{(\geq N')}$, $Gf \in S_X^{(\geq N')}$　$\Rightarrow f \cdot S_X^{(\geq N')} \subseteq S_X^{(\geq N')}$

又 S_X Noether. 故 $S_X^{(\geq N')}$ 有限生成

$\eta_f : S_X^{(\geq N')} \to S_X^{(\geq N')}$　S_X 模自同态

$G \mapsto fG$

Claim: $\exists$ 首一 $g(\lambda) \in S_X[\lambda]$ s.t. $g(\eta_f) = 0 : S_X^{(\geq N')} \to S_X^{(\geq N')}$

$$G \mapsto (\underbrace{f^m + A_{m-1} f^{m-1} + \cdots + A_0}_{\overset{\shortparallel}{0}})G$$

f 0次　　$A_i = \underset{\underset{S_X^{(0)}}{\Uparrow}}{a_i} + \underset{\underset{S_X^{(\geq 1)}}{\Uparrow}}{A_i'}$　　$\Rightarrow f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_0 = 0$

由 $k = \bar{k} \Rightarrow f \in k$]

Chap4 奇点解消

1 定义：X 为射影簇. X 的一个奇点解消为一个双有理态射

$u : \tilde{X} \to X$　其中 $\begin{cases} (1)\ \tilde{X} \text{ 光滑射影} \\ (2)\ u : u^{-1}(X^{sm}) \cong X^{sm} \end{cases}$

例：$C : y^2 - x^3 = 0 \subseteq \mathbb{A}^2$　　$u : \tilde{C} \to C$

$k[x, y, \frac{y}{x}] \leftarrow k[x, y]/(y^2 - x^3)$

$/(y^2 - x^3)$ 正规化

$\cong k[\frac{y}{x}]$　　故 $\tilde{C} = \mathbb{A}^1$

定理：C 为射影代数曲线

(1) C 的正规化 $\nu: \tilde{C}\to C$ 为奇点解消

(2) C 的解消唯一

[pf $\tilde{C}$ 的构造　$C=\cup C_i$ 仿射开覆盖　$\nu_i: \tilde{C}_i\to C_i$ 正规化

$\Gamma(C_i)^{\vee}\leftarrow\Gamma(C_i)$

则将 $\tilde{C}_i$ 粘合成 $\tilde{C}$ 即可

Fact $\tilde{C}$ 射影]

记号：$J_p=\bigoplus_d\{\frac{A}{S}\mid A\in J,\ S(p)\neq 0\}$　$V_p(J)\cap\{Z\neq 0\}=(Z^{-1}J)^{(0)}$

$=V(I=(\frac{A}{Z^{\deg A}}\mid A\in J))$

命题：J_1, J_2 齐次理想 若对充分大的 d　$J_1^{(d)}=J_2^{(d)}$ 则 $V_p(J_1)=V_p(J_2)$

$$O_{X,p}J=\bigoplus_d\{\frac{F}{S}B\mid \deg B=d\}$$

对充分大的 d　$(O_{X,p}J)^{(d)}=J_p^{(d)}$

$\subseteq$ 显然

$\supseteq$　$J=(F_1,\cdots F_r)$　$\gg 0$　$\frac{A}{S}\in J_p^{(d)}$　$\frac{A}{S}=\frac{A_1F_1+\cdots A_rF_r}{S}$

$p\in\{Z\neq 0\}$　$\frac{AF_1}{S}=\frac{A/Z^{d_A}(Z^{d_A-d_S}F_1)}{S/Z^{d_S}}\in(O_{X,p}J)^{(d)}$　✓

$\in O_{X,p}$

$I_{T,p}=J_p^{(0)}$　　$O_p=\left(\frac{k[X,Y,Z]_p}{J_p}\right)^{(0)}$

Chap 5 Riemann-Roch

R-R Thm: C为光滑射影曲线. D为C上除子. 则

$$l(D) - l(K-D) = \deg D + 1 - g(C)$$

除子: C为光滑曲线. 一个除子D形如 $D = n_1P_1 + \cdots n_rP_r$ $n_i \in \mathbb{Z}$
$P_i \in C$ 闭点

命题: 记号如上 存在一一对应 $\mathrm{Div}(C) \rightleftharpoons \mathrm{CarDiv}(C)$

[pf. $D_C = \{(U_i, f_i) \mid f_i \in K(C)\} \longmapsto D = \sum_{P \in C} v_P(f_i) P$ $(P \in U_i)$ (良定)

有限性: C有有限覆盖 故只须在U_i上check有限

不妨U_i仿射. $f_i = \frac{g_i}{h_i}$

$v_P(f_i) = v_P(g_i) - v_P(h_i)$

$\{P \mid v_P(f_i) \neq 0\} \subseteq \underbrace{V_{U_i}(g_i)}_{0维} \cup \underbrace{V_{U_i}(h_i)}_{0维}$ 有限

$D = \sum n_i P_i$ 设$(\mathcal{O}_{C,P_i}, m_i = (f_i))$ 取P_i邻域U_i s.t. $\begin{cases} 满. P_j \notin U_i \\ f_i在U_i正则 \end{cases}$

$\downarrow$ 再令$U_0 = C \setminus \{P_1 \cdots P_r\}$

$D_C = \{(U_0, 1), (U_i, f_i^{n_i})\}$

#]

C为整曲线. $D_C = \{(U_i, f_i)\}$ 除子 U_i仿射 $f_i = \frac{u_i}{v_i} \in K(U_i)$

定义 $\deg D_C = \sum_{P \in C} \dim_k \mathcal{O}_{C,P}/(u_i)_P - \dim_k \mathcal{O}_{C,P}/(v_i)_P$

不依赖于(u_i, v_i) f_i选取: ① 若 $f_i = \frac{u_i g_i}{v_i g_i}$

由 $\dim_k \mathcal{O}_{C,P}/(u_i g_i)_P = \dim_k \mathcal{O}_{C,P}/(u_i)_P + \dim_k \mathcal{O}_{C,P}/(g_i)_P$ 即可

有限性   (同 $I_P(FG, H) = I_P(F, H) + I_P(G, H)$ 证明)

故良定   ② f_i 均乘上可逆元不影响

命题: 若C光滑 $D=\sum n_i P_i$ 则 $\deg D = \sum n_i$

[证 $\dim_k \mathcal{O}_{C,P}/(f_i^{n_i}) = n_i$ 即可]

