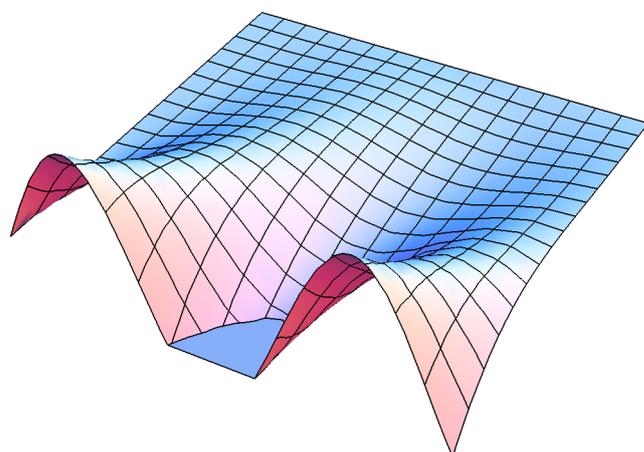


University of Science and Technology of China

中国科学技术大学

微分方程 (I) 课程笔记 2021 秋



黄天一

huangty0407@mail.ustc.edu.cn

授课老师: 宁吴庆

2022 年 8 月 25 日

目录

第一部分 常微分方程	5
第一章 常微分方程的初等解法	7
1.1 常微分方程的基本概念	7
1.2 一阶方程的初等解法	13
1.3 一阶隐式方程	22
1.4 高阶常微分方程的降阶	24
1.5 初等积分与首次积分	26
第二章 高阶常系数线性微分方程	33
2.1 高阶常系数齐次线性微分方程	33
2.2 高阶常系数非齐次线性方程	35
第三章 线性微分方程组	41
3.1 常系数线性微分方程组	41
3.2 线性微分方程组的一般理论	47
3.3 二阶变系数线性微分方程与 Bessel 方程	50
3.4 Sturm-Liouville 边值问题	54
第四章 常微分方程的基本理论	57
4.1 初值问题解的存在唯一性	57
4.2 解对初值的连续 (依赖) 性和可微性定理	64
4.3 常微分方程解的稳定性	67
第二部分 偏微分方程	75
第五章 一阶偏微分方程	77
5.1 一阶线性 PDE	79
5.2 一阶拟线性 PDE	81
5.3 一般的一阶 PDE	84

第六章 PDE 的起源与分类	89
6.1 三类典型 PDE 的推导	89
6.2 二阶 PDE 的分类与标准形	91
第七章 波与扩散	99
7.1 一维波动方程	99
7.2 一维热方程	104
7.3 扩散的光滑性	109
第八章 反射与源	111
8.1 反射 (半直线问题)	111
8.2 源 (非齐次问题)	112
第九章 边值问题	117
9.1 分离变量法: Dirichlet 边值问题	117
9.2 Neumann 边界条件和 Robin 边界条件	120
9.3 一般的边值问题	122
第十章 调和函数与 Green 函数	131
10.1 Laplace 方程 (调和方程)	131
10.2 二维、三维 Laplace 方程的分离变量法	134
10.3 Green 第一公式与第二公式、平均值公式	138
10.4 基本积分公式与 Green 函数	141
10.5 特殊区域的 Green 函数求法	145
第十一章 高维发展型偏微分方程 (含线性和非线性 PDE)	155
11.1 三维波动方程初值问题解的唯一性	155
11.2 高维偏微分方程初边值问题的唯一性和分离变量法	156
11.3 高维发展型方程初值问题的解	159
11.4 非线性偏微分方程简介	163

第一部分
常微分方程

第一章 常微分方程的初等解法

1.1 常微分方程的基本概念

定义 1.1. 含有未知函数的导数 (或偏导) 的方程称为微分方程. 若未知函数为一元函数, 则方程为**常微分方程** (ODE); 若未知函数为多元函数, 则方程为**偏微分方程** (PDE).

ODE 的一般形式: $F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$ 称为方程的**阶数**.

定义 1.2. **线性** ODE 的一般形式为 $\sum_{k=0}^n a_{n-k}(t)x^{(k)}(t) + b(t) = 0$, 其中 $a_{n-k}(t)$ 为与 x 无关的一元函数, $k = 0, 1, \dots, n$. 反之, 则称方程为**非线性** ODE.

例 1.1. 1. $\frac{dx}{dt} + xt^2 = 0$, 这是 1 阶线性 ODE.

2. $\frac{d^2x}{dt^2} + x\frac{dx}{dt} + t^2 = 0$, 这是 2 阶非线性 ODE.

3. Laplace 方程: $\Delta u = 0$, 其中 $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为 **Laplace 算子**.

定义 1.3 (经典解). 若函数 $\varphi(t)$ 在 $I \subset \mathbb{R}$ 上 n 阶连续可微, 即 $\varphi(t) \in C^n(I)$, 且

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

则称 $\varphi(t)$ 是方程在 I 上的一个**经典解**, I 称为解的**定义区间**. 光滑曲线 $x = \varphi(t)$ 称为方程的**积分曲线**.

定义 1.4 (通解, 特解). 常微分方程的解 $x = \varphi(t; C_1, \dots, C_n)$ 称为方程的**通解**, 其中 $C_i (i = 1, \dots, n)$ 为任意独立常数, 即

$$\frac{\partial(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})}{\partial(C_1, C_2, \dots, C_n)} \neq 0.$$

不包含任意常数的解称为方程的**特解**.

例 1.2 (自由落体). 只考虑重力作用, 设质量为 m 的小球做自由落体运动, 重力加速度为 g , 则根据牛顿定律得微分方程:

$$m\ddot{x} = -mg \Rightarrow \ddot{x} = -g,$$

其中 x 为小球的高度. 积分两次可得通解 $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$. 在初始高度, 初始速度给定时, 常数 C_1, C_2 可确定. 设 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$, 此时 $C_1 = v_0, C_2 = x_0$, 特解为 $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$.

定义 1.5. 设 $t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ 为给定常数, 称 $\begin{cases} x^{(n)} = G(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$ 为常微分方程的**初值问题**或 **Cauchy 问题**.

在不求解方程的前提下, 可以利用方向场 (或线素场) 粗略了解方程解的性状. 以下考虑一阶显式方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t). \quad (1.1.1)$$

方向场. 设 (1.1.1) 中函数 f 的定义域为 $D \subset \mathbb{R}^2$. 过 D 中任一点 $P(t, x)$ 作一条以 $f(t, x)$ 为斜率的直线, 并且定义直线的方向为向量 $\mathbf{r}(t) = (1, f(t, x))$ 的方向. 从而方程 (1.1.1) 在区域 D 内确定了一个**方向场** (或**线素场**). 以点 $P(t, x)$ 为起点作一个长度为 λ 的向量

$$\lambda \mathbf{r}^0 = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + f^2(t, x)}}(1, f(t, x)),$$

画出若干点处的向量即可粗略绘制出方程 (1.1.1) 的方向场.

定义 1.6 (等斜线). 方向场中具有同一方向 ($x' = k$) 的点的轨迹称为方程 (1.1.1) 的**等斜线**或**等倾线**.

由此, 可以总结出方向场的具体作法:

1. 画出若干条等斜线 ($f(x, t) = k$);
2. 在每条等斜线上选取若干点画出对应向量.

例 1.3. 绘制方程 $x' = \sqrt{t^2 + x^2}$ 的方向场.

解. 方程对应的等斜线为 $\sqrt{t^2 + x^2} = k \Rightarrow t^2 + x^2 = k^2$, 为 O_{tx} 平面上的一族圆周. 取 $k = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$, 作出相应等斜线并绘制方向场即可. 以下是利用 Mathematica 绘制的方向场:

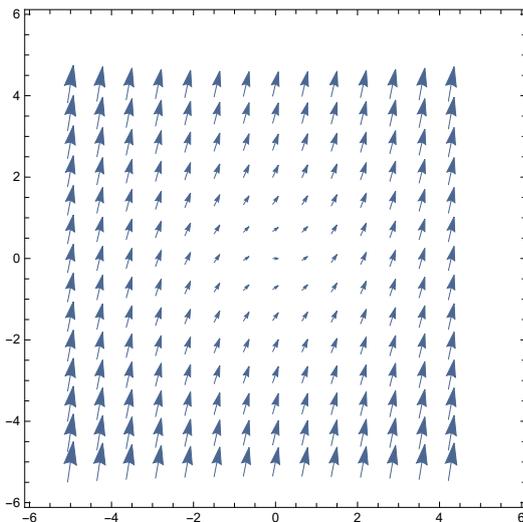


图 1.1: 方程 $x' = \sqrt{t^2 + x^2}$ 的方向场.

例 1.4 (新产品销售). 设 $x(t)$ 是新产品在 t 时刻的销量, $N > 0$ 为货物总量, 且满足 $\frac{dx}{dt} \propto x(t)$, $\frac{dx}{dt} \propto N - x(t)$. 由此可得方程

$$\frac{dx}{dt} = kx(t)(N - x(t)).$$

其中 $k > 0$ 为比例系数. 这是一个分离型方程. 由上述方程可得

$$\frac{dx}{x(N-x)} = kdt \Rightarrow \frac{1}{N} \ln \frac{x}{N-x} = kt + C_1 \Rightarrow x = \frac{N}{1 + Ce^{-kNt}}.$$

由此可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k \frac{dx}{dt} (N - 2x) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} \left(\frac{N}{2} \right) = 0.$$

因此当 $x = \frac{N}{2}$, 即销售额达到一半时, 销售速率最大.

例 1.5 (传染病模型). 从不同的假设入手, 可以构建出不同的传染病模型.

- 模型一.** 设已感染人数为 $i(t)$. 我们假设每个病人每天有效接触人数为 λ , 且足以使人致病. 从而在 $[t, t + \Delta t]$ 区间内, 考虑新增感染者可得

$$i(t + \Delta t) - i(t) = \lambda i(t) \Delta t.$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$ 可得

$$\frac{di}{dt} = \lambda i \Rightarrow i(t) = i_0 e^{\lambda t},$$

其中 $i(0) = i_0$ 为初始感染人数. 在这种假设下, 感染人数将持续指数型增长.

- 模型二** (SI 模型). 在感染过程中, 若感染者有效接触的是病人, 则不会导致患病人数增加. 我们区分已感染者和未感染者, 假设:

(a) 总人数 N 不变, 已感染者和未感染者的比例分别为 $i(t), s(t)$.

(b) 每个病人每天有效接触人数为 λ (日接触率), 且可以使接触的健康人致病.

在区间 $[t, t + \Delta t]$ 内, 同样考虑新增感染者可得

$$N(i(t + \Delta t) - i(t)) = (\lambda s(t)) N i(t) \Delta t.$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$ 可得

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda s i \\ s(t) + i(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

求解可得

$$i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{i_0} - 1 \right) e^{-\lambda t}}.$$

求导计算可得 $t = t_m := \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{i_0} - 1 \right)$ 时, 感染率的增长速度 $\frac{di}{dt}$ 最大, 即 t_m 是传染病高潮来临时刻. 日接触率 λ 越小, 高潮时刻 t_m 越大.

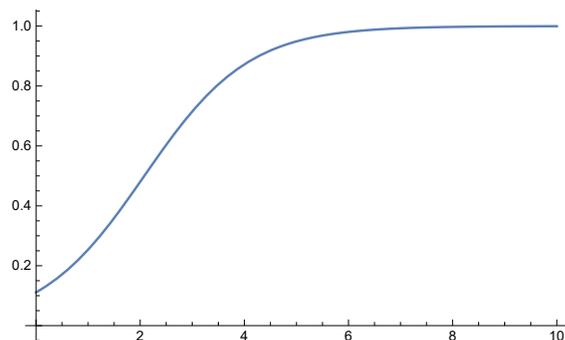


图 1.2: SI 模型下的感染率与时间的关系图像, 横轴为时间 t , 纵轴为感染率 $i(t)$

3. **模型三 (SIS 模型).** 为了进一步优化模型, 我们还需要考虑传染病的免疫性. 若传染病无免疫性, 即病人可治愈为健康人, 健康人可再次被感染. 此时我们增加假设: 病人每天治愈的比例为 μ (日治愈率). 此时建模可得

$$N(i(t + \Delta t) - i(t)) = \lambda N s(t) i(t) \Delta t - \mu N i(t) \Delta t.$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$ 可得

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) - \mu i \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

记 $\sigma := \frac{\lambda}{\mu}$ 表示一个感染期 ($1/\mu$) 内每个病人的有效接触人数 (接触数), 则上述方程可化为

$$\frac{di}{dt} = -\lambda i \left(i - \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \right).$$

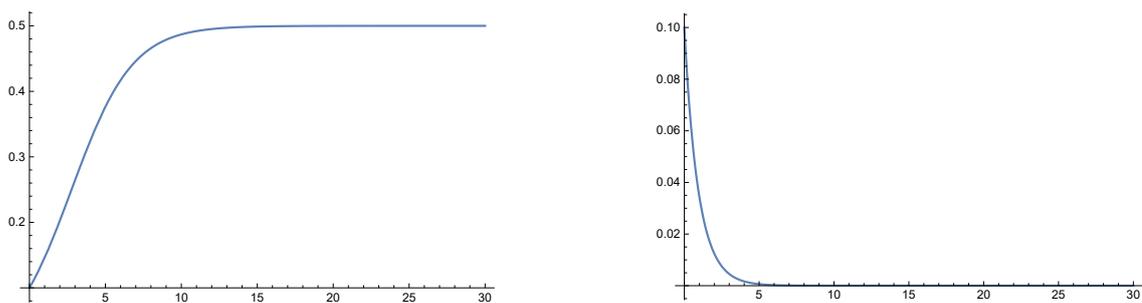


图 1.3: $\lambda = 1, i_0 = 0.1, \sigma = 2, 0.5$ 时 $i(t)$ (纵轴) 关于 t (横轴) 的图像

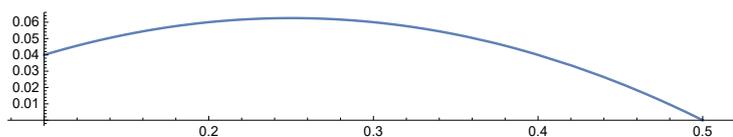


图 1.4: $\lambda = 1, i_0 = 0.1, \sigma = 2$ 时 $i'(t)$ (纵轴) 关于 $i(t)$ (横轴) 的图像

分析可得, 当 $\sigma > 1$ 时, $i(t)$ 在 $t > 0$ 时持续增长, 逐渐趋于 $1 - \frac{1}{\sigma}$, 且 $i'(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$; $\sigma \leq 1$ 时, $i'(t) < 0$ 恒成立, 且 $i(t)$ 逐渐趋于 0. 从而日传染率小于日治愈率时, 感染率将持续减小, 直至于 0.

4. **模型四** (SIR 模型). 传染病有免疫性, 即病人治愈后即移出感染系统, 称移出者. 此时假设:

(a) 总人数 N 不变, 病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$.

(b) 病人的日接触率为 λ , 日治愈率为 μ , 接触数为 $\sigma = \frac{\lambda}{\mu}$.

此时考虑新增感染者和新增治愈者, 建模可得

$$N(i(t + \Delta t) - i(t)) = \lambda N s(t) i(t) \Delta t - \mu N i(t) \Delta t,$$

$$N(s(t + \Delta t) - s(t)) = -\lambda N s(t) i(t) \Delta t.$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$, 可得

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases}$$

我们认为 $r(0) = r_0$ 很小, 因此 $i_0 + s_0 \approx 1$. 上述微分方程组的解析解无法求得, 可以利用数值模拟和相平面分析解的性状.

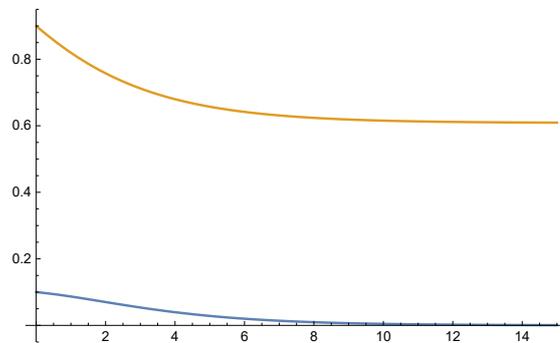


图 1.5: $\lambda = \mu = 1, i_0 = 0.1, s_0 = 0.9$ 时 $i(t), s(t)$ 关于 t (横轴) 的图像, 其中上端黄色曲线为 $s(t)$ 的图像, 下端蓝色曲线为 $i(t)$ 的图像.

在相平面 $s \sim i$ 上, 上述方程消去 t 可得 i 关于 s 的 ODE 问题

$$\begin{cases} \frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1 \\ i|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

由此可得相轨线 $i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$, 定义域为 $D = \{(s, i) \mid s \geq 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$. 其中相轨线的方向沿 $s(t)$ 单调减的方向.

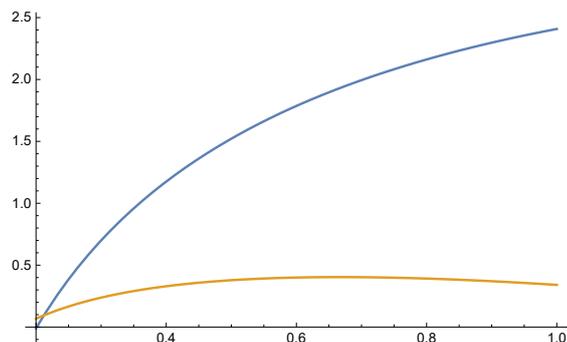


图 1.6: $s \sim i$ 相平面上的相轨线图: 蓝色轨线对应 $s_0 = 0.3, i_0 = 0.7, \sigma = 0.5$, 黄色轨线对应 $s_0 = 0.7, i_0 = 0.4, \sigma = 1.5$.

计算可得, 若 $s_0 > 1/\sigma$, 则 $i(t)$ 先升后降至 0, 此时传染病蔓延; 若 $s_0 < 1/\sigma$, 则 $i(t)$ 单调降至 0, 此时传染病不蔓延. $1/\sigma$ 可视为阈值. 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0,$$

从而可得 σ 的估计式

$$\sigma = \frac{\ln s_0 - \ln s_\infty}{s_0 - s_\infty}.$$

由 SIR 模型可得, 控制传染病的蔓延的关键在于降低接触数 $\sigma = \lambda/\mu$, 即降低日接触率 (提升卫生水平) 和提升日治愈率 (提升医疗水平); 另一关键在于降低 s_0 , 从而提高 r_0 , 达成群体免疫.

利用 SIR 模型还可以进行被感染人数的估计: 记被感染人数的比例为 $x := s_0 - s_\infty$, 则由 σ 的估计式可得

$$x + \frac{1}{\sigma} \ln \left(1 - \frac{x}{s_0} \right) \approx 0.$$

当 $x \ll s_0$ 时, 由 $\ln(u)$ 的展开式可得

$$x \left(1 - \frac{1}{s_0 \sigma} - \frac{x}{2s_0^2 \sigma} \right) \approx 0 \Rightarrow x \approx 2s_0 \sigma \left(s_0 - \frac{1}{\sigma} \right).$$

记 $\delta := s_0 - 1/\sigma$, 当 $\delta \ll 1$ 时, $s_0 \sigma \approx 1$, 从而可得 $x \approx 2\delta$. 因此提高阈值 $1/\sigma$ 可以降低被传染人数比例 x .

5. 模型五. Xingjie Hao 等于 2020 年在 *Nature* 上发表论文 *Reconstruction of the full transmission*

dynamics of COVID-19 in Wuhan, 其中提出了如下新冠病毒的感染模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = n - \frac{bS(\alpha P + \alpha A + I)}{N} - \frac{nS}{N} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{bS(\alpha P + \alpha A + I)}{N} - \frac{E}{D_e} - \frac{nE}{N} \\ \frac{dP}{dt} = \frac{E}{D_e} - \frac{P}{D_P} - \frac{nP}{N} \\ \frac{dA}{dt} = \frac{(1-r)P}{D_P} - \frac{A}{D_i} - \frac{nA}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{rP}{D_P} - \frac{I}{D_i} - \frac{I}{D_q} \\ \frac{dH}{dt} = \frac{I}{D_q} - \frac{H}{D_h} \\ \frac{dR}{dt} = \frac{A+I}{D_i} + \frac{H}{D_h} - \frac{nR}{N} \end{cases}$$

1.2 一阶方程的初等解法

一阶方程的一般形式如下:

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0. \quad (1.2.1)$$

分离变量法

若 $M(t, x) = T_1(t)X_1(x)$, $N(t, x) = T_2(t)X_2(x)$, 则称方程 (1.2.1) 为变量分离方程. 此时方程化为如下形式:

$$T_1(t)X_1(x)dt + T_2(t)X_2(x)dx = 0. \quad (1.2.2)$$

下面对方程 (1.2.2) 进行讨论.

1. $T_2(t)X_1(x) \neq 0$, 此时有

$$\frac{T_1(t)}{T_2(t)}dt + \frac{X_2(x)}{X_1(x)}dx = 0,$$

对上式积分可得

$$\int \frac{T_1(t)}{T_2(t)}dt + \int \frac{X_2(x)}{X_1(x)}dx = C. \quad (1.2.3)$$

其中 (1.2.3) 式称为方程 (1.2.2) 的**通积分**, C 称为**积分常数**.

2. $T_2(t)X_1(x) = 0$, 设 $T_2(t)$ 的零点为 a_i , $X_1(x)$ 的零点为 $b_j (i, j = 1, 2, \dots)$, 则 $t = a_i, x = b_j$ 为方程 (1.2.2) 的特解.

注 若特解包含在通积分中, 则可以省略.

例 1.6. $(t^2 + 1)(x^2 - 1)dt + tx dx = 0$.

1. $t(x^2 - 1) = 0$ 时, 解得 $t = 0, x = \pm 1$ 是方程特解.

2. $t(x^2 - 1) \neq 0$ 时, 方程化为

$$\frac{t^2 + 1}{t} dt + \frac{x}{x^2 - 1} dx = 0.$$

积分, 可得 $t^2 + \ln(t^2) + \ln|x^2 - 1| = C_1 \Rightarrow x^2 = 1 + \frac{Ce^{-t^2}}{t}$, $C = \pm e^{C_1} \neq 0$.

注意到 $x = \pm 1$ 对应通解中积分常数 $C = 0$ 的情况, 因此原方程的通积分为 $x^2 = 1 + \frac{Ce^{-t^2}}{t}$, $C \in \mathbb{R}$, 特解为 $t = 0$.

例 1.7 (通过变换转化为分离型方程). $\frac{dx}{dt} = f(t + x)$.

解. 作变换 $u = t + x$, 则

$$\frac{du}{dt} = 1 + \frac{dx}{dt} = 1 + f(u),$$

此时化作分离型方程, 可沿用上述方法求解.

定义 1.7 (齐次方程). 若 $M(st, sx) = s^m M(t, x)$, $N(st, sx) = s^m N(t, x)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, 则称 (1.2.1) 是 m 次齐次方程.

求解方法: 作变换 $x = ut$, 则 $dx = udt + tdu$, 从而

$$\begin{cases} M(t, x) = M(t, ut) = t^m M(1, u), \\ N(t, x) = N(t, ut) = t^m N(1, u). \end{cases}$$

从而方程 (1.2.1) 可化为

$$t^m (M(1, u) + uN(1, u)) dt + t^{m+1} N(1, u) du = 0,$$

这是一个分离型方程.

注 齐次方程可表示为 $\frac{dx}{dt} = g\left(\frac{x}{t}\right)$, 此处 g 是给定的连续函数. 这是因为

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{M(t, x)}{N(t, x)} = -\frac{t^{-m} M(t, x)}{t^{-m} N(t, x)} = -\frac{M(1, x/t)}{N(1, x/t)}.$$

例 1.8. 求解方程 $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{at + bx + c}{a_1 t + b_1 x + c_1}\right)$, 其中 a, b, c, a_1, b_1, c_1 为给定常数.

1. $c = c_1 = 0$, 此时化为 $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a + bx/t}{a_1 + b_1 x/t}\right) =: g\left(\frac{x}{t}\right)$, 这是一个齐次方程.

2. $c^2 + c_1^2 \neq 0$, 分为两种情况:

(a) $\Delta := \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ 时, 此时方程组 $\begin{cases} at_0 + bx_0 = c \\ a_1 t_0 + b_1 x_0 = c_1 \end{cases}$ 有唯一解

$$(t_0, x_0) = \left(\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}, \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \right).$$

设 $\tilde{t} := t + t_0$, $\tilde{x} := x + x_0$, 从而有 $\begin{cases} a\tilde{t} + b\tilde{x} = at + bx + c \\ a_1\tilde{t} + b_1\tilde{x} = a_1t + b_1x + c_1 \end{cases}$, 从而原方程等价于齐次方程 $\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = f\left(\frac{a\tilde{t} + b\tilde{x}}{a_1\tilde{t} + b_1\tilde{x}}\right)$.

(b) $\Delta = 0$, 即 $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} =: \lambda$, 作变换 $u = at + bx$, 则 $du = adt + bdx$, 从而

$$\frac{du}{dt} = a + b\frac{dx}{dt} = a + bf\left(\frac{at + bx + c}{\lambda(at + bx) + c}\right) = a + bf\left(\frac{u + c}{\lambda u + c_1}\right).$$

这是一个分离型方程.

例 1.9. 考虑探照灯的镜面形状, 要求从固定光源 O 射出的光线经镜面反射后的光线平行.

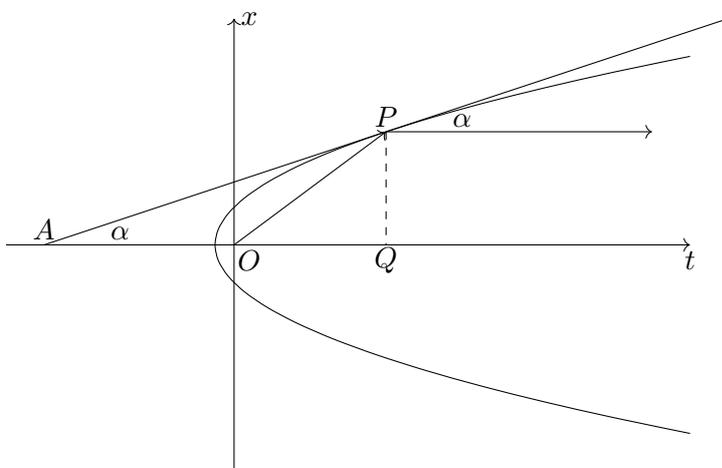


图 1.7: 探照灯镜面与光线

解. 设 P 的坐标为 (t, x) , 则 $x'(t) = \tan \alpha$. 由反射定律可得 $\angle OPA = \angle OAP = \alpha$, 因此 $|OA| = |OP|$. 由于

$$|OA| = |AQ| - |OQ| = x \cot \alpha - t = \frac{x}{x'} - t, \quad |OP| = \sqrt{x^2 + t^2},$$

因此可得微分方程

$$x \frac{dt}{dx} = t + \sqrt{x^2 + t^2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{t + \sqrt{x^2 + t^2}}{x}.$$

设 $u = \frac{t}{x}$, 则上述方程化为

$$u + x \frac{du}{dx} = u + \sqrt{1 + u^2} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

两边积分可得 $\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) - \ln|x| = C_1$, 从而

$$\left(\frac{x}{C} - u\right)^2 = 1 + u^2 \Rightarrow \frac{x^2}{C^2} - \frac{2xu}{C} = 1 \Rightarrow x^2 = 2C\left(t + \frac{C}{2}\right).$$

从而探照灯镜面是抛物面.

例 1.10 (Riccati 方程). 形如 $x' = p(t)x^2 + q(t)x + r(t)$, $p(t) \neq 0$, $q(t), r(t) \in C(I)$ 的方程称为 **Riccati 方程**. 一般而言, Riccati 方程的求解十分困难, 目前对一些特殊情形下解析解的讨论有所进展. Bernoulli 于 1725 年证明出 $x' = at^n + bx^2$ ($a, b \neq 0$) 在 $n = -2, -\frac{4m}{2m+1}$ ($m = 0, 1, \dots$) 时可化为分离型方程.

证明.

1. 当 $n = -2$ 时, 令 $u = tx$ 可得 $\frac{du}{dt} = \frac{a + u + bu^2}{t}$, 为分离型方程.

2. 当 $n = 0$ 时, 结论显然成立.

(a) $n = -\frac{4m}{2m+1}$ ($m \geq 1$), 令 $t = \xi^{\frac{1}{n+1}}$, $x = \frac{a}{n+1}\eta^{-1}$, 有

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = -\frac{ab}{(n+1)^2}\xi^{-\frac{4m}{2m+1}}. \quad (1.2.4)$$

再令 $\xi = z^{-1}$, $\eta = z - uz^2$, 有

$$\frac{dz}{dz} + u^2 = -\frac{ab}{(n+1)^2}z^{-\frac{4(m-1)}{2(m-1)+1}}.$$

重复上述操作 m 次可化为 $m = 0$ 的情形.

(b) $n = -\frac{4m}{2m-1}$ 时, 可以通过变量替换化为式 (1.2.4).

□

一阶线性方程

一阶线性方程的一般形式如下:

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t). \quad (1.2.5)$$

下面讨论方程 (1.2.5) 的求解.

1. 若 $q(t) \equiv 0$, 此时 (1.2.5) 称为齐次方程, 为分离型方程, 即

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0.$$

此时方程的通解为 $x(t) = Ce^{-\int p(t)dt}$.

2. 若 $q(t) \neq 0$, 考虑两种方法求解:

(a) 积分因子法: 考虑 $\mu(t) = e^{\int p(t)dt} > 0$, 方程 (1.2.5) 两端同乘 $\mu(t)$ 可得

$$e^{\int p(t)dt} \left(\frac{dx}{dt} + p(t)x \right) = \frac{d}{dt} \left(xe^{\int p(t)dt} \right) = q(t)e^{\int p(t)dt}.$$

积分可得通解为

$$x(t) = e^{-\int p(t)dt} \left(\int q(t)e^{\int p(t)dt} dt + C \right) = Ce^{-\int p(t)dt} + e^{-\int p(t)dt} \int q(t)e^{\int p(t)dt} dt.$$

事实上, $Ce^{-\int p(t)dt}$ 是对应齐次方程的通解, $e^{-\int p(t)dt} \int q(t)e^{\int p(t)dt} dt$ 是方程 (1.2.5) 的一个特解.

(b) 常数变易法: 将齐次方程通解中的积分常数替换为待定函数 $C(t)$, 即 $x(t) = C(t)e^{-\int p(t)dt}$, 代入方程 (1.2.5) 解得

$$C(t) = C + \int q(t)e^{\int p(t)dt} dt.$$

代回 $x(t)$ 中可得通解.

实际求解中, 可以将一些方程通过变换化为一阶线性方程. 如下例:

例 1.11 (Bernoulli 方程). 形如 $\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t)x^\alpha$ ($\alpha \neq 0, 1$) 的方程称为 **Bernoulli 方程**. 事实上, $\alpha = 0$ 时即为一阶线性方程, $\alpha = 1$ 时即为分离型方程.

1. 首先注意到 $x = 0$ 是 Bernoulli 方程的特解.

2. $x \neq 0$ 时, 方程两端同乘 $(1 - \alpha)x^{-\alpha}$, 则

$$\frac{d}{dt}(x^{1-\alpha}) + (1 - \alpha)p(t)x^{1-\alpha} = q(t)(1 - \alpha),$$

令 $y = x^{1-\alpha}$, 可得 $\frac{dy}{dt} + (1 - \alpha)p(t) \cdot y = q(t)(1 - \alpha)$. 这是一阶线性方程.

例 1.12. 已知 Riccati 方程 $\frac{dx}{dt} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t)$, $p(t) \not\equiv 0$ 有一个特解 $x = \varphi(t)$, 求方程通解.

解. 设 Riccati 方程的通解为 $x(t) = u(t) + \varphi(t)$, 则

$$\begin{aligned} u'(t) + \varphi'(t) &= p(t)(u(t) + \varphi(t))^2 + q(t)(u(t) + \varphi(t)) + r(t) \\ &= p(t)u^2(t) + q(t)u(t) + 2p(t)u(t)\varphi(t) + (p(t)\varphi^2(t) + q(t)\varphi(t) + r(t)) \\ &= p(t)u^2(t) + q(t)u(t) + 2p(t)u(t)\varphi(t) + \varphi'(t). \end{aligned}$$

从而 $u'(t) = (2p(t)\varphi(t) + q(t))u(t) + p(t)u^2(t)$, 这是 Bernoulli 方程, 求解得通解为

$$x(t) = \frac{e^{\int (2p(t)\varphi(t) + q(t))dt}}{C - \int p(t)e^{\int (2p(t)\varphi(t) + q(t))dt}}.$$

例 1.13. $\frac{dx}{dt} = \frac{tx^2 + \sin t}{2x}$.

解. 方程可化为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{2}x + \frac{\sin t}{2} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2x dx}{dt} = tx^2 + \sin t.$$

令 $y = x^2$, 可得 $\frac{dy}{dt} - ty = \sin t$, 化为一阶线性方程. 代入公式可得通解.

例 1.14. 考虑一个简单电路, 电动势为 \mathcal{E} , 电路中电阻 R 和电感 L 串联, 内阻不计. 初始时刻回路电流为 0, 求电流随时间的变化式.

解. 设电路电流为 $i(t)$, 电感分压为 $E_L = L \frac{di}{dt}$, 电阻分压为 $E_R = iR$, 从而由 Kirchhoff 第二定律得

$$L \frac{di}{dt} + iR = \mathcal{E}, \quad i(0) = 0.$$

这是一阶线性方程的 Cauchy 问题, 代入公式求解可得

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}),$$

从而当 $t \rightarrow \infty$ 时, $i(t) \rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R}$.

例 1.15. 设函数 $p(t)$ 以 $\omega > 0$ 为周期, 证明: $\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0$ 的非零解以 ω 为周期的充要条件为

$$\int_0^\omega p(t)dt = 0.$$

证明. 由 $p(t)$ 以 ω 为正周期可得 $\int_t^{t+\omega} p(s)ds = \int_0^\omega p(s)ds, \forall t \in \mathbb{R}$. 设 $x(t)$ 是齐次方程的一个非零解, 满足 $x(0) = x_0$, 则

$$x(t) = x_0 e^{-\int_0^t p(s)ds}.$$

充分性: 若 $\int_0^\omega p(t)dt = 0$, 则

$$x(t + \omega) = x_0 e^{-\int_0^{t+\omega} p(s)ds} = x_0 e^{-\int_0^t p(s)ds} \cdot e^{-\int_t^{t+\omega} p(s)ds} = x_0 e^{-\int_0^t p(s)ds} \cdot e^{-\int_0^\omega p(s)ds} = x(t).$$

取 $t = 0$ 即得结论.

必要性: 若 $x(t)$ 以 ω 为周期, 则

$$x(t + \omega) = x(t) \Rightarrow x_0 e^{-\int_0^{t+\omega} p(s)ds} = x_0 e^{-\int_0^t p(s)ds} \Rightarrow \int_t^{t+\omega} p(s)ds = 0.$$

□

例 1.16. 设 $f(t)$ 在 \mathbb{R} 上连续有界, 证明: $\frac{dx}{dt} + x = f(t)$ 在 \mathbb{R} 上存在一个有界解.

证明. 首先求得方程的通解为 $x(t) = e^{-t} \left(C + \int_0^t f(s)e^s ds \right)$. 由 $f(s)$ 有界可得广义积分 $\int_{-\infty}^0 f(s)e^s ds$ 收敛, 取 $C = \int_{-\infty}^0 f(s)e^s ds$ 可得特解

$$x(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^t f(s)e^s ds.$$

设 $M := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$, 则

$$|x(t)| = \left| \int_{-\infty}^t f(s)e^{s-t} ds \right| \leq \int_{-\infty}^t |f(s)|e^{s-t} ds \leq M \int_{-\infty}^t e^{s-t} ds = M.$$

因此 $x(t)$ 有界.

□

恰当方程与积分因子法

定义 1.8 (恰当方程). 若存在可微函数 $u(t, x)$, 使得 $du(t, x) = M(t, x)dt + N(t, x)dx$, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M(t, x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = N(t, x).$$

则称方程 (1.2.1) 是恰当方程 (或全微分方程).

定理 1.1. 若 $M(t, x), N(t, x) \in C(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, 且 $\frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial t} \in C(D)$, 则 (1.2.1) 是恰当方程的充要条件为 $\frac{\partial M}{\partial x} \equiv \frac{\partial N}{\partial t}$. 此时, (1.2.1) 的通积分为

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{t_0}^t M(t, x)dt + \int_{x_0}^x N(t_0, x)dx \\ &= \int_{t_0}^t M(t, x_0)dt + \int_{x_0}^x N(t, x)dx \\ &= C, \quad \forall (t_0, x_0) \in D \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

证明. 必要性: 若 (1.2.1) 恰当, 则 $\exists u(t, x) \in C(D)$, s.t.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M(t, x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = N(t, x). \quad (1.2.6)$$

由 $u(t, x)$ 二阶连续可微得

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

充分性: 目标是构造一个函数 $u(t, x)$ 满足 (1.2.6).

1. 方法一. 令 $u(t, x) = \int_{t_0}^t M(t, x)dt + \varphi(x)$, φ 为待定函数, 则此时 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t M(t, x)dt = M(t, x)$. 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_0}^t M(t, x)dx + \varphi'(x) \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial M}{\partial x}(t, x)dt + \varphi'(x) \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial N}{\partial t}(t, x)dt + \varphi'(x) \\ &= N(t, x) - N(t_0, x) + \varphi'(x). \end{aligned}$$

令 $\frac{\partial u}{\partial x} = N(t, x)$, 则有 $\varphi'(x) = N(t_0, x)$, 即 $\varphi(x) = \int_{x_0}^x N(t_0, x)dx$, 这样就构造出了满足要求的函数 u , 且推得方程通解为

$$u(t, x) = \int_{t_0}^t M(t, x)dt + \int_{x_0}^x N(t_0, x)dx = C.$$

2. 方法二. 令 $\tilde{u}(t, x) = \int_{x_0}^x N(t, x)dx + \psi(t)$, 其余过程同方法一. 则可得

$$\tilde{u}(t, x) = \int_{t_0}^t M(t, x_0)dt + \int_{x_0}^x N(t, x)dx.$$

下验证 $u(t, x) \equiv \tilde{u}(t, x)$. 事实上, 由 $du = d\tilde{u} = M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0$ 可得 u 和 \tilde{u} 只相差一个常数. 而 $u(t_0, x_0) = \tilde{u}(t_0, x_0) = 0$, 因此 $u(t) \equiv \tilde{u}(t)$. \square

例 1.17. $(2t \sin x + 3t^2x + t^4)dt + (t^3 + t^2 \cos x + x^2)dx = 0$.

解. 注意到 $M, N \in C(\mathbb{R})$, 并且

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 2t \cos x + 3t^2, \quad \frac{\partial N}{\partial t} = 3t^2 + 2t \cos x,$$

从而 $\frac{\partial M}{\partial x} \equiv \frac{\partial N}{\partial t}$, 方程恰当. 取 $(t_0, x_0) = (0, 0)$ 得方程的通积分为

$$u(t, x) = \int_0^t (2t \sin x + 3t^2x + t^4)dt + \int_0^x x^2 dx = t^2 \sin x + t^3x + \frac{t^5}{5} + \frac{x^3}{3} = C.$$

常用的全微分公式列举如下:

$$1. \quad tdt + xdx = \frac{1}{2}d(t^2 + x^2).$$

$$5. \quad \frac{xdt - tdx}{-t^2} = d\left(\frac{x}{t}\right).$$

$$2. \quad \frac{xdt + tdx}{tx} = d(\ln(tx)).$$

$$6. \quad \frac{tdt + xdx}{t^2 + x^2} = \frac{1}{2}d \ln(t^2 + x^2).$$

$$3. \quad \frac{xdt - tdx}{t^2 + x^2} = d\left(\arctan \frac{t}{x}\right).$$

$$4. \quad \frac{xdt - tdx}{x^2} = d\left(\frac{t}{x}\right).$$

$$7. \quad \frac{xdt - tdx}{t^2 - x^2} = \frac{1}{2}d\left(\ln \frac{t-x}{t+x}\right).$$

实际求解中, 大部分方程并不是恰当方程, 需要考虑在方程两边乘以相同函数配凑成全微分形式, 即下述**积分因子法**.

定义 1.9 (积分因子). 对于一般的方程 (1.2.1), 若存在函数 $\mu(t, x) \in C(D)$, $\mu \neq 0$, s.t.

$$\mu(t, x)M(t, x)dt + \mu(t, x)N(t, x)dx = 0$$

是恰当方程, 则称 $\mu(t, x)$ 是 (1.2.1) 的一个**积分因子**.

例 1.18. $xdy + (t^2 + t + x^2)dx = 0$.

解. 作变换 $y = t + 1$, 则方程化为

$$xdy + (y^2 - y + x^2)dx = 0 \Rightarrow xdy - ydx + (x^2 + y^2)dx = 0.$$

取 $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, 可得

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + dx = d\left(\arctan \frac{y}{x} + x\right) = 0,$$

从而通积分为 $\arctan \frac{y}{x} + x = C$.

下面我们考虑求解积分因子的更一般方法. 设 $\mu(t, x)$ 是 (1.2.1) 的一个积分因子, 则由恰当方程的判定定理可得

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t} \Rightarrow N \frac{\partial \mu}{\partial t} - M \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right).$$

这是一个充要条件, 但偏微分方程显然更难求解, 可以借助该条件考虑一些特殊情况下的积分因子.

1. 若存在仅依赖于 x 的积分因子 $\mu(x)$, 则 $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$, 因此上述充要条件化为齐次线性方程. 求解可得

$$\mu(x) = e^{\int H(x) dx}, \quad H(x) := -\frac{1}{M(t, x)} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right),$$

即此时 $-\frac{1}{M(t, x)} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right)$ 仅与 x 有关. 同理可得存在仅依赖于 t 的积分因子 $\mu(t)$ 的充要条件为 $\frac{1}{N(t, x)} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right)$ 仅与 t 有关, 此时

$$\mu(t) = e^{\int G(t) dt}, \quad G(t) := \frac{1}{N(t, x)} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right).$$

2. 方程 (1.2.1) 存在形如 $\mu = \mu(t^\alpha \pm x^\beta)$ 的积分因子的充要条件为

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) (\alpha t^{\alpha-1} N \mp \beta x^{\beta-1} M)^{-1} = \varphi(t^\alpha \pm x^\beta),$$

φ 为某个可微函数. 证略.