$m_i = (f_i)$

除子的拉回

定义 设$\gamma: C' \to C$为曲线的支配态射 D由$\{(U_i, f_i)\}$给出 on C

则 $\gamma^* D$ 由$\{(\gamma^{-1}U_i, \gamma^* f_i)\}$给出

命题: C为一条曲线 $\nu: C^\nu \to C$正规化. D为C上Cartier除子

则 $\deg_D C = \deg_{C^\nu}(\nu^* D)$ (*)

[pf. 可以归化为仿射有效除子情形 $D(C,f)$ $f\in\Gamma(C)$

$$0 \to \Gamma(C) \to \underbrace{\Gamma(C^\nu)}_{} \to T \to 0$$

f.g $\Gamma(C)$模 $f_1 \sim f_r$为生成元. $f_1 = \frac{u_i}{v_i}$ $u_i, v_i \in \Gamma(C)$

f_i在$\Gamma(C)$上整 $\Rightarrow f_i^{n_i} + a_{n_i-1} f_i^{n_i-1} + \cdots + a_0 = 0$

断言: $\dim_k T < +\infty$

则$\exists h \in \Gamma(C)$ s.t. $\forall N$ $\forall i$ $h f_i^N \in \Gamma(C)$

考虑 $(h)\Gamma(C^\nu) \subseteq \Gamma(C)$

$\dim_k T \le \dim_k \Gamma(C)/(h)$ C^ν仿射. $V_{C^\nu}(h)$ 0维

故$\dim_k \Gamma(C^\nu)/(h) < +\infty$ ✓

(*) $\Leftrightarrow \dim_k \Gamma(C)/(f) = \dim_k \Gamma(C^\nu)/(f)$

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & K_1 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Gamma(C) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \Gamma(C)^\nu \arrow[r] \arrow[d, "f"] & T \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma(C) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(C)^\nu \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma(C)/(f) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(C)^\nu/(f) \arrow[r] \arrow[d] & K_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow 0 \to K_1 \to \Gamma(C)/(f) \to \Gamma(C)^\nu/(f) \to K_2 \to 0$

$\dim T < +\infty$

]

定理：C为光滑射影曲线 $0\neq f\in k(C)$ 则 $\deg \mathrm{div}(f)=0$

[pf. 存在射影平面曲线 $\tilde{C}\subseteq \mathbb{P}^2$ s.t. 存在双有理态射 $\varphi: C\to\tilde{C}$

(C为$\tilde{C}$的解消 ⟹ φ与$\tilde{C}$的正规化一致)

则可设 $f=\frac{F_1}{F_2}$. $F_i\in k[X,Y,Z]$齐次 （Fact: $\tilde{C}$平面射影曲线 仅由一个方程G定义）

由Bezout Thm. $\deg_{\tilde{C}}\mathrm{div}(f)=0$ 则 拉回 $\deg\mathrm{div}(f)=0$ #]

$$\deg_{\tilde{C}}\mathrm{div}(f) = I(G,F_1)-I(G,F_2)$$

定义：C为光滑射影曲线. D为C上除子

$$\mathcal{L}(D)\triangleq\{f\in k(C) \mid \mathrm{div}(f)+D\underset{\text{有效}}{\geq 0}\}$$

默认 $\mathrm{div}(0)=\sum_{P\in C}+\infty P$ （注. $D=\sum n_iP_i$有效 ⟺ $n_i\geq 0\ \forall i$）

命题：$\mathcal{L}(D)$为线性空间 $l(D)=\dim\mathcal{L}(D)$.

[pf. $\mathrm{div}(f)+\sum n_P P\geq 0 \Leftrightarrow v_P(f)\geq -n_P$

若f.g满足 则 $v_P(f+g)\geq\min\{v_P(f),v_P(g)\}\geq -n_P \Rightarrow f+g\in\mathcal{L}(D)$]

补充定理. 若$\eta: C'\to C$为光滑射影曲线间的有限映射

则$\forall P\in C$闭点 $\deg_{C'}\eta^*P=[k(C'):k(C)]$

[pf. 设 $C=\bigcup_i(U_i=\mathrm{Spec}A_i)$ 则 $C'=\bigcup_i(U_i'=\mathrm{Spec}A_i')$

(承认) $A_i'=\{f'\in k(C') \mid f'在A上整\}$ (为有限A_i模)

P为A的极大理想 $(\underset{\downarrow\ \text{DVR}}{A_P}=S^{-1}A, m_P=(f_P))$ 进而 $\mathrm{Spec}\,S^{-1}A'$

P作为除子. 局部上由f_P定义 η^*P在$\mathrm{Spec}\,S^{-1}A'$局部上也由f_P定义

$$\deg_{C'}\eta^*P=\dim_k S^{-1}A'/(f_P)=\dim_k \underbrace{S^{-1}A'/(f_P)S^{-1}A'}\cong S^{-1}A'\otimes_{A_P}A_P/(f_P)$$

$S^{-1}A'$为有限无挠A_P模 ⟹ $S^{-1}A'$为A_P自由模 且 $\mathrm{rank}=\dim_{k(C)}S^{-1}A'\otimes_{A_P}k(C)=\dim_{k(C)}k'(C)$

$\Rightarrow \deg_{C'}\eta^*P=\dim_k S^{-1}A'\otimes_{A_P}k(P)=\mathrm{rank}_{A_P}S^{-1}A'=[k(C'):k(C)]$ #]

下面设 C 光滑射影曲线   D 为除子

$$\mathcal{L}(D) = \{ f \in K(C) \mid \operatorname{div}(f) + D \geq 0 \}$$

命题 (1) $\mathcal{L}(0) = \Gamma(C) = k$

(2) $\mathcal{L}(D) \cong \Gamma(C, \mathcal{O}_C(D))$

[Pf(2) $D = (U_i, h_i)$ 则 $\mathcal{O}(D)|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} \frac{1}{h_i}$ 又 $f \in \mathcal{L}(D) \Leftrightarrow fh_i \in \mathcal{O}_C(U_i)$ $(\forall i)$

$\mathcal{L}(D) \to \Gamma(C, \mathcal{O}_C(D))$ $\Gamma(C, \mathcal{O}_C(D)) \to \mathcal{L}(D)$

$f \mapsto \left((fh_i) \frac{1}{h_i} \right)$ $\left(g_i \frac{1}{h_i} \right) \mapsto \frac{g_i}{h_i}$]

(3) $D_1 \leq D_2$, 则 $\mathcal{L}(D_1) \subseteq \mathcal{L}(D_2)$

(4) $P \in C$ 闭点. $\dim \mathcal{L}(D+P) / \mathcal{L}(D) \leq 1$

[pf(4) $0 \to \mathcal{O}(-P) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_P \to 0$

$\Rightarrow 0 \to \mathcal{O}_C(D) \to \mathcal{O}_C(D+P) \to \underset{\substack{\text{is} \\ \mathcal{O}_P = k}}{\mathcal{O}(D+P)|_P} \to 0$

$\Rightarrow 0 \to \mathcal{L}(D+P) / \mathcal{L}(D) \to \underset{= k}{\Gamma(C, \mathcal{O}_P)}$]

若 $\dim \mathcal{L}(D+P) / \mathcal{L}(D) = 0$

$D + P = (n+1)P + \cdots$ 则若 $f \in \mathcal{L}(D+P)$. 则 $-v_P(f) \leq n$

若 - - - $= 1$.   则 $\exists f \in \mathcal{L}(D+P)$. s.t. $v_P(f) = -(n+1)$

推论: $\dim_k \mathcal{L}(D) = \begin{cases} 0. & \deg D < 0 \\ \leq \deg D + 1. & \deg D \geq 0 \end{cases}$

例: P^1 $p=[0,1]$ $D=np$

$x=\frac{X}{Y}$ $y=\frac{Y}{X}$ $P^1=A_x^1\cup A_y^1$

$$\operatorname{div}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=[a_1,1]+\cdots+[a_n,1]-[b_1,1]-\cdots-[b_m,1]+(m-n)[1,0]$$

$f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)$

$g(x)=(x-b_1)\cdots(x-b_m)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(D=np)=\{\frac{f(x)}{x^n}\mid \deg f(x)\le n\}$ $\ell(D)=n+1$

线性系

定义

$$\begin{tikzcd}|D|=P(\mathcal{L}(D)) \arrow[d, "双射"] & {[f]} \arrow[d] \\ \{D'\ge 0\mid D'\sim D\} & \operatorname{div}(f)+D\end{tikzcd}$$

$V=\max\{V'\ge 0\mid V'\le D',\ \forall D'\in|D|\}$

V 称作|D|的固定部分　点 $p\le V$ 称为 $|D|$ 的基点, 可记 $|D|=|M|+V$

$|M|$: $|D|$的自由部分

$\mathcal{L}(M)=\mathcal{L}(D)$

|D|决定的映射　设 $D=(U_i,h_i)$

取 $\mathcal{L}(D)$ 的基 $f_1,\cdots,f_n\in K(C)$

定义 $\phi_{|D|}: C\setminus V\to P^{n-1}$ 为态射

$U_i\ni p\mapsto[f_1h_i,\cdots,f_nh_i]$

若 $V=tp+\cdots$ 则 $\min\{v_p(f_1h_i),\cdots,v_p(f_nh_i)\}=t$

$\Rightarrow$ 延拓 $\phi_{|D|}(p)=\phi_{|D-V|}(p)=\phi_{|M|}(p)$

例: $\phi_{|np|}|_{A_x^1}$: $x\mapsto[1,x,\cdots,x^n]$

$\phi_{|np|}|_{A_y^1}$: $y\mapsto[y^n,\cdots,y,1]$

微分

设A为k-代数 M为A模 一个相对k的求导指

$d_M: A\to M$ 满足

(1) $d_M(\lambda a)=\lambda d_M(a)$ (2) $d_M(ab)=a d_M(b)+b d_M(a)$

定义 若∃A模 $\Omega_{A/k}$ 和求导 $d: A\to\Omega_{A/k}$

满足泛性质

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "d_M"'] & \Omega_{A/k} \arrow[d, dashed, "\exists!\ A\text{-模同态}\ \eta"] \\ & M \end{tikzcd}$$

则称 $\Omega_{A/k}$ 为A相对k的微分模

定理: $\Omega_{A/k}$ 存在

(构造 $A\otimes_k A$ $(a_1\otimes a_2)(b_1\otimes b_2)=(a_1b_1)\otimes(a_2b_2)$

$$A\times A\otimes_k A\to A\otimes_k A$$

$$a\cdot(a_1\otimes a_2)\mapsto(aa_1)\otimes a_2$$

则 $0\to J\to A\otimes_k A\to A\to 0$

$$a\otimes b\mapsto a\cdot b$$

$$J=\{a\otimes b-b\otimes a\mid a,b\in A\}$$

$\Omega_{A/k}\cong J/J^2$ $d: A\to\Omega_{A/k}$

$$a\mapsto\overline{a\otimes1-1\otimes a}$$

例: $R=k[x_1,\cdots x_n]$ $d: R\to\bigoplus_{i=1}^{n}R\,dx_i$

$$f\mapsto\sum f_{x_i}dx_i$$

泛性质:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[dr, "d_M"'] & \bigoplus R\,dx_i \arrow[d, "\eta"] \\ & M \end{tikzcd}$$

故定义 $\eta(dx_i)=d_M x_i$ 即可

$d_M(x_i^r)=r x_i^{r-1}d_M(x_i)\Rightarrow d_M f=\sum f_{x_i}d_M x_i$

命题: $A=k[x_1,\cdots x_n]/I$ 则 $\Omega_{A/k}=\dfrac{\oplus A\,dx_i}{\mathrm{span}_A\{dg \mid g\in I\}}$

$I=(g_1,\cdots g_m)$

[pf $d: A\to\Omega_{A/k}$

$\overline{f(x_1,\cdots x_n)}\mapsto\sum \bar f_{x_i}\,d\bar x_i$

泛性质:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "d_M"'] & \dfrac{\oplus A\,dx_i}{\mathrm{span}_A\{dg_i \mid 1\le i\le m\}} \triangleq \dfrac{S}{T} \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd}$$

由$d_M(T)=0$
故↓自然来自于上面映射

同理$d_M(\bar f)=\sum \bar f_{x_i}\,d_M(\bar x_i)$]

命题: $S^{-1}\Omega_{A/k}\simeq\Omega_{S^{-1}A/k}$

[pf.

$$\begin{tikzcd} S^{-1}A \arrow[r, "d"] & \Omega_{S^{-1}A/k} \arrow[dr, dashed, "局部化性质"] & \\ & & S^{-1}\Omega_{A/k} \arrow[ul, bend right, "微分模万有性质"'] \\ A \arrow[uu] \arrow[r, "d"] & \Omega_{A/k} \arrow[uu] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

定义: $d(\frac{a}{s})=\dfrac{s\,da-a\,ds}{s^2}$]