3. 方程 (1.2.1) 存在形如 $\mu = \mu(f(t, x))$ 的积分因子的充要条件为

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) \left(N \frac{\partial f}{\partial t} - M \frac{\partial f}{\partial x} \right)^{-1} = \varphi(f(t, x)),$$

φ, f 均为可微函数. 证略.

本节的最后, 介绍一个有用的方法: 分组积分因子法.

定理 1.2. 若非恰当方程 (1.2.1) 可以化为如下分组形式: $\sum_{i=1}^n (M_i(t, x) dt + N_i(t, x) dx) = 0$, 其中第 i 组方程 $M_i(t, x) dt + N_i(t, x) dx = 0$ 的积分因子为 $\mu_i(t, x)$, 且满足

$$\mu_i(t, x) (M_i(t, x) dt + N_i(t, x) dx) = d(\Phi_i(t, x)),$$

则 $\mu_i g(\Phi_i)$ 也是第 i 组方程的积分因子, 这里 g 是任一可微函数.

证明. 对任一 $i = 1, \dots, n$, 计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\mu_i g(\Phi_i) M_i) &= \frac{\partial}{\partial x} (\mu_i M_i) g(\Phi_i) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} g'(\Phi_i) \mu_i M_i \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\mu_i N_i) g(\Phi_i) + \mu_i^2 M_i N_i g'(\Phi_i) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\mu_i N_i) g(\Phi_i) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} g'(\Phi_i) \mu_i N_i \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\mu_i g(\Phi_i) N_i). \end{aligned}$$

由此可得 $\mu_i g(\Phi_i)$ 是 $M_i dt + N_i dx = 0$ 的一个积分因子. □

根据以上定理, 我们可以对方程分组后分别求出 μ_i, Φ_i , 然后选择恰当的可微函数 $g_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 满足 $\mu_1 g_1(\Phi_1) = \dots = \mu_n g_n(\Phi_n) =: \mu$, 此时 μ 就是方程 (1.2.1) 的一个积分因子.

例 1.19. $\left(\frac{x}{t} + 3t^2\right) dt + \left(1 + \frac{t^3}{x}\right) dx = 0.$

解. 将方程分组为 $\left(\frac{x}{t} dt + dx\right) + \left(3t^2 dt + \frac{t^3}{x} dx\right) = 0$, 则

1. 第一组方程 $\frac{x}{t} dt + dx = 0$ 有积分因子 $\mu_1(t) = t$, 对应通积分为 $\Phi_1(t, x) = tx = C$;

2. 第二组方程 $3t^2 dt + \frac{t^3}{x} dx = 0$ 有积分因子 $\mu_2(x) = x$, 对应通积分为 $\Phi_2(x) = t^3 x = C$.

设可微函数 g_1, g_2 满足 $\mu := t g_1(tx) = x g_2(t^3 x)$, 可以取 $g_1(s) = s^2, g_2(s) = s$, 则 $\mu(t, x) = t^3 x^2$. 原方程两端同乘 $\mu(t, x)$ 可化为

$$(x^3 t^2 dt + t^3 x^2 dx) + (3t^5 x^2 dt + t^6 x dx) = d\left(\frac{1}{3} x^3 t^3 + \frac{1}{2} t^6 x^2\right) = 0,$$

因此通积分为 $\frac{1}{3} x^3 t^3 + \frac{1}{2} t^6 x^2 = C$.

1.3 一阶隐式方程

本节考虑导数未解出的一阶隐式方程

$$F(t, x, x') = 0. \quad (1.3.1)$$

第一种情况: $x = g(t, p), p := x'$. 方程两边对 t 微分可得

$$p = \frac{\partial g}{\partial t}(t, p) = g_t + g_p \frac{dp}{dt},$$

这样就将 (1.3.1) 化为了 p 关于 t 的显式方程, 即

$$(g_t - p) dt + g_p dp = 0 (M dt + N dp = 0).$$

若上述方程有通解 $p = \varphi(t; C)$ 或 $t = \psi(p; C)$, 则原方程的通解为

$$x = g(t, \varphi(t; C)) \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = g(t, p) \\ t = \psi(p; C) \end{cases}$$

其中第二类情况可视作 x, t 关于 p 的参数方程.

例 1.20 (Clairaut 方程). $x = t \frac{dx}{dt} + f\left(\frac{dx}{dt}\right)$, 其中 $f'' \neq 0$.

解. 设 $p = \frac{dx}{dt}$, 方程化为 $x = tp + f(p)$. 两端对 t 微分可得

$$p = p + t \frac{dp}{dt} + f'(p) \frac{dp}{dt} \Rightarrow (t + f'(p)) \frac{dp}{dt} = 0.$$

1. $t + f'(p) \equiv 0$, 则 $t = -f'(p)$. 由逆映射定理可得 $\exists w \in C(I)$, 使得 $p = w(t)$, 此时原方程特解为 $x = tw(t) + f(w(t))$.

2. $t + f'(p) \neq 0$, 则有 $\frac{dp}{dt} = 0$, 从而 $p \equiv C$, 方程通解为 $x = Ct + f(C)$.

由于 $w(t) \neq C$, 故特解不含于通解. 但是, 过特解积分曲线上任一点 (t_0, x_0) 的切线方程为

$$x = x_0 + w(t_0)(t - t_0) = f(w(t_0)) + tw(t_0) = C_0t + f(C_0) (C_0 := w(t_0)).$$

因此积分曲线上任一点的切线是通解的某一族. 由此可引出奇解的概念:

定义 1.10 (奇解). 过特解的积分曲线上任一点, 都有通解中的某一族解的积分曲线与特解相切 (非重合), 则称该特解为微分方程的**奇解**.

例 1.21. 取 Clairaut 方程中的 $f(p) = -\frac{1}{4}p^2$, 则方程化为 $x = t\dot{x} - \frac{1}{4}\dot{x}^2$. 此时 $f'(p) = -\frac{1}{2}p$, 故 $t + f'(p) = 0$ 时有 $p = 2t$, 因此奇解为 $x = 2t^2 - \frac{1}{4} \cdot (2t)^2 = t^2$, 通解为 $x = Ct - \frac{C^2}{4}$.

第二种情况. $t = h(x, p)$, $p := x'$. 方程两边对 t 微分可得

$$1 = ph_x + \frac{dp}{dt}h_p = ph_x + \frac{dp}{dx} \cdot ph_p.$$

这样就将方程化为了不显含 t 的显式方程, 即为

$$(ph_x - 1)dx + ph_p dp = 0.$$

若上述方程有通解 $p = \varphi(x; C)$ 或 $x = \psi(p; C)$, 则有

$$t = h(x, \varphi(x; C)) \text{ 或 } \begin{cases} t = h(x, p) \\ x = \psi(p; C) \end{cases}$$

第三种情况. $F(x, p) = 0$ (或 $F(t, p) = 0$), $p := x'$. 设曲线 $F(x, p) = 0$ 对应的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(s) \\ p = b(s) \end{cases}$$

其中 s 为参数. 则

$$dt = \frac{dx}{p} = \frac{a'(s)ds}{b(s)} \Rightarrow t = \int \frac{a'(s)}{b(s)} ds + C.$$

由此可得方程通解为

$$\begin{cases} x = a(s) \\ t = \int \frac{a'(s)}{b(s)} ds + C \end{cases}$$

$F(t, p) = 0$ 的情形可类似求解.

例 1.22. $x^2 + p^2 = 1$, $p := x'$.

解. 曲线 $x^2 + p^2 = 1$ 对应的参数方程为 $(x, p) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ 为参数. 若 $p = 0$, 则可得方程的两个特解 $x = \pm 1$. 若 $p \neq 0$, 则有

$$dt = \frac{dx}{p} = \frac{-\sin \theta d\theta}{\sin \theta} = -d\theta,$$

积分可得 $t = -\theta + C$, 因此方程通解为 $x = \cos(C - t)$.

1.4 高阶常微分方程的降阶

本节考虑高阶常微分方程

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad n \geq 2. \quad (1.4.1)$$

一般而言, 对高阶方程进行降阶处理可以有效降低求解难度. 我们分为若干情况进行讨论:

1. $F(t, x^{(k)}, \dots, x^{(n)}) = 0, 1 \leq k \leq n$.

作变量代换 $y = x^{(k)}$, 则 $y^{(i)} = x^{(k+i)}, 0 \leq i \leq n - k$. 原方程化为

$$F(t, y, \dots, y^{(n-k)}) = 0.$$

这样就将 n 阶方程降阶为了 $n - k$ 阶方程. 若降阶后的方程有通解 $y = \varphi(t; C_1, \dots, C_{n-k})$, 则原方程的解为

$$x = \int \cdots \int \varphi(t; C_1, \dots, C_{n-k}) dt \cdots dt \quad (k \text{ 重积分}).$$

2. $F(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$. 这是不显含 t 的方程, 称为自治方程或驻定方程.

作变量代换 $y = x'$, 由归纳法易证得 $x^{(k)}$ 可由 $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$ 表示 ($k \leq n$), 从而原方程化为

$$F(x, x', \dots, x^{(n)}) = G\left(x, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0.$$

将 x 关于 t 的 n 阶方程降阶为了 y 关于 x 的 $n - 1$ 阶方程.

3. $F(t, x, \dots, x^{(n)}) = \frac{d}{dt} \Phi(t, x, \dots, x^{(n-1)}) = 0$, 即 F 为全微分形式, 则方程化为

$$\Phi(t, x, \dots, x^{(n-1)}) - C = 0.$$

将 n 阶方程降阶为了 $n - 1$ 阶方程. 对于一般方程, 也可考虑积分因子法.

例 1.23 (物理系统). $mx'' - f(x) = 0$.

解. 考虑两种方法求解.

1. 令 $p = x'$, 则

$$x'' = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dt} = p \frac{dp}{dx}.$$

从而原方程化为

$$mp \frac{dp}{dx} = f(x) \Rightarrow mp dp = f(x) dx.$$

上述分离型方程的通解为

$$p^2 = \frac{2}{m} \int f(x) dx + C.$$

2. 方程两端同乘 x' 可得

$$x'(mx'' - f(x)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(m(x')^2 - 2 \int_{x_0}^x f(s) ds \right).$$

因此

$$m(x')^2 - m(x')^2|_{x_0} = 2 \int_{x_0}^x f(s) ds.$$

例 1.24 (导弹追踪问题). 问题提出: 我国沿海某军的一导弹基地发现正北方向 120km 处海面上有一敌艇以 $v_e = 90\text{km/h}$ 的速度向正东方向行驶. 该基地立刻发射导弹跟踪追击敌艇, 导弹速度为 $v_w = 450\text{km/h}$, 自动导航系统使导弹在任一时刻都能对准敌艇, 试问导弹在何时何处能击中敌艇?

1. 数学模型构建: 设初始时刻导弹位于原点, 敌艇位于 $(0, H)$ ($H > 0$) 点. 正东方向为 x 轴正向, 正北方向为 y 轴正向. 设时刻 t , 导弹位于 $P(x(t), y(t))$, 导弹速度可由水平速度和垂直速度合成, 即有

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = v_w^2.$$

导弹方向始终指向敌艇, 即切线始终经过敌艇, 从而有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H - y}{v_e t - x} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \left(\frac{H - y}{v_e t - x} \right).$$

联立以上两式可得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_w \left(1 + \left(\frac{H - y}{v_e t - x} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{dy}{dt} = v_w \left(1 + \left(\frac{v_e t - x}{H - y} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = v_w \left(1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases} \quad (1.4.2)$$

2. 分析求解. 对 $\frac{dx}{dy}(H - y) = v_e t - x$ 关于 t 微分, 可得

$$\frac{d^2x}{dy^2} \frac{dy}{dt} (H - y) - \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt} = v_e - \frac{dx}{dt}. \quad (1.4.3)$$

由 (1.4.2)(1.4.3) 及初始条件可得

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dy^2} \frac{H - y}{\sqrt{1 + (dx/dy)^2}} = \frac{v_e}{v_w} \\ x|_{y=0} = 0, \frac{dx}{dy}|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (1.4.4)$$

令 $p = \frac{dx}{dy}$, $\lambda = \frac{v_e}{v_w}$, 代入可得一阶分离型方程:

$$\frac{dp}{dy} \frac{H - y}{\sqrt{1 + p^2}} = \lambda, p|_{y=0} = 0.$$

积分求解可得

$$\frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{H}{H-y} \right)^\lambda - \left(\frac{H-y}{H} \right)^\lambda \right).$$

这又是一个分离型方程, 求解并代入初始条件 $x|_{y=0} = 0$ 可得

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{(H-y)^{1+\lambda}}{H^\lambda(1+\lambda)} - \frac{H^\lambda(H-y)^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) + \frac{\lambda H}{1-\lambda^2}.$$

当导弹击中敌舰时, $y = H$. 此时

$$x = L := \frac{\lambda H}{1-\lambda^2}, \quad t = T := \frac{L}{v_e}.$$

将原例中的数据代入计算可得 $x = 25\text{km}$, $t \approx 0.2778\text{h}$.

3. 数值模拟. 利用 Mathematica 软件数值模拟, 绘制 $x \sim y$ 图像如下:

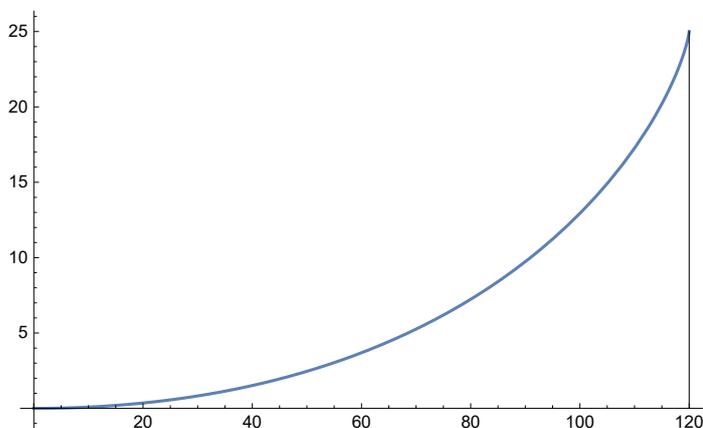


图 1.8: 导弹追踪的数值模拟图像, 横轴为 y 坐标, 纵轴为 x 坐标. 蓝色曲线为导弹追踪轨迹.

1.5 初等积分与首次积分

命题 1.1. 任意阶的显式方程 (组) 可化为标准的一阶方程组形式:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (1.5.1)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

我们给出几个例子来佐证这一命题.

例 1.25. 将 $x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$ 化为方程组 (1.5.1) 的形式.

解. 设 $x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}$, 则

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

例 1.26. 将方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} = F\left(t, u, \frac{du}{dt}, v, w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2w}{dt^2}\right) \\ \frac{dv}{dt} = G\left(t, u, \frac{du}{dt}, v, w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2w}{dt^2}\right) \\ \frac{d^3w}{dt^3} = H\left(t, u, \frac{du}{dt}, v, w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2w}{dt^2}\right) \end{cases}$$

化为方程组 (1.5.1) 的形式.

解. 令 $x_1 = u, x_2 = \frac{du}{dt}, x_3 = v, x_4 = w, x_5 = \frac{dw}{dt}, x_6 = \frac{d^2w}{dt^2}$. 则

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = F(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ \frac{dx_3}{dt} = G(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ \frac{dx_4}{dt} = x_5 \\ \frac{dx_5}{dt} = x_6 \\ \frac{dx_6}{dt} = H(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \end{cases}$$

现在我们考虑方程组 (1.5.1) 的一般解法.

解法一. 消元化为高阶方程.

例 1.27. 求解 $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

解. 将 $y' = x$ 代入 $x' = -y$ 可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} = -x.$$

这是一个二阶常系数方程, 将在第二章研究它的一般解法.

解法二. 首次积分法.

定义 1.11 (首次积分). 若标量函数 $\Phi(t, \mathbf{x}) \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 不是常数, 且 (1.5.1) 在 $D_0 \subset D$ 内的任一条积分曲线 $\Gamma: \mathbf{x} = \varphi(t)$ 上, 函数 Φ 取常数, 则称 $\Phi(t, \mathbf{x}) = C$ 为 (1.5.1) 在区域 D 内的**首次积分**.

定义 1.12. 称 n 个首次积分 Φ_1, \dots, Φ_n **独立**, 是指

$$\frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

例 1.28. 求 $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ 的一个首次积分.

解. 由方程组可得

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 0.$$

因此方程组的首次积分 Φ 取 $x^2 + y^2 = C$.

为了利用首次积分求解方程组, 首先证明关于首次积分的存在唯一性定理.

定理 1.3. 若 $P_0(t_0, \mathbf{x}_0) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, 则存在 P_0 的某邻域 $D_0 \subset D$, 使得方程组 (1.5.1) (其中 $f \in C^1(D)$) 在 D_0 内有且仅有 n 个独立的首次积分.

证明. 证明中将用到方程组 (1.5.1) 的初值可微性, 即方程组 (1.5.1) 在 D 内的任一初值条件下的解关于初值连续可微. 具体证明将在 4.2 节给出. 以下证明分为两步:

1. 先证明 (1.5.1) 有 n 个首次积分. 任取初值条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)^T$, 使得 $(t_0, \mathbf{C}) \in D_0$. 则 (1.5.1) 和初值条件确定的解 $\Phi(t, \mathbf{C})$ 关于初值连续可微. 并且

$$\left. \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(C_1, \dots, C_n)} \right|_{t=t_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial C_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial C_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial C_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial C_n} \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

由隐函数定理可得, 在 P_0 的某邻域内, $\exists \Psi_j (1 \leq j \leq n)$, 使得 $C_j = \Psi_j(t, \mathbf{x})$ 为 (1.5.1) 在 D_0 内的 n 个首次积分.

2. 再证明 n 个首次积分的独立性. 假设 (1.5.1) 在 D_0 内有 $n+1$ 个首次积分 $\Psi_j(t, \mathbf{x}) (1 \leq j \leq n+1)$, 对 t 求全微分可得

$$\frac{d\Psi_j}{dt} = \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \Psi_j \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_k} f_k = 0.$$

易知 $(1, f_1, \dots, f_n)$ 为上述方程组的非平凡解, 从而 Jacobi 行列式

$$\frac{D(\Psi_1, \dots, \Psi_{n+1})}{D(t, x_1, \dots, x_n)} = 0, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in D_0.$$

因此任意 $n+1$ 个首次积分是相关的, 非独立.

□

由上述定理可总结归纳得以下定理, 证明略去, 可参考丁同仁 ODE.

定理 1.4. 由 (1.5.1) 在 D 内的 n 个独立首次积分 $\Phi_j(t, \mathbf{x}) = C_j (1 \leq j \leq n)$ 可得到 (1.5.1) 的通解 $\mathbf{x} = \varphi(t; C_1, \dots, C_n)$.

例 1.29. 利用首次积分求解方程组 $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$.

解. 上例中已求得一个首次积分为 $\sqrt{x^2 + y^2} = C_1$, 因此 $x = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$. 代入 $y' = x$ 中可得第二个首次积分

$$\pm \arctan \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - t = C_2.$$

由两个首次积分 $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = C_1 \\ \pm \arctan \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - t = C_2 \end{cases}$ 可确定方程组通解.

例 1.30. $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{zy} = \frac{dz}{yx} (= dt)$.

解. 这是 ODE 的对称形式, 不显含自变量 t . 由第一式可得 $\frac{x}{y} = C_1$, 确定了第一个首次积分; 将 $x = C_1 y$ 代入第二式可得 $\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{C_1 y^2}$, 由此可得

$$C_1 y^2 - z^2 = C_2 \Rightarrow xy - z^2 = C_2.$$

因此方程通解为 $\begin{cases} x = C_1 y \\ xy - z^2 = C_2 \end{cases}$

例 1.31. $\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = -\frac{dy}{y(z^2 + x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)} (= dt)$.

解. 观察可得

$$x dx + y dy + z dz = x^2(y^2 - z^2) dt - y^2(z^2 + x^2) dt + z^2(x^2 + y^2) dt = 0.$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = (y^2 - z^2) dt + (z^2 + x^2) dt - (x^2 + y^2) dt = 0.$$

因此方程组的两个首次积分为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1 \\ yz = C_2 x \end{cases}$$

例 1.32 (N 体问题, 二体问题). N 体问题的微分方程为 ($N \geq 2$):

$$\begin{cases} m_j \frac{d^2 \mathbf{x}_j}{dt^2} = G \sum_{k \neq j}^N \frac{m_j m_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j|^3}, & j = 1, \dots, N. \\ \mathbf{x}_j|_{t=0} = \mathbf{x}_{j,0}, \quad \mathbf{x}'_j(0) = \mathbf{x}_{j,1} \end{cases}$$

其中 m_j 为第 j 个质点的质量, \mathbf{x}_j 为第 j 个质点的三维空间位置矢量, G 为万有引力常数, $|\cdot|$ 为欧氏距离.

二体问题的分析. 以地日系统为例, 设太阳 M 静止于原点, 地球 m 的坐标向量为 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 则上述方程组可化为

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{GMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{y} = -\frac{GM y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{z} = -\frac{GM z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ddot{x} - x\ddot{y} = \frac{d}{dt}(y\dot{x} - x\dot{y}) = 0 \\ z\ddot{y} - y\ddot{z} = \frac{d}{dt}(z\dot{y} - y\dot{z}) = 0 \\ x\ddot{z} - z\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{z} - z\dot{x}) = 0 \end{cases}$$

从而得到首次积分

$$\begin{cases} y\dot{x} - x\dot{y} = C_1 \\ z\dot{y} - y\dot{z} = A \\ x\dot{z} - z\dot{x} = B \end{cases} \quad (1.5.2)$$

由 (1.5.2) 可得 $Ax + By + C_1z = 0$, 因此地球在平面上绕太阳旋转. 不妨设地球轨道在平面 $z = 0$ 上, 则微分方程化为

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\mu x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{y} = -\frac{\mu y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (\mu = GM).$$

从而有

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{2\mu}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \frac{\mu(x\dot{x} + y\dot{y})}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

因此有 $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{2\mu}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = C_2$. 引入极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 上式可化为

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - \frac{2\mu}{r} = C_2. \quad (1.5.3)$$

(1.5.3) 代入 (1.5.2) 可得开普勒第二定律:

$$-r^2\dot{\theta} = C_1 > 0. \quad (1.5.4)$$

即单位时间内向径扫过的面积为定值. 由 (1.5.3)(1.5.4) 可得

$$\dot{r} = \pm \sqrt{C_2 + \frac{\mu^2}{C_1^2} - \left(\frac{C_1}{r} - \frac{\mu}{C_1} \right)^2},$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \pm \frac{r^2}{\theta^2} \sqrt{C_2 + \frac{\mu^2}{C_1^2} - \left(\frac{C_1}{r} - \frac{\mu}{C_1} \right)^2}.$$

上式为分离型方程, 求解得通积分

$$\frac{\frac{C_1}{r} - \frac{\mu}{C_1}}{\sqrt{C_2 + \frac{\mu^2}{C_1^2}}} = \cos(\theta - C).$$

从而得到开普勒第一定律 (二次曲线中只有椭圆不会到达无穷远):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, p = \frac{C_1^2}{\mu}, e = \sqrt{1 + \frac{C_2 C_1^2}{\mu^2}}, \theta_0 = C.$$

另一方面, 由开普勒第二定律及椭圆性质可得地球的运行周期为

$$T = \frac{\pi ab}{C_1/2} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{\mu p}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}}.$$

这就是开普勒第三定律.

第二章 高阶常系数线性微分方程

高阶常系数微分方程的一般形式:

$$\mathcal{L}x := \sum_{k=0}^n a_{n-k}x^{(k)} = f(t), \quad (2.0.1)$$

$$\mathcal{L}x = 0. \quad (2.0.2)$$

其中 $a_k (0 \leq k \leq n)$ 为复常数, $a_0 \neq 0$. (2.0.1) 为非齐次方程, (2.0.2) 为齐次方程.

定理 2.1 (叠加原理). 设 \mathcal{L} 是一个线性 (微分) 算子, \mathcal{B} 为线性 (微分) 算子, 则

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ in } D, \\ \mathcal{B}u|_{\partial D} = \varphi. \end{cases} \quad (2.0.3)$$

的解 u 可表示为 $u = v + w$ 的形式, 其中 v, w 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = 0, \\ \mathcal{B}v|_{\partial D} = \varphi. \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}w = f, \\ \mathcal{B}w|_{\partial D} = 0. \end{cases}$$

证明. 若 v, w 满足上述方程, 则 $u = v + w$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \mathcal{L}(v + w) = \mathcal{L}v + \mathcal{L}w = f, \\ \mathcal{B}u|_{\partial D} = \mathcal{B}(v + w)|_{\partial D} = \mathcal{B}v|_{\partial D} + \mathcal{B}w|_{\partial D} = \varphi. \end{cases}$$

反之, 设 u 满足边值问题 (2.0.3), 考虑上述齐次方程的边界问题的任一解 v , 则 $u = v + (u - v)$ 且 $w = u - v$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = \mathcal{L}u - \mathcal{L}v = f, \\ \mathcal{B}w|_{\partial D} = \mathcal{B}u|_{\partial D} - \mathcal{B}v|_{\partial D} = \varphi - \varphi = 0. \end{cases}$$

□

由叠加原理可得: (2.0.1) 的通解 = (2.0.2) 的通解 + (2.0.1) 的一个特解.

2.1 高阶常系数齐次线性微分方程

定义 2.1. 我们称

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_{n-k}\lambda^k = 0 \quad (2.1.1)$$

为 (2.0.2) 的**特征方程**, 其根称为 (2.0.2) 的**特征值** (或固有值).

定理 2.2 (常系数齐次线性方程的通解). 设 (2.1.1) 有 m 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 对应的重数 n_1, \dots, n_m 满足 $\sum_{k=1}^m n_k = n$, 则 $\{t^j e^{\lambda_k t} \mid 1 \leq k \leq m, 0 \leq j < n_k\}$ 是 (2.0.2) 的一组线性无关解, 并且齐次方程的通解是上述线性无关解的线性组合:

$$x(t) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{n_k-1} C_{jk} t^j e^{\lambda_k t}, \quad \forall C_{jk} \in \mathbb{C}.$$

证明.

1. 先证明 $\{t^j e^{\lambda_k t} \mid 1 \leq k \leq m, 0 \leq j < n_k\}$ 满足方程 (2.0.2). 由 $p(\lambda) = a_0 \prod_{k=1}^m (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ 可得

$$p(\lambda_k) = p'(\lambda_k) = \dots = p^{(n_k-1)}(\lambda_k) = 0, \quad p^{(n_k)}(\lambda_k) \neq 0.$$

因此

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^j e^{\lambda_k t}) &= \mathcal{L}\left(\frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} e^{\lambda t} \Big|_{\lambda=\lambda_k}\right) = \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \mathcal{L}(e^{\lambda t} |_{\lambda=\lambda_k}) \\ &= \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \mathcal{L}(p(\lambda) e^{\lambda t} |_{\lambda=\lambda_k}) \\ &= \mathcal{L}\left(\sum_{l=0}^j \frac{j!}{l!(j-l)!} p^{(l)}(\lambda) t^{j-l} e^{\lambda t} \Big|_{\lambda=\lambda_k}\right), \quad 0 \leq j < n_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. 下证明 $\{t^j e^{\lambda_k t} \mid 1 \leq k \leq m, 0 \leq j < n_k\}$ 线性无关. 即证明: $\sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{n_k-1} C_{jk} t^j e^{\lambda_k t} \equiv 0$, 则 $C_{jk} = 0$, $\forall j, k$. 首先承认以下命题:

$$\text{若 } \sum_{k=1}^m b_k(t) e^{\lambda_k t} \equiv 0, \text{ 则必有 } b_k(t) \equiv 0, \text{ 其中 } b_k \in \mathbb{C}[t]. \quad (2.1.2)$$

则可得 $\sum_{j=0}^{n_k-1} C_{jk} t^j \equiv 0, \forall k$, 由代数基本定理得 $C_{jk} = 0, \forall j, k$. 下利用归纳法证明命题 (2.1.2).

$m = 1$ 时, 命题显然成立. 设 $\sum_{k=1}^m b_k(t) e^{\lambda_k t} \equiv 0 \Rightarrow b_k(t) \equiv 0$, 若 $\sum_{k=1}^{m+1} b_k(t) e^{\lambda_k t} \equiv 0$, 上式两端同乘 $e^{-\lambda_{m+1} t}$, 则有

$$\sum_{k=1}^m b_k(t) e^{(\lambda_k - \lambda_{m+1})t} + b_{m+1}(t) \equiv 0. \quad (2.1.3)$$

设 $s = \deg b_{m+1} + 1$, 则 $\frac{d^s b_{m+1}}{dt^s}(t) \equiv 0$. 对 (2.1.3) 微分 s 次可得 $\sum_{k=1}^m q_k(t) e^{(\lambda_k - \lambda_{m+1})t} \equiv 0$, 由归纳假设可得 $q_k(t) \equiv 0, \forall k$. 事实上, 由于

$$\frac{d}{dt} (b_k(t) e^{(\lambda_k - \lambda_{m+1})t}) = b_k'(t) + (\lambda_k - \lambda_{m+1}) b_k(t) e^{(\lambda_k - \lambda_{m+1})t}.$$

由归纳法易证 $\deg q_k = \deg b_k$. 若 $b_k(t) \neq 0$, 则 $q_k(t) \neq 0$, 矛盾.

□

例 2.1. $x'' - x' - 2x = 0$.

解. 题设方程的特征方程为 $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, 因此方程有两个特征根 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$, 重数均为 1. 因此线性无关解组为 $\{e^{2t}, e^{-t}\}$, 通解为 $x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-t}$.

对实常系数线性算子 \mathcal{L} , 若 $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$ 是 (2.0.2) 的复值解, 则

$$0 = \mathcal{L}\varphi = \mathcal{L}(u + iv) = \mathcal{L}u + i\mathcal{L}v \Leftrightarrow \mathcal{L}u = \mathcal{L}v = 0,$$

因此 u, v 均为 (2.0.2) 的实值解.

例 2.2. 求 $x^{(5)} - 3x^{(4)} + 4x^{(3)} - 4x'' + 3x' - x = 0$ 的实通解.

解. 特征方程为 $\lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1) = 0$, 因此特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$, 重数分别为 3, 1, 1. 从而方程的线性无关解组为 $\{e^t, te^t, t^2e^t, e^{it}, e^{-it}\}$. 由于 $e^{it} = \cos t + i\sin t, e^{-it} = \cos t - i\sin t$, 故 $\sin t, \cos t$ 也是原方程的一组线性无关解. 从而 $x(t) = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^t + C_4\cos t + C_5\sin t$ 为方程的实通解.

2.2 高阶常系数非齐次线性方程

首先考虑二阶非齐次线性方程

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t) \quad (2.2.1)$$

的通解表示.

定理 2.3. 若 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 是 $x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$ 的线性无关解, 则 (2.2.1) 的通解为

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \int_{t_0}^t \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)\varphi_2'(s) - \varphi_1'(s)\varphi_2(s)} f(s) ds.$$

证明. 利用常数变易法求方程 (2.2.1) 的一个特解. 设 $x(t) = C_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t)$ 是 (2.2.1) 的一个特解, 其中 $C_1(t), C_2(t)$ 为待定函数. 则有 $x'(t) = C_1(t)\varphi_1'(t) + C_2(t)\varphi_2'(t) + C_1'(t)\varphi_1(t) + C_2'(t)\varphi_2(t)$. 令 $C_1'(t)\varphi_1(t) + C_2'(t)\varphi_2(t) = 0$, 则 $x'(t) = C_1(t)\varphi_1'(t) + C_2(t)\varphi_2'(t)$, 两端微分可得

$$x''(t) = C_1'(t)\varphi_1'(t) + C_2'(t)\varphi_2'(t) + C_1(t)\varphi_1''(t) + C_2(t)\varphi_2''(t) \Rightarrow C_1'(t)\varphi_1'(t) + C_2'(t)\varphi_2'(t) = f(t).$$

从而可得 $\begin{cases} C_1'(t)\varphi_1(t) + C_2'(t)\varphi_2(t) = 0, \\ C_1'(t)\varphi_1'(t) + C_2'(t)\varphi_2'(t) = f(t). \end{cases}$ 由此解得

$$C_1'(t) = -\frac{\varphi_2(t)f(t)}{W(t)}, \quad C_2'(t) = \frac{\varphi_1(t)f(t)}{W(t)},$$

其中 $W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)$ 为 **Wronsky 行列式**, 积分即得结论. □

例 2.3. $x'' + a_1x' + a_2x = f(t)$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

解. 考虑齐次方程 $x'' + a_1x' + a_2x = 0$ 的线性无关解, 只考虑特征方程无重根情况, 记两个相异特征值为 λ_1, λ_2 , 则两个线性无关解为 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$, 对应的 Wronsky 行列式为 $W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$. 积分核为

$$K(t-s) = \frac{e^{\lambda_1 s} e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 s}}{W(s)} = \frac{e^{\lambda_2(t-s)} - e^{\lambda_1(t-s)}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

因此通解为

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \int_{t_0}^t \frac{e^{\lambda_2(t-s)} - e^{\lambda_1(t-s)}}{\lambda_2 - \lambda_1} f(s) ds.$$

对于一般方程 (2.0.1), 一般考虑四种方法求特解: 常数变易法、Laplace 变换法、待定系数法、运算子法. 其中我们对后两种方法进行进一步讨论.

1. 待定系数法. 适用于以下两种情况:

- (1) $f(t) = P_l(t)e^{\mu t}$, 其中 $P_l(t)$ 为 l 次多项式. 若 μ 不是 (2.0.2) 的特征值, 则可设特解为 $x(t) = Q_l(t)e^{\mu t}$, 其中 $Q_l(t)$ 为 l 次多项式. 代入 (2.0.1) 确定 $Q_l(t)$ 的系数; 若 μ 是 (2.0.2) 的 k 重特征值, 则可设特解为 $x(t) = t^k Q_l(t)e^{\mu t}$.
- (2) $f(t) = (P_l(t) \cos \beta t + Q_m(t) \sin \beta t)e^{\alpha t}$, $P_l(t), Q_m(t)$ 为 l 阶, m 阶多项式. 设 $s := \max(l, m)$, 若 $\alpha + i\beta$ 不是 (2.0.2) 的特征值, 则可设特解为 $(C_s(t) \cos \beta t + D_s(t) \sin \beta t)e^{\alpha t}$; 若 $\alpha + i\beta$ 是 (2.0.2) 的 k 重特征值, 则可设特解为 $t^k (C_s(t) \cos \beta t + D_s(t) \sin \beta t)e^{\alpha t}$.

例 2.4. $x''' + 3x'' + 3x' + x = e^{-t}(t+5) + e^t + \sin t + 1$.

解. 齐次方程 $x''' + 3x'' + 3x' + x = 0$ 的特征方程为 $(\lambda + 1)^3 = 0$, 故特征值为 $\lambda = -1$, 重数为 3. 从而线性无关解组为 $\{e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}\}$. 由叠加原理可得, 可以分别求解 $f(t) = e^{-t}(t+5), e^t, \sin t, 1$ 时的特解, 累加即得原方程的一个特解.

1. $f(t) = e^{-t}(t+5)$, 由于 -1 是三重特征值, 可设特解为 $x_1(t) = t^3(a_1t + b_1)e^{-t}$, 代入可得

$$x_1'''(t) + 3x_1''(t) + 3x_1'(t) + x_1(t) = (6a_1 + 24b_1t)e^{-t} = e^{-t}(t+5) \Rightarrow a_1 = -\frac{5}{6}, b_1 = \frac{1}{24},$$

$$\text{特解为 } x_1(t) = \frac{t^3}{24}(t+20)e^{-t}.$$

2. $f(t) = e^t$, 此时设特解为 $x_2(t) = a_2e^t$, 代入可得 $8a_2e^t = e^t \Rightarrow a_2 = \frac{1}{8}$, 特解为 $x_2(t) = \frac{1}{8}e^t$.

3. $f(t) = \sin t$, 此时设特解为 $x_3(t) = a_3 \cos t + b_3 \sin t$, 则

$$x_3'''(t) + 3x_3''(t) + 3x_3'(t) + x_3(t) = 2(b_3 - a_3) \cos t - 2(a_3 + b_3) \sin t = \sin t \Rightarrow a_3 = b_3 = -\frac{1}{4},$$

$$\text{特解为 } x_3(t) = -\frac{1}{4}(\sin t + \cos t).$$

4. $f(t) = 1$, 此时对应特解为 $x_4(t) = 1$.

综上所述, 原方程的一个特解为

$$x^*(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) = \frac{t^3}{24}(t+20)e^{-t} + \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{4}(\sin t + \cos t) + 1,$$

因此通解为

$$x(t) = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^{-t} + \frac{t^3}{24}(t+20)e^{-t} + \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{4}(\sin t + \cos t) + 1.$$

2. 算子法求特解. 按照如下方式定义算子:

$$\mathcal{D} := \frac{d}{dt}, \mathcal{D}^2 := \frac{d^2}{dt^2}, \dots, \mathcal{D}^n := \frac{d^n}{dt^n}, \quad \mathcal{D}^0 = 1.$$

从而可定义 n 次算子多项式:

$$P(\mathcal{D}) = a_n \mathcal{D}^n + \dots + a_1 \mathcal{D} + a_0 = a_n \frac{d^n}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0.$$

从而方程 (2.0.1) 可化为 $P(\mathcal{D})x = f(t)$, 方程特解可形式上记为 $x^*(t) = \frac{1}{P(\mathcal{D})}f(t)$, 其中 $\frac{1}{P(\mathcal{D})}$ 称为 $P(\mathcal{D})$ 的逆算子. 求特解的关键是求出算子多项式的逆算子. 首先列出算子多项式的相关性质:

性质 2.1. 1. $P(\mathcal{D})e^{at} = P(a)e^{at}$;

2. $P(\mathcal{D})(e^{at}x(t)) = e^{at}P(\mathcal{D} + a)x(t)$.

3. $P(\mathcal{D}^2)\sin \omega t = P(-\omega^2)\sin \omega t$, $P(\mathcal{D}^2)\cos \omega t = P(-\omega^2)\cos \omega t$.

证明. 以下我们均设 $P(\mathcal{D}) = c_n \mathcal{D}^n + \dots + c_1 \mathcal{D} + c_0$.

1. 代入验证可得

$$P(\mathcal{D})e^{at} = \sum_{k=0}^n c_k \mathcal{D}^k e^{at} = \sum_{k=0}^n c_k a^k e^{at} = P(a)e^{at}.$$

2. 直接验证可得

$$P(\mathcal{D})(e^{at}x(t)) = \sum_{k=0}^n c_k \mathcal{D}^k (e^{at}x(t)) = e^{at} \sum_{k=0}^n c_k \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i \mathcal{D}^{k-i} \right) x(t) = e^{at} P(\mathcal{D} + a)x(t).$$

3. 花式验证可得

$$P(\mathcal{D}^2)\sin \omega t = \sum_{k=0}^n c_k \mathcal{D}^{2k} \sin \omega t = \sum_{k=0}^n c_k (-\omega^2)^k \sin \omega t = P(-\omega^2)\sin \omega t.$$

$$P(\mathcal{D}^2)\cos \omega t = \sum_{k=0}^n c_k \mathcal{D}^{2k} \cos \omega t = \sum_{k=0}^n c_k (-\omega^2)^k \cos \omega t = P(-\omega^2)\cos \omega t.$$

□

当 $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^k$ 时, 逆算子对应累次积分, 即

$$\frac{1}{\mathcal{D}^k} f(t) = \int \cdots \int f(t) (dt)^k (k \text{ 重积分}).$$

对于一般的算子多项式, 若 $f(t)$ 为多项式, 则可以在有限次求导后化为零, 因此可以考虑长除法和 Taylor 展开法求解逆算子. 考虑下例:

例 2.5. $2x'' + 2x' + 1 = t^2 + 2t - 1$.

解. 此时 $P(\mathcal{D}) = 2\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D} + 1$.

1. (长除法). 如下所示:

$$\begin{array}{r} 1 - 2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2 \\ 1 + 2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2 \overline{) 1 + 0\mathcal{D} + 0\mathcal{D}^2} \\ \underline{1 + 2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2} \\ -2\mathcal{D} - 2\mathcal{D}^2 \\ \underline{-2\mathcal{D} - 4\mathcal{D}^2 - 4\mathcal{D}^3} \\ 2\mathcal{D}^2 - 4\mathcal{D}^3 \end{array}$$

因此 $\frac{1}{1 + 2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2} = 1 - 2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2 + \cdots$, 故

$$x^*(t) = \frac{1}{1 + 2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2} (t^2 + 2t - 1) = (1 - 2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2 + \cdots) (t^2 + 2t - 1) = t^2 - 2t - 1.$$

2. (Taylor 展开). 由于 $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, 因此

$$\frac{1}{1 + 2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2} = 1 - (2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2) + (2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2)^2 - (2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2)^3 + \cdots = 1 - 2\mathcal{D} + 2\mathcal{D}^2 + \cdots.$$

例 2.6. $x'' - x = t^4 - 1$.

解. 方程的算子形式为 $(\mathcal{D}^2 - 1)x = t^4 - 1$, Taylor 展开可得

$$\frac{1}{\mathcal{D}^2 - 1} = -1 - \mathcal{D}^2 - \mathcal{D}^4 + o(\mathcal{D}^4),$$

因此特解为

$$x^*(t) = \frac{1}{\mathcal{D}^2 - 1} (t^4 - 1) = (-1 - \mathcal{D}^2 - \mathcal{D}^4) (t^4 - 1) = -t^4 - 12t^2 - 25.$$

若 $f(t) = P(t)e^{at}$, 其中 $P(t)$ 为多项式, 则可利用算子多项式的运算性质变形求解.

例 2.7. $x'' - 2x' + x = te^t$.

解. 方程的算子形式为 $(\mathcal{D} - 1)^2 x = te^t$, 由 $P(\mathcal{D})(e^{at}x(t)) = e^{at}P(\mathcal{D} + a)x(t)$ 可得

$$\frac{1}{P(\mathcal{D})} (e^{at}x(t)) = e^{at} \frac{1}{P(\mathcal{D} + a)} x(t).$$

因此特解为

$$x^*(t) = \frac{1}{(\mathcal{D} - 1)^2} e^t \cdot t = e^t \frac{1}{\mathcal{D}^2} t = e^t \int \left(\int t dt \right) dt = \frac{t^3 e^t}{6}.$$

若 $f(t) = (P(t) \sin \beta t + Q(t) \cos \beta t)e^{at}$, 可以利用复数求解逆算子.