定义. X为代数簇. 预层 $\Omega^{pre}_{X/k}(U)=\Omega_{\Pi(U)/k}\xrightarrow{层化}$ 微分层 $\Omega_{X/k}$

特别地. $\Omega_{X/k,p}=\Omega_{\mathcal{O}_{X,p}/k}$

命题. 若$X=\mathrm{Spec}A$. $\Omega_{X/k}(X)=\Omega_{A/k}$ $\Omega_{X/k,p}=\Omega_{A_p/k}$

定义: C为曲线. $P\in C$光滑 $f\in\mathcal{O}_{C,p}$称为P点的局部参数

若$m_{C,p}=(f-f(p))_p$

(直观: 不与切方向垂直)

例: $V(y-x^3(x-y^2)) \subseteq A^2$ $P=(0,0)$:

$\Rightarrow y=\frac{x^4}{1+x^3y} \in (x)_P$ ⇒ x 可作局部参数 (即看 y 能否被 x 表示. 隐函数 Thm)

x+y 也是: $\overline{x+y} \equiv \bar{x} \mod m_{C,P}^2 \Rightarrow \overline{x+y}=\bar{x}$ in $m_{C,P}$

(Fact: $g\in m_{C,P}$ $\bar{g}\neq 0 \in m_{C,P}/m_{C,P}^2$ 则 $m_{C,P}=(g)$)

定理: C 光滑曲线. f 为 C 在 P 处局部参数. 则 ∃P 的邻域 U s.t. $f\in O_C(U)$

且 f 为 U 上每一点处的局部参数

(pf. 设 $C=V(f_1,\cdots f_m)\subseteq A^n$ C 光滑 ⇔ $df_1\cdots df_m$ 维数 n−1 in $\oplus k dx_i$

又 $m_{C,P}/m_{C,P}^2 \cong \frac{\oplus k dx_i}{span\{df_i\}}$

$f-f(p)\in m_{C,P} \to m_{C,P}/m_{C,P}^2$

$f-f(p) \mapsto df|_p$

f 为局部参数 ⇔ $\oplus k dx_i = span\{df, df_1,\cdots df_m\}$ ⇔ $m_{x,p}/m_{x,p}^2 = kd\bar{f}$

⇔ rank $\frac{\partial(f,f_1,\cdots f_m)}{\partial(x_1\cdots x_n)}|_p = n$ 故明显得证. #)

(若 C: g(x,y)=0 光滑. 不妨 $g_x\neq 0$. 则 y 为局部参数)

推论. $\Omega_{U/k}=O_U df$

⇒ 若 C 光滑曲线 f 为 C 的局部参数. 则 $\Omega_{C/k}=O_C df$ 为可逆层

(pf. 设 $C=Spec\, k[x_1,\cdots x_n]/(f_1,\cdots f_m) = Spec A$. 只须证 $\Omega_{A/k}=Adf$ 为自由模

给定 A-模 M. 定义 $\tilde{M}(U)=\{f: U\to \prod_{P\in Spec A} M_P \mid \cdots\}$

则有同构 $\tilde{\Omega}_{A/k} \xrightarrow{\cong} \Omega_{C/k}$

主开集 D(f) 上. $\tilde{\Omega}_{A/k}(D(f)) = f^{-1}\Omega_{C/k}$

$\Omega_{C/k}(D(f)) = \Omega_{f^{-1}C/k}$ $\wr$

$$\Omega_{A/k}=\frac{\oplus A dx_i}{\Sigma A df_j}$$

$\Omega_{A/k} \otimes_A A/m_p = k\,d\bar{f}$ 秩为1

自然同态 $\eta: A\,df \to \Omega_{A/k}$ ⇒ 在每个极大理想处为满射

$(\eta \otimes A/m_p : k(p)\,df \to \Omega_{A/k} \otimes k(p))$

$\overset{\text{Nakayama}}{\Rightarrow}$ η 为满射

$$\Rightarrow \underset{\dfrac{\oplus A\,dx_i}{\sum A\,df_j}}{\underset{\shortparallel}{\Omega_{A/k}}} = A\,d\bar{f} \simeq A/J \qquad J = \mathrm{Ann}(d\bar{f})$$

若 $J \neq 0$. 取 $m_p \ni J$ 则 $A/J \otimes A/m_p = 0$ 与 $\Omega_{A/k} \otimes A/m_p$ 秩为1矛盾]

例: $C = \mathbb{P}^1 = A_x \cup A_y$ $\quad \Omega_{C/k}|_{A_x^1} = \mathcal{O}_{A_x^1}\,dx \qquad dx = d\frac{1}{y} = -\frac{1}{y^2}dy$

$\Omega_{C/k}|_{A_x^2} = \mathcal{O}_{A_x^2}\,dy$. $\Rightarrow \Omega_{C/k} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$

$C: X^3 - Y^3 - Z^3 = 0$ in $\mathbb{P}^2$

$C_{\cap\{Z\neq 0\}}: x^3 - y^3 - 1 = 0 \subseteq \mathbb{A}^2 \qquad x^2dx - y^2dy = 0 \qquad x = \frac{X}{Z},\ y = \frac{Y}{Z}$

在 $\underset{U_{YZ}}{\overset{\shortparallel}{C\cap\{Z\neq0, Y\neq 0\}}}$ 上 局部参数 dx $\Rightarrow \Omega_{C/k}|_{U_{YZ}} = \mathcal{O}\,dx$

$|_{U_{XZ}} = \mathcal{O}\,dy$

$|_{U_{XY}} = \mathcal{O}\,d(\frac{Z}{X})$

$= \mathcal{O}\,d(\frac{1}{x})$

Fact: $\Omega_{C/k} \simeq \mathcal{O}_C$

有理微分与典范除子

设 C 为光滑射影曲线 $K(C)$ 函数域

命题：设 f 为 $p\in C$ 处局部参数．则 $\Omega_{K(C)/k} = K(C)df$

[pf.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,p} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "分式域"] & \Omega_{\mathcal{O}_{X,p}/k} = (\Omega_{X/k})_p = \mathcal{O}_{X,p}df \arrow[d] \\
K(C) \arrow[r, "d"] & K(C)df
\end{tikzcd}$$

]

定义：称 $\omega\in\Omega_{K(C)/k} = K(C)df$ 为有理微分

设 $p\in C$　t_p 为局部参数．则 $\omega = g\,dt_p$　　v_p 为 p 点处赋值

定义赋值 $v_p(\omega) = v_p(g)$

(良定：若 t_p' 为局部参数．且不妨 $m_{C,p} = (t_p) = (t_p')$　则 $t_p' = ut_p$　$u\in\mathcal{O}_{X,p}^*$