例 2.8. $x'' - 6x' + 13x = e^{3t} \sin 2t$.

解. 方程的算子形式为 $(\mathcal{D}^2 - 6\mathcal{D} + 13)x = e^{3t} \sin 2t$. 因此一个特解为

$$\begin{aligned}
 x^*(t) &= \frac{1}{\mathcal{D}^2 - 6\mathcal{D} + 13}(e^{3t} \sin 2t) = \frac{1}{\mathcal{D}^2 - 6\mathcal{D} + 13} \operatorname{Im}(e^{(3+2i)t}) \\
 &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\mathcal{D}^2 - 6\mathcal{D} + 13} e^{(3+2i)t} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{(\mathcal{D} - (3+2i))(\mathcal{D} - (3-2i))} e^{(3+2i)t} \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left(e^{(3+2i)t} \frac{1}{\mathcal{D}(\mathcal{D} + 4i)} 1 \right) = \operatorname{Im} \left(e^{(3+2i)t} \frac{1}{4i\mathcal{D}} \left(1 - \frac{\mathcal{D}}{4i} + \dots \right) 1 \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{(3+2i)t}}{4i} \cdot \frac{1}{\mathcal{D}} 1 \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{te^{(3+2i)t}}{4i} \right) = -\frac{t}{4} e^{3t} \cos 2t.
 \end{aligned}$$

第三章 线性微分方程组

3.1 常系数线性微分方程组

常微分方程组的一般形式: $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, 其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, $f_k : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. 当 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ 时, 原方程组为线性微分方程组, 其中 $A(t)$ 为 n 阶矩阵值函数. 当 $A(t) \equiv A$, $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$ 时, 原方程为常系数齐次微分方程组. 一般形式为

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t). \quad (3.1.2)$$

为了求解齐次方程 (3.1.1) 的通解, 首先在赋范空间 $(\mathbb{R}^{n \times n}, \|\cdot\|)$ 内讨论矩阵指数函数 e^A 的定义和性质. 其中 $\|\cdot\|$ 为某一范数, 例如可取 Frobenius 范数或矩阵范数¹.

定义 3.1. 矩阵指数函数 e^A 的定义如下:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (3.1.3)$$

性质 3.1. 矩阵指数函数是良定的, 即对任意 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ 是收敛的.

证明. 由范数的三角不等式可得

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!},$$

而 RHS 收敛于 $e^{\|A\|}$, 因此 (3.1.3) 收敛, 从而是良定的. □

性质 3.2. $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ 在 t 的有限区间上一致收敛.

¹考虑矩阵 A 的奇异值分解 $A = U\Sigma V$, 其中 U, V 为正交阵, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, O)$ ($\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0, r = \text{rank}(A)$), 定义矩阵 A 的 Frobenius 范数为

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义矩阵范数为

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sigma_1.$$

可以验证上述两个范数确实满足矩阵范数的定义.

证明. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为有限区间, 则 $c := \sup_{t \in I} |t|$ 存在且有限. 因此

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k |t|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k c^k}{k!} = e^{\|A\|c},$$

由 Weierstrass 判别法得 e^{At} 在 I 上一致收敛. □

下面列出 e^A 的一些常用性质:

性质 3.3.

1. 若 $A, B \in \mathbb{M}_n$, 且 $AB = BA$, 则 $e^{A+B} = e^A e^B$.
2. $\forall A \in \mathbb{M}_n$, e^A 可逆且 $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
3. $P \in \mathbb{M}_n$ 且 $\det P \neq 0$, 则 $e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$.

证明. 1. 由 $AB = BA$ 可得

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i+j=k \\ i, j \geq 0}} \frac{k!}{i!j!} A^i B^j = \sum_{i, j=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} = e^A e^B.$$

2. 由性质 1 可得 $e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = e^O = I_n$, 因此 e^A 可逆且 $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

3. 直接验证可得

$$e^{PAP^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PAP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} P \frac{A^k}{k!} P^{-1} = P e^A P^{-1}.$$

□

定义 3.2 (基解矩阵). 定义方程组 (3.1.1) 的基解矩阵 $\Phi(t)$ 为 n 个线性无关解构成的矩阵函数. 满足 $\Phi(0) = I$ 的基解矩阵称为标准基解矩阵.

为了求出 (3.1.1) 的一个基解矩阵, 需要利用以下 **Liouville 公式**, 具体证明在下节给出.

定理 3.1. 设线性方程组 $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ 的基解矩阵为 $\Phi(t)$, 设 $W(t) := \det(\Phi(t))$ 为方程组的 Wronsky 行列式, 则成立 Liouville 公式:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds}. \quad (3.1.4)$$

其中 $\text{tr}(\cdot)$ 为矩阵的迹.

定理 3.2. $\Phi(t) = e^{At}$ 是方程组 (3.1.1) 的一个标准基解矩阵.

证明. 由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!}$ 在 t 的有限区间上一致收敛可得 $\Phi(t) = e^{At}$ 在 t 轴上处处可微, 因此

$$\Phi'(t) = A + \frac{A^2}{1!} t + \cdots + \frac{A^k}{(k-1)!} t^{k-1} + \cdots$$

$$\begin{aligned}
&= A \left(I + \frac{A}{1!}t + \cdots + \frac{A^k}{k!}t^k + \cdots \right) \\
&= Ae^{At} = A\Phi(t).
\end{aligned}$$

因此 $\Phi(t)$ 是 (3.1.1) 的解矩阵. 另一方面, 由 $\Phi(0) = I$, 应用 Liouville 公式可得

$$\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(0)) \cdot e^{\operatorname{tr}(At)} > 0,$$

从而 $\Phi(t)$ 是基解矩阵, 进而是标准基解矩阵. □

推论 3.1. 非齐次方程组 (3.1.2) 的通解为 $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{C} + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}\mathbf{f}(s)ds$.

证明. 利用线性方程组的解空间结构可得 (3.1.2) 的通解形式为 $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{C} + \mathbf{x}^*(t)$, 其中 $\mathbf{x}^*(t)$ 为 (3.1.2) 的特解, 这一结论将在下节证明. 设 $\mathbf{x}^*(t) = e^{At}\mathbf{C}^*(t)$, 代入方程组 (3.1.2) 可得

$$e^{At} \frac{d\mathbf{C}^*}{dt} = \mathbf{f}(t) \Rightarrow \frac{d\mathbf{C}^*}{dt} = (e^{At})^{-1} \mathbf{f}(t) = e^{-At} \mathbf{f}(t),$$

积分即得结论. □

例 3.1. 设 $A = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ 为对角阵, 求此时齐次方程组 (3.1.1) 的基解矩阵.

解. 由于 $A^k = \operatorname{diag}(a_1^k, \cdots, a_n^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, 因此

$$\begin{aligned}
e^{At} &= I + \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \frac{t}{1!} + \begin{pmatrix} a_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^2 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2!} + \cdots + \begin{pmatrix} a_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^k \end{pmatrix} \frac{t^k}{k!} + \cdots \\
&= \operatorname{diag} \left(1 + a_1 \frac{t}{1!} + a_1^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots, \cdots, 1 + a_n \frac{t}{1!} + a_n^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots \right) \\
&= \operatorname{diag}(e^{a_1 t}, \cdots, e^{a_n t}).
\end{aligned}$$

例 3.2. 求 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ 的基解矩阵.

解. 首先注意到

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: 2I + Z,$$

其中 Z 满足 $Z^2 = O$, 为幂零阵, 因此

$$e^{At} = e^{2It} \cdot e^{Zt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & \\ & e^{2t} \end{pmatrix} \left(I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

以下讨论如何利用 Jordan 标准型求解基解矩阵. 首先回忆 Jordan 标准型的相关概念: $\forall A \in \mathbb{M}_n$, 存在可逆方阵 $P \in \mathbb{M}_n$, s.t. $A = PJP^{-1}$, 其中 J 称为 Jordan 方阵, 满足

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

其中 J_i 为 n_i 阶矩阵, 称为 Jordan 块, n_i 为特征值 λ_i 的重数. 利用 Jordan 标准型可得

$$J_i = \lambda_i I_{n_i} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} =: \lambda_i I_{n_i} + Z_i, \quad Z_i^{n_i} = O,$$

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i I_{n_i} t} \cdot e^{Z_i t} = e^{\lambda_i t} \left(I_{n_i} + Z_i t + \cdots + \frac{Z_i^{n_i-1} t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \right) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$e^{At} = e^{PJP^{-1}t} = Pe^{Jt}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_m t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

但由于求解 e^{Jt} 过于繁琐, 需要考虑其他方法求解基解矩阵. 由 $e^{At}P = Pe^{Jt}$ 可得 $\Phi(t) = Pe^{Jt}$ 也是基解矩阵. 下面讨论如何利用待定指数法求解 $\Phi(t)$.

1. A 有 n 个互异特征值. 此时 $J = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 设 $P = (\mathbf{r}_1 \ \cdots \ \mathbf{r}_n)$, $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^n$, 则

$$\Phi(t) = Pe^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \mathbf{r}_1 & \cdots & e^{\lambda_n t} \mathbf{r}_n \end{pmatrix}$$

是 (3.1.1) 的基解矩阵. 下说明 \mathbf{r}_i 是 λ_i 对应的特征向量. 事实上, 将 $e^{\lambda_i t} \mathbf{r}_i$ 代入 (3.1.1) 可得

$$\lambda_i e^{\lambda_i t} \mathbf{r}_i = Ae^{\lambda_i t} \mathbf{r}_i \Rightarrow A\mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i,$$

从而得证. 将上述讨论整理为如下定理:

定理 3.3. 若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个互异特征值, \mathbf{r}_i 是 λ_i 对应的特征向量, 则

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \mathbf{r}_1 & \cdots & e^{\lambda_n t} \mathbf{r}_n \end{pmatrix}$$

是 (3.1.1) 的基解矩阵.

证明. 由 (3.1.1) 可得

$$\lambda_i \mathbf{r}_i = A\mathbf{r}_i \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{\lambda_i t} \mathbf{r}_i) = \lambda_i e^{\lambda_i t} \mathbf{r}_i = A(e^{\lambda_i t} \mathbf{r}_i),$$

从而 $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \mathbf{r}_1 & \cdots & e^{\lambda_n t} \mathbf{r}_n \end{pmatrix}$ 是 (3.1.1) 的解矩阵. 由于 A 有 n 个互异特征值, 故 $\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_n$ 线性无关, 从而 $\det(\Phi(0)) = \det(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_n) \neq 0$, 由 Liouville 公式可得 $\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(0)) \cdot e^{\text{tr}(A)t} \neq 0$, 从而 $\Phi(t)$ 是 (3.1.1) 的基解矩阵. \square

例 3.3. $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x$.

解. 由于 $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)$, 因此 A 的特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$, 重数均为 1. 计算可得特征向量分别为 $\mathbf{r}_1 = (1, 1)^T, \mathbf{r}_2 = (3, 2)^T$, 从而基解矩阵为 $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}$, 通解为 $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{C} = (C_1e^{3t} + 3C_2e^{4t}, C_1e^{3t} + 2C_2e^{4t})^T$.

若矩阵 A 有复特征值, 则需要将复基解矩阵化为实基解矩阵, 如下例:

例 3.4. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

解. 计算可得两个特征值为 $\lambda_1 = 3 + 5i, \lambda_2 = 3 - 5i$, 对应的特征向量分别为 $\mathbf{r}_1 = (1, i)^T, \mathbf{r}_2 = (i, 1)^T$. 从而求得一个复基解矩阵 $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{pmatrix}$. 下面利用两种方法求实基解矩阵:

1. 一般而言, 对于基解矩阵 $\Phi(t) = Pe^{Jt}$, 成立 $\Phi(0) = P$, 从而 $e^{At} = \Phi(t)P^{-1} = \Phi(t)(\Phi(0))^{-1}$ 是实基解矩阵. 对于上例, $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, (\Phi(0))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, 从而实基解矩阵为

$$\Phi(t)(\Phi(0))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \cos 5t & e^{3t} \sin 5t \\ -e^{3t} \sin 5t & e^{3t} \cos 5t \end{pmatrix}.$$

2. 当矩阵阶数较大时, 求解逆矩阵较为困难, 可利用以下方法求解: 设 $\Phi(t) = (\cdots, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots)$, 其中 $\mathbf{x}_1 = \overline{\mathbf{x}_2} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, 则可以用 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) 替换 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, 从而获得实基解矩阵. 对于上例, 由于

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} e^{(3+5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 5t \\ -\sin 5t \end{pmatrix} + ie^{3t} \begin{pmatrix} \sin 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix} =: \mathbf{u} + i\mathbf{v}.$$

则一个实基解矩阵为 $\Phi^*(t) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{pmatrix}$.

例 3.5. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

解. 由 $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 5)$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$, 重数均为 1, 对应的特征向量为 $\mathbf{r}_1 = (1, -1, -1)^T, \mathbf{r}_2 = (1, -2, -1)^T, \mathbf{r}_3 = (3, -6, -2)^T$. 从而通解为

$$\mathbf{x}(t) = C_1e^{2t}(1, -1, -1)^T + C_2e^{3t}(1, -2, -1)^T + C_3e^{5t}(3, -6, -2)^T.$$

2. A 存在多重特征值. 首先给出核心定理:

定理 3.4. A 有 m 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, 相应的重数分别为 n_1, \cdots, n_m . 则方程组 (3.1.1) 有基解矩阵

$$\Phi(t) = (\cdots; e^{\lambda_1 t} \mathbf{R}_1^{(i)}(t), e^{\lambda_2 t} \mathbf{R}_2^{(i)}(t), \cdots, e^{\lambda_i t} \mathbf{R}_{n_i}^{(i)}(t); \cdots).$$

其中:

$$\mathbf{R}_j^{(i)}(t) = \mathbf{r}_{j,0}^{(i)} + \frac{t}{1!} \mathbf{r}_{j,1}^{(i)} + \cdots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \mathbf{r}_{j,n_i-1}^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i,$$

$\mathbf{r}_{j,0}^{(i)}$ 是方程组 $(A - \lambda_i I)^{n_i} \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ 的 n_i 个线性无关解, $\mathbf{r}_{j,l}^{(i)} = (A - \lambda_i I)^l \mathbf{r}_{j,0}^{(i)}$.

证明. 设 $\varphi_j(t) = e^{\lambda_i t} \mathbf{R}_j^{(i)}(t)$, 则

$$\frac{d}{dt}(\varphi_j^{(i)}(t)) = \lambda_i \varphi_j^{(i)}(t) + e^{\lambda_i t} \left(\mathbf{r}_{j,1}^{(i)} + \frac{t}{1!} \mathbf{r}_{j,2}^{(i)} + \cdots + \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \mathbf{r}_{j,n_i-2}^{(i)} \right),$$

由 $(A - \lambda_i I) \mathbf{r}_{j,n_i-1}^{(i)} = (A - \lambda_i I)^{n_i} \mathbf{r}_{j,0}^{(i)} = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{r}_{j,l}^{(i)} = (A - \lambda_i I)^l \mathbf{r}_{j,0}^{(i)}$ 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi_j^{(i)}(t)) &= \lambda_i \varphi_j^{(i)}(t) + e^{\lambda_i t} (A - \lambda_i I) \left(\mathbf{r}_{j,0}^{(i)} + \frac{t}{1!} \mathbf{r}_{j,1}^{(i)} + \cdots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \mathbf{r}_{j,n_i-1}^{(i)} \right) \\ &= \lambda_i \varphi_j^{(i)}(t) + e^{\lambda_i t} (A - \lambda_i I) \mathbf{R}_j^{(i)}(t) \\ &= A(e^{\lambda_i t} \mathbf{R}_j^{(i)}(t)) = A\varphi_j^{(i)}(t). \end{aligned}$$

从而 $\varphi_j^{(i)}(t)$ 是 (3.1.1) 的解, 从而 $\Phi(t)$ 是 (3.1.1) 的解矩阵. 下说明 $\Phi(t)$ 的列分量线性无关, 由 Liouville 公式, 只需证明 $\det(\Phi(0)) \neq 0$.

由线性空间知识易验证得, 对于 n 个常列向量生成的 n 维线性空间 V , $V_i := \{\mathbf{r} \in V \mid (A - \lambda_i I)^{n_i} \mathbf{r} = \mathbf{0}\}$ 是 A 对应线性映射 \mathcal{A} 的 n_i 维不变子空间, 且存在直和分解 $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$, 从而可以在 V_i 中选取线性无关的 $\{\mathbf{r}_{j,0}^{(i)}\}_{1 \leq j \leq n_i}$, 由直和分解得 $\Phi(0) = (\cdots; \mathbf{r}_{1,0}^{(i)}, \cdots, \mathbf{r}_{n_i,0}^{(i)}; \cdots)$ 是 V 的一组基, 故 $\det(\Phi(0)) \neq 0$. \square

由上述定理可总结出以下求基解矩阵的算法步骤:

1. 计算矩阵 A 的特征值;
2. λ_i 的重数为 n_i , 求解 $(A - \lambda_i I)^{n_i} \mathbf{r} = \mathbf{0}$ 的基础解系 $\{\mathbf{r}_{1,0}^{(i)}, \cdots, \mathbf{r}_{n_i,0}^{(i)}\}$;
3. 计算 $\mathbf{r}_{j,1}^{(i)}, \cdots, \mathbf{r}_{j,n_i-1}^{(i)}, 1 \leq j \leq n_i$;
4. 求解 $\varphi_j^{(i)}(t) = e^{\lambda_i t} \left(\mathbf{r}_{j,0}^{(i)} + \frac{t}{1!} \mathbf{r}_{j,1}^{(i)} + \cdots + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \mathbf{r}_{j,n_i-1}^{(i)} \right)$;
5. 通过基解矩阵求出通解.

例 3.6. $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$

解. 计算可得 $\det(A - \lambda I) = -(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$, 特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$, 重数分别为 1, 2. λ_1 对应的特征向量为 $\mathbf{r}_{1,0}^{(1)} = (0, 0, 1)^T$, 从而 $\varphi_1(t) = e^{-2t}(0, 0, 1)^T$.

由于 $(A - \lambda_2 I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 28 & 44 & 9 \end{pmatrix}$, 因此 $(A - \lambda_2 I)^2 \mathbf{r} = \mathbf{0}$ 的基础解系为 $(11, -7, 0)^T, (3, -6, 20)^T$.

取 $\mathbf{r}_{1,0}^{(2)} = (11, -7, 0)^T, \mathbf{r}_{1,1}^{(2)} = (A - \lambda_2 I) \mathbf{r}_{1,0}^{(2)} = (15, -30, 100)^T$, 从而 $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t} \mathbf{r}_{1,0}^{(2)} + t e^{\lambda_2 t} \mathbf{r}_{1,1}^{(2)} =$

$e^t(7+15t, -7-30t, 100t)^T$; 取 $\mathbf{r}_{2,0}^{(2)} = (3, -6, 20)^T$, 则 $\mathbf{r}_{2,1}^{(2)} = (A - \lambda_2 I)\mathbf{r}_{2,0}^{(2)} = (0, 0, 0)^T$, 因此 $\varphi_3(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{r}_{2,0}^{(2)} = e^t(3, -6, 20)^T$. 故方程通解为

$$\mathbf{x}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_2(11+15t)e^t + 3C_3e^t \\ -C_2(7+30t)e^t - 6C_3e^t \\ C_1e^{-2t} + 100C_2te^t + 20C_3e^t \end{pmatrix}.$$

推论 3.2. 方程组 (3.1.1) 的任一解 $\mathbf{x}(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ 的充分必要条件为 $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, λ 为 A 的任一特征值.

证明. 充分性: 任取特征值 λ , 由于 $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, 因此 $\exists \alpha > 0$, $\operatorname{Re}(\lambda) < -2\alpha$. 设 $\Phi(t)$ 的任一列为 $e^{\lambda t}\mathbf{P}(t)$, 其中 $\mathbf{P}(t)$ 为多项式向量. 从而 $\exists M > 0$, s.t. $|\mathbf{P}(t)| \leq Me^{\alpha t}$, 从而

$$|e^{\lambda t}\mathbf{P}(t)| \leq e^{\operatorname{Re}(\lambda)t}|\mathbf{P}(t)| \leq Me^{-\alpha t} \rightarrow 0 \Rightarrow \|\Phi(t)\| \rightarrow 0,$$

从而 $|\mathbf{x}(t)| = |\Phi(t)\mathbf{C}| \rightarrow 0$.

必要性: 若任一解 $\mathbf{x}(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$, 故由 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Phi(t)\| = 0$ 可得对 $\Phi(t)$ 的任何一列 $e^{\lambda t}\mathbf{P}(t)$ 都有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{\lambda t}\mathbf{P}(t)| = 0 \Rightarrow |e^{\lambda t}| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \rightarrow 0$, 从而 $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. \square

3.2 线性微分方程组的一般理论

本节考虑线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t). \quad (3.2.1)$$

的一般理论. 其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. 当 $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{0}$ 时, 化为齐次形式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}. \quad (3.2.2)$$

1. 叠加原理. 对于齐次方程组 (3.2.2), 叠加原理依然成立, 即如果

$$\varphi_1(t) = (\varphi_{11}(t), \dots, \varphi_{n1}(t))^T, \dots, \varphi_m(t) = (\varphi_{1m}(t), \dots, \varphi_{nm}(t))^T$$

是 (3.2.2) 的 m 个解, 则 $\varphi_k(t) (1 \leq k \leq m)$ 的线性组合是 (3.2.2) 的解.

2. 线性相关性. 由叠加原理可得 (3.2.2) 的解集合构成线性空间.

3. 齐次方程的解空间维数. 这是本节理论的重点内容, 核心定理如下:

定理 3.5. 解空间 $S = \left\{ \mathbf{x}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n: \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}, t \in I \subset \mathbb{R} \right\}$ 是 n 维线性空间.

证明. 线性空间性质显然, 下证明 $\dim S = n$, 只需证 $S \cong \mathbb{R}^n$. 利用解的存在唯一性定理 (见 4.1 节), 任意固定 $t_0 \in I$, $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, S 中存在唯一元素 $\mathbf{x}(t)$ 使得 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 即存在映射 $\mathcal{H}: \mathbb{R}^n \rightarrow S$, $\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}(t)$. 下说明 \mathcal{H} 是同构映射.

任取 $\mathbf{x}(t) \in S$, $\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ 且 $\mathcal{H}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{x}(t) \Rightarrow \mathcal{H}$ 为满射. 由存在唯一性定理可得 \mathcal{H} 是单射. 另一方面, 由叠加原理和解的唯一性可得 $\mathcal{H}(\alpha\mathbf{x}_0 + \beta\mathbf{x}_0^*) = \alpha\mathcal{H}(\mathbf{x}_0) + \beta\mathcal{H}(\mathbf{x}_0^*)$, 同构性质证毕. 从而 $S \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim S = n$. \square

推论 3.3. 齐次方程组 (3.2.2) 有 n 个线性无关解 $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$, 从而 (3.2.2) 的通解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(t).$$

下面我们证明上节用到的 Liouville 公式, 首先阐述相关定义.

定义 3.3 (Wronsky 行列式). 给定 n 个 n 维向量值函数 $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$, 称

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

的行列式 $W(t)$ 为 $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ 的 **Wronsky 行列式**.

定理 3.6 (Liouville 公式). 方程组 (3.2.2) 的任意 n 个解的 Wronsky 行列式 $W(t)$ 满足 **Liouville 公式**:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr}(A(s)) ds},$$

其中 $\operatorname{tr}(\cdot)$ 为矩阵的迹.

证明. 设 $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ 为 (3.2.2) 的 n 个解, $W(t)$ 的定义式为 $W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}$, 代

入方程可得

$$\frac{d\varphi_k(t)}{dt} = A(t)\varphi_k(t) \Rightarrow \frac{d\varphi_{kl}(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{kj}(t)\varphi_{jl}(t).$$

由行列式的微分性质得

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{d\varphi_{kl}(t)}{dt} & \cdots & \frac{d\varphi_{kn}(t)}{dt} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{kj}(t)\varphi_{j1}(t) & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{kj}(t)\varphi_{jn}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(对任意 $j \neq k$, 以 $-a_{kj}(t)$ 乘以 j 行加到 k 行)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{kk}(t)\varphi_{k1}(t) & \cdots & a_{kk}(t)\varphi_{kn}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^n a_{kk}(t)W(t) = \operatorname{tr}(A(t))W(t).
\end{aligned}$$

即 $\frac{dW(t)}{dt} = \operatorname{tr}(A(t))W(t) \Rightarrow W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr}(A(s))ds}$. □

推论 3.4. 若 $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ 是 (3.2.2) 的解, 则

$$\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\} \text{线性相关} \Leftrightarrow W(t) \equiv 0, \forall t \in I \Leftrightarrow W(t_0) = 0, \exists t_0 \in I,$$

$$\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\} \text{线性无关} \Leftrightarrow W(t) \not\equiv 0, \forall t \in I \Leftrightarrow W(t_0) \neq 0, \exists t_0 \in I.$$

证明. $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ 线性相关 $\Leftrightarrow W(t) = \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = 0, \forall t \in I$. 若存在 $t_0 \in I$ 使得 $W(t_0) = 0$, 则由 Liouville 公式可得 $W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr}(A(s))ds} \equiv 0, \forall t \in I$. 反之显然. 对于线性无关可类似证明. □

4. 非齐次方程的通解结构. 本部分直接给出定理.

定理 3.7. 如果 $\Phi(t)$ 是齐次方程 (3.2.2) 的一个基解矩阵, $\varphi^*(t)$ 是 (3.2.1) 的一个特解, 则 (3.2.2) 的任一解可表示为

$$\varphi(t) = \Phi(t)C + \varphi^*(t).$$

推论 3.5. 解空间 $M = \left\{ \mathbf{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t) \neq \mathbf{0} \right\}$ 满足如下性质:

1. M 不是线性空间, M 是 n 维线性流形或仿射空间.
2. M 中任何元素可由 $n+1$ 个线性无关解的线性组合表示.

5. 非齐次方程的特解与常数变易法. 设 (3.2.1) 的一个特解为 $\mathbf{x}^*(t) = \Phi(t)C(t)$, 其中 $\Phi(t)$ 是齐次方程 (3.2.2) 的一个基解矩阵. 代入 (3.2.1) 可得

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(\Phi(t)C(t)) = \Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) = A(t)\Phi(t)C(t) + \mathbf{f}(t).$$

从而有 $\Phi(t)C'(t) = \mathbf{f}(t)$. 由 $\Phi(t)$ 可逆得 $C'(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)$, 从而

$$C(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds.$$

将上述讨论总结为以下定理:

定理 3.8. 设 $\Phi(t)$ 是 (3.2.2) 的一个基解矩阵, 则 (3.2.1) 的通解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{C} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds.$$

满足初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds.$$

例 3.7. $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$

解. 首先求得齐次方程的一个基解矩阵为 $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{pmatrix}$, 则 $\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{2e^{4t}} \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ e^t & e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix}$. 代入公式可得一个特解为 $\boldsymbol{x}^*(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - 2e^{2t} + e^t \end{pmatrix}$, 从而得通解.

例 3.8. 对二阶微分方程 $x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$, 若 $\varphi(t)$ 是方程的一个非零解, 求它的通解.

解. 将原方程化为关于 x 和 x' 的线性方程组:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} =: A(t) \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}.$$

设 $x(t)$ 是异于 $\varphi(t)$ 的一个解, 由 Liouville 公式可得

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & x(t) \\ \varphi'(t) & x'(t) \end{vmatrix} = \varphi(t)x'(t) - \varphi'(t)x(t) = W(0)e^{-\int_0^t p(s)ds} =: Ce^{-\int_0^t p(s)ds}.$$

用 $\frac{1}{\varphi^2(t)}$ 乘以上式可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x(t)}{\varphi(t)} \right) = \frac{C}{\varphi^2(t)} e^{-\int_0^t p(s)ds} \Rightarrow \frac{x(t)}{\varphi(t)} = \int_0^t \frac{C}{\varphi^2(s)} e^{-\int_0^s p(u)du} ds + \tilde{C}.$$

取 $C = 1, \tilde{C} = 0$ 得 $x(t) = \varphi(t) \int_0^t \frac{1}{\varphi^2(s)} e^{-\int_0^s p(u)du} ds$. 由 $W(t) \neq 0$ 得 $\{x(t), \varphi(t)\}$ 线性无关, 从而方程通解为

$$C_1\varphi(t) + C_2\varphi(t) \int_0^t \frac{1}{\varphi^2(s)} e^{-\int_0^s p(u)du} ds.$$

3.3 二阶变系数线性微分方程与 Bessel 方程

对于二阶变系数线性微分方程 $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$, 可以作变换 $y = \frac{x'}{x}$ 化为 $y' + y^2 + p(t)y + q(t) = 0$, 这是一个 Riccati 方程, 求解难度极大. 因此二阶变系数线性微分方程的通解求解也极为困难. 一般情况下, 可以考虑方程的**广义幂级数解**:

定理 3.9. 设 $p(t), q(t)$ 在 t_0 附近可展开为 $t - t_0$ 的幂级数, 且 $p^2(t_0) + q^2(t_0) \neq 0$, 则方程 $(t - t_0)^2 x'' + (t - t_0)p(t)x' + q(t)x = 0$ 在 t_0 邻域内有收敛的广义幂级数解 $x = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(t - t_0)^{k+\rho}$, 其中 C_k, ρ 为常数且 $C_0 \neq 0$.

定理的证明略去, 可参考丁同仁 ODE 的相关章节. 以下我们考虑一类特殊的二阶变系数线性微分方程: Bessel 方程.

定义 3.4. 形如 $t^2 x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0$ 的方程称为 **Bessel 方程**, 其中 $\nu \in \mathbb{R}^+$.

为了求解 Bessel 方程, 考虑广义幂级数解 $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{k+\rho}$, C_k, ρ 为待定常数. 则

$$x' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(k + \rho)t^{k+\rho-1}, \quad x'' = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(k + \rho)(k + \rho - 1)t^{k+\rho-2}.$$

代入 Bessel 方程可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((k + \rho)^2 - \nu^2)C_k t^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{k+\rho+2} = 0.$$

首先比较最低次幂 t^ρ 的系数可得 $(\rho^2 - \nu^2)C_0 = 0$, 由 $C_0 \neq 0$ 可得 $\rho_1 = \nu, \rho_2 = -\nu$.

1. $\rho = \rho_1 = \nu$. 此时令 $x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{k+\nu}$, 有

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((k + \nu)^2 - \nu^2)C_k t^{k+\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{k+\nu+2} = 0.$$

比较各项系数可得

$$t^\nu : (\nu^2 - \nu^2)C_0 = 0.$$

$$t^{\nu+1} : ((1 + \nu)^2 - \nu^2)C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$t^{\nu+k} : ((k + \nu)^2 - \nu^2)C_k + C_{k-2} = 0 \Rightarrow C_k = -\frac{C_{k-2}}{k(k + 2\nu)}.$$

从而得到了系数项的递推公式. 计算可得

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k C_0}{2^{2k} k! (k + \nu) \cdots (1 + \nu)}, \quad C_{2k+1} = 0.$$

整理可得

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k C_0 \Gamma(\nu + 1)}{2^{2k} k! \Gamma(k + \nu + 1)}, \quad x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k C_0 \Gamma(\nu + 1)}{2^{2k} k! \Gamma(k + \nu + 1)} t^{2k+\nu}.$$

其中 $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt, s > 0$ 满足 $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$. 取 $C_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$ 可得广义幂级数解

$$x_1(t) = J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

上述解 $J_\nu(t)$ 称为**第一类 ν 阶 Bessel 函数**, 易得

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} J_\nu(t) = \begin{cases} 0, & \nu > 0 \\ 1, & \nu = 0 \end{cases}$$

2. $\rho = \rho_2 = -\nu < 0$. 此时需要对不同的 ν 分别讨论.

(a) $2\nu \notin \mathbb{Z}$, 由系数递推公式可得

$$C_k = -\frac{C_{k-2}}{k(k-2\nu)}, \quad k \geq 2, \quad C_0 \neq 0.$$

类似可得广义幂级数解

$$J_{-\nu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\nu}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} J_{-\nu}(t) = +\infty.$$

从而 $J_\nu(t)$ 与 $J_{-\nu}(t)$ 线性无关, Bessel 方程的通解为

$$x(t) = C J_\nu(t) + D J_{-\nu}(t).$$

(b) $2\nu = 2m + 1$ 为奇数, 此时令 $C_{2m+1} = 0$ 仍可得 $J_{-\nu}(t)$.

(c) $\nu \in \mathbb{Z}$, 首先证明 $J_{-\nu}(t) = (-1)^m J_\nu(t)$, 从而 $J_\nu(t)$ 和 $J_{-\nu}(t)$ 线性相关.

证明. 由复变函数知识可得负整数是 Γ 函数的一级极点, 从而

$$\begin{aligned} J_{-\nu}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\nu} = \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\nu} \\ &= \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-\nu)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\nu} = (-1)^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+\nu)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2l+\nu} = (-1)^\nu J_\nu(t). \end{aligned}$$

□

经研究可得另一线性无关解可用 $J_\nu(t) \int J_\nu^{-2}(t) e^{-\int \frac{dt}{t}}$ 表示, 过于复杂, 需要考虑其他求解方法.

(i) 当 $\nu \notin \mathbb{Z}$ 时, 令 $N_\nu(t) = \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} J_\nu(t) - \frac{1}{\sin \nu\pi} J_{-\nu}(t)$, 该函数称为**第二类 ν 阶 Bessel 函数**或 **ν 阶 Neumann 函数**.

(ii) $\nu = m \in \mathbb{Z}$ 时, 令 $N_m(t) = \lim_{\nu \rightarrow m} N_\nu(t)$. 由洛必达法则可得

$$\begin{aligned} N_m(t) &= \frac{2}{\pi} J_m(t) \left(\ln \frac{t}{2} + \gamma \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-m} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\sum_{l=0}^{m+k-1} \frac{1}{l+1} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l+1} \right) \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+m}. \end{aligned}$$

其中 $\gamma \approx 0.5772$ 为 Euler 常数 (上式详细推导可参考梁昆森 “数学物理方法” 相关章节). 易得 $\lim_{t \rightarrow 0^+} N_m(t) = -\infty$, 从而 $N_m(t)$ 与 $J_m(t)$ 线性无关, 从而 Bessel 方程的通解为

$$x(t) = C J_\nu(t) + D N_\nu(t), \quad \forall \nu > 0.$$

以下, 我们列举 Bessel 函数 $J_\nu(t)$ 的相关性质.

1. 递推公式:

$$(x^\nu J_\nu)' = x^\nu J_{\nu-1}, \quad (x^{-\nu} J_\nu)' = -x^{-\nu} J_{\nu+1} \quad (J_0' = -J_1).$$

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n (x^\nu J_\nu) = x^{\nu-n} J_{\nu-n}, \quad \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n (x^{-\nu} J_\nu) = (-1)^n x^{-(\nu+n)} J_{\nu+n}.$$

2. 半整数阶 Bessel 函数:

$$J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(x) = \begin{cases} (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right), & + \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right), & - \end{cases}$$

推论: 半整数阶第一 (二) 类 Bessel 函数都是初等函数.

3. 母函数:

$$e^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \zeta^n, \quad \zeta \neq 0.$$

4. 整数阶 Bessel 函数的复积分形式与实积分形式:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})}}{\zeta^{n+1}} dz \quad (\text{对母函数作 Laurent 展开}),$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta, \quad n \geq 0 \quad (\text{取 } \zeta = e^{i\theta}).$$

此时观察可得

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x), \quad |J_n(x)| \leq 1, \quad \forall x \geq 0.$$

5. Bessel 函数的渐进表示: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-\frac{2}{3}}),$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-\frac{2}{3}}).$$

由渐进表示可得, 当 x 充分大时两类 Bessel 函数相位相差 $\frac{\pi}{2}$ 且均衰减震荡; 两个函数在正半轴上有无穷多个零点.

6. Bessel 函数的零点分布:

(a) $\nu > -1$ 时, $J_\nu(x)$ 与 $N_\nu(x)$ 在 x 轴上有无穷个对称的零点.

(b) $\nu > -1$ 时 $J_\nu(x)$ 的非零零点均为一级的, $\nu = \pm n$ 时 0 为 $J_\nu(x)$ 的 n 级零点.

(c) $J_\nu(x)$ 与 $J_{\nu+1}(x)$ 的正零点两两相间且前者的第一个正零点距离原点更近.

(d) $J'_\nu(x)$ 和 $J_\nu(x) + hxJ'_\nu(x)$ ($h \in \mathbb{R}$) 在 x 轴上有无穷多个零点.

3.4 Sturm-Liouville 边值问题

首先对 Fourier 级数展开进行相关回顾. 在一定条件下, 任何周期为 2π 的函数 $f(x)$, 都可以展开成 Fourier 级数, 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中 $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, \dots)$ 称为 $f(x)$ 的 **Fourier 系数**. 利用三角函数系的正交性可得

$$a_m = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \quad m = 0, 1, \dots$$

$$b_m = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

我们将满足边界条件的 ODE 问题称为**边值问题**. 若 ODE 中含有参数 λ , 那么求参数 λ 使边值问题有非零解的问题称为**特征值问题**, 满足条件的参数 λ 称为**特征值**, 对应的解称为**特征函数**. 本节考虑以下最常见的 Sturm-Liouville 特征值问题.

定义 3.5 (S-L 特征值问题). 称二阶线性微分方程

$$\frac{d}{dt} \left(k(x) \frac{dX}{dx} \right) - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x). \quad (3.4.1)$$

为 **Sturm-Liouville 型方程**. 称特征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dX}{dx} \right) - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0 \\ \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0, \quad \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 \end{cases} \quad (3.4.2)$$

为 **Sturm-Liouville 型特征值**.

事实上, Sturm-Liouville 型特征值问题是一个自共轭算子的特征值问题. 我们引入以下加权内积空间: 定义实函数空间

$$\mathcal{L}_\rho^2[a, b] = \left\{ f(x) : \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx < +\infty \right\},$$

以及其上的加权内积

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx.$$

函数空间 $\mathcal{L}_\rho^2[a, b]$ 中所有二阶连续可微, 且满足边界条件

$$\alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0, \quad \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0$$

的函数全体构成一个子空间, 记作 \mathcal{H} . 在函数空间上定义算子

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{d}{dx} \right) + \frac{q(x)}{\rho(x)},$$

则 \mathcal{L} 为自共轭算子, 即 $\forall f, g \in \mathcal{H}$, 满足

$$\langle \mathcal{L}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{L}g \rangle.$$

事实上, 应用分部积分可得

$$\langle \mathcal{L}f, g \rangle - \langle f, \mathcal{L}g \rangle = -k(x)(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) \Big|_a^b = 0,$$

自共轭性质得证. 利用自共轭算子 \mathcal{L} 可将 Sturm-Liouville 特征值问题转化为以下形式:

$$\begin{cases} \mathcal{L}X(x) = \lambda X(x) \\ \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0, \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

在线性代数中, 对称矩阵的特征值都是实数, 且不同特征值对应的特征向量相互正交, 可逆矩阵的特征向量构成正交基. 自共轭算子的特征值问题的特征值和特征函数的性质可类比矩阵得到, 这就是以下 Sturm-Liouville 定理的核心内容.

常点情形. 设 $k(x) \in C^1[a, b]$, $q(x), \rho(x) \in C[a, b]$, 且在 $[a, b]$ 上 $k(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2$. 则称特征值问题 (3.4.2) 为**常点情形的 Sturm-Liouville 型特征值问题**. 针对常点情形, 有如下 **Sturm-Liouville 定理**:

定理 3.10 (Sturm-Liouville 定理).

1. 非负性: 所有特征值 λ 均为非负实数.
2. 可数性: 全体特征值组成无穷数列

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

对应于每个特征值 λ_n , 只有一个线性独立的特征函数, 组成对应的特征函数系

$$X_1(x), X_2(x), \cdots, X_n(x), \cdots$$

3. 正交性: 不同特征值对应的特征函数互相加权正交, 即对于任意 $n \neq m$, 有

$$\langle X_n, X_m \rangle = \int_a^b \rho(x) X_n(x) X_m(x) dx = 0.$$

4. 完备性: 特征函数系 $\{X_n(x) \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 构成函数空间 $\mathcal{L}_\rho^2[a, b]$ 中的完备正交基, 即 $\mathcal{L}_\rho^2[a, b]$ 中的任意函数 $f(x)$ 可以按特征函数系 $\{X_n(x) \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 展开成广义 Fourier 级数.

Sturm-Liouville 的详细证明可以参考陈祖墀“偏微分方程”的相关章节. 定理中广义 Fourier 级数的敛散性分为以下两种形式:

1. 绝对一致收敛: 当 $f \in \mathcal{H}$ 时, 其对应的广义 Fourier 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x), \quad C_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \rho(x) f(x) X_n(x) dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \rho(x) X_n^2(x) dx}$$

在 $[a, b]$ 上绝对一致收敛到函数 $f(x)$ 本身.

2. 均方收敛: 当 $f(x) \in \mathcal{L}_\rho^2[a, b]$ 时, 其对应的广义 Fourier 级数在均方意义下收敛到函数 $f(x)$, 即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(x) \left| f(x) - \sum_{n=1}^N C_n X_n(x) \right|^2 dx = 0.$$

周期性条件. 设 $k(x) \in C^1[a, b]$, $k(a) = k(b)$, $q(x), \rho(x) \in C[a, b]$, 且在 $[a, b]$ 上 $k(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, 则称特征值问题 (3.4.2) 为**周期性条件下的 Sturm-Liouville 型特征值问题**. 周期性条件下的 S-L 特征值问题的特征值和特征函数具有类似于常点情形的性质, 但在周期条件下, 对应每个非零特征值, 存在两个相互正交的特征函数 (简并现象).

例 3.9. 求 S-L 特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

的特征值和特征函数.

解. 由 Sturm-Liouville 定理可得特征值 $\lambda \geq 0$.

1. $\lambda = 0$, 此时方程通解为 $X(x) = ax + b$, 由 $X(0) = X(1) = 0$ 可得 $a = b = 0$, 与特征函数非零矛盾.
2. $\lambda > 0$, 设 $\lambda = \omega^2$, $\omega > 0$. 则方程化为 $X''(x) + \omega^2 X(x) = 0$, 实通解为 $X(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. 代入边界条件 $X(0) = X(1) = 0$ 可得 $C_1 = C_2 \sin \omega = 0$, 由于 C_1, C_2 不能同时为零, 故 $\omega = m\pi (m \in \mathbb{Z}^+)$.

综上可得特征值为 $\lambda_m = m^2 \pi^2$, 特征函数为 $X_m(x) = \sin(m\pi x)$, $m = 1, 2, \dots$.

第四章 常微分方程的基本理论

4.1 初值问题解的存在唯一性

存在唯一性定理

本节考虑以下初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

以下 Peano 定理给出了 (4.1.1) 解的存在条件, 这里不予证明.

定理 4.1 (Peano 定理). 设 $f(t, x)$ 在矩形区域 $\bar{R} : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b$ 上连续, 那么在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上存在连续可微解 $x = \varphi(t)$, 这里 $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, $M = \sup_{(t, x) \in \bar{R}} |f(t, x)|$.

定义 4.1 (Lipschitz 条件). 若向量值函数 $f(t, x)$ 在 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上满足不等式: $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$, 其中 $L \geq 0$ 为常数, 则称 f 在 D 上对 x 满足 **Lipschitz 条件** (或称**李氏条件**), L 称为 **Lipschitz 常数** (或**李氏常数**). 也简称作 L-条件和 L-常数.

定理 4.2 (Picard 定理, 解的局部存在唯一性定理). 若 $f(t, x)$ 在 $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ 上连续, 且对于 x 满足 L-条件, 则初值问题 (4.1.1) 在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上存在唯一的连续可微解 $x(t)$, 其中 $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, $M = \sup_{(t, x) \in D} |f(t, x)|$.

这是本节的核心定理, 将利用构造 Picard 序列和压缩映射原理两种方法分别给出证明.

方法一. 逐次逼近法

证明. 分别证明存在性和唯一性.

1. 存在性: 易证初值问题 (4.1.1) 等价于如下积分方程:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (4.1.2)$$

构造 Picard 序列如下: $x_0(t) = x_0$, $x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{k-1}(s)) ds$, $k \geq 1$. 由已知条件得 $x_k \in C^1(D)$ 且有如下估计:

$$|x_k(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x_{k-1}(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b,$$

因此 $(t, \mathbf{x}_k(t)) \in D$. 以下证明上述 Picard 序列在区间 $I := [t_0 - h, t_0 + h]$ 上一致收敛于可微函数 $\varphi(t)$. 由于 $\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j-1}(t))$, 只需证 $\sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j-1}(t))$ 在 I 上一致收敛. 首先利用归纳法证明如下不等式:

$$|\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_{k-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|t - t_0|)^k}{k!}, \quad \forall t \in I, \forall k \geq 1. \quad (4.1.3)$$

其中 L 为 \mathbf{f} 对应的 L -常数.

(a) $k = 1$, 则有

$$|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0| = \left| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_0) ds \right| \leq M|t - t_0|,$$

此时 (4.1.3) 式成立.

(b) 假设 (4.1.3) 对 $k \geq 1$ 成立, 下证明 (4.1.3) 对 $k + 1$ 也成立.

(c) 由归纳假设可得

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_k(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_{k-1}(s))) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_k(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_{k-1}(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |\mathbf{x}_k(s) - \mathbf{x}_{k-1}(s)| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|s - t_0|)^k}{k!} ds \\ &= \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|t - t_0|)^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

从而 (4.1.3) 对 $k + 1$ 也成立, 式 (4.1.3) 证毕. 由 $|t - t_0| \leq h$ 可得

$$|\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_{k-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^k}{k!} = \frac{ML^{k-1}h^k}{k!}.$$

因此

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j-1}(t)) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j-1}(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{ML^{j-1}h^j}{j!} = \frac{M}{L}(e^{Lh} - 1).$$

由 Weierstrass 判别法可得函数项级数 $\sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j-1}(t))$ 一致收敛. 对递推式

$$\mathbf{x}_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_k(s)) ds$$

两端取 $k \rightarrow +\infty$ 可得 $\varphi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \varphi(s)) ds$, 故 $\varphi(t)$ 是积分方程 (4.1.2) 的解, 进而初值问题 (4.1.1) 的解, 存在性证毕.

2. 唯一性: 若存在另外一个解 $\psi(t)$, 设 $J = [t_0 - d, t_0 + d]$ 为 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的共同的解区间, 其中 $0 < d \leq h$, 则由 (4.1.2) 可得

$$\begin{aligned} |\psi(t) - \varphi(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, \psi(s)) - f(s, \varphi(s))) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \psi(s)) - f(s, \varphi(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |\psi(s) - \varphi(s)| ds \\ &\leq LK|t - t_0|. \end{aligned}$$

其中 $K = \sup_{t_0 \leq s \leq t} |\psi(s) - \varphi(s)| ds, t \in J$. 因此

$$|\psi(t) - \varphi(t)| \leq L \int_{t_0}^t LK|s - t_0| ds = K \cdot \frac{(L|t - t_0|)^2}{2!}.$$

反复迭代可得

$$|\psi(t) - \varphi(t)| \leq K \cdot \frac{(L|t - t_0|)^N}{N!} \leq K \cdot \frac{(Ld)^N}{N!}, \forall N \in \mathbb{N}^*.$$

令 $N \rightarrow +\infty$, 则 $K \cdot \frac{(Ld)^N}{N!} \rightarrow 0$, 因此 $|\psi(t) - \varphi(t)| = 0 \Rightarrow \psi(t) = \varphi(t)$. 唯一性证毕.

□

注: 判断 L-条件的常用充分条件包括:

1. $f(t, \mathbf{x})$ 在 D 上关于 \mathbf{x} 的梯度矩阵 $\nabla_{\mathbf{x}} f(t, \mathbf{x})$ 存在且有界;
2. $\nabla_{\mathbf{x}} f(t, \mathbf{x})$ 连续.

也可以用另一方法证明唯一性, 首先证明一个重要的不等式:

引理 4.1 (Gronwall 不等式). 设 $I \subset \mathbb{R}$, $a(t) \in C(I)$ 且 $a(t) > 0$, $g(t) \in C(I)$ 且 $g(t)$ 非负, 常数 $C \geq 0$. 若

$$g(t) \leq C \pm \int_{t_0}^t a(s)g(s)ds = \begin{cases} +, & t \geq t_0 \\ -, & t < t_0 \end{cases}$$

则 $g(t) \leq Ce^{\pm \int_{t_0}^t a(s)ds}$.

证明. 仅考虑 $t \geq t_0$ 的情况. 设 $\mu(t) = C + \int_{t_0}^t a(s)g(s)ds \geq 0$, 则

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = a(t)g(t) \leq a(t)\mu(t) \Rightarrow \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} \leq a(t)dt,$$

两边积分可得 $\mu(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$, 从而 $g(t) \leq \mu(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$. □

唯一性的另一证明如下:

证明. 若存在两个解 $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$, $J = [t_0 - d, t_0 + d]$ 为两个解的共同存在区间, 由 L-条件可得

$$|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| \leq L \int_{t_0}^t |\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_2(s)| ds.$$

在 Gronwall 不等式中, 取 $g(t) = |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|$, $a(t) \equiv L$, $C = 0$, 则 $|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| \leq Ce^{\pm \int_{t_0}^t a(s) ds} = 0$, 故 $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$. \square

方法二. 压缩映射原理

定理 4.3 (压缩映射原理). 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个完备度量空间, 映射 $\mathcal{A}: X \rightarrow X$ 满足以下压缩性质: $\exists \theta \in (0, 1)$, $\forall x, y \in X$, $\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq \theta \|x - y\|$, 则 \mathcal{A} 在 X 内存在唯一的不动点, 即

$$\exists! x \in X, \text{ s.t. } \mathcal{A}x = x.$$

证明.

1. 存在性: 任取 $x_0 \in X$, 构造点列 $\{x_k\} \subset X$ 满足: $x_{k+1} = \mathcal{A}x_k$, $k \geq 0$. 有条件可得

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|\mathcal{A}x_k - \mathcal{A}x_{k-1}\| \leq \theta \|x_k - x_{k-1}\| \leq \theta^2 \|x_{k-1} - x_{k-2}\| \leq \cdots \leq \theta^k \|x_1 - x_0\|.$$

由三角不等式可得

$$\|x_{k+m} - x_k\| \leq \sum_{j=1}^m \|x_{k+m+1-j} - x_{k+m-j}\| \leq \sum_{j=1}^m \theta^{k+m-j} \|x_1 - x_0\|, \quad \forall m \geq 1.$$

从而 $\|x_{k+m} - x_k\| \rightarrow 0$, 故 $\{x_k\}$ 是 Cauchy 列, 设 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$. 由 $(X, \|\cdot\|)$ 完备可得 $x \in X$. 且由 \mathcal{A} 连续可得 $\mathcal{A}x = x$, 存在性证毕.

2. 唯一性: 设 x_1, x_2 为 \mathcal{A} 的不动点, 则 $x_j = \mathcal{A}x_j$, $j = 1, 2$. 故

$$\|x_1 - x_2\| = \|\mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2\| \leq \theta \|x_1 - x_2\| \Rightarrow (1 - \theta) \|x_1 - x_2\| \leq 0.$$

由 $1 - \theta > 0$, $\|x_1 - x_2\| \geq 0$ 可得 $\|x_1 - x_2\| = 0$, 因此 $x_1 = x_2$. \square

利用压缩映射原理证明 Picard 定理:

证明. 令 $X = \{\mathbf{x}(t) \in (C(I))^n : |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| \leq b\}$, 其中 I 为闭区间. 在 X 上定义度量

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \max_{t \in I} \{|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| e^{-L|t-t_0|}\}.$$

其中 L 为 \mathbf{f} 关于 \mathbf{x} 的 L-常数, 度量 $\|\cdot\|$ 的良定性和 $(X, \|\cdot\|)$ 的完备性易证. 定义映射 $\mathcal{A}: X \rightarrow X$, 满足

$$(\mathcal{A}\mathbf{x})(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds, \quad \forall t \in I.$$

由 $\mathbf{x}(t) \in (C(I))^n$ 可得 $(\mathcal{A}\mathbf{x})(t) \in (C(I))^n$, 且

$$|(\mathcal{A}\mathbf{x})(t) - \mathbf{x}_0| = \left| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b.$$

从而 $\mathcal{A}\mathbf{x} \in X$, 映射的良好性成立. 下验证 \mathcal{A} 的压缩映射性质. $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$, 则 $(\mathcal{A}\mathbf{x}_1)(t) - (\mathcal{A}\mathbf{x}_2)(t) = \int_{t_0}^t (\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_2(s))) ds$, 因此

$$\begin{aligned} e^{-L|t-t_0|} |(\mathcal{A}\mathbf{x}_1)(t) - (\mathcal{A}\mathbf{x}_2)(t)| &\leq L \int_{t_0}^t e^{-L|t-t_0|} |\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_2(s)| ds \\ &= L \int_{t_0}^t e^{-L|t-s|} \cdot e^{-L|s-t_0|} |\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_2(s)| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t e^{-L|t-s|} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| ds \\ &= (1 - e^{-L|t-t_0|}) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \leq \theta \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \end{aligned}$$

其中 $\theta := 1 - e^{-Lh} \in (0, 1)$, 因此 $\|\mathcal{A}\mathbf{x}_1 - \mathcal{A}\mathbf{x}_2\| \leq \theta \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$. 压缩性质证毕. 由压缩映射原理可得 $\exists! \mathbf{x} \in X$, s.t. $\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}$, i.e., $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds$. \square

一般而言, L-条件较强, 大部分函数不能满足, 因此需要对 L-条件进行适当削弱, 即以下 **Osgood 条件** (或称 O-条件):

定义 4.2 (Osgood 条件). 若向量值函数 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 在 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上满足不等式: $|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)| \leq F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$, 其中 F 是非负函数, 且满足

$$\exists \delta > 0, \text{ s.t. } \int_0^\delta \frac{dr}{F(r)} = +\infty,$$

则称 \mathbf{f} 满足 **Osgood 条件**.

定理 4.4 (Osgood 定理). 设 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 在 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 内对 \mathbf{x} 满足 O-条件, 则 $\forall (t_0, \mathbf{x}_0) \in D$, 初值问题
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
 存在唯一解.

证明. 由 Peano 定理可推得存在性, 下证明唯一性. 假设初值问题存在两个解 $x_1(t), x_2(t)$ 且 $\exists t_1$, s.t. $x_1(t_1) \neq x_2(t_1)$. 不失一般性, 设 $x_1(t_1) > x_2(t_1)$, $t_1 > t_0$. 令 $r(t) = x_1(t) - x_2(t)$, 则 $r(t) \in C[t_0, t_1]$. 取 $\bar{t} = \sup\{t \in [t_0, t_1] \mid r(t) = 0\}$, 则 $r(t) > 0, \forall t \in (\bar{t}, t_1]$ (事实上, 由连续性可得 $\bar{t} < t_1$). 由 O-条件可得 $\forall t \in (\bar{t}, t_1]$,

$$|r'(t)| = |x_1'(t) - x_2'(t)| = |\mathbf{f}(t, x_1) - \mathbf{f}(t, x_2)| \leq F(|x_1 - x_2|) =: F(r) \Rightarrow \frac{dr}{F(r)} \leq dt.$$

从 \bar{t} 到 t_1 积分可得

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} \leq t_1 - \bar{t} < +\infty,$$

其中 $r_1 = x_1(t_1) - x_2(t_1) > 0$, 与发散性矛盾. 故 $x_1(t) = x_2(t)$. \square

解的延伸定理

Picard 定理中解的存在唯一区间长度依赖于区域直径, 但区域 D 的范围增大时, 区间长度可能减小, 因此需要考虑延伸解的存在区间.

定理 4.5 (解的延伸定理). 设 $f(t, \mathbf{x})$ 在开区域 D 内连续, 且 Γ 是方程 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x})$ 过点 $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ 的任一条积分曲线, 则 Γ 将在区域 D 内延伸到边界 ∂D .

证明. 记 $\Gamma: \mathbf{x} = \varphi(t), t \in J$, 其中 J 是解的最大存在区间. (该解称为饱和解) 考虑右最大存在区间 $J^+ = J \cap [t_0, +\infty)$, 则存在以下情形:

1. $J^+ = [t_0, \infty)$, 则 $\mathbf{x}(t)$ 向右可以延伸至边界;
2. $J^+ = [t_0, t_1], t_0 < t_1 < +\infty$. 由于 D 是开区域, 则存在闭子域 $D_1 = \{(t, \mathbf{x}) : |t - t_1| \leq a_1, |\mathbf{x} - \varphi(t_1)| \leq b_1\} \subset D$, 其中 $a_1, b_1 > 0$ 充分小. 由 Peano 定理, D_1 内至少存在一个解 $\mathbf{x} = \psi(t), |t - t_1| \leq h, h = \min\left(a, \frac{b}{\sup_{(t, \mathbf{x}) \in D_1} |f(t)|}\right)$, 且满足初值条件 $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. 从而

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 \leq t \leq t_1 \\ \psi(t), & t_1 < t \leq t_1 + h \end{cases}$$

满足方程, 这与 $J^+ = [t_0, t_1]$ 矛盾.

3. $J^+ = [t_0, t_1), t_0 < t_1 < +\infty$. 假设 Γ 不能延伸至 D 的边界, 则存在闭子域 D_2 , s.t. $(t, \varphi(t)) \in D_2, \forall t \in J^+$. 由中值定理可得

$$|\varphi(t) - \varphi(\tilde{t})| = |\varphi(\xi)||t - \tilde{t}| \leq K|t - \tilde{t}|,$$

其中 ξ 位于 t 和 \tilde{t} 之间, $K = \max_{t \in D_2} |\varphi(t)|$. 由 Cauchy 收敛准则, $\lim_{t \rightarrow t_1^-} \varphi(t) = \mathbf{x}_1$ 存在, 从而

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 \leq t < t_1 \\ \mathbf{x}_1, & t = t_1 \end{cases}$$

在 $[t_0, t_1]$ 上连续且满足积分方程 $\psi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s))ds$, 从而 Γ 可以延伸至 $[t_0, t_1]$, 矛盾. 因此 Γ 可以向右延伸至边界.

□

关于延伸定理的几点注记:

1. 开区域 D 未必有界;
2. 对 D 的任意闭子域 D_1 , 积分曲线 Γ 将延伸至 D_1 之外;
3. Γ 不一定到达 t 所在区间的端点.

定义 4.3 (局部 L-条件). 设区域 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\forall (t_0, \mathbf{x}_0) \in D$, 若存在以 (t_0, \mathbf{x}_0) 为中心的闭矩形 $\bar{R} \subset D$, s.t. 向量值函数 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 在 \bar{R} 上满足 L-条件, 则称 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 在 D 上满足**局部 L-条件**.

推论 4.1. 若 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 在开区域 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 内连续, 且 D 内 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 关于 \mathbf{x} 满足局部 L-条件, 则方程过 D 内一点 (t_0, \mathbf{x}_0) 存在唯一解 $\mathbf{x}(t)$, 且该解可延伸至 ∂D .

例 4.1. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - 1}{2}$ 过 $(\ln 2, -3)$ 的解最大存在区间.

解. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$ 定义在整个 O_{tx} 平面上且满足局部 L-条件, 方程之通解为 $x(t) = \frac{1 + Ce^t}{1 - Ce^t}$, 过 $(\ln 2, -3)$ 的解为 $x(t) = \frac{1 + e^t}{1 - e^t}$. 由延伸定理, 该解向右可延伸至 $(\ln 2, +\infty)$, 向左只能延伸到 0. 由于 $t \rightarrow 0^+$ 时 $x(t)$ 无界. 故最大存在区间为 $(0, +\infty)$.

例 4.2. 证明 Ricatti 方程 $\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2$ 任一解的存在区间有界.

证明. $t^2 + x^2$ 在平面 O_{tx} 上连续可微, 从而满足 L-条件. 假设满足条件 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x(t)$ 的有右大存在区间为 $J^+ = [t_0, +\infty)$. 设 $a := |t_0| + 1 \leq t < +\infty$, 则

$$x' = t^2 + x^2 \geq x^2 + a^2 \Rightarrow \frac{x'}{x^2 + a^2} \geq 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{x'}{x^2 + a^2} dt \geq \int_a^{+\infty} dt = +\infty.$$

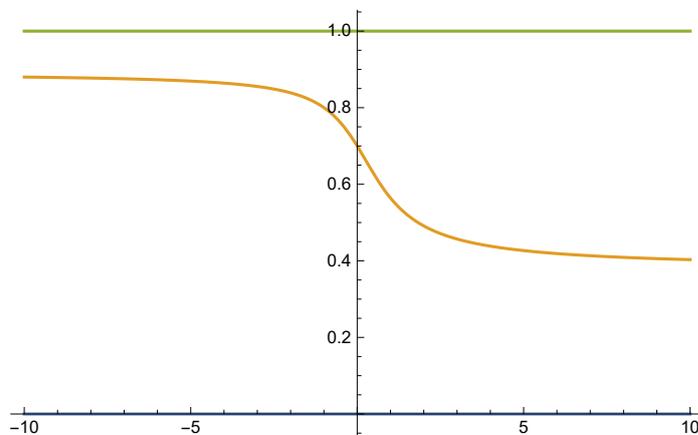
但 LHS 满足

$$\int_a^{+\infty} \frac{x'}{x^2 + a^2} dt = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \Big|_a^{+\infty} = \frac{1}{a} \left(\arctan \frac{x(+\infty)}{a} - \arctan \frac{x(a)}{a} \right) \leq \frac{\pi}{a}.$$

矛盾! 故存在区间一定有界. □

例 4.3. 讨论 $\begin{cases} x' = \frac{x(x-1)}{1+t^2+x^2} \\ x(t_0) = x_0 \in (0, 1) \end{cases}$ 解的最大存在区间.

解. 设 $f(t, x) := \frac{x(x-1)}{1+t^2+x^2}$, $f_x(t, x) = \frac{(2x-1)(1+t^2+x^2) - 2x^2(x-1)}{(1+t^2+x^2)^2}$ 在 O_{tx} 平面上连续, 故 f 在 O_{tx} 上满足局部 L-条件. 由于 $x = 0, 1$ 是方程的解, 且在线素场中对应曲线的斜率为 0, 在 $x \in (0, 1)$ 时, 曲线斜率为负数, 故曲线不能超过两条直线 $x = 0, 1$, 从而最大存在区间为 \mathbb{R} .



最后给出一个常用的比较定理, 详细证明见丁同仁相关章节.

定理 4.6. 若初值问题 (4.1.1) 满足: f 在矩形区域上连续, 且满足 $|f(t, \mathbf{x})| \leq A(t)|\mathbf{x}| + B(t)$, 其中 $A(t), B(t) \geq 0$, 则初值问题的任一解的最大存在区间均为定义区间.

4.2 解对初值的连续 (依赖) 性和可微性定理

本节考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \text{ in } D \subset \mathbb{R}^{n+1}, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

的解 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 的基本性质, 该解与初值的选取有关.

例 4.4 (1963). Lorenz 方程 $\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = x(\rho - z) \\ z' = xy - \beta z \end{cases}$, 其中 σ, ρ, β 为常数, 它的解在 $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = \frac{8}{3}$ 时

产生混沌.

解对初值的连续依赖性和连续性定理

定义 4.4 (解对初值的连续依赖性). 设初值问题 (4.2.1) 的解 $\varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 在 $[a, b]$ 上存在, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon; t_0, \mathbf{x}_0) > 0$, s.t. 对满足 $|t_0^* - t_0| < \delta, |\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}_0| < \delta$ 的所有 (t_0^*, \mathbf{x}_0^*) , 初值问题 (4.2.1) 的解 $\varphi(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*)$ 在 $[a, b]$ 上存在且 $|\varphi(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*) - \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon, \forall t \in [a, b]$, 则称解 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 在点 (t_0, \mathbf{x}_0) 处连续依赖于 (t_0^*, \mathbf{x}_0^*) . 特别地, $t_0 = t_0^*$ 时称解 $\mathbf{x} = \varphi(t; \mathbf{x}_0^*)$ 在点 \mathbf{x}_0 连续依赖于 \mathbf{x}_0^* .

定理 4.7 (解对初值的连续依赖性定理). 设 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 在区域 D 内连续且对 \mathbf{x} 满足局部 L-条件, 若 $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ 时初值问题 (4.2.1) 有解 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 且 $t \in [a, b]$ 时 $(t, \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \in D$, 则初值问题

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0^*) = \mathbf{x}_0^* \end{cases}$$

的解 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*)$ 在点 (t_0, \mathbf{x}_0) 连续依赖于初值 (t_0^*, \mathbf{x}_0^*) .

证明. 整个证明过程分为三步.

1. 找到局部解. $\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \delta_1 < \varepsilon$ 使闭域

$$U = \{(t, \mathbf{x}) \mid a \leq t \leq b, |\mathbf{x} - \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)| \leq \delta_1\} \subset D.$$

再令 $0 < \delta < \frac{\delta_1}{M+1} e^{-L(b-a)}$, 其中 $L > 0$ 为 \mathbf{f} 对应的李氏常数, $M = \max_U |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|$, 取闭矩形

$$R = \{(t, \mathbf{x}) \mid |t - t_0| \leq \delta, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq \delta\} \subset U.$$

由 Picard 定理可得 $\forall (t_0^*, \mathbf{x}_0^*) \in R$, 在 t_0^* 的某邻域内初值问题

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0^*) = \mathbf{x}_0^* \end{cases}$$

有唯一解 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*)$.

2. 证明局部不等式成立. 初值问题的解满足积分方程, 即

$$\varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \varphi(s; t_0, \mathbf{x}_0)) ds,$$

$$\varphi(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*) = \mathbf{x}_0^* + \int_{t_0^*}^t \mathbf{f}(s, \varphi(s; t_0^*, \mathbf{x}_0^*)) ds.$$

上述两式相减并利用 L-条件可得

$$\begin{aligned} & |\varphi(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*) - \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)| \\ & \leq |\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}_0| + \left| \int_{t_0}^t (\mathbf{f}(s, \varphi(s; t_0^*, \mathbf{x}_0^*)) - \mathbf{f}(s, \varphi(s; t_0, \mathbf{x}_0))) ds \right| + \left| \int_{t_0^*}^{t_0} \mathbf{f}(s, \varphi(s; t_0^*, \mathbf{x}_0^*)) ds \right| \\ & \leq \delta + L \int_{t_0}^t |\varphi(s; t_0^*, \mathbf{x}_0^*) - \varphi(s; t_0, \mathbf{x}_0)| ds + M |t_0 - t_0^*| \\ & \leq \delta(1 + M) + L \int_{t_0}^t |\varphi(s; t_0^*, \mathbf{x}_0^*) - \varphi(s; t_0, \mathbf{x}_0)| ds. \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可得

$$|\varphi(s; t_0^*, \mathbf{x}_0^*) - \varphi(s; t_0, \mathbf{x}_0)| \leq \delta(1 + M)e^{L|t-t_0^*|} \leq \delta(1 + M)e^{L(b-a)} < \delta_1 < \varepsilon.$$

上述不等式在 t 的某个小区间内成立 (局部不等式).

3. 证明上述不等式在区间 $[a, b]$ 上成立等价于证明 $\varphi(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*)$ 在 $[a, b]$ 上存在. 仅证明 $[t_0^*, b]$ 的情形. 由解的唯一性可得初值问题的解 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*)$ 不能越过曲线 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0) \pm \frac{\varepsilon}{|\varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)|}$. 由解的延伸定理可得 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*)$ 可延伸到 D 的边界, 故它向右延伸必由 $t = b$ 穿出, 从而 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 必定在 $[t_0^*, b]$ 上存在.

□

例 4.5. 设 $x = \varphi_n(t)$ 是微分方程

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$$

以 $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ 为初值的解, 试证: 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n \geq N$ 时 $\varphi_n(t)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$ 上存在, 且在此区间上成立不等式

$$|\varphi_n(t) - \tan t| < \varepsilon.$$

证明. 由于 $f(t, x) = 1 + x^2$ 在 O_{tx} 平面上连续且满足局部 L-条件, 易知方程 $\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$ 满足 $x(0) = 0$ 的唯一饱和解为 $x = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. 由 $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \rightarrow (0, 1)$, $n \rightarrow +\infty$ 及解对初值的连续依赖性可得存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时 $\varphi_n(t)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$ 上存在且满足不等式 $|\varphi_n(t) - \tan t| < \varepsilon$, 故结论成立. □

定理 4.8 (解对初值的连续性定理). 设 $f(t, x)$ 在区域 D 内连续且对 x 满足局部 L-条件, 则初值问题 (4.2.1) 的解 $x = \varphi(t; x_0)$ 连续.

注: 上述结论是针对 t_0 不变的情况, t_0 变动时结论类似.

证明. 由 L-条件和 Gronwall 不等式可得

$$\begin{aligned} & |\varphi(t; x_0^*) - \varphi(t; x_0)| \\ & \leq |x_0^* - x_0| + \left| \int_{t_0}^t (f(s, \varphi(s, x_0^*)) - f(s, \varphi(s, x_0))) ds \right| \\ & \leq |x_0^* - x_0| + L \int_{t_0}^t |\varphi(s; x_0^*) - \varphi(s; x_0)| ds \\ & \leq |x_0^* - x_0| e^{L|t-t_0|}. \end{aligned}$$

$\forall t_1, t_2 \in I = [t_0 - h, t_0 + h]$, 成立

$$\begin{aligned} & |\varphi(t_1; x_0^*) - \varphi(t_2; x_0)| \\ & \leq |\varphi(t_1; x_0^*) - \varphi(t_2; x_0^*)| + |\varphi(t_2; x_0^*) - \varphi(t_2; x_0)| \\ & \leq |\varphi(t_1; x_0^*) - \varphi(t_2; x_0^*)| + |x_0^* - x_0| e^{L|t_2-t_0|} \\ & \leq |\varphi(t_1; x_0^*) - \varphi(t_2; x_0^*)| + |x_0^* - x_0| e^{Lh}. \end{aligned}$$

令 $t_1 \rightarrow t_2, x_0^* \rightarrow x_0$ 可得 $|\varphi(t_1; x_0^*) - \varphi(t_2; x_0)| \rightarrow 0$. □

解对初值的可微性定理

定理 4.9. 若函数 $f(t, x)$ 以及 $\nabla_x f(t, x)$ 在区域 D 内连续, 则初值问题 (4.2.1) 的解 $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ 作为 t, t_0, x_0 的函数在存在范围内连续可微.

可微性定理的证明可以参考丁同仁 ODE 或王高雄 ODE 相关章节.

例 4.6. 设初值问题 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ 满足 $f \in C^1(\mathbb{R}^2), (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2, x = \varphi(t; t_0, x_0)$ 是初值问题的解,

求 $\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t; t_0, x_0)$ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t; t_0, x_0)$ 满足的方程.

解. 由可微性定理得待求的两个偏导均存在且连续. 由于题设初值问题等价于积分方程

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

从而

$$\varphi(t; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s; t_0, x_0)) ds. \quad (4.2.2)$$

(4.2.2) 两端对 t_0, x_0 求偏导可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t; t_0, x_0) = \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t_0} (f(s, \varphi(s; t_0, x_0))) ds - f(t_0, x_0)$$

$$= -f(t_0, x_0) + \int_{t_0}^t f_x(s, \varphi(s; t_0, x_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(s; t_0, x_0) ds.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t; t_0, x_0) &= 1 + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial x_0}(f(s, \varphi(s; t_0, x_0))) ds \\ &= 1 + \int_{t_0}^t f_x(s, \varphi(s; t_0, x_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(s; t_0, x_0) ds. \end{aligned}$$

由此也可得

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t; t_0, x_0) \right|_{t=t_0} = -f(t_0, x_0), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t; t_0, x_0) \right|_{t=t_0} = 1.$$

带参数的连续性定理和可微性定理 以下陈述带参数的初值问题对应的连续性定理和可微性定理, 具体证明可以参考丁同仁相关章节.

定理 4.10 (解对初值和参数的连续依赖定理). 设 $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ 在区域 D_λ 内连续且一致地关于 \mathbf{x} 满足局部 L-条件. $(t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) \in D_\lambda$, $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ 是方程 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ 过点 (t_0, \mathbf{x}_0) 的解, 且在区间 $a \leq t \leq b$ 上有定义, 其中 $a \leq t_0 \leq b$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, a, b) > 0$, 使得

$$(t_0^* - t_0) + |\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}_0|^2 + |\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_0|^2 \leq \delta^2$$

时, 方程 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ 过点 (t_0^*, \mathbf{x}_0^*) 的解 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*, \boldsymbol{\lambda})$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义且

$$|\varphi(t; t_0^*, \mathbf{x}_0^*, \boldsymbol{\lambda}) - \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)| < \varepsilon, \quad a \leq t \leq b.$$

定理 4.11 (解对初值和参数的连续性定理). 设 $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ 在区域 D_λ 内连续且一致地关于 \mathbf{x} 满足 L-条件, 则方程 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ 的解 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda})$ 作为 $t, t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}$ 的函数在存在范围内是连续的.

定理 4.12 (解对初值和参数的可微性定理). 设 $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ 在区域 D_λ 内连续且对 \mathbf{x} 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 有连续的偏微商, 则方程 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ 的解 $\mathbf{x} = \varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda})$ 作为 $t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}$ 的函数在存在区域内连续可微.

4.3 常微分方程解的稳定性

本节研究以下微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (4.3.1)$$

的解稳定性. 其中 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in C(\mathbb{R} \times G)$, $\mathbf{x} \in G \subset \mathbb{R}^n$, 且 \mathbf{f} 关于 \mathbf{x} 满足 L-条件.

定义 4.5 (解的稳定性). 设 (4.3.1) 的解 $\varphi(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上有定义, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, s.t. $|\mathbf{x}_0 - \varphi(t_0)| < \delta$ 时, 以 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 为初值的解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上有定义, 且在 $[t_0, +\infty)$ 上满足 $|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \varphi(t)| < \varepsilon$, 则称方程组 (4.3.1) 的解在 \mathbf{x}_0 处是**稳定的**.

定义 4.6 (不稳定). 若 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists \mathbf{x}_0$, s.t. $|\mathbf{x}_0 - \varphi(t_0)| < \delta$, 满足 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 至少在某时刻 $t_1 > t_0$ 处满足 $|\mathbf{x}(t_1; t_0, \mathbf{x}_0) - \varphi(t_1)| \geq \varepsilon_0$, 则称方程组 (4.3.1) 的解在 \mathbf{x}_0 处是**不稳定的**.

在稳定性的基础上, 可以定义更强的性质: 渐近稳定.

定义 4.7 (渐近稳定). 若 (4.3.1) 的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 稳定, 且存在 $\delta_1 (0 < \delta_1 < \delta)$, s.t. $|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\varphi}(t_0)| < \delta_1$ 时

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\varphi}(t)| = 0,$$

则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ **渐近稳定**.

注 事实上, 讨论方程组 (4.3.1) 的解的稳定性时, 可以假设 $\boldsymbol{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 这是因为若 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 为 (4.3.1) 的解, 可令 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\varphi}(t)$, 则

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} - \boldsymbol{\varphi}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}) =: \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{y}).$$

当 $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ 时, $\boldsymbol{F}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 假设合理. 因此只需考虑零解的稳定性即可.

例 4.7. 讨论 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$ 的零解的稳定性.

解. 设方程的解 $(x(t), y(t))$ 满足 $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, 其中 $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$. 由此解得

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ y(t) = -x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则 $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \delta$ 时, $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \delta = \varepsilon$, 因此零解稳定. 但 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \neq 0$, 零解不渐近稳定.

例 4.8. 讨论 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$ 的零解的稳定性.

解. 设方程的解 $(x(t), y(t))$ 满足 $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, 满足 $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$. 由此解得

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^t \\ y(t) = y_0 e^t \end{cases}$$

因此 $x^2 + y^2 = (x_0^2 + y_0^2)e^{2t} \rightarrow +\infty$, 零解不稳定.

以下利用线性近似法和 Lyapunov 的第二方法分别讨论微分方程组 (4.3.1) 的零解稳定性.

线性近似法 在 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 处, 展开函数 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) := A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}(t, \boldsymbol{x})$, 其中 $\boldsymbol{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $A(t)$ 是 n 阶连续矩阵函数, $\boldsymbol{N}(t, \boldsymbol{x})$ 在 $[t_0, +\infty) \times G$ 上连续, 其中 $G \subset \mathbb{R}^n$ 为有界 n 维球, 且

1. \boldsymbol{N} 对 \boldsymbol{x} 满足 L-条件;
2. $\boldsymbol{N}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 且 $\lim_{\boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|\boldsymbol{N}(t, \boldsymbol{x})|}{|\boldsymbol{x}|} = 0$ 对 $t \in [t_0, +\infty)$ 一致成立.

从而 (4.3.1) 可化为

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{N}(t, \mathbf{x}), \quad (4.3.2)$$

称为线性近似系统, $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}$ 称为 (4.3.2) 的线性近似或近似化方程.

定理 4.13. 设 (4.3.2) 中的 $A(t) \equiv A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为常矩阵, 则

1. A 的全部特征值的实部为负数, 则零解渐近稳定.
2. A 的特征值中至少有一个的实部为正数, 则零解不稳定.
3. A 存在零特征值, 则零解稳定性与 $\mathbf{N}(t, \mathbf{x})$ 有关. (稳定性不定)

证明. 1. 首先证明引理: 若 A 的任一特征值 λ 满足 $\operatorname{Re}(\lambda) < \alpha < 0$, 则 $\|e^{At}\| \leq Ce^{\alpha t}, \forall t \geq 0, C$ 为常数¹

由于方程 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ 的基解矩阵 $\Phi(t)$ 第 j 列可表示为 $e^{\lambda_j t} \mathbf{P}_j(t)$, $\mathbf{P}_j(t)$ 为多项式向量. 由 $\alpha - \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ 可得存在 $C_j > 0$, 使得

$$|\mathbf{P}_j(t)| \leq C_j e^{(\alpha - \operatorname{Re}(\lambda_j))t}, \forall t \geq 0 \Rightarrow |e^{\lambda_j t} \mathbf{P}_j(t)| = e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} |\mathbf{P}_j(t)| \leq C_j e^{\alpha t}.$$

由此可得

$$\|\Phi(t)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |e^{\lambda_j t} \mathbf{P}_j(t)|^2} \leq \tilde{C} e^{\alpha t}.$$

其中 $\tilde{C} = \sqrt{C_1^2 + \cdots + C_n^2}$. 从而有

$$\|e^{At}\| = \|\Phi(t)\Phi^{-1}(0)\| = \|\Phi^{-1}(0)\| \cdot \|\Phi(t)\| \leq C e^{\alpha t}, \quad C = \tilde{C} \|\Phi^{-1}(0)\|.$$

引理证毕.

由条件及引理可得, $\exists C > 0, \beta > 0$, 使得 $\operatorname{Re}(\lambda) < -\beta, |e^{At}| \leq C e^{-\beta t}$, 由 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{N}(t, \mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0$ 可得

$$\exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \text{ with } |\mathbf{x}| < \delta, |\mathbf{N}(t, \mathbf{x})| \leq \frac{\beta}{2C} |\mathbf{x}|, \forall t \geq 0.$$

现在我们只需证明: 若 $|\mathbf{x}_0| \leq \varepsilon < \frac{\delta}{2C}$, 则 $|\mathbf{x}(t)| \leq C \varepsilon e^{-\frac{\beta}{2}t}$. 满足初值条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 的方程 (4.3.2) 的解满足积分方程

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} \mathbf{N}(s, \mathbf{x}(s)) ds.$$

¹这里的矩阵范数为 Frobenius 范数, 定义式为

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2},$$

其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 A 的 n 个列/行向量.

只要 $|\mathbf{x}| < \delta$, 则有

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \|e^{At}\| |\mathbf{x}_0| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| |\mathbf{N}(s, \mathbf{x}(s))| ds \leq C e^{-\beta t} |\mathbf{x}_0| + \int_0^t C e^{-\beta(t-s)} \cdot \frac{\beta}{2C} |\mathbf{x}(s)| ds.$$

令 $\varphi(t) = e^{\beta t} |\mathbf{x}(t)| \geq 0$, 则

$$\varphi(t) \leq C\varepsilon + \int_0^t \frac{\beta e^{\beta s}}{2} |\mathbf{x}(s)| ds = C\varepsilon + \frac{\beta}{2} \int_0^t \varphi(s) ds.$$

应用 Gronwall 不等式可得 $\varphi(t) \leq C\varepsilon e^{\frac{\beta}{2}t}$, 因此

$$|\mathbf{x}(t)| = e^{-\beta t} \varphi(t) \leq C\varepsilon e^{-\frac{\beta}{2}t}.$$

这样就证明了渐近稳定性.

2. 这种情况的证明可以参考 GTM182: *Ordinary Differential Equations* 的 Page 312-Page 314. □

例 4.9.
$$\begin{cases} x' = \sin x + ay - \sin^2 t(x^2 + y^2) \\ y' = -ax - 2y + \cos^2 t(x^2 + y^2) \end{cases}$$

解. 显然上述系统有零解. 对方程进行线性化可得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + ay + o(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ \frac{dy}{dt} = -ax - 2y + o(\sqrt{x^2 + y^2}) \end{cases}$$

线性近似为 $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & -2 \end{pmatrix}$. 计算可得 $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda + a^2 - 2$, 从而特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9 - 4a^2}}{2}.$$

运用线性近似定理可得

1. $|a| > \sqrt{2}$, 则 $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, 2$, 此时方程渐近稳定.
2. $|a| < \sqrt{2}$, 则 $\lambda_2 > 0$, 此时方程不稳定.
3. $|a| = \sqrt{2}$, 此时 $\lambda_2 = 0$, 需要考虑用其他方法判断稳定性.

Lyapunov 的第二方法 上述线性近似方法的适用范围较为有限, 一般方程的稳定性判别主要运用以下 **Lyapunov 第二方法**. 本节仅考虑自治系统

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.3.3)$$

的零解稳定性.

定义 4.8. 若标量函数 $V(x) \in C(G)$ 满足三条性质:

1. $V(\mathbf{0}) = 0$;
2. $V(x) > 0, \forall x \neq \mathbf{0}$;
3. V 关于 t 的全导数

$$\frac{d(\mathbf{x}(t))}{dt} = \dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} V \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{k=1}^n f_k(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_k} \leq 0.$$

则称 $V(x)$ 是自治系统 (4.3.3) 的 **Lyapunov 函数**.

定理 4.14 (Lyapunov 稳定性定理). 若自治系统 (4.3.3) 存在 Lyapunov 函数 $V(x) \in C(G)$, 则系统 (4.3.3) 的零解稳定. 进一步, 若 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 严格负定, 则系统 (4.3.3) 的零解渐近稳定. 反之, 如果存在标量函数 $V(x)$ 满足 1, 2, $\forall x \in G$, 但 $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0, \forall x \in G$, 则 (4.3.3) 的零解不稳定.

证明. 1. 当 Lyapunov 函数常负时, 任取 $0 < \varepsilon < M$, 其中 M 为有界球 G 的半径. 令 $l := \inf\{V(\mathbf{x}) \mid |\mathbf{x}| = \varepsilon\}$ (由球面紧致可得 l 的存在性). 设 $\mathbf{x}(t)$ 为自治系统

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

的解. 其中 $0 < |\mathbf{x}_0| \leq \delta < \varepsilon$, δ 充分小, 使得 $V(\mathbf{x}_0) < l$. (此处 δ 的存在性由 V 的连续性得出). 由条件 $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ 可得 $V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0)) = V(\mathbf{x}_0) < l$. 由 $\delta < \varepsilon$, $\mathbf{x}(t)$ 连续可得对充分小的 $t > 0$, $|\mathbf{x}(t)| < \varepsilon$ 成立. 假设 $\exists T > 0$, 使得 $|\mathbf{x}(T)| = \varepsilon < M$, 则 $V(\mathbf{x}(T)) \geq l$, 这与 $V(\mathbf{x}(t)) < l$ 矛盾. 因此 $|\mathbf{x}(t)| < \varepsilon, \forall t \geq 0$, 稳定性证毕.

2. 根据上述可得, 任取 $\mathbf{x}_0 \in \overline{B_\delta(\mathbf{0})}$, 以 \mathbf{x}_0 为初值的解总满足 $|\mathbf{x}(t)| \leq \delta < \varepsilon$. 结合 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定可设 $V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow a (t \rightarrow +\infty)$, 其中 $0 \leq a < V(\mathbf{x}_0)$. 下面我们证明 $a = 0$.