$\Rightarrow dt_p' = t_p du + u\,dt_p$　$\Rightarrow du\in\mathcal{O}_{X,p}dt_p = \Omega_{\mathcal{O}_{X,p}/k}$

$= (\underbrace{u}_{\text{可逆}}+\underbrace{t_p v}_{\text{在}p=0})\,dt_p$　$\Rightarrow u+t_pv\in\mathcal{O}_{X,p}^*$　故良定)

定义．设 $\omega\neq0\in\Omega_{K(C)/k}$　则定义 $\mathrm{div}(\omega) = \sum_{p\in C} v_p(\omega)\cdot p$

(t_p 在一个开邻域内均为局部参数 $\Rightarrow$ 每个开邻域内仅有限个 P．$v_p(\omega)\neq0$)

再有限覆盖

定理：设有理微分 $\omega\neq0$．则 $\mathcal{O}_C(\mathrm{div}(\omega))\cong\Omega^1_{C/k}$

[pf. 把 C 分解为仿射开集 U_i 之并．在 U_i 上有局部参数 t_i

于是 $\Omega_{C/k}(U_i) = \mathcal{O}_{U_i}dt_i$

$\omega = g_i dt_i$

$\mathrm{div}(\omega)|_{U_i} = \mathrm{div}(g_i)|_{U_i}$　$\Rightarrow \mathcal{O}_C(\mathrm{div}(\omega))|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}\cdot\frac{1}{g_i}$

故定义 $\eta: \Omega_{C/k} \to \mathcal{O}_C(\mathrm{div}(w))$

在 U_i 上 $\eta_i: \Omega_{C/k}|_{U_i} \to \mathcal{O}_C(\mathrm{div}(w))|_{U_i}$

$dt_i \mapsto \frac{1}{g_i}$ 同构

又 $w = dt_i \cdot g_i = dt_j \cdot g_j$ 故 η_i 可粘合成 η #

于是 $\mathrm{div}(w)$ 在线性等价意义下唯一 称为典范除子. 记作 K_C

Riemann-Roch: C 光滑射影曲线 $\Rightarrow l(D) - l(K_C - D) = \deg D + 1 - g(C)$

Cor. (1) $l(K_C) = g(C)$ (2) $\deg K_C = 2g(C) - 2$

(因为 $l(0) = 1$. $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) = k$)

回顾: ①拉回. X, Y 代数簇 $\varphi: X \to Y$ 态射 D 为 Y 上除子 (V_i, f_i)

设 $D \geq 0$ 即 $f_i \in \mathcal{O}_Y(V_i)$ 且 $\varphi^* f_i \neq 0$

$\overset{\uparrow}{\mathcal{O}_X}(\varphi^{-1}(V_i))$

$\varphi^* D$ 为 X 上除子. 由 $(\varphi^{-1} V_i, \varphi^* f_i)$ 表达

Fact: $\mathcal{O}_X(\varphi^*(D)) = \varphi^*(\mathcal{O}_Y(D))$

② C 光滑射影曲线 $D(U_i, g_i)$

$|D| = \mathbb{P}(L(D)) \rightleftarrows \{D' \geq 0 \mid D' \sim D\}$

$[f] \mapsto \mathrm{div}(f) + D$

固定部分

$|D| = |M| + \overset{\uparrow}{V} \Rightarrow (\mathrm{div}(f) + D)|_{U_i} = M_f|_{U_i} + V|_{U_i}$

$\swarrow$

$L(M) = L(D)$

设 $f_1 \sim f_\ell$ 为 $L(D)$ 的基 则 $M_{f_1} \sim M_{f_\ell}$ 的公共界为 0

在 U_i 上 $f_1 g_i, \cdots f_\ell g_i \in \mathcal{O}(U_i)$

$V|_{U_i}$ 为 $f_1 g_i, \cdots f_\ell g_i$ 的公共零点 (含重数)

即 $\forall p \in U_i$: $v_p(v) = \min\limits_j v_p(f_j g_i)$

$\phi_{|D|}: U_i \to P^{l-1}$

$x \mapsto [f_1 g_i(x), \cdots f_l g_i(x)]$ v=0时 有一个良定义时

一般把 $\phi_{|D|} = \phi_{|M|}$

设 $|D|$ 无基点. $\phi_{|D|}: X \to P^{l-1}$ $[X_1 \cdots X_l]$ $\phi_{|U_i} = [f_1 g_i \cdots f_l g_i]$

$|D| \rightleftarrows P^{l-1}$ 中超平面 $\rightleftarrows \mathcal{O}_{P^{l-1}}(1)$

令 $H_1 = \{X_1 = 0\}$. 也可视为 P^{l-1} 中的除子

令 $V_j = \{X_j \neq 0\} \cong A^{l-1}$ H 表示为 $(V_j, \frac{X_1}{X_j})$

$\phi^* H_1|_{U_i \cap \phi^{-1}(V_j)} = \mathrm{div}\left(\frac{f_1 g_i}{f_j g_i}\right) = \mathrm{div}(f_1 g_i)$

$\Rightarrow \phi^* H_1|_{U_i} = \mathrm{div}(f_1 g_i)$

$\Rightarrow \phi^* H_1 = \mathrm{div}(f_1) + D$

命题 P 为 $|D|$ 的基点 $\Leftrightarrow l(D-P) = l(D)$

定理1: $g(C) = 0 \Leftrightarrow C \cong P^1$

Pf. $\forall p \in C$ 则 $l(p) - l(K_C - p) = 2$ $\deg K_C = -2 < 0$

$\Rightarrow l(p) = 2$ $\Rightarrow L(p) = \mathrm{span}\{1, f\}$

$\mathrm{div}(f) = P' - P$

$|D|$ 无基点: $l(P-Q) = \deg(P-Q) + 1 = 1 \neq l(P)$

$\phi_{|D|}: C \to P^1$ $\Rightarrow \phi^*_{|D|}: K(P^1) \to K(C)$

一个开集上 $x \mapsto [1, f(x)]$ 即 $x \mapsto \begin{cases} [1, f(x)] & x \neq P \\ [0, 1] & x = P \end{cases}$ $\longrightarrow$ $x \mapsto f$