假设 $a > 0$, 则由 $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ 可得 $V(\mathbf{x}(t)) \geq a$, 由此可得存在 $\alpha > 0$ 使得 $|\mathbf{x}(t)| \geq \alpha$. 结合全导数 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 定负可得存在 $m > 0$ 使得 $-\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \geq m$, 由此可得

$$0 \leq V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}_0) - mt$$

对任意 $t > 0$ 都成立, 这显然矛盾. 因此 $a = 0$. 假设此时 $\mathbf{x}(t)$ 在 $t \rightarrow +\infty$ 时极限不为零, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及 $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots, t_n \rightarrow +\infty$ 使得 $|\mathbf{x}(t_n)| \geq \varepsilon_0$. 结合 V 的定正性可得存在 $m' > 0$ 使得 $V(\mathbf{x}(t_n)) \geq m', n = 1, 2, \dots$, 这与 $V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow 0$ 矛盾. 这样就证明了渐近稳定性.

3. 设 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 在 $|\mathbf{x}| \leq h$ 上定正. 任取 $\delta > 0$, 只需证明在球 $B_\delta(\mathbf{0})$ 内总存在 \mathbf{x}_0 , 使得以它为初值的解 $\mathbf{x}(t)$ 不总落在球 $B_h(\mathbf{0})$ 内.

取 \mathbf{x}_0 满足 $|\mathbf{x}_0| < \delta$ 且 $V(\mathbf{x}_0) > 0$. 假设 $|\mathbf{x}(t)| < h$ 对任意 $t > 0$ 成立, 则有

$$V(\mathbf{x}(t)) \geq V(\mathbf{x}_0) > 0.$$

从而存在 $m > 0$ 使得 $|\mathbf{x}(t)| \geq m$, 进而由 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 定正可得存在 $m' > 0$ 使得 $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \geq m'$. 因此

$$V(\mathbf{x}(t)) \geq mt + V(\mathbf{x}_0)$$

对任意 $t > 0$ 都成立, 这与 $|\mathbf{x}(t)| < h$ 矛盾. 这样就证明了解不稳定. □

$$\text{例 4.10. } \begin{cases} x' = -x(x^2 + y^2) \\ y' = -2y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

解. 此时线性近似失效, 考虑使用 Lyapunov 直接法. 取标量函数 $V(x, y) = x^2 + y^2$, 则 $V(0, 0) = 0$, $V(x, y) > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$. 且

$$\dot{V}(x, y) = -x(x^2 + y^2) \cdot 2x - 2y(x^2 + y^2) \cdot 2y = -2(x^2 + y^2)(x^2 + 2y^2) \leq 0,$$

且 $\dot{V}(x, y) < 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$, 故题设系统的零解渐近稳定.

$$\text{例 4.11. } \begin{cases} x' = y - 3z - x(y - 2z)^2 \\ y' = -2x + 3z - y(x + z)^2 \\ z' = 2x - y - z \end{cases}$$

解. 分别利用线性近似法和 Lyapunov 直接法判断零解稳定性.

1. 线性近似法. 对方程组线性化可得

$$\begin{cases} x' = y - 3z + o(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ y' = -2x + 3z + o(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ z' = 2x - y - z \end{cases}$$

$$\text{线性近似为 } \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ 其中 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 因此}$$

$$\varphi(\lambda) := \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2 - 11\lambda - 2.$$

由于 $\varphi'(\lambda) = -3\lambda^2 - 2\lambda - 11 = -3\left(\lambda + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{32}{3} < 0$, 结合零点定理可得 $\varphi(\lambda)$ 有且仅有一个实根 $-1 < \lambda_1 < 0$ (由于 $\varphi(-1) = 9 > 0, \varphi(0) = -2 < 0$). 设 $\varphi(\lambda)$ 的另外两个共轭复根为 $\lambda_2, \bar{\lambda}_2$, 由韦达定理可得

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \bar{\lambda}_2 = \lambda_1 + 2\text{Re}(\lambda_2) = -1.$$

因此 $\text{Re}(\lambda_2) = \text{Re}(\bar{\lambda}_2) = \frac{-1 - \lambda_1}{2} < 0$. 从而方程组的零解渐近稳定.

2. Lyapunov 直接法: 构造函数 $V(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$, 则 $V(x, y, z)$ 正定, 且

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) &= 4x(y - 3z - x(y - 2z)^2) + 2y(-2x + 3z - y(x + z)^2) + 6z(2x - y - z) \\ &= -4x^2(y - 2z)^2 - 2y^2(x + z)^2 - 6z^2. \end{aligned}$$

因此 $\dot{V}(x, y, z)$ 负定, 从而零解渐近稳定.

关于 Lyapunov 定理的注记.

1. Lyapunov 第二方法又称为直接法, 它是在用能量观点分析稳定性的基础上建立起来的. 若系统平衡态渐近稳定, 则系统经扰动后, 储存的能量随着时间推移而衰减, 最终趋于平衡态时能量达到最小值. 反之, 若平衡态不稳定, 则系统将不断从外界吸收能量, 储存的能量将越来越大. 基于这样的观点, Lyapunov 函数实质上是一个合理描述动态系统的 n 维状态的能量正性函数, 通过考察该函数随时间推移是否衰减, 就可以判断系统平衡态的稳定性.
2. Lyapunov 定理同时适用于线性系统、非线性系统、定常系统和时变系统, 具有相当的普遍性. 该定理仅为判别一致渐近稳定的充分条件, 不是必要条件.
3. 对于渐近稳定的平衡态, 满足条件的 Lyapunov 函数总存在, 但不唯一. Lyapunov 函数在相平面上具有几何意义:
 - (a) Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}, t)$ 相当于定义为表征系统的某种广义能量的一类正定函数;
 - (b) 令 $V(\mathbf{x}, t)$ 为不同的常数, 相当于在 n 维状态空间定义了一族以原点为中心, 形状相似的同心超球面;
 - (c) $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ 是表征系统的广义能量函数的变化速率, $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ 为负定则表示系统状态将从当前所在的超球面向原点方向运动, 最终逐渐趋于原点.

第二部分

偏微分方程

第五章 一阶偏微分方程

k 阶 PDE 的一般形式如下: $F(x, u, Du, \dots, D^k u) = 0$, 其中 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, u 为未知函数. 一般而言, 可以将 PDE 分为线性 PDE, 半线性 PDE, 拟线性 PDE, 完全非线性 PDE.

1. 线性 PDE: $\sum_{|\alpha| \leq k} P_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$, 即 $D^\alpha u$ 的系数不依赖于 u . 其中 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 为多重

指标, $\alpha_j \geq 0$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$, 且

$$D^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}.$$

2. 半线性 PDE: $\sum_{|\alpha|=k} P_\alpha(x) D^\alpha u + c(x, u, \dots, D^{k-1} u) = 0$.

3. 拟线性 PDE: $\sum_{|\alpha|=k} P_\alpha(x, u, \dots, D^{k-1} u) + c(x, u, \dots, D^{k-1} u) = 0$.

余下的方程称为完全非线性 PDE. 此外, PDE 方程组的一般形式为 $\mathbf{F}(x, \mathbf{u}, \dots, D^k \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \times \cdots \times \mathbb{R}^{mn^k} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{u}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

例 5.1 (Dirac 方程). Dirac 方程用于描述相对论下粒子的运动. 具体方程如下:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H} \psi.$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h 为普朗克常数. \mathcal{H} 为 Hamilton 算符, 定义为

$$\mathcal{H} \psi = \left(-i\hbar c \sum_{j=1}^3 A_j \frac{\partial}{\partial x_j} + mc^2 B \right) \psi,$$

$$\text{其中 } A_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ & i \\ -i & & \\ i & & \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & -1 \\ 1 & & \\ -1 & & \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

注 自由电子的平面波解为 $\psi(t, \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)/\hbar}$, 其中 \mathbf{p} 为动量, E 为能量. 将 ψ 代入 Dirac 方程得

$$\sum_{j=1}^3 (cp_j A_j + mc^2 B) \phi = E \phi.$$

该方程的非零解 ϕ 满足: $E^2 - m^2c^4 - c^2|\mathbf{p}|^2 = 0 \Rightarrow E_{\pm} = \pm\sqrt{m^2c^4 + c^2|\mathbf{p}|^2}$, 从而预言了正电子的存在.

例 5.2 (带年龄结构的人口发展模型).

1. **线性模型的建立.** 考虑一个稳定社会的人口发展过程. 设人口数量与时间 t 和年龄 a 有关, 假设按年龄连续分布. 以函数 $p(a, t)$ 表示人口在任意时刻 t 按年龄 a 的分布密度, 则在时刻 t , 年龄在区间 $[a, a + da]$ 的人口数量为 $p(a, t)da$, 因此时刻 t 的人口总数为

$$N(t) = \int_0^{\infty} p(a, t)da.$$

如果不考虑死亡影响, 则在时刻 $t + \Delta t$, 年龄在 $[a, a + \Delta a]$ 中的人口数量 $p(a, t + \Delta t)\Delta a$ 等于时刻 t 年龄在区间 $[a - \Delta t, a + \Delta a - \Delta t]$ 中的人口数量 $p(a - \Delta t, t)\Delta a$, 即

$$p(a, t + \Delta t) = p(a - \Delta t, t).$$

因此 $p(a, t)$ 满足

$$\frac{p(a, t + \Delta t) - p(a, t)}{\Delta t} = \frac{p(a - \Delta t, t) - p(a, t)}{\Delta t}.$$

取 $\Delta t \rightarrow 0$ 可得

$$\frac{\partial p(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial p(a, t)}{\partial a} = 0.$$

在实际问题中, 死亡的影响不可忽略. 设 $\mu(a)$ 是单位时间内年龄在 $[a, a + \Delta a]$ 之内的人口死亡概率, 则在时间段 $[t, t + dt]$ 内, 从年龄在区间 $[a - dt, a]$ 中的人口成长为年龄在区间 $[a, a + dt]$ 的人口的过程中死亡人数为

$$p(a - dt, t)da \cdot \mu(a)dt.$$

因此

$$\begin{aligned} p(a - dt, t)da - p(a, t)da &= p(a - dt, t)\mu(a)dadt \\ \Rightarrow p(a - dt, t) - p(a, t) &= \mu(a)p(a - dt, t)dt. \end{aligned}$$

两端 Taylor 展开并舍去高阶项可得

$$\frac{\partial p(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial p(a, t)}{\partial t} = -\mu(a)p(a, t). \quad (5.0.1)$$

这是描述人口发展的一阶双曲型偏微分方程.

设方程 (5.0.1) 对应的初始条件为 $p(a, 0) = p_0(a)$, $p_0(a)$ 表示初始人口分布密度. 要获得边界条件 $p(0, t)$, 需要考虑人口的出生情况. 假设男女比例基本平衡, 生育率为 $\beta(a)$, 则在时间段 $[t, t + dt]$ 内出生的婴儿总数为

$$\left(\int_0^{\infty} \beta(a)p(a, t)da \right) dt.$$

另一方面, $[t, t + dt]$ 内出生的婴儿总数等于 $t + dt$ 时刻在年龄区间 $[0, dt]$ 中的人数 $p(0, t + dt)dt$, 即

$$p(0, t + dt)dt = \left(\int_0^{\infty} \beta(a)p(a, t)da \right) dt \Rightarrow p(0, t + dt) = \int_0^{\infty} \beta(a)p(a, t)da.$$

令 $dt \rightarrow 0$ 可得边界条件

$$p(0, t) = \int_0^{\infty} \beta(a)p(a, t)da.$$

方程 (5.0.1) 结合初始条件和边界条件构成了人口发展的偏微分方程模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial p(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial p(a, t)}{\partial t} = -\mu(a)p(a, t), & a, t > 0 \\ p(a, 0) = p_0(a), & a \geq 0 \\ p(0, t) = \int_0^{\infty} \beta(a)p(a, t)da, & t \geq 0 \end{cases}$$

同样可构建带迁移的人口发展模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial p(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial p(a, t)}{\partial t} = -\mu(a)p(a, t) + f(a, t), & a, t > 0 \\ p(a, 0) = p_0(a), & a \geq 0 \\ p(0, t) = \int_0^{\infty} \beta(a)p(a, t)da, & t \geq 0 \end{cases}$$

其中 $f(a, t)$ 为人口迁移率.

2. 非线性模型的建立. 再考虑环境对人口的影响. 设

$$N(t) = \int_0^{\infty} p(a, t)dt$$

表示 t 时刻的社会总人口数. 考虑到人口的生存与总容量有关, 设死亡率为 $\mu(a, t, N(t))$, $\beta(a, t, N(t))$ 为年龄为 a 的社会人口在 t 时刻平均单位时间的生育率. 再考虑人口迁移因素, 设 $f(a, t)$ 表示 t 时刻年龄为 a 的社会人口在单位时间, 单位年龄内的迁移人数, 则可构建更一般的非线性人口发展系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial p(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial p(a, t)}{\partial t} = -\mu(a, t, N(t))p(a, t) + f(a, t), & a, t > 0 \\ p(a, 0) = p_0(a), & a \geq 0 \\ p(0, t) = \int_0^{\infty} \beta(a, t, N(t))p(a, t)da, & t \geq 0 \\ N(t) = \int_0^{\infty} p(a, t)da, & t \geq 0 \end{cases}$$

5.1 一阶线性 PDE

本节考虑一阶线性偏微分方程

$$\sum_{j=1}^n b_j(x)u_{x_j} + c(x)u = f(x) \quad (5.1.1)$$

的求解. 其中 $b_j(x), c(x), f(x) \in C(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

特征线法 特征线法的目的是将 PDE 问题转化为 ODE 问题, 大致思路如下: 寻找一条曲线 (特征线), 在其上计算 u . 假定曲线有参数表示 $x(t)$, 若 $\frac{dx_j}{dt} = b_j, j = 1, \dots, n$, 则

$$\frac{du(x(t))}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(x(t))}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = -c(x(t))u(x(t)) + f(x(t)).$$

从而得到 ODE 方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = b_j(x(t)), j = 1, \dots, n \\ \frac{du(x(t))}{dt} = f(x(t)) - c(x(t))u(x(t)) \end{cases} \quad (5.1.2)$$

其中 (5.1.2) 的第一式可化为

$$\frac{dx_1(t)}{b_1(x(t))} = \dots = \frac{dx_n(t)}{b_n(x(t))} (= dt). \quad (5.1.3)$$

(5.1.3) 称为方程 (5.1.1) 的**特征方程**, 可以利用首次积分求解.

定理 5.1. 设 $\varphi_j(x) = c_j (j = 1, \dots, n-1)$ 是特征方程 (5.1.3) 的 $n-1$ 个独立的首次积分, 则对关于 $u = u(\xi_n; \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ 的常微分方程

$$\left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi_n} + cu = f$$

积分可得 (5.1.1) 的通解. 其中 $\xi_j = \varphi_j(x), j = 1, \dots, n, \varphi_n(x)$ 为满足 $\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$ 的任一函数. 特别地, 若 $c \equiv f \equiv 0$, 则 (5.1.1) 的通解为 $g(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x))$, g 是任一可微函数.

证明. 由条件及特征方程可得

$$0 = \frac{d\varphi_k(x(t))}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}, k = 1, \dots, n-1. \quad (5.1.4)$$

从而

$$\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n b_j \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi_k}.$$

由 (5.1.4) 式可得

$$\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = \left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi_n} = f - cu.$$

从而 u 为 (5.1.1) 的解. 若 $c \equiv f \equiv 0$, 则由 $\frac{\partial u}{\partial \xi_n} \equiv 0$ 得 $u = g(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = g(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$. \square

例 5.3. $\sqrt{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y} \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, x, y, z > 0$.

解. 方程的特征方程为 $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{z}$, 从而求得两个独立首次积分

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = C_1, \quad 2\sqrt{y} - \ln|z| = C_2.$$

此时 $c \equiv f \equiv 0$, 从而方程的通解为 $u = g(\sqrt{x} - \sqrt{y}, 2\sqrt{y} - \ln|z|)$, 其中 g 为任一可微函数.

例 5.4. 求解以下 PDE 的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_t = xu_x + yu_y + u + xy \\ u|_{t=0} = a(x, y) \end{cases}$$

其中 a 为给定函数.

解. 方程特征方程为 $\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-x} = \frac{dy}{-y}$. 求得两个独立首次积分

$$xe^t = C_1, \quad ye^t = C_2.$$

取 $\xi_1 = xe^t$, $\xi_2 = ye^t$, $\xi_3 = t$, 则

$$\frac{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{D(t, x, y)} = \begin{vmatrix} xe^t & e^t & 0 \\ ye^t & 0 & e^t \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = e^{2t} \neq 0.$$

因此 ξ_3 的选取合理, 从而由定理可得 u 满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_3} = u + xy = u + \xi_1 \xi_2 e^{-2\xi_3}.$$

该方程的通解为

$$u = e^{\xi_3} \left(g(\xi_1, \xi_2) + \int \xi_1 \xi_2 e^{-2\xi_3} e^{-\xi_3} d\xi_3 \right) = g(\xi_1, \xi_2) e^{\xi_3} - \frac{\xi_1 \xi_2}{3} e^{-3\xi_3}.$$

将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 代入可得 $u(t, x, y) = g(xe^t, ye^t)e^t - \frac{xy}{3}e^{-t}$, 其中 g 为任一可微函数. 代入 $u|_{t=0} = a(x, y)$ 可得 $g(x, y) - \frac{xy}{3} = a(x, y)$, 故 Cauchy 问题的解为

$$u(t, x, y) = \left(\frac{xy}{3}e^{2t} + a(xe^t, ye^t) \right) e^t - \frac{xy}{3}e^{-t}.$$

5.2 一阶拟线性 PDE

一阶拟线性偏微分方程的一般形式为:

$$\sum_{j=1}^n b_j(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = c(x, u). \quad (5.2.1)$$

类似一阶线性 PDE 中的特征线法, 可以将 (5.2.1) 转化为 ODE 方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx_j(t)}{dt} = b_j(x(t), u(x(t))) \\ \frac{du(x(t))}{dt} = c(x(t), u(x(t))) \end{cases}$$

等价于

$$\frac{dx_1(t)}{b_1(x_1, u)} = \dots = \frac{dx_n(t)}{b_n(x_n, u)} = \frac{du(x(t))}{c(x, u)} (= dt). \quad (5.2.2)$$

(5.2.2) 称为 (5.2.1) 的 **(完全) 特征方程**.

若特征方程 (5.2.2) 有 n 个独立的首次积分 $\varphi_j(x, u) = c_j (1 \leq j \leq n)$, 设 (5.2.1) 的解为 $x_{n+1} = u(x)$, 由隐函数 $V(x, x_{n+1}) = 0$ 确定, 则有

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j} V(x, x_{n+1}) = \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_j} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} \right)^{-1} \frac{\partial V}{\partial x_j}.$$

代入方程 (5.2.1) 可得

$$\sum_{j=1}^n b_j(x, x_{n+1}) \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} \cdot c(x, x_{n+1}) = 0.$$

这是一个 $n+1$ 个变量的一阶线性方程. 它的通解为

$$V(x, u) = g(\varphi_1(x, u), \dots, \varphi_n(x, u)) = 0,$$

其中 g 为任一可微函数. 从而求得了方程 (5.2.1) 的通解.

例 5.5. 求解 Cauchy 问题
$$\begin{cases} xuu_x + yuu_y + xy = 0 \\ u|_{xy=a^2} = h (h > 0) \end{cases}$$

解. 题设方程的特征方程为

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{-xy} (= dt).$$

由第一个等式得 $\frac{y}{x} = C_1$, 代入第二个等式得 $\frac{dx}{xu} = -\frac{du}{C_1 x^2}$, 由此可得 $xy + u^2 = C_2$. 易验证得两个首次积分独立, 故方程通解为

$$g\left(\frac{y}{x}, xy + u^2\right) = 0.$$

代入 Cauchy 条件可得 $g\left(\frac{a^2}{x^2}, h^2 + a^2\right) = 0, \forall x \neq 0$. 故 g 不依赖于第一项, 从而解为 $g(xy + u^2) = g(a^2 + h^2) = 0$. 因此

$$xy + u^2 = a^2 + h^2 \Rightarrow u = \pm \sqrt{a^2 + h^2 - xy}.$$

当首次积分难以求解时, 我们考虑如下拟线性 PDE 的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n b_j(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = c(x, u) \\ u|_{x=\alpha(s)} = \theta(s) \end{cases} \quad (5.2.3)$$

其中 s 为 $n-1$ 个独立参数, $x = \alpha(s) = (\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s))$ 称为初始曲面, $s = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, 这里设所有的函数都是光滑的.

(5.2.1) 的任一解 $z = u(x)$ 在 O_{xz} 上为一张曲面, 曲面在 $(x_0, z_0) = (x_0, u(x_0))$ 处的法向量为

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_0), -1 \right).$$

令 $b(x, u) = (b_1(x, u), \dots, b_n(x, u))$, 由 (5.2.1) 可知 $(b(x_0, u), c(x_0, u)) \cdot \mathbf{n} = 0$, 即方程的特征方向 $(b(x_0, u), c(x_0, u))$ 和法向量在 x_0 处正交.

定义 5.1. 称 ODE 方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_j(t)}{dt} = b_j(x(t), u(x(t))), & 1 \leq j \leq n \\ \frac{du(x(t))}{dt} = c(x(t), u(x(t))) \end{cases} \quad (5.2.4)$$

的解 $(x, u) = (x(t), z(t))$ 为 (5.2.1) 的**特征曲线**.

定理 5.2 (等价性定理). $u(x)$ 为 (5.2.1) 在 D 内的解的充要条件为 $\forall x_0 \in D$, 过点 $(x_0, u(x_0))$ 的特征曲线在点 x_0 位于曲面 $z = u(x)$ 上.

等价性定理的证明略去, 可参考陈祖墀老师的 PDE.

定理 5.3 (局部存在定理). 设 $(x_0, z_0) = (\alpha(s), \theta(s))$, 且 Jacobi 行列式

$$J = \det(b(x_0, z_0), D_s \alpha(s_0)) = \begin{vmatrix} b_1(x_0, z_0) & \frac{\partial \alpha_1(s_0)}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_1(s_0)}{\partial s_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n(x_0, z_0) & \frac{\partial \alpha_n(s_0)}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial \alpha_n(s_0)}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则 (5.2.3) 的解在 x_0 的某邻域内存在且唯一.

证明. 方程组 (5.2.4) 在初始条件 $(x, u)|_{t=t_0} = (\alpha(s), \theta(s))$ 下的解 $(x(t, s), z(t, s))$ 满足

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial(t, s)} \Big|_{(t_0, s_0)} \stackrel{(5.2.4)}{=} J \neq 0.$$

利用逆映射定理可得在 x_0 的某邻域内, 可由 $x = x(t, s)$ 反解出 $(t, s) := (\varphi(x), \psi(x))$. 令 $u = u(x) = z(t, s) = z(\varphi(x), \psi(x))$, 下证明 u 满足 Cauchy 问题 (5.2.3). 对 x_0 某邻域内的任一点 x^* , 过 $(x^*, u(x^*))$ 的特征曲线在 x^* 处位于 $u(x)$ 上. 再由等价性定理可得 u 满足拟线性方程 (5.2.1). 而由 $u(\alpha(s)) = z(t_0, s) = \theta(s)$ 可得 u 满足 Cauchy 条件. 下说明唯一性. 由常微分方程组的初值问题的唯一性定理可得 $x(t, s), z(t, s)$ 均唯一, 利用等价性定理可得 $u(x)$ 也唯一. \square

综上所述, 可以归纳出求解 (5.2.3) 的一般步骤:

1. 找出初始曲面的参数表示: $u(\alpha(s)) = \theta(s)$.
2. 验证 Jacobi 行列式 $J \neq 0$.
3. 求出 ODE 方程组 (5.2.4) 在初始条件 $(x, z)|_{t=t_0} = (\alpha(s), \theta(s))$ 下的解 $(x(t, s), z(t, s))$.
4. 从 $x = x(t, s)$ 中解出 $(t, s) = (\varphi(x), \psi(x))$.

5. 解出 $u = z(\varphi(x), \psi(x))$.

例 5.6.
$$\begin{cases} u_x + u_y = u^2, & y > 0 \\ u|_{y=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

解. 分别用参数曲面法和特征线法求解.

1. 参数曲面法. 曲面 $y = 0$ 对应参数表示为 $\alpha(s) = (s, 0)$, $\theta(s) = \varphi(s)(s = x)$, $b_1 = b_2 = 1$, $c(u) = u^2$. 计算可得 Jacobi 行列式为 $J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, 对应 ODE 方程组为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 1, & \frac{dz}{dt} = z^2 \\ (x, y, z)|_{t=0} = (s, 0, \varphi(s)) \end{cases}$$

对应通解为 $x = t + s, y = t, z = \frac{z_0}{1 - tz_0} = \frac{\varphi(s)}{1 - t\varphi(s)}$. 反解出 $t = y, s = x - y$, 因此原问题的解为

$$u(x, y) = z(t, s) = \frac{\varphi(x - y)}{1 - y\varphi(x - y)}.$$

2. 特征线法. PDE 对应的特征方程为 $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{u^2}$. 计算可得两个独立首次积分为

$$x - y = C_1, \quad x + \frac{1}{u} = C_2.$$

代入初始条件可得 $x = C_1, u = \varphi(C_1)$, 因此

$$C_1 + \frac{1}{\varphi(C_1)} = C_2 \Rightarrow x - y + \frac{1}{\varphi(x - y)} = x + \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{\varphi(x - y)}{1 - y\varphi(x - y)}.$$

5.3 一般的一阶 PDE

本节考虑一般的一阶偏微分方程:

$$F(x, u, Du) = 0, \tag{5.3.1}$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 2, u = u(x)$ 为未知函数, Du 为 u 的梯度. 为了记号方便, 令

$$F = F(x, z, p) = F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n),$$

$$z = u(x), \quad p = Du(x) = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = (p_1, \dots, p_n),$$

$$D_x F = (F_{x_1}, \dots, F_{x_n}), \quad D_z F = F_z, \quad D_p F = (F_{p_1}, \dots, F_{p_n}).$$

全积分, 包络与奇积分

定义 5.2. 称 $u = u(x; a)$ 为方程 (5.3.1) 的**全积分**, 是指

1. $u(x; a)$ 满足 (5.3.1), $\forall a = (a_1, \dots, a_n) \in A \subset \mathbb{R}^n$, 其中 A 为参数集合.
2. $\text{rank}(D_a u, D_{x_a}^2 u) = n$, 其中

$$(D_a u, D_{x_a}^2 u) = \begin{pmatrix} u_{a_1} & u_{x_1 a_1} & \cdots & u_{x_n a_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{a_n} & u_{x_1 a_n} & \cdots & u_{x_n a_n} \end{pmatrix}_{n \times (n+1)}.$$

上述定义中的第二条性质保证了 $u(x; a)$ 依赖于 n 个独立参数 a_1, \dots, a_n . 下给出证明:

证明. 设 $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\forall b \in B$, 设 $v = v(x; b)$ 是 (5.3.1) 的解. 假设存在 C^1 函数 $\psi : A \rightarrow B$, $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^{n-1})$, 满足

$$u(x; a) = v(x; \psi(a)), \quad a \in A.$$

从而 $u(x; a)$ 仅依赖于 $n-1$ 个参数 b_1, \dots, b_{n-1} . 但由于

$$u_{x_i a_j}(x; a) = \sum_{k=1}^{n-1} v_{x_i b_k}(x; \psi(a)) \psi_{a_j}^k(a), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

因此

$$\det(D_{x_a}^2 u) = \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{n-1} v_{x_1 b_{k_1}} \cdots v_{x_n b_{k_n}} \begin{vmatrix} \psi_{a_1}^{k_1} & \cdots & \psi_{a_n}^{k_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{a_1}^{k_n} & \cdots & \psi_{a_n}^{k_n} \end{vmatrix} = 0.$$

这是因为对任意的 $k_1, \dots, k_n \in \{1, \dots, n-1\}$, 上述行列式至少有两行相同. 又因为

$$u_{a_j}(x; a) = \sum_{k=1}^{n-1} v_{b_k}(x; \psi(a)) \psi_{a_j}^k(a), \quad j = 1, \dots, n.$$

类似可证得 $(D_a u, D_{x_a}^2 u)$ 的任一 n 阶子式为 0, 从而 $\text{rank}(D_a u, D_{x_a}^2 u) < n$, 矛盾. \square

例 5.7 (几何光学方程). $|Du| = 1$, 即 $\sum_{j=1}^n u_{x_j}^2 = 1$.

几何光学方程的全积分为 $u(x; a, b) = a \cdot x + b$, 其中 $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ (n 维单位球面), $b \in \mathbb{R}$.

定义 5.3 (包络). 若可微函数族 $u = u(x; a)$ 满足的向量方程 $D_a u(x; a) = 0$, $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ 有可微解 $a = \phi(x)$, 则称 $v(x) = u(x; \phi(x))$ 为 $\{u(x; a)\}_{a \in A}$ 的**包络**.

定理 5.4 (奇积分). 设 $u = u(x; a)$ ($a \in A$) 为 (5.3.1) 的解, $v(x)$ 为 $\{u(x; a)\}_{a \in A}$ 的包络. 则 $v(x)$ 满足 (5.3.1), 也称作**奇积分**.

证明. $\forall 1 \leq j \leq n$, 计算可得

$$v_{x_j} = u_{x_j}(x; \phi(x)) + \sum_{k=1}^n u_{a_k}(x; \phi(x)) \phi_{x_j}^k(x) = u_{x_j}(x; \phi(x)), \quad \phi = (\phi^1, \dots, \phi^n).$$

因此

$$F(x, v(x), Dv(x)) = F(x, u(x; \phi(x)), Du(x; \phi(x))) = 0.$$

□

例 5.8. $u^2(1 + |Du|^2) = 1, x \in \mathbb{R}^n$.

解. 方程的全积分为 $u(x; a) = \pm \sqrt{1 - |x - a|^2}, |x - a| < 1$. 因此

$$D_a u(x; a) = \mp \frac{x - a}{\sqrt{1 - |x - a|^2}} = 0 \Rightarrow a = x =: \phi(x).$$

从而方程的奇积分为 $v(x) = u(x; x) = 1$.

定义 5.4 (通积分). 若任意可微函数 $\omega: A' \rightarrow \mathbb{R} (A' \subset \mathbb{R}^{n-1})$ 满足 $(a', \omega(a')) \in A \subset \mathbb{R}^n$, 其中

$$a = (a_1, \dots, a_n) = (a', a_n) \in A, a' \in A', a_n = \omega(a'),$$

则称 $\{u(x; a', \omega(a'))\}_{a' \in A'}$ 的包络 $v'(x)$ 为 (5.3.1) 的通积分.

例 5.9. 求二维几何光学方程 $|Du| = 1, n = 2$ 的通积分.

解. 方程的全积分为

$$u(x; a) = x_1 \cos a_1 + x_2 \sin a_1 + a_2, \quad x, a \in \mathbb{R}^2.$$

因此有

$$\begin{aligned} u(x; a_1, 0) &= x_1 \cos a_1 + x_2 \sin a_1, \\ D_{a_1} u(x; a_1, 0) &= -x_1 \sin a_1 + x_2 \cos a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \arctan \frac{x_2}{x_1}. \end{aligned}$$

从而方程的通积分为

$$v'(x) = u\left(x; \arctan \frac{x_2}{x_1}, 0\right) = x_1 \cos\left(\arctan \frac{x_2}{x_1}\right) + x_2 \sin\left(\arctan \frac{x_2}{x_1}\right) = \pm|x|.$$

特征方程与 Cauchy 问题. 与一阶线性 PDE 和拟线性 PDE 类似, 为了在曲线上计算未知函数, 设 $z(t) = u(x(t)), p(t) = Du(x(t))$. 令

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = F_{p_j}(x(t), z(t), p(t)), \quad 1 \leq j \leq n.$$

从而有

$$\frac{dz(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n u_{x_j}(x(t)) \frac{dx_j(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j(t) F_{p_j}(x(t), z(t), p(t)) = D_p F(x(t), z(t), p(t)) \cdot p(t),$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_j(t)}{dt} &= \sum_{k=1}^n u_{x_j x_k}(x(t)) \frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n u_{x_j x_k} F_{p_k}(x(t), z(t), p(t)) \\ &= -F_{x_j}(x(t), z(t), p(t)) - F_z(x(t), z(t), p(t)) p_j(t).\end{aligned}$$

由上述可得如下特征方程:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = D_p F(x(t), z(t), p(t)) \\ \frac{dz(t)}{dt} = D_p F(x(t), z(t), p(t)) \cdot p(t) \\ \frac{dp(t)}{dt} = -D_x F(x(t), z(t), p(t)) - D_z F(x(t), z(t), p(t)) \cdot p(t) \end{cases}$$

上述特征方程包含了 $2n + 1$ 个常微分方程.

例 5.10 (Hamilton-Jacobi 方程). $F(x, t, u, D_x u, u_t) = u_t + H(x, D_x u) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

解. 令 $y = (x, t)$, $z = u(x, t)$, $p = D_x u$, $p_{n+1} = u_t$, $q = (p, p_{n+1})$, 则有

$$F(y, z, q) = p_{n+1} + H(x, p), \quad D_y F = (D_x H(x, p), 0), \quad D_z F = 0, \quad D_q F = (D_p H(x, p), 1).$$

从而得到以下特征方程:

$$\begin{cases} \frac{dx(s)}{ds} = D_p H(x(s), p(s)) \\ \frac{dz(s)}{ds} = D_p H(x(s), p(s)) \cdot p(s) - H(x(s), p(s)) \\ \frac{dp(s)}{ds} = -D_x H(x(s), p(s)) \end{cases}$$

例 5.11. 求解 Cauchy 问题 $\begin{cases} u_x u_y = u, & x > 0 \\ u|_{x=0} = y^2 \end{cases}$

解. 令 $z = u(x, y)$, $p_1 = u_x$, $p_2 = u_y$, $p = (p_1, p_2)$, 则 $F(x, y, z, p) = p_1 p_2 - z = 0$, 特征方程为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = p_2, & \frac{dy(t)}{dt} = p_1 \\ \frac{dz(t)}{dt} = 2p_1 p_2 \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = p_1, & \frac{dp_2(t)}{dt} = p_2 \end{cases}$$

由此可得通解

$$\begin{aligned}p_1(t) &= C_1 e^t, \quad p_2(t) = C_2 e^t, \\ x(t) - C_2(e^t - 1), \quad y(t) &= y_0 + C_1(e^t - 1), \\ z(t) &= z_0 + C_1 C_2(e^{2t} - 1) = y_0^2 + C_1 C_2(e^{2t} - 1).\end{aligned}$$

由边界条件可得

$$C_2 = p_2|_{t=0} = u_y|_{t=0} = 2y_0, \quad C_1 C_2 = p_1 p_2|_{t=0} = u|_{t=0} = z_0 = y_0^2 \Rightarrow C_1 = \frac{y_0}{2}.$$

代入通解可得

$$x(t) = 2y_0(e^t - 1), \quad y(t) = \frac{y_0}{2}(e^t + 1), \quad z(t) = y_0^2 e^{2t}.$$

因此 $y_0 = y - \frac{x}{4}$, $e^t = \frac{x + 4y}{4y - x}$. 故 Cauchy 问题的解为

$$u(x, y) = z = \left(y - \frac{x}{4}\right)^2 \left(\frac{x + 4y}{4y - x}\right)^2.$$

第六章 PDE 的起源与分类

6.1 三类典型 PDE 的推导

首先罗列一些重要的高阶偏微分方程:

1. 波动方程: $u_{tt} = c^2 \Delta u$, 其中 $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 为 Laplace 算子.
2. 扩散方程 (热传导方程): $u_t = k \Delta u$, 其中 $k > 0$.
3. 位势方程: $\Delta u = f$ (Poisson 方程), 若 $f \equiv 0$, 方程 $\Delta u = 0$ 称为 Laplace 方程或调和方程.
4. Schrödinger 方程: $i u_t + \Delta u = q u$, $i^2 = -1$.
5. 极小曲面方程: $(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0$.
6. KdV 方程: $u_t + 6u u_x + u_{xxx} = 0$.
7. Monge-Ampere 方程: $\det(D^2 u) - k(x)(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{n+2}{2}} = 0$.
8. Maxwell 方程组:
$$\begin{cases} \mathbf{E}_t = \nabla \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}_t = -\nabla \times \mathbf{E} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$
9. Navier-Stokes 方程:
$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot D \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} = -D \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$
10. Einstein 方程: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$.

其中 1,2,3 称为三类典型偏微分方程. 以下给出三类典型 PDE 的推导.

波动方程的推导. 首先考虑一维波动方程的推导. 设 x 轴为平衡位置, $u(x, t)$ 表示质点 x 在时刻 t 的横向位移. 任取一段微元 $[x, x + dx]$, 所受竖直方向外力为 \mathbf{G} , ρ 为密度. 由牛顿运动定律可得

$$\mathbf{T}(x + dx, t) - \mathbf{T}(x, t) + \mathbf{G} = \rho dx \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$$

对张力 \mathbf{T} 作正交分解, 设 T_1, T_2 为 \mathbf{T} 的水平分量和竖直分量. 则上式化为:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + g(x, t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (6.1.1)$$

其中 $g(x, t)$ 为外力密度. 由于张力沿切向作用, 故

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\partial u}{\partial x} = \tan \theta. \quad (6.1.2)$$

由 (6.1.1), (6.1.2) 可得

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_1(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t).$$

由物理假设, $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1$, 从而 $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = T_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \approx T_1$ 为常数, 从而有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t).$$

其中 $c = \sqrt{\frac{T_1}{\rho}}$ 为波速, $f(x, t) = \frac{g(x, t)}{\rho}$ 为单位外力, 这就是一维波动方程.

考虑三维空间中的弹性体的自由微小振动. 任取子区域 V , 设 V 所受外力为 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, 单位外法向为 $\boldsymbol{\nu}$. 取 $\rho = 1$, 则由牛顿运动定律和 Gauss 定理可得

$$-\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = -\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} d\mathbf{r} = \frac{d^2}{dt^2} \iiint_V u dV = \iiint_V \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dV.$$

此处默认所有函数连续可微. 由 V 的任意性得 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\operatorname{div} \mathbf{F}$. 当 $|u| \ll 1$ 时, 由胡克定律得外力与变形成正比, 从而 $\mathbf{F} = -c^2 \nabla u$. 因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \operatorname{div} \nabla u = c^2 \Delta u.$$

热方程的推导. 设 $u(x, t)$ 为物体在 x 位置 t 时刻的温度, $\mathbf{J}(x, t)$ 为热流密度矢量, $f(x, t)$ 为热流的变化率. 设比热, 密度均为 1. 任取子区域 V , $\boldsymbol{\nu}$ 为单位外法向, 则

$$\iiint_V u_t dV = \frac{d}{dt} \iiint_V u dV = -\iint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\nu} dS + \iiint_V f(x, t) dV = \iiint_V (-\operatorname{div} \mathbf{J} + f) dV.$$

其中最后一个等式由 Gauss 公式得到, 从而 $u_t = -\operatorname{div} \mathbf{J} + f$. 由 Fourier 热传导定律可得 $\mathbf{J} = -k \nabla u$, $k > 0$, 从而得到

$$u_t = k \Delta u + f.$$

这是三维热传导方程.

位势方程的推导. 考虑真空中的电场分布. 设 $f(x)$ 为电荷密度, $\mathbf{E}(x)$ 为电场强度, ε_0 为介电常数. 任取子区域 V , 设 $\boldsymbol{\nu}$ 为单位外法向, 由 Gauss 定理可得

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nu} dS \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V f(x) dV = \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nu} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV.$$

因此 $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} f(x)$. 由法拉第定律及 Stoke 公式可得 \mathbf{E} 无旋, 从而存在势函数 $\varphi(x)$, 使得 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. 故

$$-\operatorname{div} \nabla\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} f(x) \Rightarrow \Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} f(x).$$

这就是 Poisson 方程. $f \equiv 0$ 时化为 Laplace 方程 (调和方程).

6.2 二阶 PDE 的分类与标准形

一般理论

n 个变量的二阶偏微分方程的一般形式如下:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + f(x, u, Du) = 0. \quad (6.2.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$ 为对称阵. 称 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j}$ 为方程 (6.2.1) 的**线性主部**, 为判定 (6.2.1) 类型的核心.

定义 6.1. 设 $x^0 \in \mathbb{R}^n$, 可按照如下方法对方程 (6.2.1) 进行分类.

1. $A(x^0)$ 的特征值均非零且仅有一个与其余特征值异号, 则 (6.2.1) 为**双曲型方程**.
2. $A(x^0)$ 的特征值均非零且异号特征值个数大于 1, 则 (6.2.1) 为**超双曲型方程**.
3. $A(x^0)$ 有一个特征值为 0, 则 (6.2.1) 为**抛物型方程**.
4. $A(x^0)$ 特征值均非零且同号, 则 (6.2.1) 为**椭圆型方程**.

双曲型方程代表: 波动方程; 抛物型方程代表: 扩散方程; 椭圆型方程代表: 位势方程.

定义 6.2 (标准型). 方程 (6.2.1) 可经过自变量的某线性变换 $\xi = \mathcal{B}x$ 得到如下方程:

$$\sum_{i=1}^m A_{ii}(x^0) u_{\xi_i \xi_i} + F(\xi, u, Du) = 0, \quad m \leq n. \quad (6.2.2)$$

其中 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, $A_{ii}(x^0) = \pm 1$, (6.2.2) 称为 (6.2.1) 在 x^0 处的**标准型**.

此处线性变换 \mathcal{B} 可逆, 但不唯一. 将一般方程化为标准型后可降低求通解难度.

两个自变量的情形

本节考虑自变量个数为 2 的情形, 一般方程如下:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \quad (6.2.3)$$

其中所有给定函数在指定区域内连续可微, 且主部系数满足 $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$. 此时 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

设两个特征值分别为 λ_1, λ_2 . 此时有 $\Delta := -\lambda_1\lambda_2 = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.

1. $\Delta > 0$ 时, $\lambda_1\lambda_2 < 0$, 方程 (6.2.3) 为双曲型;
2. $\Delta = 0$ 时, $\lambda_1\lambda_2 = 0$, 方程 (6.2.3) 为抛物型;
3. $\Delta < 0$ 时, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, 方程 (6.2.3) 为椭圆型.

下求合适的变换 $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$, 将方程 (6.2.3) 化为标准型. 设 $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, 由变换可逆得 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$. 设在此变换下的线性主部化为

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta}. \quad (6.2.4)$$

利用复合求导可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}. \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

将上述式子代入 (6.2.4) 可得

$$\begin{cases} A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\ A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\ A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2. \end{cases}$$

因此若 $\xi(x, y), \eta(x, y)$ 为一阶偏微分方程

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (6.2.5)$$

的两个特解, 则有 $A_{11} = A_{22} = 0$, 此时仅余一项. 称 (6.2.5) 为 (6.2.3) 的特征方程.

定理 6.1. 设 $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$, 则 $z = \varphi(x, y)$ 为 (6.2.5) 的解 $\Leftrightarrow \varphi(x, y) = h$ 为常微分方程

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}(dx)^2 = 0 \quad (6.2.6)$$

的通积分, 其中 h 为常数.

证明. 若 $\varphi(x, y) = h$ 为 (6.2.6) 的通积分, 不妨设 $\varphi_y \neq 0$, 对 x 微分可得 $\varphi_x + \varphi_y \frac{dy}{dx} = 0$, 从而 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$, 代入 (6.2.6) 即得 $a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0$.

反之, 若 $\varphi(x, y)$ 为 (6.2.5) 的解, 则对 $\varphi(x, y(x)) = h$ 微分可得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$, 代入 (6.2.5) 可得 $a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}(dx)^2 = 0$. \square

定义 6.3. 称 $\varphi(x, y(x)) = h$ 为 (6.2.6) 的**特征曲线**, 由此解出的 $\frac{dy}{dx}$ 称为 (6.2.3) 的**特征方向**.

由二次方程求根式可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (6.2.7)$$

双曲型方程 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, (6.2.7) 有两个相异的特征方向. 两族实特征线 $\varphi_1(x, y) = h_1$, $\varphi_2(x, y) = h_2$ 满足 $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)} \neq 0$. 令 $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$, 由定理可得 $A_{11} = A_{22} = 0$, $A_{12} \neq 0$. 因此方程 (6.2.3) 化为

$$u_{\xi\eta} + \frac{f}{2A_{12}} := u_{\xi\eta} + F_1(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) = 0,$$

该式称为双曲型第二标准型. 再令 $s = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$, $t = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$, 则上述方程化为

$$u_{tt} - u_{ss} + F(t, s, u, u_t, u_s) = 0.$$

称为双曲型第一标准型.

抛物型 此时 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. 若 $a_{11} = 0$, 则此时 $a_{12} = 0$, 方程 (6.2.3) 即为标准型. 若 $a_{11} \neq 0$, 不妨设 $a_{12}, a_{11}, a_{22} > 0$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} > 0$, 积分后得到一族实特征线 $\varphi(x, y) = h$. 令 $\xi = \varphi(x, y)$, 另取 $\eta = \eta(x, y)$ 满足 $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$, 例如可以取 $\eta = x$ 或 y . 则

$$A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{12}}\xi_y)^2 = 0,$$

$$A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{12}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{12}}\eta_y) = 0.$$

另一方面, $A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \neq 0$, 从而方程 (6.2.3) 化为标准型

$$u_{\eta\eta} + \frac{f}{A_{22}} := u_{\eta\eta} + F(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) = 0.$$

椭圆型 此时 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. 由 (6.2.7) 得两组共轭复特征线

$$\varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y) = h_1, \quad \varphi_1(x, y) - i\varphi_2(x, y) = h_2,$$

满足 $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)} \neq 0$. 令 $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$, 将 $\xi + i\eta$ 代入 (6.2.5) 可得

$$A_{11} = A_{22} \neq 0, \quad A_{12} = 0.$$

从而方程 (6.2.3) 化为标准型

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{f}{A_{11}} := u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

三类典型二阶 PDE 的主要特性. 以两个自变量为例.

1. 波动方程: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, 双曲型方程, 用于描述波的传播现象. 特性: 对时间可逆, 不衰减, 最大值原理不成立.
2. 扩散方程: $u_t - k u_{xx} = 0$, 抛物型方程, 反映热的传导, 物质的扩散等不可逆现象. 特性: 随时间衰减, 瞬间光滑化, 最大值原理成立.
3. 调和方程: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, 椭圆型方程, 描述平衡或定常状态. 特性: 最大值原理成立, 不会发生剧变.

例 6.1 (Tricomi 方程). 设区域 $D \subset \mathbb{R}^2$, 讨论空气动力学 Tricomi 方程 $y u_{xx} + u_{yy} = 0$ 的类型及上半平面的标准型.

解. 判别式 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$, 由此可得: 在上半平面 Tricomi 方程为椭圆型, 下半平面 Tricomi 方程为双曲型, 而在 x 轴上 Tricomi 方程为抛物型. 在上半平面的特征方程为

$$y(dy)^2 + (dx)^2 = (dx + i\sqrt{y}dy)(dx - i\sqrt{y}dy) = 0.$$

取 $dx + i\sqrt{y}dy = 0$ 的复解 $x + \frac{2i}{3}y^{\frac{3}{2}} = h$. 令 $\xi = x$, $\eta = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$, 则标准型为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0.$$

例 6.2. 判断下列常系数 PDE 的类型并化简:

$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0.$$

解. 此时 $a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{22} = -3 \Rightarrow \Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 > 0$, 因此该方程为双曲型方程. 特征方程为

$$(dy)^2 + 2dx dy - 3(dx)^2 = 0,$$

由此得 $\frac{dy}{dx} = -3$ 和 $\frac{dy}{dx} = 1$, 解得两条特征线 $3x + y = h_1$ 和 $y - x = h_2$. 令 $\xi = 3x + y$, $\eta = y - x$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

代入原方程可得

$$-16 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 12 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 4 \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

即有 $u_{\xi\eta} = \frac{3}{4}u_{\xi} + \frac{1}{4}u_{\eta}$. 进一步化简, 令 $u = v(\xi, \eta)e^{\lambda\xi + \mu\eta}$, 则

$$\begin{cases} u_{\xi} = (v_{\xi} + \lambda v)e^{\lambda\xi + \mu\eta} \\ u_{\eta} = (v_{\eta} + \mu v)e^{\lambda\xi + \mu\eta} \\ u_{\xi\eta} = (v_{\xi\eta} + \lambda v_{\eta} + \mu v_{\xi} + \lambda\mu v)e^{\lambda\xi + \mu\eta} \end{cases}$$

代入方程 $u_{\xi\eta} = \frac{3}{4}u_{\xi} + \frac{1}{4}u_{\eta}$ 可得

$$v_{\xi\eta} + \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)v_{\eta} + \left(\mu - \frac{3}{4}\right)v_{\xi} + \left(\lambda\mu - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4}\mu\right)v = 0.$$

取 $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{3}{4}$, 可得 $v_{\xi\eta} = \frac{3}{16}v$.

例 6.3. 判断下列方程的类型并化为标准型求解:

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$$

解. 计算可得 $\Delta = (xy)^2 - x^2 y^2 = 0$, 故方程为抛物型. 特征方程为

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

由此可得 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, 解得方程的一组特征线为 $\frac{y}{x} = h$. 作变换 $\xi = \frac{y}{x}, \eta = y$, 则原方程化为标准型 $u_{\eta\eta} = 0$, 积分两次可得通解

$$u = \eta F(\xi) + G(\xi) = yF\left(\frac{y}{x}\right) + G\left(\frac{y}{x}\right).$$

例 6.4. 判断一下偏微分方程的类型并化简:

$$u_{xx} - 2u_{xy} \cos x - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0.$$

解. 此时 $a_{11} = 1, a_{12} = -\cos x, a_{22} = -(3 + \sin^2 x)$. 则 $\Delta = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0$, 故方程为双曲型. 特征方程为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \cos x \frac{dy}{dx} - (3 + \sin^2 x) = 0.$$

由此可得 $\frac{dy}{dx} = -\cos x - 2$ 或 $\frac{dy}{dx} = -\cos x + 2$, 解得两条特征线为

$$y + \sin x + 2x = h_1, \quad y + \sin x - 2x = h_2.$$

令 $\xi = y + \sin x + 2x$, $\eta = y + \sin x - 2x$, 原方程化为

$$u_{\xi\eta} + \frac{\xi + \eta}{32}(u_{\xi} + u_{\eta}) = 0.$$

再作变量代换 $s = \frac{\xi + \eta}{2}$, $t = \frac{\xi - \eta}{2}$ 可得

$$u_{tt} - u_{ss} - \frac{su_s}{4} = 0.$$

例 6.5. 求解
$$\begin{cases} 4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1 + y^2}(2u_x - u_y) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

解. 此时 $a_{11} = 4y^2$, $a_{12} = 1 - y^2$, $a_{22} = -1$, 从而 $\Delta = (1 + y^2)^2 > 0$, 方程为双曲型. 特征方程为

$$4y^2(dy)^2 - 2(1 - y^2)dx dy - (dx)^2 = 0.$$

由此可得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y^2}$, 解得两条特征线 $x + 2y = h_1$ 和 $x - \frac{2y^3}{3} = h_2$. 令 $\xi = x + 2y$, $\eta = x - \frac{2y^3}{3}$, 方程化为 $u_{\xi\eta} = 0$. 两次积分得

$$u = F(\xi) + G(\eta) = F(x + 2y) + G\left(x - \frac{2y^3}{3}\right).$$

由初值条件可得

$$\varphi(x) = u(x, 0) = F(x) + G(y), \quad \psi(x) = u_y(x, 0) = 2F'(x),$$

从而

$$F(x) = F(0) + \frac{1}{2} \int_0^x \psi(t) dt, \quad G(x) = \varphi(x) - F(0) - \frac{1}{2} \int_0^x \psi(t) dt.$$

因此原问题的解为

$$u(x, y) = \varphi\left(x - \frac{2y^3}{3}\right) + \frac{1}{2} \int_{x - \frac{2y^3}{3}}^{x+2y} \psi(t) dt.$$

多个自变量的情形

n 个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式如下:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x). \quad (6.2.8)$$

通过合同变换可得

$$A = (a_{ij}(x))_{n \times n} \rightarrow BAB^T = \begin{pmatrix} i_1 & & & \\ & i_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & i_n \end{pmatrix}.$$

其中 B 可逆, $i_k \in \{1, 0, -1\}$. 设正惯性指标 p 为 $\{i_1, \dots, i_n\}$ 含 1 的个数, 负惯性指标 q 为 $\{i_1, \dots, i_n\}$ 含 -1 的个数, 则 $p, q, n - p - q \geq 0$. 则依定义可得

1. $p > 0, q > 0, p + q = n$, 则 (6.2.8) 为**超双曲型**; 特别地, 若 $p = 1, q = n - 1$ 或 $p = n - 1, q = 1$, 则 (6.2.8) 为**双曲型**.
2. $p > 0, q > 0, p + q < n$, 则 (6.2.8) 为**超抛物型**; 若 $p = n - 1, q = 0$ 或 $p = 0, q = n - 1$, 则 (6.2.8) 为**抛物型**.
3. 若 $p = n, q = 0$ 或 $p = 0, q = n$, 则 (6.2.8) 为**椭圆型**.

通过可逆线性变换 $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 将 (6.2.8) 化为标准型

$$\sum_{j=1}^p u_{\xi_j \xi_j} - \sum_{j=p+1}^{p+q} u_{\xi_j \xi_j} + \sum_{i=1}^n B_i u_{\xi_i} + C u = F.$$

例 6.6. 判断以下偏微分方程的类型并化简:

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0.$$

解. 此时 $a_{11} = 1, a_{12} = a_{21} = 1, a_{22} = 2, a_{13} = a_{31} = -1, a_{33} = 6$, 从而

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow BAB^T = I_3.$$

因此方程为椭圆型. 作可逆变换

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - x \\ x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \end{pmatrix}$$

代入整理可得椭圆标准型为 $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0$.

第七章 波与扩散

7.1 一维波动方程

本节考虑波动方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \quad (7.1.1)$$

其中 $c > 0$ 为波速. 以下分别用三种方法推导 (7.1.1) 的解.

方法一. 波动算子分解 这是最经典、重要的求解方法.

首先定义波动算子: $\square := \partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)$. 设 $v := (\partial_t - c\partial_x)u$, 由 (7.1.1) 中方程可得 $(\partial_t + c\partial_x)v = 0$, 转化为传输方程. 于是我们首先求传输方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} W_t + bW_x = \alpha(x, t) \\ W|_{t=0} = \beta(x) \end{cases} \quad (7.1.2)$$

的解, 其中 b 为常数. 任意固定 x, t , 构造函数 $z(s) = W(x + bs, t + s)$, 则

$$z'(s) = W_t(x + bs, t + s) + bW_x(x + bs, t + s) = \alpha(x + bs, t + s).$$

积分可得

$$\begin{aligned} \int_{-t}^0 z'(s) ds &= \int_{-t}^0 \alpha(x + bs, t + s) ds = \int_0^t \alpha(x + b(s-t), t) ds, \\ \int_{-t}^0 z'(s) ds &= z(0) - z(-t) = W(x, t) - \beta(x - bt). \end{aligned}$$

因此

$$W(x, t) = \beta(x - bt) + \int_0^t \alpha(x + b(s-t), s) ds. \quad (7.1.3)$$

由 (7.1.3) 和 v 的边界条件 $v|_{t=0} = (\partial_t - c\partial_x)u|_{t=0} = \psi(x) - c\varphi'(x)$ 可得 $v(t, x) = \psi(x - ct) - c\varphi'(x - ct)$. 从而得到关于 u 的传输方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} (\partial_t - c\partial_x)u = \psi(x - ct) - c\varphi'(x - ct) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

代入公式 (7.1.3) 可得 (7.1.1) 的解为

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \quad (7.1.4)$$

(7.1.4) 称为 **d'Alembert 公式**.

方法二. 换元法 令 $\xi = x - ct, \eta = x + ct$, 则 $x = \frac{\xi + \eta}{2}, t = \frac{\eta - \xi}{2c}$, 因此

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} = -\frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{cases}$$

从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{4c^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{4c^2} \square u = 0.$$

由此可得

$$u = f(\xi) + g(\eta) = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (7.1.5)$$

(7.1.5) 称为 (7.1.1) 的 **行波解**, 其中 $f(x - ct)$ 称为左行波, $g(x + ct)$ 称为右行波. 由初始条件可得

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ cf'(x) - cg'(x) = \psi(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \psi(s) ds + A,$$

A 为积分常数. 因此

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x) + \frac{1}{c} \int_0^x \psi(s) ds + A \right), \\ g(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x) - \frac{1}{c} \int_0^x \psi(s) ds - A \right). \end{cases}$$

代入 (7.1.5) 可得

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) = \frac{1}{2} (\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

方法三. Fourier 变换法 首先对 Fourier 变换进行相关回顾.

定义 7.1 (Fourier 积分). 设函数 $f(x)$ 在 $[-L, L]$ 上满足 Dirichlet 定理的条件, 令 $\lambda_n = n\omega := \frac{n\pi}{L}$, $\Delta\lambda = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\pi}{L}$, 利用 Fourier 级数的复数形式并取 $L \rightarrow +\infty$, 可得

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{L \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega x} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) e^{-in\omega \xi} d\xi e^{in\omega x} \\ &= \lim_{L \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L}{\pi} \cdot \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) e^{-i\lambda_n \xi} d\xi e^{i\lambda_n x} \cdot \Delta\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi. \end{aligned}$$

上述积分称为 $f(x)$ 的 **Fourier 积分**.

定理 7.1 (Fourier 定理). 若函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 的任何有限区间上分段连续且在 \mathbb{R} 上绝对可积, 则对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 成立

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

若 f 在 x 处连续, 则有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi.$$

Fourier 定理提供了 Fourier 变换的反演公式, 其中 f 绝对可积的条件保证了广义积分的收敛性.

定义 7.2 (Fourier 变换与逆变换). 在 Fourier 积分公式中令 $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi$, 称 $F(\lambda)$ 为 $f(x)$ 的 **Fourier 变换或像函数**, 一般记作 $\hat{f}(\lambda)$ 或 $F[f](\lambda)$. 由 Fourier 定理得 $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$, 称 $f(x)$ 为 $F(\lambda)$ 的 **Fourier 逆变换或像原函数**, 记为 $\check{F}(x)$ 或 $F^{-1}[F](x)$.

性质 7.1. Fourier 变换有一些基本性质, 罗列如下: (设 f 和 g 在 \mathbb{R} 上有 Fourier 变换)

1. 线性: $F[c_1f + c_2g] = c_1F[f] + c_2F[g]$, c_1, c_2 为任意常数.
2. 频移: $F[f(x)e^{-i\lambda_0x}](\lambda) = F[f](\lambda + \lambda_0)$, λ_0 为任意常数.
3. 微分: 若 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(m)}(x) = 0$, $f^{(m)}(x)$ 有 Fourier 变换, $0 \leq m \leq k$, 则 $F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k F[f]$.
4. 幂乘: 若 $xf(x)$ 有 Fourier 变换, 则 $F[xf(x)] = i \frac{dF[f](\lambda)}{d\lambda}$.
5. 卷积: 若 f, g 在 \mathbb{R} 上绝对可积, 则 $F[f * g] = F[f]F[g]$, $*$ 表示函数的卷积.
6. Parseval 等式: 若 f 在 \mathbb{R} 上可积且平方可积, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda.$$

下面考虑如何利用 Fourier 变换求解 Cauchy 问题 (7.1.1). 对空间变量 x 作 Fourier 变换, 令 $\hat{u} = \hat{u}(\lambda, t) = F[u(x, t)]$, $\hat{\varphi}(\lambda) = F[\varphi(x)](\lambda)$, $\hat{\psi}(\lambda) = F[\psi(x)](\lambda)$, 则

$$\begin{cases} \frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} - c^2(i\lambda)^2 \hat{u} = 0, & \lambda \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda), & \frac{d\hat{u}}{dt}(\lambda, 0) = \hat{\psi}(\lambda). \end{cases}$$

这是二阶常系数常微分方程, 它的通解为 $\hat{u}(\lambda, t) = A(\lambda)e^{ic\lambda t} + B(\lambda)e^{-ic\lambda t}$. 由边界条件可得

$$A(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\hat{\varphi}(\lambda) + \frac{\hat{\psi}(\lambda)}{ic\lambda} \right), \quad B(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\hat{\varphi}(\lambda) - \frac{\hat{\psi}(\lambda)}{ic\lambda} \right).$$

代入通解, 由 Euler 公式可得

$$\hat{u}(\lambda, t) = \frac{1}{2} \left(\hat{\varphi}(\lambda) + \frac{\hat{\psi}(\lambda)}{ic\lambda} \right) e^{ic\lambda t} + \frac{1}{2} \left(\hat{\varphi}(\lambda) - \frac{\hat{\psi}(\lambda)}{ic\lambda} \right) e^{-ic\lambda t} = \hat{\varphi}(\lambda) \cos c\lambda t + \frac{\hat{\psi}(\lambda)}{c\lambda} \sin c\lambda t.$$

利用反演公式可得 (7.1.1) 的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F^{-1}[\hat{u}(\lambda, t)] = F^{-1} \left[\hat{\varphi}(\lambda) \cos c\lambda t + \frac{\hat{\psi}(\lambda)}{c\lambda} \sin c\lambda t \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\lambda) \cos c\lambda t e^{i\lambda x} d\lambda + \frac{1}{2c\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\psi}(\lambda)}{\lambda} \sin c\lambda t e^{i\lambda x} d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\lambda)(e^{ic\lambda t} + e^{-ic\lambda t})e^{i\lambda x} d\lambda + \frac{1}{4c\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\psi}(\lambda)}{\lambda}(e^{ic\lambda t} - e^{-ic\lambda t})e^{i\lambda x} d\lambda \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\lambda)(e^{i\lambda(x+ct)} + e^{i\lambda(x-ct)})d\lambda + \frac{1}{4c\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\psi}(\lambda)}{i\lambda}(e^{i\lambda(x+ct)} - e^{i\lambda(x-ct)})d\lambda \\
&= \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{4c\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\lambda)d\lambda \int_{x-ct}^{x+ct} e^{i\lambda\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{4c\pi} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\lambda)e^{i\lambda\xi} d\lambda \\
&= \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

推论 7.1. 设 $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$ 且均有界, 则 $\forall T > 0$, Cauchy 问题 (7.1.1) 的解在 $\mathbb{R} \times [0, T]$ 上稳定.

证明. 设 u_i 为对应初值 φ_i, ψ_i 的解, $i = 1, 2$. 令 $w = u_1 - u_2$, 设 $\delta > 0$, $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$, $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta, \forall x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$. 则

$$\begin{aligned}
|w| &\leq \frac{1}{2}(|\varphi_1(x+ct) - \varphi_2(x+ct)| + |\varphi_1(x-ct) - \varphi_2(x-ct)|) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds \\
&\leq \delta + \frac{1}{2c} \cdot 2ct\delta \leq (1+T)\delta.
\end{aligned}$$

因此 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{1+T}$, 此时有 $|w| < \varepsilon$, 从而 (7.1.1) 的解稳定. \square

点的依赖区间 由 d'Alembert 公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

可得 $u(x_0, t_0)$ 完全由 φ, ψ 在区间 $I = [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ 上的值唯一确定, 称 I_0 为 (x_0, t_0) 的**依赖区间**.

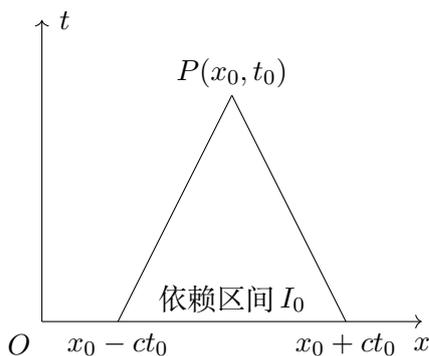
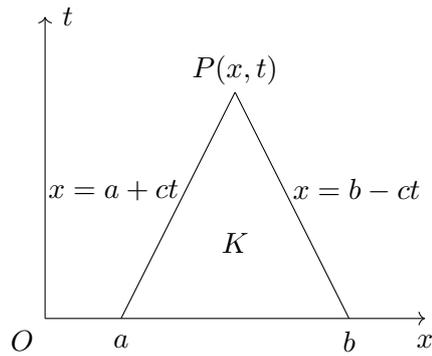
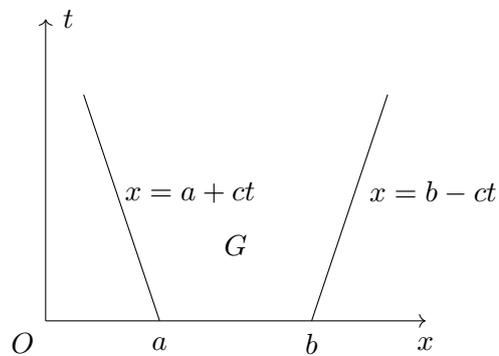


图 7.1: 点 (x_0, t_0) 的依赖区间 I_0

区间的决定区域 x 轴上的区间 $[a, b]$ 及过点 a, b 的两条特征线 $(x = a + ct, x = b - ct)$ 围成的三角形区域 K 称为区间 $[a, b]$ 的**决定区域**, u 在 K 上的取值完全决定于 $[a, b]$ 上的初值.

图 7.2: 区间 $[a, b]$ 的决定区域 K

区间的影响区域 x 轴上的区间 $[a, b]$ 及过点 a, b 的两条特征线 ($x = a - ct, x = b + ct$) 围成的无界梯形区域 G 称为区间 $[a, b]$ 的**影响区域**. 因为 u 在 G 上的取值总被 $[a, b]$ 上的值影响.

图 7.3: 区间 $[a, b]$ 的影响区域 G

利用 d'Alembert 公式, 可以发现 O_{xt} 平面上的两条特征线 $x \pm ct = \text{const}$ 在研究一维波动方程中有重要作用, 因此行波法又被称为**特征线法**.

7.2 一维热方程

本节考虑一维热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad k > 0. \quad (7.2.1)$$

的性质与求解. 设区域 $Q_T = (0, l) \times (0, T] \subset \mathbb{R}^2$, $l, T > 0$, 并定义 $\Gamma_T = \overline{Q_T} \setminus Q_T$, 即底线和两侧线.

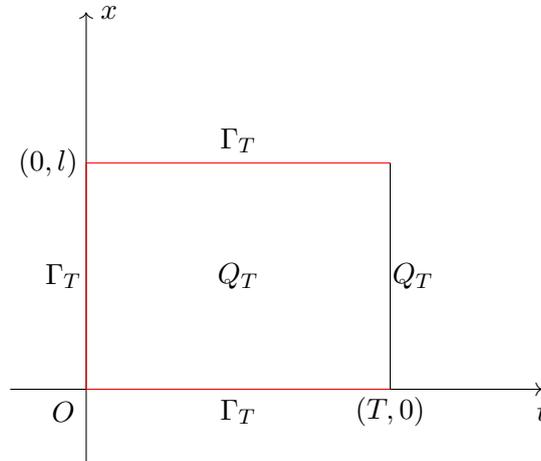


图 7.4: 区域 Q_T 和边界 Γ_T

定理 7.2 (最大值原理, 极值原理). 设 $u(t, x)$ 是方程 (7.2.1) 的解, 则 u 在 $\overline{Q_T}$ 上的最值必在边界上取得, i.e.,

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| = \max_{\Gamma_T} |u|.$$

证明. 只证明最大值情形. 由 $\overline{Q_T} \supset \Gamma_T$ 可得 $\max_{\overline{Q_T}} u \geq \max_{\Gamma_T} u$. 假设 LHS > RHS. 由 u 的连续性可得, $\exists \varepsilon > 0$, 函数 $v(t, x) := u(t, x) + \varepsilon x^2$ 满足 $\max_{\overline{Q_T}} v > \max_{\Gamma_T} v$. 设 $(t_0, x_0) \in \overline{Q_T}$ 是 v 的最大值点, 则由假设可得 $(x_0, t_0) \notin \Gamma_T$, 即 $x_0 \in (0, l)$, $t_0 \in (0, T]$. 由 (t_0, x_0) 处 u 的 Hessian 矩阵负定可得 $\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{(t_0, x_0)} \leq 0$. 在区间 $(0, T]$ 上, (t_0, x_0) 取得最大值的情况如下:

1. (t_0, x_0) 是 $v(t, x)$ 的驻点, 则 $\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{(t_0, x_0)} = 0$;
2. $v(t, x)$ 在 $t = T$ 处取得最大值, 则存在充分小的正实数 δ , $w(t) := v(t, x_0)$ 在区间 $[T - \delta, T]$ 上递增, 从而 $\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{(t_0, x_0)} = w'(T) \geq 0$.

综上, 可得 $\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{(t_0, x_0)} \geq 0$. 但是

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{(t_0, x_0)} = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(t_0, x_0)} = k \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(t_0, x_0)} = k \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{(t_0, x_0)} - 2k\varepsilon \leq -2k\varepsilon < 0,$$

矛盾! 从而 $\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$. □

下面我们给出最大值原理的一个应用, 并介绍新的方法: 能量法.

定理 7.3. 一维热方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(t, x), & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=0} = g(t), u|_{x=l} = h(t) \end{cases} \quad (7.2.2)$$

至多只有一个解.

证明. 方法一: 最值原理. 若 (7.2.2) 有两个解 u_1, u_2 , 则 $w := u_1 - u_2$ 满足

$$\begin{cases} w_t = kw_{xx} \\ w|_{t=0} = 0, w|_{x=0, l} = 0 \end{cases}$$

由最值原理可得 $\max_{\overline{Q_T}} |w| = \max_{\Gamma_T} |w| = 0$, 从而 $w(t, x) \equiv 0, \forall (t, x) \in \overline{Q_T}$, 即 $u_1 \equiv u_2$.

方法二: 能量法. 该方法适用于证明大部分边值问题的解的唯一性. 考虑能量函数 $E(t) := \frac{1}{2} \int_0^l w^2(t, x) dx$, 其中函数 w 的定义同方法一. 则

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (w^2) dx = \int_0^l w \cdot w_t dx = k \int_0^l w \cdot w_{xx} dx \\ &= k \left(ww_x \Big|_0^l - \int_0^l w_x^2 dx \right) = -k \int_0^l w_x^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

从而 $0 \leq E(t) \leq E(0) = 0$, 故 $E(t) \equiv 0$, 因此 $w(t) \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$. □

推论 7.2. 边值问题 (7.2.2) 在 L^∞ 模和 L^2 模¹下稳定, 进而是适定的.

证明. 不失一般性, 设 $f \equiv g \equiv h \equiv 0$, 设 u_1, u_2 为对应 φ_1, φ_2 的解. 则 $w := u_1 - u_2$ 满足最值原理, 从而

$$\max_{0 \leq x \leq l} |w| \leq \max_{\Gamma_T} |w| = \max_{0 \leq x \leq l} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^\infty_{[0, l]}}.$$

从而 (7.2.2) 在 L^∞ -模下稳定.

由唯一性的证明可得 $\int_0^l w^2(t, x) dx$ 关于 t 递减, 因此

$$\int_0^l w^2(t, x) dx \leq \int_0^l (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))^2 dx = \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2_{[0, l]}}^2.$$

□

¹在连续函数空间 $C([a, b])$ 上, 可以定义 $L^p (1 \leq p < \infty)$ 范数

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

以及 L^∞ 范数

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

(在一般的 L^∞ 空间内, L^∞ 范数定义为 $|f|$ 的本质上确界, 这将在春季学期的实分析课程中讲授). 各位可以验证, 对任意 $1 \leq p \leq \infty$, $(C([a, b]), \|\cdot\|_p)$ 是赋范空间. 额外思考: 对什么样的 p , 上述空间成为 Banach 空间 (即赋范向量空间 & 范数完备)? 对于 $0 < p < 1$, 上述空间还是赋范空间吗?

以下考虑热方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (7.2.3)$$

的解. 首先证明如下唯一性定理:

定理 7.4 (唯一性定理). 若 Cauchy 问题 (7.2.3) 存在有界解 $u(t, x)$, 则 u 在 R 上唯一, 其中 $R = \{(x, t) \mid |x - x_0| \leq L, 0 \leq t \leq t_0\} \subset \mathbb{R}^2$ 为闭矩形.

注 在 Evans 书中, 唯一性定理的条件为 $|u| \leq \alpha e^{\beta|x|^2}$, $\alpha, \beta > 0$, 此处 u 满足更强的有界条件.

证明. 我们只需证明 $\varphi(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 时, Cauchy 问题 (7.2.3) 在 R 上有唯一解 $u \equiv 0$. 任意取定 $(t_0, x_0) \in R$, 设 $M := \sup_R |u|$, 构造函数

$$v(t, x) = \frac{2Mk}{L^2} \left(t + \frac{|x - x_0|^2}{2k} \right),$$

若不等式 $|u| \leq v$ 成立, 则

$$|u(t_0, x_0)| \leq v(t_0, x_0) = \frac{2Mk}{L^2} t_0 \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} u(x_0, t_0) = 0.$$

下证明 $|u| \leq v$, 即 $-v \leq u \leq v$, 仅证 $u \leq v$. 令 $w := u - v$, 则

$$w_t = u_t - v_t = u_t - \frac{2Mk}{L^2}, \quad w_{xx} = u_{xx} - v_{xx} = u_{xx} - \frac{2M}{L^2}.$$

从而 $w_t = kw_{xx}$ on R . 另一方面,

$$w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} \leq 0, \quad w|_{|x-x_0|=L} = u|_{|x-x_0|=L} - v|_{|x-x_0|=L} \leq M - M = 0,$$

由最值原理可得 $\max_R w = \max_{\partial R} w \leq 0 \Rightarrow w = u - v \leq 0$. □

下面我们求解 Cauchy 问题 (7.2.3), 首先介绍 **Dirac 函数** 的定义.

1. 物理定义: 满足性质 (1). $\delta(x) = 0 (x \neq 0)$, $\delta(0) = +\infty$; (2). $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1$ 的函数 δ , 例如单位点电荷在空间中的电荷密度分布满足 Dirac 函数.

2. 数学定义: $\forall v(x) \in C(\mathbb{R})$ (称为检验函数), 若函数 δ 使得线性泛函 $\langle \delta, v \rangle := \int_{\mathbb{R}} \delta(x)v(x) dx = v(0)$, 则称 δ 为 **δ 函数** 或 **广义函数**. 事实上, $\delta(x) = H'(x)$, 其中 $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

性质 7.2 (广义函数的伸缩性). 若 δ 为广义函数, 则 $\forall \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mu\delta(\mu x) = \delta(x)$.

定义 7.3 (基本解). 满足初值问题

$$\begin{cases} S_t = kS_{xx} \\ \lim_{t \rightarrow 0} S(x, y, t) = \delta(x - y) \end{cases}$$

的函数 $S(x, y, t)$ 称为 Cauchy 问题 (7.2.3) 的**基本解**, 其中 δ 为广义函数.

初值问题 (7.2.3) 的基本解求解 首先给出热核的定义.

定义 7.4 (热核). 满足初值问题

$$\begin{cases} K_t = kK_{xx} \\ \lim_{t \rightarrow 0} K(x, t) = \delta(x) \end{cases} \quad (7.2.4)$$

的函数 $K(x, t)$ 称为 Cauchy 问题 (7.2.3) 的**热核**或 **Gauss 核**.

可以证明, Cauchy 问题 (7.2.3) 的热核 $K(x, t)$ 存在且唯一 (可以参考 A.Friedman, *PDEs of parabolic type* 的相关章节). 首先证明关于热核的一个引理:

引理 7.1 (相似性, 对称性). Cauchy 问题 (7.2.3) 的热核满足相似性和对称性, 即

1. 相似性: $\forall \lambda > 0, \lambda K(\lambda x, \lambda^2 t) = K(x, t)$.
2. 对称性: 存在函数 G , 满足 $K(x, t) = G(|x|, t)$.

即有

$$\lambda K(\lambda x, \lambda^2 t) = K(x, t) = G(|x|, t). \quad (7.2.5)$$

证明. 对称性证明: 由于广义函数和方程具有旋转不变性, 对称性立得.

相似性证明: 由热核的唯一性, 只需证明 $\tilde{K}(x, t) := \lambda K(\lambda x, \lambda^2 t)$ 也是 (7.2.3) 的热核, 从而 $\tilde{K}(x, t) = K(x, t)$. 计算可得

$$\begin{cases} \tilde{K}_t(x, t) = \lambda^3 K_t(\lambda x, \lambda^2 t) \\ \tilde{K}_{xx}(x, t) = \lambda^3 K_{xx}(\lambda x, \lambda^2 t) \end{cases} \Rightarrow \tilde{K}_t(x, t) = k\tilde{K}_{xx}(x, t).$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{K}(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda K(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda \delta(\lambda x) = \delta(x).$$

从而 \tilde{K} 是 (7.2.3) 的热核. □

下面我们将 PDE 的 Cauchy 问题转化为 ODE 的 Cauchy 问题以求解热核. 由 (7.2.5) 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial K}{\partial \lambda}(x, t) \Big|_{\lambda=1, t=1} = \frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda K(\lambda x, \lambda^2 t)) \Big|_{\lambda=1, t=1} \\ &= (K(\lambda x, \lambda^2 t) + x\lambda^2 K_x(\lambda x, \lambda^2 t) + 2\lambda^2 t K_t(\lambda x, \lambda^2 t)) \Big|_{\lambda=1, t=1} \\ &= K(x, 1) + xK_x(x, 1) + 2K_t(x, 1) \\ &= K(x, 1) + xK_x(x, 1) + 2kK_{xx}(x, 1). \end{aligned}$$

设 $w(x) := K(x, 1)$, 则转化为关于 $w(x)$ 的 ODE. 即

$$2kw'' + xw' + w = 0.$$

上述 ODE 可化为全微分形式 $(2kw' + xw)' = 0$, 积分求解可得

$$w(x) = C_1 e^{-\frac{x^2}{4k}} + C_2 e^{-\frac{x^2}{4k}} \int_0^x e^{\frac{s^2}{4k}} ds.$$

由物理的守恒定律可得

$$\int_{\mathbb{R}} K(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} K(x, 0) dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1.$$

取 $t = 1$, 可得

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}} \left(C_1 e^{-\frac{x^2}{4k}} + C_2 e^{-\frac{x^2}{4k}} \int_0^x e^{\frac{s^2}{4k}} ds \right) dx \\ &= C_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4k}} dx + C_2 \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\frac{x^2}{4k}} \int_0^x e^{\frac{s^2}{4k}} ds \right) dx \\ &=: C_1 I + C_2 J. \end{aligned}$$

其中

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4k}} dx = \sqrt{4k} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x/\sqrt{4k})^2} d(x/\sqrt{4k}) = \sqrt{4k\pi}.$$

且反常积分 J 发散, 因此 $C_1 = \frac{1}{\sqrt{4k\pi}}$, $C_2 = 0$. 从而 $w(x) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi}} e^{-\frac{x^2}{4k}}$, 由热核的相似性可得

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

从而基本解为 $S(x, y, t) = K(x - y, t) = \sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}$. 最后, 我们利用基本解求 (7.2.3) 的解.

定理 7.5. 设函数 φ 有紧支集, 则 $u(x, t) = (S * \varphi)(x, t) = \sqrt{\frac{1}{4k\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \varphi(y) dy$ 是 (7.2.3) 的解, 其中 $*$ 为卷积.

证明. 由广义函数性质可得任意广义函数无穷阶可微. 从而由卷积性质得

$$u_t - u_{xx} = (\partial_t - \partial_x^2) \int_{\mathbb{R}} S(x, y, t) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (S_t - S_{xx})(x, y, t) \varphi(y) dy = 0.$$

另一方面, 由 φ 有紧支集可得

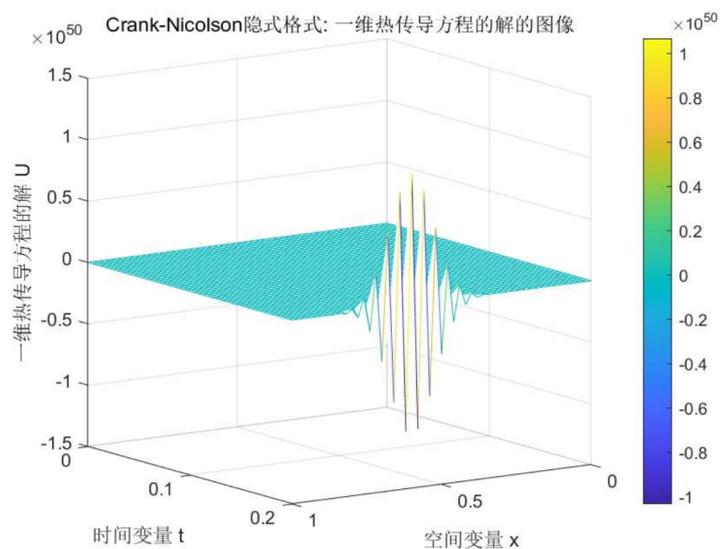
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow 0} (S_t - S_{xx}) \varphi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta(x - y) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \delta(s) \varphi(x - s) ds \\ &= \varphi(x - 0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

从而 $u(x, t)$ 是 (7.2.3) 的解. □

例 7.1 (热方程解的三维图像). 一维热方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, & 0 < t \leq 0.2 \\ u|_{t=0} = \sin(\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, & 0 \leq t \leq 0.2 \end{cases}$$

的精确解为 $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$, 在 Matlab 中绘制三维图像 (Crank-Nicolson 隐式格式) 可得:



本节的最后, 给出波动方程与扩散方程的解的对比:

1. 波速有限, 扩散速度无限;
2. $t > 0$ 时的奇异性: 波动方程的解沿特征线方向, 扩散方程的解瞬间消失;
3. $t > 0$ 时两方程的解都是适定的;
4. $t < 0$ 时, 波动方程的解适定 (波可以逆向传播, 向前追溯), 扩散方程的解不适定 (扩散是不可逆过程);
5. $t \rightarrow +\infty$ 时, 波动方程的解不衰减, 热扩散方程的解衰减 ($|u| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$).

7.3 扩散的光滑性

本章的最后, 给出对扩散光滑性的证明. 可以参考陈祖墀老师的 PDE.

定理 7.6 (光滑性原理). 设 $\varphi(x)$ 在 \mathbb{R} 上有界, 那么 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases} \quad (7.3.1)$$

的解 $u(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$.

证明. 令 $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|$ (本质上确界). 设方程 (7.3.1) 的热核为 $K(x-y, t)$, 利用基本解可得

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \varphi(y) dy = (S * \varphi)(x, t).$$

由于

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y, t) = \frac{\partial K(x-y, t)}{\partial x} = -\frac{x-y}{2kt} K(x-y, t) = O\left(\frac{|x-y|}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\right).$$

任意固定 $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, 上式作为 y 的函数在无穷远处速降为零. 从而 $\int_{\mathbb{R}} S(x, y, t)\varphi(y)dy$ 关于 $x \in \mathbb{R}$ 内闭一致收敛. 因此

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial S(x, y, t)}{\partial x} \varphi(y) dy.$$

在 $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ 上存在, 并且

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial S(x, y, t)}{\partial x} \right| \cdot |\varphi(y)| dy \\ &\leq M \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x-y|}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}} dy \\ &\stackrel{z=\frac{x-y}{\sqrt{4kt}}}{=} M \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{4kM}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} |z| e^{-|z|^2} dz \\ &= \frac{4kM}{\sqrt{t}} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

从而 u_x 有界, 类似可以处理 u 对 x 的任意阶导数有界的估计, 从而 $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$. \square

第八章 反射与源

8.1 反射 (半直线问题)

本节首先考虑以下波动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \geq 0 \\ u|_{x=0} = 0 \text{(固定端点)} \end{cases} \quad (8.1.1)$$

满足相容条件: $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. 对于半直线问题, 常用的方法是对函数进行延拓, 化为直线上的初边值问题, 求解后利用约束条件整理得解.