$\phi: C\setminus\{P\} \to A^1_{x_1} = \{x_0 \neq 0\}$
$x \mapsto f(x)$

$\phi^*([1,0]) = \mathrm{div}(f|_{C\setminus\{P\}})$
$= P'$

从而 $[K(C): K(P^1)]=1 \Rightarrow C \cong P^1$]
(光滑射影)曲线
函数域同构 → 同构

定理: $g(C)=1 \Rightarrow C \cong$ cubic curve $\subseteq P^2$

cpf $\deg K_C=0$ $\quad l(K_C)=1 \Rightarrow K_C \sim 0$

取 $P\in C$ $n>0$ $\quad l(nP)-l(\underbrace{K_C-nP}_{0}) = n+1-1=n \Rightarrow l(nP)=n$

$$\underset{1}{L(0)} = L(P) \subsetneq \underset{x}{L(2P)} \subsetneq \underset{y}{L(3P)} \subset \underset{x^2}{L(4P)} \subset \underset{xy}{L(5P)} \subset \underset{y^2,\ x^3}{L(6P)}$$

$v_P(x)=-2$ $\quad v_P(y)=-3$

$\Rightarrow \exists \lambda$ s.t. $y^2-\lambda x^3 \in L(5P)$ 设 $y^2-\lambda x^3-(a+bx+cy+dx^2+exy)=0$ in $K(C)$
且不可约 in $k[x,y]$
(否则 $1, x, y, x^2, xy$ 有关系)

(1) $\phi_{|2P|}: C \to P^1$ $\quad$ $C\setminus P$ 上定义为 $[1,x]$
P附近定义为 $[\frac{1}{x},1]$ $\subseteq \{x_1\neq 0\}=A^1_t$
$t=\frac{x_0}{x_1}$

$(l(2P-Q)=\deg(2P-Q)=1 \Rightarrow$ 无基点$)$

$\phi^*_{|2P|}\,\mathrm{div}(t|_{A^1_t}) = 2P$

$\deg \phi_{|2P|}=2 \Rightarrow [K(C): \underset{k(x)}{\overset{\shortparallel}{K(P^1)}}]=2$

(2) $\phi_{|3P|}: C\to P^2$ $\quad$ 定义为 $[1,x,y]$

$\Rightarrow \phi_{|3P|}(C) \subseteq \underset{C'}{\overset{\shortparallel}{V_P(F)}} \subseteq P^2$ $\quad$ F齐次 不可约三次

$\Rightarrow K(C')\subseteq K(C)$

$[K(C'): \overset{k(x)}{\overset{\shortparallel}{K(P^1)}}] = \mathrm{Frac}(k[x,y]/y^2-\lambda x^3\dots)=2$

$\downarrow$ $[K(C):K(P^1)]=2$
$K(C)=K(C')$

Fact: P^2 非光滑三次曲线 双有理于有理曲线

(若有奇点 P_0　$\forall x \in C \setminus P_0$ (连接 x 与 P_0　则 $I(l, C) = 3$

又 $I_{P_0}(l, C) = 2 \Rightarrow x$ 由 l 唯一确定

C' 为 $C \setminus P_0$ 的解消　则 $K(C') = K(P^1)$ (光滑 $\Rightarrow C'$ 同构于 P^1

又 $g(C') = 1 \neq g(P^1) = 0$. 矛盾)

pf of R-R Thm

定义: 一个分布是 $r: C \to K(C)$　满足 除了有限个 x　$r_x \in \mathcal{O}_{C,x}$

$x \mapsto r_x$

$R = \{C$ 上的分布$\}$　k-线性空间　　$K(C)$ 自然嵌入到 R 中

D 为 C 上除子　$D = \sum n_P P$. 定义 $R(D) = \{ r \in R \mid \forall P \in C.\ v_P(r_P) + n_P \geq 0 \}$

命题: (1) $D \leq D' \Rightarrow R(D) \subseteq R(D')$

(2) $R(D+P)/R(D) = k\left(\frac{1}{t_P^{n_P+1}}\right)$

$D = n_P P + \cdots$

设 $m_{C,P} = (t_P)$

(3) $R = \varinjlim_{D} R(D)$

定义: $\Lambda(D) = R/(R(D) + K(C))$　　$\lambda(D) = \dim_k \Lambda(D)$

命题: 若 $D_1 \sim D_2$. 则 $\Lambda(D_1) \simeq \Lambda(D_2)$

[pf $D_2 = D_1 + \mathrm{div}(f)$　　$R/(R(D_1) + K(C)) \xrightarrow{\frac{r}{f}} R/(R(D_2) + K(C))$

$r \in R(D_1) \Rightarrow (\mathrm{div}(r_x) + D_1)_x \geq 0 \Leftrightarrow (\mathrm{div}(r_x \frac{1}{f}) + D_2)_x \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{r}{f} \in R(D_2)$　]

定理1. (1) 若 $D' \geq D$ 则 $\mathcal{R}(D')+k(C) \big/ \mathcal{R}(D)+k(C) = \deg D' - \ell(D') - \deg D + \ell(D)$

(2) $\exists D_0$ 使 $\forall D$ s.t. $\deg(D_0) - \ell(D_0) \geq \deg D - \ell(D)$

(3) $\lambda(D) < +\infty$ $\lambda(0) = g$

定理2 ∃非退化双线性映射 $\theta: \Lambda(D) \times L(K-D) \to k$
(perfect pair)

Thm1 (1)+(2) ⇒ (3): (2) ⇒ $\deg D - \ell(D) \leq N$

又 $\deg(D+P) - \ell(D+P) \overset{?}{\geq} \deg D - \ell(D)$

取(2)中 $D_0 \geq D$ 则 $\forall D' \geq D_0$.

由(1)(2) $\dim \frac{\mathcal{R}(D')+k(C)}{\mathcal{R}(D)+k(C)} = \dim \frac{\mathcal{R}(D_0)+k(C)}{\mathcal{R}(D)+k(C)}$

再对 D' 取直极限 ⇒ $\lambda(D) = \dim \frac{\mathcal{R}(D_0)+k(C)}{\mathcal{R}(D)+k(C)}$
$(\mathcal{R} = \mathcal{R}(D_0)+k(C))$

$= N - \deg D + \ell(D) < +\infty$.

$g = \lambda(0) = N+1$

Thm1+2 ⇒ R-R: Thm2 ⇒ $\lambda(D) = \ell(K-D)$

R-R ⇔ $\lambda(D) = \ell(D) + g - 1 - \deg D = \ell(D) + N - \deg D$ ✓

pf of Thm2. $L(K_C - D) = \Gamma(\Omega_{C/k} \otimes \mathcal{O}(-D))$
$\ni \alpha$ $\operatorname{div}\alpha - D \geq 0$

定义 $\theta: (r = (r_x)_{x\in C}, \alpha) \longmapsto \sum_{x \in C} \operatorname{Res}(r_x \alpha)$

再定义留数 Res

$\forall \beta \in \Omega_{k(C)/k}$ $x \in C$ $m_{C,x} = (t)$ $\beta = f\,dt$ $f \in k(C)$

$\mathcal{O}_{C,x_0} \to k[[t]]$

$g \mapsto g(x_0)+a_1 t+\cdots$

(Laurent展开)

$$\overset{a_1 \bar{t}.}{\overset{\shortparallel}{\overline{g-g(x_0)}}} \in m_{C,x_0}/m_{C,x_0}^2 = (\bar{t})$$

$$\overline{g-g(x_0)-a_1 t} \in m_{C,x_0}^2/m_{C,x_0}^3 = (\bar{t}^2) \cdots$$

进一步拓展到 $K(C) \to k((t))$

$$f = g\cdot t^{v_{x_0}(f)} \mapsto t^{v_{x_0}(f)}\Big(\overset{g(x_0)+a_1 t+\cdots}{\overset{\shortparallel}{g}}\Big)$$

则定义 $\mathrm{Res}_{x_0}(\beta) = a_{-1}$

当 $r \in R(D)$ 时. $(\operatorname{div}(r_x)+D)|_x \geq 0$

$f\,dt \in \mathcal{L}(K_C-D) \Rightarrow \operatorname{div}(f)-D \geq 0$ $\Rightarrow r_x f \in \Omega_{X/k,x}$

$\Rightarrow \mathrm{Res}(r_x f)=0$

$f \in K(C)$时 $\alpha \in \mathcal{L}(K_C-D) \Rightarrow (f,\alpha) \mapsto 0$? (Q1)

非退化? (Q2)

Pf of Thm 1

(1) $$\frac{R(D')+K(C)}{R(D)+K(C)} \cong \frac{R(D')/R(D')\cap K(C)}{R(D)/R(D)\cap K(C)} = \frac{R(D')/\mathcal{L}(D')}{R(D)/\mathcal{L}(D)}$$

$$R(D)\cap K(C) = \{f \in K(C) \mid \operatorname{div} f + D \geq 0\} = \mathcal{L}(D)$$

又
$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L}(D) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}(D') \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}(D')/\mathcal{L}(D) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R(D) \arrow[r] \arrow[d] & R(D') \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R(D)/\mathcal{L}(D) \arrow[r] \arrow[d] & R(D')/\mathcal{L}(D') \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\dim V = \deg D' - \deg D$

$\Rightarrow \dim W = \dim V - \dim \mathcal{L}(D')/\mathcal{L}(D)$

✓

(2) 任取 $f\in k(C)\setminus k$ 可得 $\phi: C\to\mathbb{P}^1$ 支配 由 $[1,f]$ 定义

$$\begin{tikzcd}
k(C) & & k(t) \arrow[ll, "\phi^*"'] \arrow[dl] \\
& k(f) \arrow[ul, hook] &
\end{tikzcd}$$

(在开集 U 上 $\phi: U\to\mathbb{A}^1$ 良定
$p\mapsto f(p)$)

若非支配 $\exists h(t)\in k[t]$
$t^m+a_{m-1}t^{m-1}+\dots$
$\phi^*h(t)=f^m+a_{m-1}f^{m-1}+\dots=0$
$\Rightarrow f=0$).

设 $[k(C):k(f)]=n$

设 $g_1,\dots,g_n$ 为 $k(C)/k(f)$ 的基
(不妨 $D_1\geq 0$)

则 $\exists D_1$ s.t $\forall i=1,\dots,n$ $\mathrm{div}(g_i)+D_1\geq 0$

设 $E=\phi^*[0,1]$
(对应 f 的极点)

在 $\mathbb{P}^1$ 上 $\mathrm{div}(t)=[1,0]-[0,1]$

$\deg E=n$

则 f^ig_j $\begin{pmatrix}0\leq i\leq m-1,\\ 1\leq j\leq n\end{pmatrix}$ $\in \ell(D_1+(m-1)E)$ 且 k-线性无关

$\Rightarrow \ell(D_1+(m-1)E)\geq mn \Rightarrow \ell(D_1+(m-1)E)-\deg(D_1+(m-1)E)\geq mn-\deg(D_1)-(m-1)n$
$=n-\deg(D_1)$

只须证: $\forall D$. $\exists m>0$ 和 D_m s.t $D_m\sim D_1+(m-1)E$ 且 $D_m\geq D$

引理: $\forall P_0\in C$. 令 $t_0=\phi(P_0)$. 则 $\phi^*(t_0)\geq P_0$

则令 $D=\sum n_iP_i$. 不妨设 $n_i>0$. $t_i=\phi(P_i)$. 则 $D\leq\sum\phi^*(n_it_i)$
$\sim\sum n_i\phi^*[0,1]$
$=\sum n_iE$

故令 $D_m=D_1+\sum_i\phi^*(n_it_i)\sim D_1+mE$ 即可.

#

回到 Thm2 的 (Q_1) (Q_2)

在无穷维空间 L 上 $\psi: L\to L$ 若 $\exists n$ s.t $\mathrm{Im}(\psi^n(L))$ 有穷维

则可定义 $Tr_L(\psi)=Tr_{\psi^n(L)}(\psi)$ (写成直和分解 分块矩阵
只有 $\psi^n(L)$ 处对角线非0)

再设L线性空间 $\varphi,\psi,\chi: L\to L$ 可交换 $M\subseteq L$ 子空间

且满足 $\varphi(M) <\cdot M$ （$\exists$有限维 $V_\varphi\subseteq L$ $\varphi(M)\subseteq M+V_\varphi$）

固定直和分解 $L=M\oplus N$（即投影 $\pi: L\to M$） $\varphi_1=\pi\circ\varphi$ ψ_1, χ_1

可定义 $\langle\varphi,\psi\rangle^L_M \triangleq \mathrm{Tr}_L[\varphi_1,\psi_1]$（事实上 $\mathrm{Im}[\varphi_1,\psi_1]$ 有限维）

命题 (1) $\langle\varphi,\psi\rangle_M$ 良定（不依赖投影选取）

(2) 若 $M<\cdot M'$ 则 $\langle\varphi,\psi\rangle_M = \langle\varphi,\psi\rangle_{M'}$