对于半直线问题 (8.1.1), 对 u, φ, ψ 同时作关于 x 的奇延拓:

$$U(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & x \geq 0 \\ -u(-x, t), & x < 0 \end{cases} \quad \Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

则延拓得到的全直线上的函数满足初值问题

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(x), \quad U_t|_{t=0} = \Psi(x) \end{cases} \quad (8.1.2)$$

对 U 应用 d'Alembert 公式可得

$$U(x, t) = \frac{1}{2}(\Phi(x+ct) + \Phi(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s) ds.$$

因此 (8.1.1) 的解为

$$u(x, t) = U(x, t)|_{x \geq 0} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds, & 0 \leq t \leq \frac{x}{c} \\ \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s) ds, & t > \frac{x}{c} \end{cases}$$

若 (8.1.1) 中的边界替换为 Neumann 边界, 即

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \geq 0 \\ u_x|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

满足相容条件 $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$, 此时的延拓方法应更改为偶延拓, 其余做法与 Dirichlet 边界的处理方法相同. 类似地, 可以求解热方程的半直线问题

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=0} = 0 \text{ (或 } u_x|_{x=0} = 0) \end{cases} \quad (8.1.3)$$

满足相容条件 $\varphi(0) = 0$ (或 $\varphi'(0) = 0$), 则在 Dirichlet 边界和 Neumann 条件下的方程的解分别为

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}} \right) \varphi(y) dy \quad (\text{Dirichlet}),$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}} \right) \varphi(y) dy \quad (\text{Neumann}).$$

8.2 源 (非齐次问题)

首先考虑一般的带源波动直线问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \quad (8.2.1)$$

一般求解思路是化有源问题为无源问题, 利用**叠加原理**和**齐次化原理**求解. 设 $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ 是 (8.2.1) 的解, 其中 $v(x, t)$ 满足自由振动问题

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v|_{t=0} = \varphi(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad (8.2.2)$$

$w(x, t)$ 满足纯受迫振动问题:

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w|_{t=0} = 0, \quad w_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (8.2.3)$$

其中自由振动的解可由 d'Alembert 公式得到, 为

$$v(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

纯受迫振动的解可由齐次化原理求解. 以下展开叠加原理和齐次化原理的细节.

叠加原理. 从物理和数学两个角度理解叠加原理:

1. 物理角度: 研究物理问题时, 常将几种不同原因综合产生的效果用这些单独产生的效果来代替.
2. 数学角度. 叠加原理对应于线性方程或线性定解条件: $\mathcal{L}u = f$. 其中 \mathcal{L} 为线性 (微分) 算符.

叠加原理可分为以下几种形式:

1. 有限叠加: 若 $\mathcal{L}u_i = f_i (i = 1, \dots, n)$, 且 $u = \sum_{i=1}^n c_i u_i$, 则

$$\mathcal{L}u = \sum_{i=1}^n c_i f_i.$$

2. 级数叠加: 若 $\mathcal{L}u_i = f_i (i = 1, 2, \dots)$, 且 $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ 一致收敛, 则

$$\mathcal{L}u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i.$$

3. 积分叠加: 若 $\mathcal{L}u = f(M, M_0)$, 且 $U = \int u(M, M_0) dM_0$ 一致收敛, 则

$$\mathcal{L}U = \int f(M, M_0) dM_0.$$

齐次化原理. 对于纯受迫振动问题 (8.2.3), 分析外力 $f(x, t)$ 的作用情况:

1. 设 τ 时刻的瞬时力为 $f(x, \tau)$, 则

$$f(x, t) = \sum f(x, \tau), \quad 0 < \tau < t.$$

再设瞬时力引起的振动为 $\gamma(x, t; \tau)$, 则

$$w(x, t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{0 \leq \tau \leq t} \gamma(x, t; \tau).$$

2. $f(x, \tau)$ 在 $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ 时间内引起的振动满足

$$\begin{cases} \gamma_{tt} = c^2 \gamma_{xx}, & \tau < t < \tau + \Delta\tau \\ \gamma|_{t=\tau} = 0, & \gamma_t|_{t=\tau} = f(x, \tau) \Delta\tau. \end{cases}$$

令 $\gamma(x, t; \tau) = z(x, t; \tau) \Delta\tau$, 则上述问题转化为

$$\begin{cases} z_{tt} = c^2 z_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > \tau \\ z|_{t=\tau} = 0, & z_t|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases}$$

3. 由 1, 2 讨论可得 $w(x, t) = \int_0^t z(x, t; \tau) d\tau$, 作变量变换 $t \mapsto t - \tau =: t'$, 运用 d'Alembert 公式可得

$$w(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau.$$

综上所述, 带源波动问题 (8.2.1) 的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= v(x, t) + w(x, t) \\ &= \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau. \end{aligned}$$

定理 8.1 (一般的齐次化原理 (Duhamel 原理, 冲量原理)). 设 \mathcal{L} 为 t 和 $x \in \mathbb{R}^n$ 的线性偏微分算子且关于 t 的导数不超过 $m-1$ 阶, 则非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^m w}{\partial t^m} = \mathcal{L}w + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ w|_{t=0} = w_t|_{t=0} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} w}{\partial t^{m-1}} \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解为

$$w(x, t) = \int_0^t z(x, t; \tau) d\tau,$$

其中 $z(x, t; \tau)$ 满足齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^m z}{\partial t^m} = \mathcal{L}z, & x \in \mathbb{R}^n, t > \tau > 0 \\ z|_{t=\tau} = z_t|_{t=\tau} = \cdots = \frac{\partial^{m-2} z}{\partial t^{m-2}} \Big|_{t=\tau} = 0, & \frac{\partial^{m-1} z}{\partial t^{m-1}} \Big|_{t=\tau} = f(x, \tau). \end{cases}$$

例 8.1. 考虑一根无限长的均匀弦, 受力密度为 bxt 的外力作用做振幅极其微小的横振动. 若弦的初位移为 0, 初速度为 $l-x$, 求该弦的运动规律.

解. 该弦满足有源波动方程问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + bxt, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, & u_t|_{t=0} = l-x \end{cases}$$

此时 $f(x, t) = bxt$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = l-x$. 由 d'Alembert 公式可得对应自由振动问题的解为

$$v(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} (l-s) ds = t(l-x).$$

由齐次化原理可得对应纯受迫振动问题的解为

$$w(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau = \frac{b}{6} xt^3.$$

因此波动问题的解为

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) = t(l-x) + \frac{b}{6} xt^3.$$

带源一维波动方程的半直线问题. 结合上节讨论的延拓方法, 考虑如下带源半直线问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t), & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \geq 0 \\ u|_{x=0} = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (8.2.4)$$

首先作延拓, 将半直线问题转化为直线问题. 针对 Dirichlet 边界, 将函数 $u(x, t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 分别奇延拓为 $U(x, t)$, $F(x, t)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, 得到延拓后的直线问题:

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx} + F(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(x), & U_t|_{t=0} = \Psi(x). \end{cases}$$

由叠加原理和齐次化原理求得

$$U(x, t) = \frac{1}{2}(\Phi(x + ct) + \Phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(s, \tau) ds d\tau.$$

由 $u(x, t) = U(x, t)|_{x \geq 0}$ 可得半直线问题 (8.2.4) 的解为

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau, & 0 \leq t \leq \frac{x}{c} \\ \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) - \varphi(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s) ds + \\ \frac{1}{2c} \left(\int_0^{t-\frac{x}{c}} \int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau + \int_{t-\frac{x}{c}}^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \right), & t > \frac{x}{c} \end{cases}$$

如果 (8.2.4) 的边界条件非齐次, 即 $u|_{x=0} = g(t) \neq 0$, 则构造函数 $v(x, t) := u(x, t) - g(t)$ 满足

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} + \tilde{f}(x, t), & x > 0, t > 0 \\ v|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \quad v_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x), & x \geq 0 \\ v|_{x=0} = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

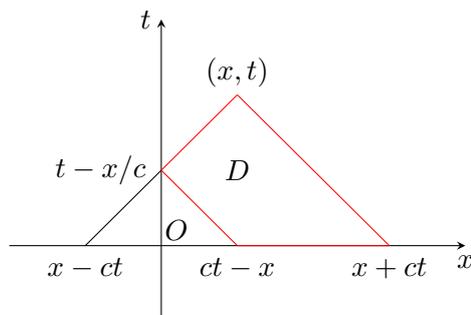
其中

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) - g''(t), \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - g(0), \quad \tilde{\psi}(x) = \psi(x) - g'(0).$$

则此时化为关于 $v(x, t)$ 的带源一维波动方程的齐次边界半直线问题. 类似解出 $v(x, t)$, 由 $u(x, t) = v(x, t) + g(t)$ 可得

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau, & 0 \leq t \leq \frac{x}{c} \\ \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) - \varphi(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s) ds + g\left(t - \frac{x}{c}\right) + \\ \frac{1}{2c} \left(\int_0^{t-\frac{x}{c}} \int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau + \int_{t-\frac{x}{c}}^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \right), & t > \frac{x}{c} \end{cases}$$

上述解中 $t > \frac{x}{c}$ 情况下的括号部分可以简写作 $\iint_D f$, 其中区域 D 为下图中的梯形区域:



带源热方程的直线问题. 类似可以讨论带源的热方程问题, 这里只求解直线问题, 半直线问题可利用延拓方法类似讨论.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (8.2.5)$$

利用叠加原理可得 $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, 其中 $v(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

这是一维齐次热方程, 它的解为

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \varphi(y) dy.$$

$w(x, t)$ 满足带源的齐次边界问题

$$\begin{cases} w_t = kw_{xx} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

设函数 $z(x, t; \tau)$ 满足

$$\begin{cases} z_t = kz_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > \tau \\ z|_{t=\tau} = f(x, \tau). \end{cases}$$

作变量平移, 化为齐次热方程可得 $z(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi(t-\tau)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-\tau)}} f(y, \tau) dy d\tau$, 因此由齐次化原理可得

$$w(x, t) = \int_0^t z(x, t; \tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4k\pi(t-\tau)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-\tau)}} f(y, \tau) dy d\tau.$$

因此带源热方程 (8.2.5) 的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \varphi(y) dy + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4k\pi(t-\tau)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-\tau)}} f(y, \tau) dy d\tau.$$

第九章 边值问题

9.1 分离变量法: Dirichlet 边值问题

本节考虑满足 Dirichlet 边界条件的 PDE 问题 (两端固定), 分离变量法也称为 **Fourier 方法**.

波动方程的边值问题求解 考虑一维齐次波动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (9.1.1)$$

满足相容条件:
$$\begin{cases} \varphi(0) = \psi(0) = 0, \\ \varphi(l) = \psi(l) = 0. \end{cases}$$

考虑驻波解 (分离解) $X(x)T(t) \neq 0$ 且 $X(0) = X(l) = 0$, 代入 (9.1.1) 的方程可得

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\lambda, \quad (9.1.2)$$

其中 λ 为常数. 由此我们得到了关于 x 的 Sturm-Liouville 特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (9.1.3)$$

利用 Sturm-Liouville 定理, (9.1.3) 的特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

将特征值 λ_n 代入 (9.1.2) 可得 $T_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = 0$, 该方程的通解为 $T_n(t) = C_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + D_n \sin \frac{cn\pi}{l}t$, C_n, D_n 是与 n 相关的常数. 令 (9.1.1) 的形式解为驻波解的叠加, 即

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + D_n \sin \frac{cn\pi}{l}t \right) \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

利用初始条件可得

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l}x, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{l} D_n \sin \frac{n\pi}{l}x. \end{cases}$$

以 $\left\{1, \cos \frac{\pi}{l}x, \sin \frac{\pi}{l}x, \dots, \cos \frac{n\pi}{l}x, \sin \frac{n\pi}{l}x, \dots\right\}$ 为正交基进行广义 Fourier 展开可得

$$\begin{cases} C_n = \frac{\langle \varphi, X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds, \\ D_n = \frac{l \langle \psi, X_n \rangle}{cn\pi \|X_n\|^2} = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l \psi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds. \end{cases}$$

从而我们求得 (9.1.1) 的形式解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \left(\int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \right) \cos \frac{cn\pi}{l} t + \frac{2}{cn\pi} \left(\int_0^l \psi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \right) \sin \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

热方程的边值问题求解 类似波动方程, 我们可以利用分离变量法对热方程的初边值问题进行求解:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (9.1.4)$$

满足相容条件: $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. 求解步骤与波动方程基本一致, 部分细节省略. 将分离解 $X(x)T(t) \neq 0$, $X(0) = X(l) = 0$ 代入 (9.1.4) 可得

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(X)}{X(x)} =: -\lambda,$$

从而得到关于 x 的 Sturm-Liouville 特征值问题, 与 (9.1.3) 相同. 从而得到特征值和特征函数

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

代入分离方程得到 $T'_n(t) + k\lambda_n T_n(t) = 0$, 求解得 $T_n(t) = C_n e^{-k(n\pi/l)^2 t}$. 从而形式解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k(n\pi/l)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

由初始条件, 结合 Fourier 展开可得

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l}x \Rightarrow C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds.$$

从而 (9.1.4) 的形式解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \right) e^{-k(n\pi/l)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

Laplace 方程的边值问题求解 最后我们考虑最经典的二维 Laplace 方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \Delta_2 u := u_{xx} + u_{yy} = 0, & x^2 + y^2 < a^2 \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = F(x, y). \end{cases} \quad (9.1.5)$$

为了将边界条件化为分离型, 作极坐标变换: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. 则有

$$\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

从而 Laplace 方程化为

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & r < a \\ u|_{r=a} = F(a \cos \theta, a \sin \theta) =: f(\theta). \end{cases} \quad (9.1.6)$$

考虑分离解 $R(r)\Theta(\theta) \neq 0$, $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$. 代入 (9.1.6) 的方程中可得

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rR'(r)\Theta(\theta)) + \frac{1}{r^2} R(r)\Theta''(\theta) = \frac{1}{r} \Theta(\theta)(rR''(r) + R'(r)) + \frac{1}{r^2} \Theta''(\theta)R(r) = 0.$$

从而得到分离方程

$$-\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} =: -\lambda. \quad (9.1.7)$$

其中 λ 为常数, 由此可得关于 θ 的 Sturm-Liouville 特征值问题:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi). \end{cases} \quad (9.1.8)$$

这是满足周期边界的 S-L 特征值问题, 从而求解得特征值和特征函数为

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = \cos n\theta \text{ 或 } \sin n\theta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

将特征值代入方程 (9.1.7) 中可得

$$-\frac{r^2 R_n''(r) + rR_n'(r)}{R_n(r)} = -n^2 \Rightarrow r^2 R_n''(r) + rR_n'(r) - n^2 R_n(r) = 0,$$

这是 ODE 中的 **Euler 方程**. 作变换 $t = \ln r$, 则方程化为 $\frac{d^2 R_n}{dt^2} - n^2 R_n = 0$, 因此方程通解为

$$R_n(r) = C_n e^{n \ln r} + D_n e^{-n \ln r} = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad n \geq 1,$$

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r, \quad n = 0.$$

其中 $C_n, D_n (n \geq 0)$ 为与 n 有关的常数. 由物理上的有界条件, $|R_n(0)| < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$. 而 r^{-n} 和 $\ln r$ 在 $r \rightarrow 0$ 时发散, 从而我们取常数 $C_n = 1, D_n = 0$, 此时有 $R_n(r) = r^n, \forall n \in \mathbb{N}$. (9.1.6) 的形式解为

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\Theta_n(\theta) =: \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

由边界条件可得

$$u(a, \theta) = f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

对 $f(\theta)$ 进行 Fourier 展开并与 RHS 比较系数可得

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, & n \geq 0 \\ B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, & n \geq 1. \end{cases}$$

代入形式解的表达式并整理可得

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \theta) \right) d\varphi.$$

对上述表达式进行进一步化简. 设 $z := \frac{r}{a} e^{i(\varphi - \theta)}$, 则 $\operatorname{Re}(z^n) = \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \theta)$. 从而

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \theta) = 1 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) = 1 + 2\operatorname{Re} \left(\frac{z}{1-z} \right) = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)}.$$

从而 (9.1.6) 的解为

$$u(x, t) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)} d\varphi.$$

这便是调和函数的 **Poisson 公式**.

9.2 Neumann 边界条件和 Robin 边界条件

上节中讨论了 Dirichlet 边界下三类典型 PDE 的求解, 本节考虑 Neumann 边界和 Robin 边界下利用分离变量法的求解方案. 三类边界求解的不同之处在于对应的 S-L 特征值问题的解发生变化, 因此我们重点考察 S-L 特征值问题在不同边界下的特征值和特征函数.

Neumann 边界条件 此时 Neumann 特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

运用 Sturm-Liouville 定理知特征值 $\lambda > 0$. 代入特征值问题可求得

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad n \geq 0.$$

λ_n 为特征值, $X_n(x)$ 为对应的特征函数.

混合型边界条件 此时混合型特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = 0, \quad X'(l) + a_l X(l) = 0, & a_l > 0 \end{cases}$$

此时 Sturm-Liouville 定理依然成立, 从而特征值 $\lambda > 0$. 令 $\lambda := \omega^2 > 0$, $\omega > 0$, 代入方程可得通解为

$$X(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x.$$

代入边界条件可得

$$X(0) = 0 = A, B\omega \cos \omega l + a_l B \sin \omega l = 0.$$

由特征函数非零可得 $B \neq 0$, 从而可得 $-\omega = a_l \tan \omega l$. 令 $\mu = \omega l$, 则 $-\mu = a_l l \tan \mu$. 作出图像可得

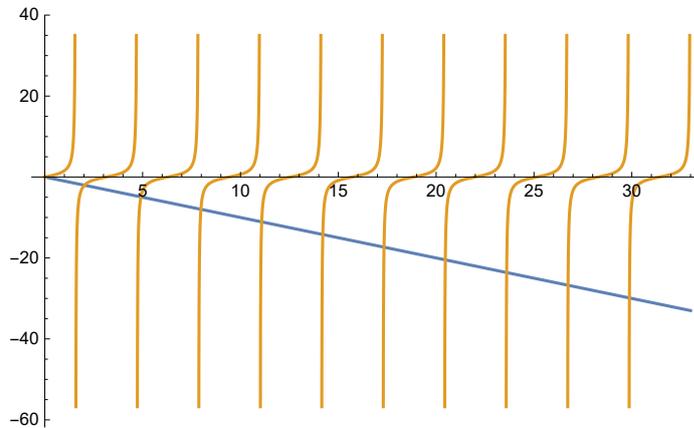


图 9.1: 图解法研究 $-\mu = a_l l \tan \mu$.

从而 $-\mu = a_l l \tan \mu$ 有无穷多个正实数解 $\mu_n, n \geq 1$ 且 $\mu_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$. 因此特征值 λ_n 和特征函数 X_n 为

$$\lambda_n = \omega_n^2 = \frac{\mu_n^2}{l^2}, X_n(x) = \sin \frac{\mu_n}{l} x, n \geq 1.$$

例 9.1. 求解混合边界下的一维热方程问题:

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_{x=0} = 0, (u_x + a_l u)|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

解. 类似 9.1 节的推导可得混合边界下热方程问题的驻波解 $X(x)T(t)$ 满足

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} := -\lambda, X(0) = X'(l) + a_l X(l) = 0.$$

从而 $X(x)$ 是混合边界 S-L 特征值问题的特征函数, 由上述讨论可得

$$\lambda_n = \frac{\mu_n^2}{l^2}, X_n(x) = \sin \frac{\mu_n}{l} x, n \geq 1.$$

代入分离型方程求解可得

$$T_n(t) = C_n e^{-k \frac{\mu_n^2}{l^2} t}.$$

在正交特征函数系 $\{X_n(x)\}_1^\infty$ 下对 $\varphi(x)$ 进行广义 Fourier 展开可求得

$$C_n = \frac{\langle \varphi, X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{\int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\mu_n}{l} s ds}{\int_0^l \sin^2 \frac{\mu_n}{l} s ds}.$$

因此混合边界下热方程的解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\mu_n}{l} s ds}{\int_0^l \sin^2 \frac{\mu_n}{l} s ds} e^{-k \frac{\mu_n^2}{l^2} t} \sin \frac{\mu_n}{l} x.$$

Robin 边界条件 此时 Robin 型特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X'(0) - a_0 X(0) = X'(l) + a_l X(l) = 0 \end{cases}$$

Robin 边界条件总共可分为 13 种情况进行讨论, 这里只考虑其中的几种情况, 其余情况可类似讨论.

1. $a_0, a_l > 0$, 由 Sturm-Liouville 定理可得 $\lambda > 0$, 此后求解与前文边界类似, 这里不再赘述.
2. $a_0 < 0, a_l > 0$. 首先考察正特征值 $\lambda = \omega^2 > 0$ 的通解 $X(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$. 代入边界条件, 消去 B 可得

$$A \left((a_0 + a_l) \cos \omega l + \left(-\omega + \frac{a_0 a_l}{\omega} \right) \sin \omega l \right) = 0.$$

从而 $\tan \omega l = \frac{(a_0 + a_l)\omega}{\omega^2 - a_0 a_l}$. 利用图解法可分析得出

- (a) $a_0 + a_l > -a_0 a_l l$, 则特征值 $\lambda_n > 0, n \geq 1$.
- (b) $a_0 + a_l = -a_0 a_l l$, 则特征值 $\lambda_0 = 0, \lambda_n > 0, n \geq 1$.
- (c) $a_0 + a_l < -a_0 a_l l$, 则特征值 $\lambda_0 < 0, \lambda_n > 0, n \geq 1$.

9.3 一般的边值问题

本节将利用 Fourier 展开法 (特征函数展开法), 特解法, 齐次化原理 (Duhamel 原理, 冲量原理) 求解一系列 PDE 边值问题.

有界弦的受迫振动问题. 考虑波动方程的边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = g_1(t), \quad u|_{x=l} = g_2(t) \end{cases} \quad (9.3.1)$$

求解类似上述的非齐次边值问题的一般思路如下:

1. 引入辅助函数 h , 将边界条件齐次化. 若边界条件为 Dirichlet 或 Robin, 则进行线性拟合, 取 $h(x, t) = A(t)x + B(t)$; 若边界条件为 Neumann, 则进行二次拟合, 取 $h(x, t) = A(t)x^2 + B(t)x$.
2. 利用叠加原理求解齐次边界下的 PDE 问题 $v(x, t) := u(x, t) - h(x, t)$.

(9.3.1) 中的边界为 Dirichlet 边界, 取辅助函数

$$h(x, t) = \frac{g_2(t) - g_1(t)}{l} x + g_1(t),$$

则 $v(x, t) := u(x, t) - h(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} + \tilde{f}(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ v|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \quad v_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x) \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (9.3.2)$$

其中 $\tilde{f}(x, t) = f(x, t) - h_{tt}(x, t)$, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x, 0) - h(x, 0)$, $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - h_t(x, 0)$. 由叠加原理可得, 边值问题 (9.3.2) 的解 $v(x, t) = w(x, t) + p(x, t)$, 其中 w 满足纯受迫振动问题

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + \tilde{f}(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ w|_{t=0} = w_t|_{t=0} = 0 \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (9.3.3)$$

p 满足自由振动问题

$$\begin{cases} p_{tt} = c^2 p_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ p|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), p_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x) \\ p|_{x=0} = 0, p|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (9.3.4)$$

由 9.1 节结论可得自由振动问题的解为

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + D_n \sin \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{\varphi}(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds, \quad D_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l \tilde{\psi}(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds.$$

下求纯受迫振动问题的解 $w(x, t)$. 考虑以下三种方法:

1. Fourier 展开法 (特征函数展开法): 通用方法.
2. 特解法: 特殊方法.
3. 齐次化原理 (Duhamel 原理, 冲量原理): 经典方法.

Fourier 展开法. 分为以下几个步骤:

1. 求出与 (9.3.3) 相应的齐次方程在齐次边界下的特征值和特征函数, 由 Sturm-Liouville 定理可得

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n \geq 1.$$

2. 将 $w(x, t)$ 和 $\tilde{f}(x, t)$ 按加权赋范空间 $\mathcal{L}_\rho^2[0, l]$ 内的完备正交特征函数系 $\{X_n(x)\}_1^\infty$ 作广义 Fourier 展开:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \tilde{f}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

其中

$$\tilde{f}_n(t) = \frac{\langle \tilde{f}, X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{f}(s, t) \sin \frac{n\pi s}{l} ds.$$

将 $w(x, t)$, $\tilde{f}(x, t)$ 的展开式代入 (9.3.3) 中, 利用正交性质可得

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{l} \right)^2 T_n(t) = \tilde{f}_n(t) \\ T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0 \end{cases}$$

利用常数变易法求解得

$$T_n(t) = \frac{l}{cn\pi} \int_0^t \tilde{f}_n(\tau) \sin \frac{cn\pi(t-\tau)}{l} d\tau.$$

从而

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{cn\pi} \left(\int_0^t \tilde{f}_n(\tau) \sin \frac{cn\pi(t-\tau)}{l} d\tau \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

因此可由 $u(x, t) = h(x, t) + w(x, t) + p(x, t)$ 求出问题 (9.3.1) 的解.

注 Fourier 展开法也同时适用于齐次边值问题 (9.3.2). 此时

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = \tilde{f}_n(t) \\ T_n(0) = \tilde{\varphi}_n(x), T_n'(0) = \tilde{\psi}_n(x). \end{cases}$$

由此可解得

$$T_n(t) = \tilde{\varphi}_n(x) \cos \frac{cn\pi t}{l} + \frac{l}{cn\pi} \tilde{\psi}_n(x) \sin \frac{cn\pi t}{l} + \frac{l}{cn\pi} \int_0^t \tilde{f}_n(\tau) \sin \frac{cn\pi(t-\tau)}{l} d\tau.$$

因此由 $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$ 和 $u(x, t) = h(x, t) + v(x, t)$ 可求得边值问题的解. 事实上, 边界条件的齐次化一般将导致方程的非齐次化, 从而 Fourier 展开法具有普适性.

特解法. 由叠加原理可得, 非齐次方程通解 = 齐次方程通解 + 非齐次方程通解. 因此可以先进行边界齐次化再观察特解. 对于一般的非齐次项, 求特解较为困难, 但在某些特殊情况下可以找到, 例如当 (9.3.2) 中的 $\tilde{f}(x, t) = F(x)$ 时, 取 $y(x)$ 满足常微分方程

$$\begin{cases} c^2 y''(x) + F(x) = 0, 0 < x < l \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases}$$

则 $V(x, t) = v(x, t) - y(x)$ 满足

$$\begin{cases} V_{tt} = c^2 V_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ V|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x) - y(x), V_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x) \\ V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

这是自由振动问题, 易于求解. 从而可得 (9.3.1) 的解为 $u(x, t) = h(x, t) + y(x) + V(x, t)$.

齐次化原理法. 对于有界区间上满足齐次边界条件的混合问题, 齐次化原理依然适用, 可将非齐次方程化为齐次方程. 例如可将纯受迫振动问题 (9.3.3) 转化为

$$\begin{cases} z_{tt} = c^2 z_{xx}, 0 < x < l, t > \tau \\ z|_{t=\tau} = 0, z_t|_{t=\tau} = \tilde{f}(x, \tau) \\ z|_{x=0} = 0, z|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

上式可将时间变量平移后求解, 从而

$$w(x, t) = \int_0^t z(x, t; \tau) d\tau, \quad u(x, t) = h(x, t) + w(x, t) + p(x, t).$$

三类方法的比较:

1. 三种方法均需要先进行**边界齐次化**, 本质是将 PDE 化为 ODE.
2. 特解法相对较为简单, 但只能处理特殊的非齐次项.
3. Fourier 展开法和齐次化原理计算较为繁琐, 但适用范围较广.
4. 对一般的线性非齐次定解问题, Fourier 展开法从数值计算角度看较为合适, 类似高维 PDE 中的 Galerkin 方法.

例 9.2. 求解以下定解问题: 令常数 $A, \omega > 0$,

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + A \sin \omega t, & 0 < x < l, t > 0 \\ w|_{t=0} = 0, w_t|_{t=0} = 0 \\ w_x|_{x=0} = 0, w_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

解. 利用三种方法求解:

1. Fourier 展开法: 定解问题对应的齐次方程特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

(Neumann 边界). 特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \geq 0.$$

令 $w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi x}{l}$, 则

$$\begin{cases} T_0''(t) = A \sin \omega t \\ T_0(0) = T_0'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow T_0(t) = \frac{A}{\omega} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right).$$

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = 0 \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0 \end{cases} (n \geq 1) \Rightarrow T_n(t) \equiv 0.$$

因此定解问题的解为 $w(x, t) = \frac{A}{\omega} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$.

2. 特解法. 设 $y(t)$ 为满足常微分方程

$$\begin{cases} y''(t) = A \sin \omega t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

的函数. 则积分求得

$$y(t) = \frac{A}{\omega} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right).$$

另一方面, 由能量法可证得齐次问题

$$\begin{cases} \bar{w}_{tt} = c^2 \bar{w}_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ \bar{w}_{t=0} = 0, \bar{w}_t|_{t=0} = 0 \\ \bar{w}_x|_{x=0} = 0, \bar{w}_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

的解唯一, 从而上述问题只有零解. 因此定解问题的解为

$$w(x, t) = y(t) = \frac{A}{\omega} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right).$$

3. 齐次化原理: 考虑齐次问题

$$\begin{cases} z_{tt} = c^2 z_{xx}, & 0 < x < l, t > \tau \\ z|_{t=\tau} = 0, z_t|_{t=\tau} = A \sin \omega \tau \\ z_x|_{x=0} = 0, z_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

作变换 $t' = t - \tau$, 则此时对齐次方程的特征值问题有

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}, n \geq 0.$$

令

$$z(x, t; \tau) = (C_0 + D_0(t - \tau)) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{cn\pi(t - \tau)}{l} + D_n \sin \frac{cn\pi(t - \tau)}{l} \right) \cos \frac{n\pi}{l} x.$$

代入初始条件可解得 $C_n = 0, n \geq 0; D_0 = A \sin \omega \tau, D_n = 0, n \geq 1$. 因此 $z(x, t; \tau) = A(t - \tau) \sin \omega \tau$, 从而由齐次化原理

$$w(x, t) = \int_0^t z(x, t; \tau) d\tau = \frac{A}{\omega} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right).$$

例 9.3. 求解定解问题: 令常数 $A, \omega > 0$,

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + A \sin \omega t \cos \frac{\pi x}{l}, & 0 < x < l, t > 0 \\ w|_{t=0} = 0, w_t|_{t=0} = 0 \\ w_x|_{x=0} = 0, w_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

解. 运用 Fourier 展开法. 定解问题对应的齐次方程的特征值问题满足

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n \geq 0.$$

令 $w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi x}{l}$, 代入方程可得

$$T_1''(t) + \left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 T_1(t) = A \sin \omega t, \quad T_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad n \neq 1.$$

结合初始条件 $T_n(0) = T_n'(0) = 0$ 可得

$$T_n(t) \equiv 0, \quad n \neq 1,$$

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \frac{l}{c\pi} \int_0^t A \sin \omega \tau \sin \frac{c\pi(t-\tau)}{l} d\tau \\ &= \frac{Al}{2c\pi} \left(\int_0^t \cos \left(\left(\omega + \frac{c\pi}{l} \right) \tau - \frac{c\pi}{l} t \right) d\tau - \int_0^t \cos \left(\left(\omega - \frac{c\pi}{l} \right) \tau + \frac{c\pi}{l} t \right) d\tau \right) \\ &= \frac{Al}{c\pi} \cdot \frac{\omega \sin \frac{c\pi t}{l} - \frac{c\pi}{l} \sin \omega t}{\omega^2 - \left(\frac{c\pi}{l}\right)^2}. \end{aligned}$$

从而可得定解问题的解

$$w(x, t) = \frac{Al}{c\pi} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \left(\frac{c\pi}{l}\right)^2} \left(\omega \sin \frac{c\pi t}{l} - \frac{c\pi}{l} \sin \omega t \right) \cos \frac{\pi x}{l}.$$

观察解式可得, 当 $\omega = \frac{c\pi}{l}$ 时发生共振.

有限长杆的有源热传导问题. 类似有界弦的受迫振动问题, 我们可以用 Fourier 展开法研究有限长杆的有源热传导问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

由叠加原理可得 $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, 其中 v, w 满足

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ v|_{t=0} = 0 \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} w_t = a^2 w_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ w|_{t=0} = \varphi(x) \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

利用标准分离变量法可求得

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \left(\int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds \right) e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

作广义 Fourier 展开可得

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

其中 $f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$, 代入原方程可得

$$T_n'(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), \quad T_n(0) = 0.$$

利用常数变易法可求得

$$T_n(t) = \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-\tau)} d\tau.$$

由 $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ 可得

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-\tau)} d\tau + \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

二维 Poisson 方程的边值问题 对某些特殊区域如矩形, 圆盘, 扇形可用分离变量法求解. 以矩形区域为例:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x, y), & 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ u|_{x=a} = f_1(y), \quad u|_{x=0} = f_2(y) \\ u|_{y=0} = g_1(x), \quad u|_{y=b} = g_2(x) \end{cases}$$

考虑在两种边界上分别取线性拟合函数

$$h_1(x, y) = \frac{f_2(y) - f_1(y)}{a} x + f_1(y),$$

$$h_2(x, y) = \frac{g_2(x) - g_1(x)}{b} y + g_1(x).$$

从而函数

$$v(x, y) = u(x, y) - h_1(x, y), \quad w(x, y) = u(x, y) - h_2(x, y)$$

必定满足齐次边界条件, 可以利用 Fourier 展开法求解. 对于圆域和扇形区域, 考虑利用 Laplace 算子的极坐标形式

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

转化为关于 r 和 θ 的矩形区域, 结合具体的边界条件构造辅助函数求解.

例 9.4.
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -2x, & x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 0 \end{cases}$$

解. 考虑 Fourier 展开法和特解法.

1. Fourier 展开法. 因区域是圆域, 作极坐标变换

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 0 < r < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

记 $u = u(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$, 由 Laplace 算子的极坐标形式可得

$$\begin{cases} \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = -2r \cos \theta, & 0 < r < 1 \\ u|_{r=1} = 0 \end{cases}$$

齐次方程 $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ 的特征值问题对应周期性边界, 因此有

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = \cos n\theta (n \geq 0) \text{ 或 } \sin n\theta (n \geq 1).$$

令形式解 $u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta)$, 代入原方程, 比较系数可得

$$\begin{cases} a_1'' + \frac{1}{r}a_1' - \frac{1}{r^2}a_1 = -2r \\ a_n'' + \frac{1}{r}a_n' - \frac{n^2}{r^2}a_n = 0, & n \neq 1 \\ b_n'' + \frac{1}{r}b_n' - \frac{n^2}{r^2}b_n = 0, & n \geq 0 \end{cases}$$

其中后两个方程为齐次 Euler 方程, 通解为 $A_n r^n + B_n r^{-n}$, 由边界条件 $a_n(1) = 0, |a_n(0)| < +\infty, b_n(1) = 0, |b_n(0)| < +\infty$ 可得

$$a_n(r) = 0 (n \neq 1), \quad b_n(r) = 0 (n \geq 0).$$

另一方面, 非齐次 Euler 方程的通解为 $a_1(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{4}r^3$, 由边界条件可得 $C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = 0$. 因此

$$u = \frac{1}{4}(1 - r^2)r \cos \theta = \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)x.$$

2. 特解法. 注意到极坐标形式下的方程

$$\begin{cases} \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = -2r \cos \theta, & 0 < r < 1 \\ u|_{r=1} = 0 \end{cases}$$

有一个特解 $w = -\frac{1}{4}r^3 \cos \theta$, 设 $u = v(r, \theta) - \frac{1}{4}r^3 \cos \theta$, 则

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r}v_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < 1 \\ v|_{r=1} = \frac{1}{4} \cos \theta \end{cases}$$

对应直角坐标中的调和方程

$$\begin{cases} \Delta_2 v = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ v|_{x^2+y^2=1} = \frac{1}{4}x \end{cases}$$

由此解得 $v(x, y) = \frac{1}{4}x$, 因此

$$u(x, y) = v(x, y) + w = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x(x^2 + y^2).$$

第十章 调和函数与 Green 函数

10.1 Laplace 方程 (调和方程)

本节考虑以下 n 维 Laplace 方程 (或调和方程):

$$\Delta u = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (10.1.1)$$

$$\text{其中 } \Delta := \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

命题 10.1. Δ 算子具有旋转不变性, 即如果 $u(x)$ 调和, 则 $u(x')$ 也调和, 其中 x' 由 x 进行正交变换得到.

证明. 设 B 为任一 n 阶正交阵 (即 $BB^T = B^T B = I_n$), $u(x)$ 为调和函数, 则在坐标变换 $x' = Bx = (x'_1, \dots, x'_n)$ 下, 成立

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} = \left(\sum_{k=1}^n b_{ki} \partial_{x'_k} \right) \left(\sum_{l=1}^n b_{lj} \partial_{x'_l} \right) = \sum_{k,l=1}^n b_{ki} b_{lj} \partial_{x'_k} \partial_{x'_l}.$$

因此

$$\begin{aligned} 0 = \Delta u(x) &= \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n b_{ki} \delta_{ij} b_{lj} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x'_k \partial x'_l} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ki} b_{li} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x'_k \partial x'_l} = \sum_{k,l=1}^n (B^T B)_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x'_k \partial x'_l} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \delta_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x'_k \partial x'_l} = \Delta u(x'). \end{aligned}$$

从而 $u(x')$ 也调和. □

Laplace 算子的极坐标形式.

1. 二维情况. 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]$. 则坐标变换的 Jacobi 阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

它的逆变换阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}.$$

由求导的链式法则可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

从而 Laplace 算子可化为

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \partial_x^2 + \partial_y^2 = \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

2. 三维情况. 我们考虑两种求法:

降维法. 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} := \sqrt{s^2 + z^2}$, $s = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$. 再令 $x = s \cos \varphi$, $y = s \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$, $s = r \sin \theta$, 则

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

其中 θ 称为天顶角, φ 称为旋转角. 由二维 Laplace 算子的极坐标形式可得

$$\begin{aligned} \partial_x^2 + \partial_y^2 &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \partial_s^2 + \frac{1}{s} \partial_s + \frac{1}{s^2} \partial_\varphi^2 \\ &= \partial_s^2 + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \\ &= \partial_s^2 + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2. \\ \partial_z^2 + \partial_s^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2. \end{aligned}$$

上述两式相加可得

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \\ &= \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2. \end{aligned}$$

直接法. 直接法是微分方程 II 课程中的常用方法. 任取检验函数 $v(x, y, z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, 即 \mathbb{R}^3 中的具有紧支集的无穷阶可微函数, 则

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} v \Delta_3 u dx dy dz &\stackrel{\text{分部积分}}{=} - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v \cdot \nabla u dx dy dz \\ &\stackrel{\text{球坐标变换}}{=} - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

由变分法基本原理可得

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

类似于扩散方程, 调和方程 (10.1.1) 满足以下最大值原理:

定理 10.1 (最大值原理). 设 $D \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 有界, 若 $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ (内部二阶连续可微, 边界上连续) 调和, 即 $\Delta u = 0$ in D , 则

$$\max_{\bar{D}} u = \max_{\partial D} u, \quad \min_{\bar{D}} u = \min_{\partial D} u.$$

证明. 只证明最大值情形. 利用反证法, 假设 $\max_{\bar{D}} u > \max_{\partial D} u$, 构造辅助函数 $v(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2 (\varepsilon > 0)$. 由 $u(x)$ 的连续性以及区域 D 的有界性可得当 ε 充分小时, 成立 $\max_{\bar{D}} v > \max_{\partial D} v$. 设 x_0 为 v 在 D 内的最大值点, 则该点处的 Hessian 矩阵负定, 从而 $\Delta v(x_0) \leq 0$. 另一方面, $\Delta v = \Delta u + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon > 0$ 在 D 内恒成立, 矛盾! 因此 $\max_{\bar{D}} u = \max_{\partial D} u$. \square

定理 10.2 (边值问题解的至多唯一性). 设 $f \in C(D), g \in C(\partial D)$, 则 Dirichlet 边界下的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ in } D \\ u|_{\partial D} = g \end{cases} \quad (10.1.2)$$

至多有一个解 $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$.

证明. 我们利用最大值原理和能量法给出两个证明. 设 $u_1, u_2 \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ 是边值问题 (10.1.2) 的解, 令 $w := u_1 - u_2$, 则 w 调和且 $w|_{\partial D} = 0$.

1. (最大值原理). 由最大值原理可得

$$0 = \min_{\partial D} w = \min_{\bar{D}} w \leq w \leq \max_{\bar{D}} w = \max_{\partial D} w = 0,$$

因此 $w \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ in \bar{D} .

2. 定义能量 $E = \int_D |\nabla w|^2 dx \geq 0$, 一方面可得

$$\int_D \nabla \cdot (w \nabla w) dx = \int_D (w \Delta w + |\nabla w|^2) dx \stackrel{w \text{ 调和}}{=} \int_D |\nabla w|^2 dx = E.$$

另一方面, 设 ν 为单位法向量, 由 Gauss 定理可得

$$\int_D \nabla \cdot (w \nabla w) dx = \int_{\partial D} w \nabla w \cdot \nu dS = \int_{\partial D} w \frac{\partial w}{\partial \nu} dS = 0.$$

因此 $E = 0 \Rightarrow \nabla w \equiv 0$, 因此 w 在 D 上恒为常数. 由 $w|_{\partial D} = 0$ 及 w 的连续性可得 $w \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ in \bar{D} .

□

10.2 二维、三维 Laplace 方程的分离变量法

矩形区域上的边值问题. 考虑一个实际例子: 散热片的横截面为一矩形 $[0, a] \times [0, b]$, 它的一边 $y = b$ 保持较高温度 U , 其他三边保持零度. 求横截面上的稳态温度分布.