(3) 若 M_1, M_2 满足 $\varphi,\psi(M_i)<\cdot M_i$ 则 M_1+M_2, $M_1\cap M_2$ 也满足 且

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{M_1}+\langle\varphi,\psi\rangle_{M_2}=\langle\varphi,\psi\rangle_{M_1+M_2}-\langle\varphi,\psi\rangle_{M_1\cap M_2}$$

(1) 令 $L=k((t))$ $M=k[[t]]$ $\pi: L\to M$

$=\{\frac{a_{-n}}{t^n}+\cdots\}$ $t^i\mapsto\begin{cases}t^i, & i\geq 0\\ 0, & i<0\end{cases}$

$f,g\in k((t))$（通过乘法视为L上线性变换）

$\langle t^m,t^n\rangle_M$? $(m=-n)$

$$(\pi t^m\circ\pi t^n-\pi t^n\circ\pi t^m)\cdot t^i=\begin{cases}0, & i\geq n\\ t^i, & 0\leq i<n\end{cases}$$

$$\Rightarrow\langle t^m,t^n\rangle_M=\begin{cases}0, & m+n\neq 0\\ n, & m+n=0\end{cases}=\mathrm{Res}_0\, t^m dt^n$$

$$\Rightarrow\langle f,g\rangle_M=\mathrm{Res}_0(f\,dg)$$

(2) $x_0\in C$ $\mathcal{O}_{C,x_0}=(t)$

$$\begin{tikzcd}\bar{M}=\mathcal{O}_{C,x_0} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \bar{L}=k(C) \arrow[d]\\ k[[t]] \arrow[r, hook] & k((t))\end{tikzcd}$$

命题: $\forall f,g\in K(\bar{C})$ $\langle f,g\rangle^{\bar{L}}_{\bar{M}}=\langle f,g\rangle^L_M=\mathrm{Res}_{x_0}(f\,dg)$

(3) $\mathcal{L}=R$ $M_1=R(0)$ $M_2=K(C)$

则 $f\cdot M_1\subset M_1$

$f\cdot M_2\subseteq M_2$

$R(0)=\prod_{x\in C}\mathcal{O}_x$

$\uparrow\pi$ $\downarrow$ 偏行x处 π_x

$R\subseteq\prod_{x\in C}K(C)$

定义投影 $(\pi f)(r_x)=(\pi_x)(f\cdot r_x)$

$\Rightarrow\langle f,g\rangle_{R(0)}=\sum_{x\in C}\mathrm{tr}[\pi_x f,\pi_x g]$

$=\sum_{x\in C}\mathrm{Res}_x(f\,dg)$

$\langle f,g\rangle_0=0$

$\parallel$

$\langle f,g\rangle_{\mathcal{L}(0)}$

$\parallel$

(Q1): $\omega\in\Omega_{K(C)/k}$ 则 $\sum_{x\in C}\mathrm{Res}_x(\omega)=0$

Pf $\omega=f\,dg$ $\Rightarrow\langle f,g\rangle_{R(0)}+\underbrace{\langle f,g\rangle_{K(C)}}_{\overset{\parallel}{0}}=\underbrace{\langle f,g\rangle_{R(0)+K(C)}}_{}+\underbrace{\langle f,g\rangle_{R(0)\cap K(C)}}_{}$

$\parallel$

$\langle f,g\rangle_R$ (因为总有 有限维 $\dim_k\Lambda(D)<+\infty$)

$\parallel$ 可交换

0

(Q2) 验证非退化 即验证 η: $\mathcal{L}(K_C-D)\to\Lambda(D)^*$ 双

单射: 取 $\omega\neq0\in\Gamma(\Omega_{C/k}\otimes\mathcal{O}(-D))$

取 $x_0\in C$. $m_{C,x_0}=(t)$ $\omega=ut^m dt$ $u(x_0)\neq0$

再令 $r=(r_{x_0}=t^{-m-1},0\cdots)$

$\sum_{x\in C}\mathrm{Res}_x(r_x\omega)=\mathrm{Res}_{x_0}(\frac{u}{t}dt)=u(x_0)\neq0$

满射. 记 $\mathrm{Hom}_k(R/K(C),k)$ 为 $K(C)$ 模

$\varphi\in$ 则 $(f\varphi)(\bar r)=\varphi(f\bar r)$

令 $\Omega\subseteq\mathrm{Hom}_k(R/K(C),k)$ 为子模 $\Omega_{K(C)/k}\subseteq\Omega$

$\parallel$

$\{\varphi\mid\exists$除子D_φ s.t. $\varphi: R(D_\varphi)+K(C)/K(C)\to0\}$

$\omega\mapsto\varphi_\omega(\bar r)=\sum_x\mathrm{Res}_x(r_x\omega)$

$\varphi_\omega: R(-\mathrm{div}\,\omega)\to0$

引理. $\Omega=\Omega_{K(C)/k}$

只需证 $\dim_{K(C)} \Omega = 1$ 否则取 φ, ψ $K(C)$-无关 ∃∃除子 D'

s.t. $\psi \varphi : R(D') \to 0$

固定 $P \in C$ $\mathcal{L}(nP)$ 的基 $f_1 \sim f_{\ell_n}$ $\frac{\ell_n}{n} \to 1 \ (n \to \infty)$

则 $f_1\varphi \cdots f_{\ell_n}\varphi, \ f_1\psi \cdots f_{\ell_n}\psi \in \mathrm{Hom}_k(R/_{R(D'-nP)+K(C)}, k)$ 无关

且 $f_i\varphi \ f_i\psi : R(D'-nP) \to 0$

∃ $2\ell_n \leq g-1-\deg(D'-nP) + \ell(D'-nP)$ $n \to \infty$ 可推矛盾

证明满射 取 $\varphi \in \Lambda(D)^* \subseteq \Omega$ 则 ∃ $\omega \in \Omega_{K(C)/k}$ s.t. $\varphi(\bar{r}) = \sum_x \mathrm{Res}_x(r_x\omega)$

当 $r \in R(D)$ 时 $\sum_x \mathrm{Res}(r_x\omega) = 0$

则 $\omega \in \Gamma(\Omega_{C/k} \otimes \mathcal{O}(-D))$

否则 ∃x_0 s.t. $(\mathrm{div}(\omega) - D)_{x_0} \leq 0$

设 $m_{C,x_0} = (t)$ $D = n x_0 + \cdots$ 则 $\omega = u t^m dt$ $m < n$

取 $r = (r_{x_0} = \frac{1}{t^{m+1}}, 0, \cdots 0) \in R(D)$ $\mathrm{Res}_{x_0}(r_{x_0}\omega) \neq 0$ 矛盾!

则满射得证