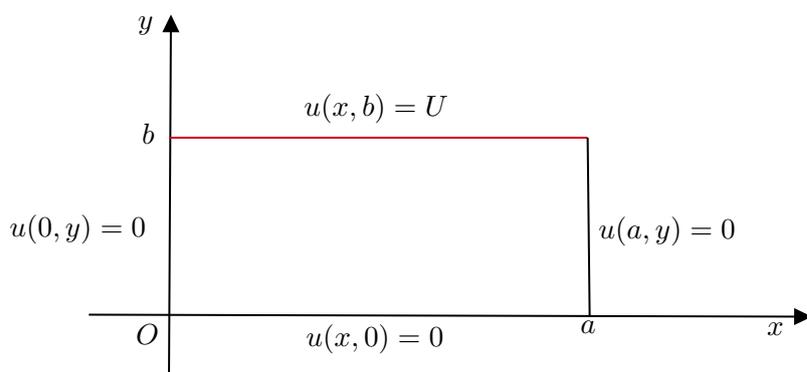


图 10.1: 散热片的横截面及边界温度

设 $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$ 处的温度为 $u(x, y)$, 则根据条件可得矩形区域上调和方程的边值问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, a) \times (0, b) \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0, & y \in [0, b] \\ u|_{y=0} = 0, u|_{y=b} = U, & x \in [0, a] \end{cases} \quad (10.2.1)$$

考虑 (10.2.1) 的分离解 $X(x)Y(y) \neq 0$ 且 $X(0) = X(a) = 0$, 代入方程可得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} =: -\lambda. \quad (10.2.2)$$

其中 λ 为常数. 由此可得关于 $X(x)$ 的 S-L 特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < a \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

特征值为 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, 特征函数为 $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, $n \geq 1$. 特征值代入 (10.2.2) 中可解得

$$Y_n(y) = C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

令 (10.2.1) 的形式解为

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

将形式解代入边界条件 $u|_{y=0} = 0, u|_{y=b} = U$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = 0 \Rightarrow C_n = 0,$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = U$, 作 Fourier 变换可得

$$D_n = \frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \frac{\langle U, X_n \rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \frac{U \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx}{\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx} = \frac{2U(1 - (-1)^n)}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}.$$

因此边值问题 (10.2.1) 的形式解为

$$u(x, y) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{\sinh\left(\frac{2n+1}{a}\pi y\right)}{\sinh\left(\frac{2n+1}{a}\pi b\right)} \sin\left(\frac{2n+1}{a}\pi x\right).$$

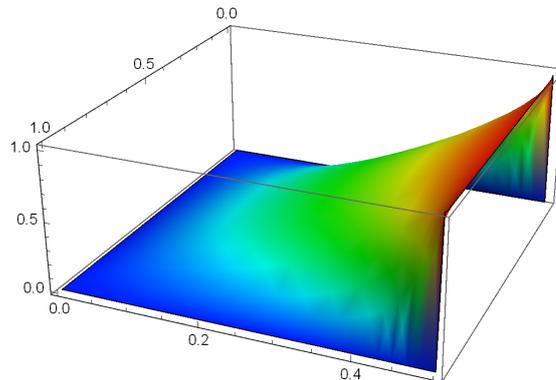


图 10.2: 参数 $a = 1, b = 0.5, U = 1$ 时, $u(x, y)$ 的三维温度分布图像

圆域内 Laplace 方程的边值问题. 考虑一个半径为 a 的薄圆盘, 上下两面绝热, 圆周边缘的温度分布为已知函数 $F(x, y)$, 求稳恒状态时圆盘内的温度分布.

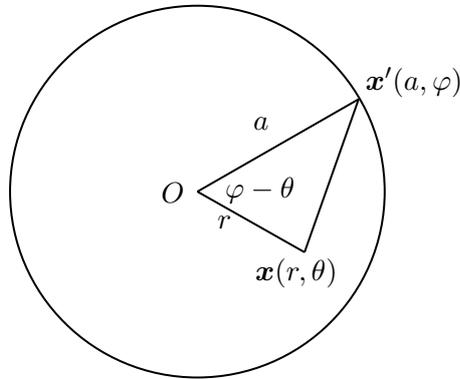
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x^2 + y^2 < a^2 \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = F(x, y) \end{cases}$$

在 9.1 节中已经解决了圆域内的调和方程边值问题, 并有以下 Poisson 公式:

$$u(r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta)} d\varphi.$$

其中

$$f(\varphi) = F(a \cos \varphi, a \sin \varphi).$$



1. 由余弦公式可得

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{2\pi a} \int_{|\mathbf{x}'|=a} \frac{u(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} dS(\mathbf{x}').$$

2. 此时成立平均值公式

$$u(\mathbf{0}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi a} \int_{|\mathbf{x}'|=a} u(\mathbf{x}') dS(\mathbf{x}').$$

球域内 Laplace 方程的边值问题. 本节考虑以下边值问题:

$$\begin{cases} \Delta_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & x^2 + y^2 + z^2 < a^2 \\ u|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = F(x, y, z) \end{cases} \quad (10.2.3)$$

作球坐标变换 $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \text{ 其中 } 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \\ z = r \cos \theta \end{cases}$ 由 Laplace 算子的三维极

坐标形式可得:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \\ u|_{r=a} = F(a \sin \theta \cos \varphi, a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta) =: f(\theta, \varphi) \\ u|_{r=0} = \text{有限值} \\ u(r, \theta, \varphi) = u(r, \theta, \varphi + 2\pi) \\ u|_{\theta=0, \pi} = \text{有限值} \end{cases} \quad (10.2.4)$$

下面我们利用分离变量法求解边值问题 (10.2.4).

第一步. 设满足方程、周期边界条件、球内约束条件的分离解为 $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \neq 0$, 代入方程中可得

$$\frac{(r^2R')'}{R} + \frac{(\sin\theta\Theta')'}{\sin\theta\Theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\Phi''}{\Phi} = 0.$$

由上述分离方程和边界条件可得

$$R(r) : \begin{cases} (r^2R')' - \lambda R := (r^2R')' - l(l+1)R = 0 \\ R(0) = \text{有限值} \end{cases}$$

$$\Theta(\theta) : \begin{cases} \sin\theta(\sin\theta\Theta')' + (l(l+1)\sin^2\theta - m^2)\Theta = 0 \\ \Theta|_{0,\pi} = \text{有限值} \end{cases}$$

$$\Phi(\varphi) : \begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi := \Phi'' + m^2\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \end{cases}$$

第二步. 分别求 $R(r), \Theta(\theta), \Phi(\varphi)$ 的通解表示式.

1. $R(r)$ 满足 Euler 方程 $(r^2R')' - l(l+1)R = 0$, 通解形式为 $R(r) = A_l r^l + B_l r^{-l-1}$. 由 $R(0)$ 有限及 r^{-l-1} 在 $r=0$ 处发散可得 $B_l = 0$, 从而 $R(r) = A_l r^l$.
2. 考虑 $\Theta(\theta)$ 的通解表示. 作变换 $x = \cos\theta$, 令 $y(x) = \Theta(\theta) = \Theta(\arccos x)$, 则可得到伴随勒让德方程:

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \\ y|_{x=\pm 1} = \text{有限值} \end{cases}$$

由此可解得 $\Theta(\theta) = y(\cos\theta) = P_l^m(\cos\theta)$, $l \geq 0, 0 \leq m \leq l$. 具体推导可以参考季孝达“数学物理方程”第二版 P104-P107.

3. $\Phi(\varphi)$ 满足周期边界条件的 S-L 特征值问题, 由 S-L 定理可解得

$$\Phi(\varphi) = C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi, \quad m \geq 0.$$

第三步. 由上述可得 (10.2.4) 的形式解为

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l r^l (C_{lm} \cos m\varphi + D_{lm} \sin m\varphi) P_l^m(\cos\theta).$$

代入边界条件可求解得

$$C_{lm} = \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi\delta_m a^l (l+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_l^m(\cos\theta) \cos m\varphi \sin\theta d\theta d\varphi.$$

$$D_{lm} = \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi a^l (l+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_l^m(\cos\theta) \sin m\varphi \sin\theta d\theta d\varphi.$$

$$\text{其中 } \delta_m = \begin{cases} 2, & m = 0 \\ 1, & m \neq 0 \end{cases}$$

例 10.1. 半径为 $a > 0$ 的球内部没有电荷分布, 球面上的电势为 $\sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi$, 求球形区域内部的电势分布.

解. 考虑球坐标形式, 设球形区域内 (r, θ, φ) 处的电势为 $u(r, \theta, \varphi)$, 则有

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, & r < a \\ u|_{r=a} = \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \end{cases}$$

这是球域内的 Laplace 方程的初值问题, 则

$$\begin{aligned} u(a, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l a^l (C_{lm} \cos m\varphi + D_{lm} \sin m\varphi) P_l^m(\cos \theta) \\ &= \sin^2 \theta \cos \varphi = \frac{1}{6} \cdot 3 \sin^2 \theta \sin 2\varphi \\ &= \frac{1}{6} P_2^2(\cos \theta) \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

(上式成立由于 $P_2^2(x) = 3(1-x^2)$). 因此 $D_{22} = \frac{1}{6a^2}$, 其它为 0. 因此

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{6a^2} r^2 P_2^2(\cos \theta) \sin 2\varphi.$$

注 类似于球域的求解方法, 可以对特殊区域 (如半球内、球外、圆柱面) 上的 Laplace 方程的边值问题利用分离变量法求解.

10.3 Green 第一公式与第二公式、平均值公式

Green 第一、第二公式. 设 $D \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 有界, ν 为单位外法向. 在 Gauss 公式

$$\int_D \nabla \cdot \mathbf{F} dx = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

中分别取 $\mathbf{F} = v \nabla u$, $\mathbf{F} = u \nabla v$, 其中 $u, v \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ (未必调和), 可得

$$\int_D v \Delta u dx = \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_D \nabla v \cdot \nabla u dx. \quad (10.3.1)$$

$$\int_D u \Delta v dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS - \int_D \nabla u \cdot \nabla v dx. \quad (10.3.2)$$

公式 (10.3.1), (10.3.2) 统称为 **Green 第一公式**. 两式相减可得

$$\int_D (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial D} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS. \quad (10.3.3)$$

(10.3.3) 称为 **Green 第二公式**.

定理 10.3 (平均值公式). 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集, $u \in C^2(D)$, 则 $u(x)$ 为调和函数的充要条件为: 对任意 $B_r(x) \subset D$, 有

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y) \quad (10.3.4)$$

$$= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dS(y) \quad (10.3.5)$$

其中 $B_r(x)$ 为以 x 为中心, r 为半径的球, ω_n 为 n 维单位球的体积, $n\omega_n$ 为单位球的表面积. (10.3.4) 称为**球面平均公式**, (10.3.5) 称为**球体平均公式**. 利用 Γ 函数可得

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

特别地, $n = 2$ 时 $\omega_2 = \pi$, $n = 3$ 时 $\omega_3 = \frac{4\pi}{3}$,

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{\pi^m}{m!}, & n = 2m \\ \frac{2^{m+1}\pi^m}{(2m+1)!}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

证明. 必要性: 如果 $u(x)$ 调和, 定义函数

$$\varphi(r, x) := \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y) \stackrel{y=x+rz}{=} \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x+rz) d\tilde{S}(z).$$

其中 $dS(y) = r^{n-1} d\tilde{S}(z)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(r, x)}{\partial r} &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+rz) \cdot z d\tilde{S}(z) \\ &\stackrel{y=x+rz}{=} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(y) \\ &\stackrel{\text{Green 第一公式}}{=} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = 0. \end{aligned}$$

其中 $\nu = \frac{y-x}{r}$ 为球面 $\partial B_r(x)$ 上的单位外法向. 因此

$$\varphi(r, x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r, x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \lim_{r \rightarrow 0^+} u(x+rz) d\tilde{S}(z) = u(x).$$

球面平均公式证毕. 对于球体平均公式, 应用球面平均公式可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy &= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_0^r \int_{\partial B_\tau(x)} u(y) dS(y) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_0^r n\omega_n \tau^{n-1} u(x) d\tau \\ &= u(x). \end{aligned}$$

充分性: 利用反证法. 假设 $\Delta u \not\equiv 0$, 设 $x_0 \in D$ 使得 $\Delta u(x_0) > 0$. 由 Δu 连续可得 $\exists B_r(x_0) \subset D$ (r 充分小) 使得 $\Delta u(y) > 0, \forall y \in B_r(x_0)$. 由平均值公式的必要性的证明过程可得

$$0 = \frac{\partial u(x)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi(r, x)}{\partial r} = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy > 0,$$

矛盾. 因此 u 调和. □

注 下面列出两条相关的调和函数性质.

1. Harnack 不等式: 若 $n \geq 0$ 且 u 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内调和, 则 $\forall V \subset D$ 有界且连通, $\exists C = C(n, D, V) > 0$, 使得

$$\sup_V u \leq C \inf_V u.$$

2. Liouville 定理: 全空间调和且有界的函数必定是常数.

定理 10.4 (强最大值原理). 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为有界连通区域, $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ 调和, 若 $\exists x_0 \in D$ 使得 $u(x_0) = \max_D u(x)$ (或 $\min_D u(x)$), 则 u 在 D 内为常数.

证明. 我们仅证明最大值情况. 令 $M = u(x_0) = \max_D u(x)$, 由平均值公式可得 $\forall 0 < r < \text{dist}(x_0, \partial D)$, 成立

$$M = u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(y) dy \leq M,$$

当且仅当 $u(y) \equiv M, \forall y \in B_r(x_0)$ 时等号成立. 由有限开覆盖定理, $\forall x \in D$, 存在有限个开球 $B_{r_i}(x_i)$, $0 \leq i \leq m$ 使得 $x_i \in B_{r_{i-1}}(x_{i-1}) (1 \leq i \leq m)$ 且 $x_m = x$. 由前述可得在每个小球内 u 均取常数 M . 由 x 的任意性可得 $u \equiv M$ in D . \square

定理 10.5 (Dirichlet 原理). 定义能量泛函 $E[w] = \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - wf \right) dx, w \in \mathcal{A} := \{w \in C^2(\bar{D}) \mid w|_{\partial D} = h(x)\}$ (容许集). 则 $u \in C^2(\bar{D})$ 为 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ in } D \\ u|_{\partial D} = h(x) \end{cases}$$

的解的充要条件为 $E[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} E[w]$.

证明. 若 $u \in C^2(\bar{D})$ 满足 Dirichlet 问题, 则设 $w = u + v$, 若 $w \in \mathcal{A}$, 则 v 满足 $v|_{\partial D} = 0$.

$$\begin{aligned} E[w] &= \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - wf \right) \\ &= \int_D \left(\frac{1}{2} (\nabla u + \nabla v) \cdot (\nabla u + \nabla v) - (u + v)f \right) dx \\ &= \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - uf \right) dx + \int_D \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - vf \right) dx \\ &= E[u] + \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_D v \Delta u dx + \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - vf \right) dx \\ &= E[u] + \frac{1}{2} \int_D |\nabla v|^2 dx \geq E[u]. \end{aligned}$$

因此 $\min_{w \in \mathcal{A}} E[w] = E[u]$, 等号成立的充要条件为 $\nabla v = 0$, 即 $v \equiv C$ 为常数. 结合连续性和 $v|_{\partial D} = 0$ 可得 $v \equiv 0$, 因此 $w \equiv u$. \square

10.4 基本积分公式与 Green 函数

设有界区域 $D \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 的边界 ∂D 分片光滑, 考虑 Poisson 方程的边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \Big|_{\partial D} = \varphi(x) \end{cases} \quad (10.4.1)$$

其中 $f(x) \in C(D)$, $\varphi(x) \in C(\partial D)$, 且 $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

1. $\beta = 0$ 对应 Dirichlet 边值问题,
2. $\alpha = 0$ 对应 Neumann 边值问题,
3. $\alpha, \beta \neq 0$ 对应 Robin 边值问题.

若 $f \equiv 0$ 且 $D \subset \mathbb{R}^3$ 为长方体、球体或柱体, 则可以利用分离变量法; 若 $f \neq 0$ 或 $D \subset \mathbb{R}^3$ 为一般区域, 此时分离变量法失效.

基本积分公式 全空间中 $\Delta U = \delta(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ 的解, 称之为**基本解**, 可以用 Fourier 变换求出, 为

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2 \\ -\frac{|x|^{2-n}}{n(n-2)\omega_n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

其中 $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, ω_n 为 n 维单位球体积.

命题 10.2. $u(x) = U(x) * f(x)$ 为 $\Delta u = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ 的广义解 (弱解).

证明. 由卷积的微分性质可得

$$\Delta u(x) = \Delta(U(x) * f(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta U(y) f(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(y) f(x-y) dy = f(x-0) = f(x).$$

□

借助基本解, 我们可以得到以下**基本积分公式**:

定理 10.6 (基本积分公式). 设 $D \subset \mathbb{R}^n$, $u(x) \in C^2(\bar{D})$, 定义

$$V = V(x-y) := U(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x-y|, & n = 2 \\ -\frac{|x-y|^{2-n}}{n(n-2)\omega_n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

则成立

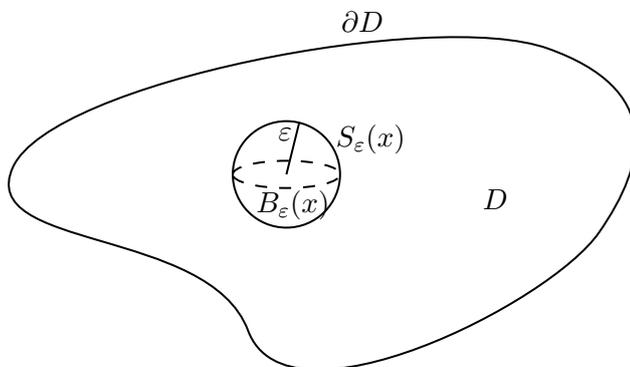
$$u(x) = \int_D V(y-x) \Delta u(y) dy + \int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu} - V(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) dS(y). \quad (10.4.2)$$

其中 ν 为 ∂D 上的单位外法向.

证明. 函数 $V(x-y)$ 仅在 $x=y$ 处有奇性且由对称性, 满足

$$\Delta V = \Delta_x V = \Delta_y V = \delta(x-y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

令 $B_a(x), S_a(x)$ 分别表示半径为 a , 球心为 x 的球和球面, 则对充分小的 $\varepsilon > 0$, 成立 Green 第二公式:



$$\int_{\partial D \setminus S_\varepsilon(x)} \left(u(y) \frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu} - V(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) dS(y) = \int_{D \setminus B_\varepsilon(x)} (u(y) \Delta V(y-x) - V(y-x) \Delta u(y)) dy. \quad (10.4.3)$$

在 $S_\varepsilon(x)$ 上, $\left| \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right|$ 有界, 而球面积 $|S_\varepsilon(x)| = n\omega_n \varepsilon^{n-1}$. 从而

$$\left| \int_{S_\varepsilon(x)} V(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} dS(y) \right| \leq C \varepsilon^{n-1} \max_{S_\varepsilon(0)} |V| = \begin{cases} C\varepsilon |\ln \varepsilon|, & n=2 \\ C\varepsilon, & n \geq 3 \end{cases} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

其中 C 为与 ε 无关的常数. 另一方面, 对 $V(y-x)$ 求梯度可得

$$\nabla V(y-x) = \nabla_y \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |y-x|, & n=2 \\ -\frac{|y-x|^{2-n}}{n(n-2)\omega_n}, & n \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{y-x}{2\pi|y-x|^2}, & n=2 \\ \frac{y-x}{n\omega_n|y-x|^n}, & n \geq 3 \end{cases} = \frac{y-x}{n\omega_n|y-x|^n}.$$

因此在 $S_\varepsilon(x)$ 上成立

$$\frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu} = \nabla V(y-x) \cdot \nu = \frac{y-x}{n\omega_n|y-x|^n} \cdot \frac{y-x}{|y-x|} = \frac{1}{n\omega_n|y-x|^{n-1}} = \frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} = \frac{1}{|S_\varepsilon(x)|}.$$

由上式, 作变量替换可得

$$\int_{S_\varepsilon(x)} u(y) \frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu} dS(y) = \frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_1(0)} u(x + \varepsilon z) \varepsilon^{n-1} d\tilde{S}(z) \rightarrow u(x), \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

所以

$$\int_{\partial D \setminus S_\varepsilon(x)} \left(u(y) \frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu} - V(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) dS(y)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_{\partial D} - \int_{S_\varepsilon} \right) \left(u(y) \frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu} - V(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) dS(y) \\
&\rightarrow \int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu} - V(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) dS(y) - u(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0^+.
\end{aligned}$$

由于 $\Delta V(y-x) = \delta(y-x) = 0$ in $D \setminus B_\varepsilon(x)$, 结合上述和 (10.4.3), 令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 可得

$$\int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu} - V(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) dS(y) - u(x) = - \int_D V(y-x) \Delta u(y) dy.$$

整理即得基本积分公式

$$u(x) = \int_D V(y-x) \Delta u(y) dy + \int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu} - V(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) dS(y).$$

□

Green 函数的引入 观察基本积分公式, 可以分三种情况讨论:

第 I 类边值问题 此时 $\alpha = 1, \beta = 0$, 对应边值问题为

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), & x \in D \\ u|_{\partial D} = \varphi(x) \end{cases} \quad (10.4.4)$$

引入**修正函数** $H(y, x)$ 满足 $\Delta_y H(y, x) = 0, x, y \in D; H|_{\partial D} = -V(y-x)$. 由 Green 第二公式可得

$$\int_D (H(y, x) \Delta u(y) - u(y) \Delta_y H(y, x)) dy = \int_{\partial D} \left(H(y, x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial H(y, x)}{\partial \nu} \right) dS(y).$$

由 $\Delta H(y-x) = \Delta_y(y-x) = 0$ 及 $\Delta u(y) = f(y)$ 可得

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} -V(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} dS(y) &= \int_{\partial D} H(y, x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} dS(y) \\ &= \int_D H(y, x) f(y) dy + \int_{\partial D} u(y) \frac{\partial H(y, x)}{\partial \nu} dS(y). \end{aligned}$$

我们称满足

$$\begin{cases} \Delta_y G(x, y) = \delta(x-y), & x, y \in D \\ G|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

的解 $G(x, y) = V(y-x) + H(y, x)$ 为 Poisson 方程第 I 类边值问题的 **Green 函数**. 由基本积分公式和边值问题 (10.4.4) 可得

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_D V(y-x) \Delta u(y) dy + \int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu} - V(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) dS(y) \\ &= \int_D (V(y-x) + H(y, x)) f(y) dy + \int_{\partial D} \varphi(y) \left(\frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu} + \frac{\partial H(y, x)}{\partial \nu} \right) dS(y) \\ &= \int_D G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu} dS(y). \end{aligned}$$

因此边值问题 (10.4.4) 的解为

$$u(x) = \int_D G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu} dS(y).$$

上式称为 **Poisson 公式**. 从物理意义上看, Green 函数是边界接地条件下 y 点电荷 $-\varepsilon$ 在 x 点产生的电场, 具有倒易性.

第 II 类边值问题 此时 $\alpha = 0, \beta = 1$, 对应边值问题为

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), & x \in D \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial D} = \varphi(x) \end{cases} \quad (10.4.5)$$

如果按照第 I 类边值问题定义 $G(x, y)$ 满足 $\Delta_y G(x, y) = \delta(x - y), x, y \in D; \left. \frac{\partial G}{\partial \nu} \right|_{\partial D} = 0$, 从物理角度来看, 此时内部放热而边界绝热, 温度分布不可能稳定. 因此该定解问题无解. 如果内部增加均匀分布的冷源, 则可以抵消放热, 重新定义 Poisson 第 II 类边值问题的 Green 函数满足定解问题

$$\begin{cases} \Delta_y G(x, y) = \delta(x - y) - \frac{1}{|D|}, & x, y \in D \\ \left. \frac{\partial G}{\partial \nu} \right|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$|D|$ 表示区域 D 的体积. 从而

$$0 = \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial \nu} dS = \int_D \Delta G dy = \int_D \left(\delta(x - y) - \frac{1}{|D|} \right) dy.$$

由 Green 第一公式可得边值问题 (10.4.5) 有解的必要条件为

$$\int_{\partial D} \varphi(y) dS(y) = \int_{\partial D} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} dS(y) = \int_D \Delta u(y) dy = \int_D f(y) dy.$$

边值问题的解为

$$u(x) = \int_D G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial D} \varphi(y) G(x, y) dS(y) + C.$$

第 III 类边值问题 此时 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, 对应边值问题为

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), & x \in D \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \Big|_{\partial D} = \varphi(x) \end{cases} \quad (10.4.6)$$

此时与第 I 类边值问题类似, 可以定义 Poisson 方程第 III 类边值问题的 Green 函数为

$$\begin{cases} \Delta G(x, y) = \delta(x - y), & x, y \in D \\ \left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial \nu} \right) \Big|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

的解, 则在边界上

$$\varphi(x) G(x, y) = \left(\alpha G u + \beta G \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) - \left(\alpha u G + \beta u \frac{\partial G}{\partial \nu} \right) = \beta \left(G \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial G}{\partial \nu} \right).$$

因此 $G \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{\varphi G}{\beta}$. 从而边值问题 (10.4.6) 的解为

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_D G(x, y) f(y) dy - \frac{1}{\beta} \int_{\partial D} \varphi(y) G(x, y) dS(y) \\ &= \int_D G(x, y) f(y) dy + \frac{1}{\alpha} \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu} dS(y). \end{aligned}$$

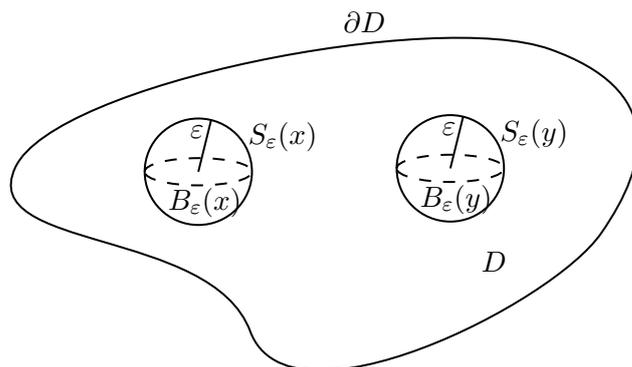
Green 函数的对称性

定理 10.7. 任一边值条件下的 Green 函数 $G(x, y)$ 满足 $G(x, y) = G(y, x)$, $x, y \in D$.

证明. 任意固定 $x, y \in D$, $x \neq y$. 则函数 $u(z) := G(z, y)$, $v(z) := G(z, x)$ 在 $D \setminus (B_\varepsilon(y) \cup B_\varepsilon(x))$ 上均无奇点, 其中 ε 为充分小正数. 且在 $D \setminus (B_\varepsilon(y) \cup B_\varepsilon(x))$ 上满足 $\Delta u = \Delta G(z, y) = \delta(z - y) = 0$, $\Delta v = \Delta G(z, x) = \delta(z - x) = 0$. 由 Green 第二公式可得

$$\int_{D \setminus (B_\varepsilon(y) \cup B_\varepsilon(x))} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS(z) = \int_{D \setminus (B_\varepsilon(y) \cup B_\varepsilon(x))} (u \Delta v - v \Delta u) dz = 0.$$

对于三种边界条件, 均成立



$$\int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS(z) = 0.$$

由此可得

$$\int_{S_\varepsilon(y)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS(z) + \int_{S_\varepsilon(x)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS(z) = 0.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 类似第 I 类边值条件的讨论可得 $0 - v(y) + u(x) - 0 = 0 \Rightarrow u(x) = v(y)$, 因此 $G(x, y) = G(y, x)$. \square

10.5 特殊区域的 Green 函数求法

镜像法 镜像法的物理原理为: Green 函数 = 自由点电荷产生的电场 + 边界感应电荷产生的电场, 其中边界感应电荷产生的电场 = **虚设电荷**产生的电场, 虚设电荷满足: (1) 在区域外; (2) 在边界上与自由点电荷产生的电场相同. 数学原理为 $G(x, y) = V(y - x) + H(y, x)$, $x, y \in D$, 其中

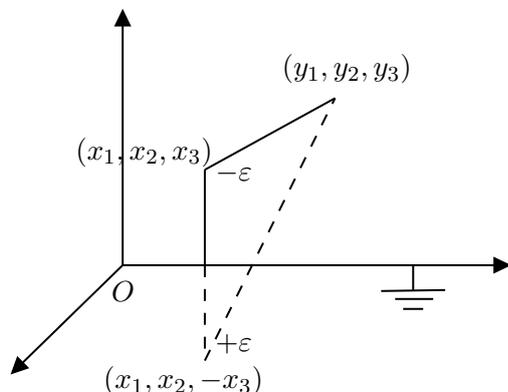
$$V = V(x - y) = V(y - x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x - y|, & N = 2 \\ -\frac{1}{4\pi |x - y|}, & N = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_y H(y, x) = 0, & x, y \in D \\ H|_{\partial D} = -V|_{\partial D} \end{cases}$$

$H(x, y)$ 即为域外虚设电荷产生的电场.

例 10.2. 上半空间第 I 类边值问题的 Green 函数

$$\begin{cases} \Delta_3 G = \delta(x - y), & x_3, y_3 > 0 \\ G|_{y_3=0} = 0 \end{cases}$$



解. 物理方法: 问题转化为: 在接地无限大导体板上方的 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 处放置一个电量为 $-\varepsilon$ 的点电荷, 求导体板上任一点 $y = (y_1, y_2, y_3)$ 的电势. 虚设电荷的电量为 $+\varepsilon$, 位置 $x^* = (x_1, x_2, -x_3)$ 与 x 关于导体板对称, 如图所示. 所以 y 点的电势为

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \varphi_{-\varepsilon} + \varphi_{+\varepsilon} = -\frac{1}{4\pi|y-x|} + \frac{1}{4\pi|y-x^*|} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2}} + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3+x_3)^2}}. \end{aligned}$$

数学方法: 令 $x^* = (x_1, x_2, -x_3)$ 为 x 关于平面 $y_3 = 0$ 的对称点, 则 $H(y, x) := -V(y - x^*)$, $x, y \in D$ 满足

$$\Delta H(y, x) = -\Delta V(y - x^*) = -\delta(y - x^*) = 0,$$

$$H|_{y_3=0} = -V(y - x^*)|_{y_3=0} = \frac{1}{4\pi|y - x^*|}|_{y_3=0} = \frac{1}{4\pi|y - x|}|_{y_3=0} = -V(y - x)|_{y_3=0}.$$

所以 H 是符合条件的修正函数, 因此 $G(x, y) = V(y - x) + H(y, x) = V(y - x) - V(y - x^*)$. 因此

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{y_3=0} = -\frac{\partial G}{\partial y_3} \Big|_{y_3=0} = \frac{x_3}{2\pi((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

由 Poisson 公式可得第 I 类边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, & x_3 > 0 \\ u|_{x_3=0} = \varphi(x_1, x_2) \end{cases}$$

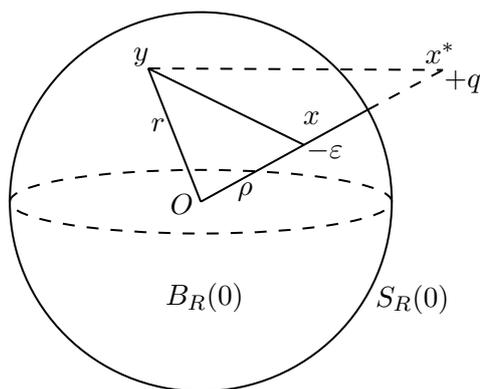
的解为

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} dy_1 dy_2.$$

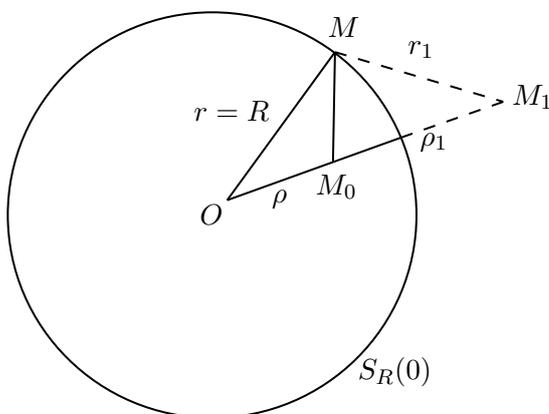
例 10.3. 三维球第 I 类边值问题的 Green 函数

$$\begin{cases} \Delta_3 G = \delta(x - y), & x, y \in B_R(0) \\ G|_{r=R} = 0, & r := |y| \end{cases}$$

其中 $B_R(0), S_R(0)$ 分别为半径为 R , 球心在原点的三维球和球面.



解. 记 $x = OM_0$, $y = OM$, 令 $\rho = |x|$, $\rho_1 = |OM_1|$, $\rho\rho_1 = R^2 \Rightarrow \frac{R}{\rho} = \frac{\rho_1}{R}$. 我们称 $x^* = M_1$ 为 M_0 关于球面 $S_R(0)$ 的对称点.



1. 物理方法: 设虚设电荷为 $+q$, 电荷位置为 x 关于球面的对称点. 当 M 位于球面上时, 由几何关系可得 $\triangle OM_1M \sim \triangle OM_0M$, 因此

$$\frac{R}{\rho} = \frac{\rho_1}{R} = \frac{r_1}{|y-x|} \Rightarrow \frac{R}{4\pi\rho r_1} = \frac{1}{4\pi|y-x|}.$$

电荷 $+q$ 在 $S_R(0)$ 上的电势为 $\frac{q}{4\pi\epsilon r_1} \Big|_{r=R} = \frac{1}{4\pi|y-x|} \Big|_{r=R}$, 结合上式可得 $q = \frac{\epsilon R}{\rho}$, 因此

$$H(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon r_1} = \frac{R}{4\pi\rho r_1} = \frac{R}{4\pi|x||y-x^*|}.$$

因此 Green 函数为

$$G(x, y) = -\frac{1}{4\pi|y-x|} + \frac{R}{4\pi|x||y-x^*|}.$$

2. 数学方法. 令 $M_1 = \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 M_0$ 为 M_0 关于球面 $S_R(0)$ 的对称点, 其中 $\rho = |OM_0| = |x|$. 令

$H(y, x) = -\frac{R}{\rho}V(y-x^*)$, $x, y \in B_R(0)$, $x^* \notin \overline{B_R(0)}$, 则

$$\Delta H = -\frac{R}{\rho}\Delta V(y-x^*) = -\frac{R}{\rho}\delta(y-x^*) = 0,$$

另一方面, 当 $y \in S_R(0)$ 时,

$$r_1 = \left| y - \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 x \right| = \sqrt{R^2 - 2 \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 y \cdot x + \frac{R^4}{\rho^2}} = \frac{R}{\rho} \sqrt{R^2 - 2y \cdot x + \rho^2} = \frac{R}{\rho} |y - x|.$$

因此有

$$H|_{S_R(0)} = \frac{R}{\rho} \frac{1}{4\pi r_1} \Big|_{S_R(0)} = \frac{1}{4\pi |y - x|} = -V(y - x).$$

所以 H 是符合条件的修正函数. 从而 Green 函数为

$$G(x, y) = V(x, y) + H(x, y) = -\frac{1}{4\pi |y - x|} + \frac{R}{4\pi |x| |y - x|}.$$

从而

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r_0} \right) - \frac{R}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right).$$

设 $\angle MOM_1 = \psi$, 其中

$$r_0 = |M - M_0| = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi}, \quad r_1 = |M - M_1| = \sqrt{r^2 + \rho_1^2 - 2r\rho_1 \cos \psi}.$$

因此计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r_0} \right) \Big|_{S_R(0)} &= \frac{\rho^2 - r^2 - r_0^2}{2rr_0^3} \Big|_{S_R(0)} = \frac{\rho^2 - R^2 - r_0^3}{2Rr_0^3}. \\ \frac{R}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r_1} \right) \Big|_{S_R(0)} &= \frac{R}{\rho} \frac{\rho^2 - R^2 - r_1^2}{2Rr_1^3} = \frac{R^2 - r_0^2 - \rho^2}{2Rr_0^3}. \end{aligned}$$

上式由相似三角形的性质推得. 代入 $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ 可得

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} \Big|_{S_R(0)} = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi Rr_0^3}.$$

由 Poisson 公式可得第 I 类边值问题 $\Delta_3 u = 0, x \in B_R(0); u|_{r=R} = \Phi(x)$ 的解为

$$\begin{aligned} u(x) &= \iint_{S_R(0)} \Phi(y) \frac{\partial G}{\partial \nu} dS(y) \\ &= \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \iint_{S_R(0)} \frac{\Phi(y)}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi)^{\frac{3}{2}}} dS(y) \\ &= \frac{R(R^2 - |x|^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\Phi(\theta, \varphi) \sin \theta}{(R^2 + |x|^2 - 2R|x| \cos \psi)^{\frac{3}{2}}} d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

其中 $\cos \psi = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM_0}}{|\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{OM_0}|} = \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta \cos \theta_0$. 当 $x = 0, \rho = 0$ 时, 由解式可得

$$u(0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R(0)} u(y) dS(y).$$

这是调和函数的球面平均值公式.

注 1 二维圆域第 I 类边值问题的 Green 函数为

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln |y - x| + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{|x||y - x^*|},$$

其中 x^* 是 x 关于圆周 $S_R(0)$ 的对称点.

注 2 三维球外第 I 类边值问题

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, & |x| = r > R \\ u_1|_{r=R} = \Phi(x) \end{cases}$$

Green 函数为

$$G_1(x, y) = V(y - x) - \frac{R}{\rho} V(y - x^*) = G(x, y),$$

边值问题的解为

$$u_1(x) = \frac{R(|x|^2 - R^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\Phi(\theta, \varphi) \sin \theta}{(R^2 + |x|^2 - 2R|x| \cos \psi)^{\frac{3}{2}}} d\theta d\varphi = -u(x).$$

注 3 圆域内的一般第 I 类边值问题:

$$\begin{cases} \Delta_2 u = f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in B_R(0) \subset \mathbb{R}^2 \\ u|_{r=R} = \varphi(x_1, x_2) \end{cases}$$

由注 1 可得 Green 函数 $G(x, y), x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ 为

$$G(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \psi}}{\sqrt{\rho^2 r^2 + R^4 - 2\rho r R^2 \cos \psi}}.$$

计算可得

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \nu} \right|_{S_R(0)} = \left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - (x_1^2 + x_2^2)}{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \Big|_{(y_1, y_2) \in S_R(0)}.$$

应用 Poisson 公式可得直角坐标下的解为

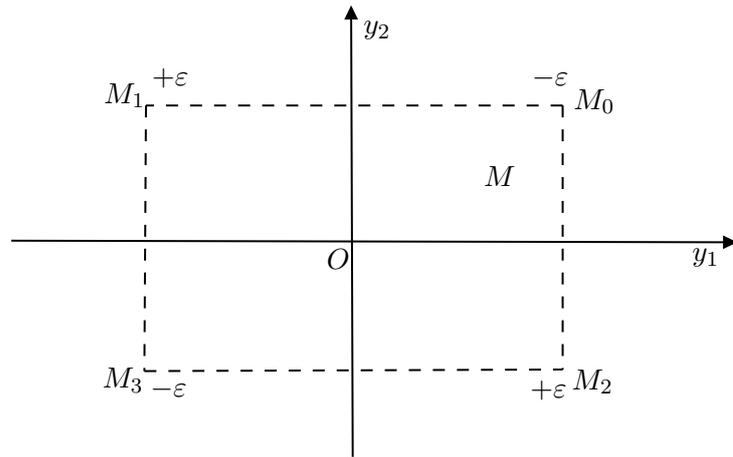
$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{B_R(0)} \ln \frac{R\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{(y_1 - x_1^*)^2 + (y_2 - x_2^*)^2}} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &+ \frac{R^2 - (x_1^2 + x_2^2)}{2\pi R} \int_{S_R(0)} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} dS(y_1, y_2). \end{aligned}$$

极坐标下的解为

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \ln \frac{\rho^2 r^2 + R^4 - 2\rho r R^2 \cos(\theta - \alpha)}{R^2(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha))} f(r, \alpha) r d\alpha \\ &+ \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\alpha)}{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos(\theta - \alpha)} d\alpha. \end{aligned}$$

例 10.4. 求四分之一平面第 I 类边值问题的 Green 函数.

$$\begin{cases} \Delta_y G = \delta(x - y), & y_1 > 0, y_2 > 0 \\ G|_{y_1=0} = G|_{y_2=0} = 0. \end{cases}$$



解. 设 $x = M_0$ 点有电荷 $-\varepsilon_0$, M_0 关于 y_2, y_1 轴与原点的对称点分别为 M_1, M_2, M_3 , 三点处的虚设电荷分别为 $+\varepsilon, +\varepsilon, -\varepsilon$. 则等效电场为

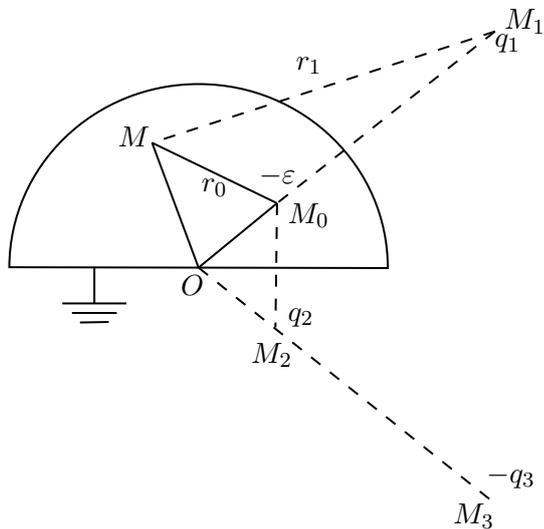
$$H_k : -\frac{1}{2\pi} \ln r_1, -\frac{1}{2\pi} \ln r_2, \frac{1}{2\pi} \ln r_3, \quad r_k = |M - M_k|, 0 \leq k \leq 3.$$

因此 $H(y, x) = H_1(y, x) + H_2(y, x) + H_3(y, x)$, Green 函数为

$$G(x, y) = V(x, y) + H(y, x) = \frac{1}{2\pi} \ln r_0 - \frac{1}{2\pi} \ln r_1 - \frac{1}{2\pi} \ln r_2 + \frac{1}{2\pi} \ln r_3 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_0 r_3}{r_1 r_2}.$$

例 10.5. 求上半圆域第 I 类边值问题的 Green 函数.

$$\begin{cases} \Delta_y G = \delta(x - y), & x, y \in B_R^+(0) \subset \mathbb{R}^2 \\ G|_{S_R^+(0)} = 0 \end{cases}$$



解. 在极坐标下, 令 $x = M_0 = (\rho, \theta_0)$, 取 x 关于圆周的对称点 $M_1 \left(\frac{R^2}{\rho}, \theta_0 \right)$, 以及 M_0, M_1 关于水平轴的对称点 $M_2 = (\rho, -\theta_0), M_3 \left(\frac{R^2}{\rho}, -\theta_0 \right)$, 则虚设电荷的电量分别为

$$q_1 = \varepsilon \frac{R}{\rho}, \quad q_2 = \varepsilon, \quad -q_3 = -\varepsilon \frac{R}{\rho}.$$

因此 Green 函数为

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left(\left(\ln r_0 + \ln \frac{R}{\rho r_1} \right) - \left(\ln r_2 + \ln \frac{R}{\rho r_3} \right) \right) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_0 r_3}{r_1 r_2}.$$

保形变换法 该方法仅适用于二维区域.

定理 10.8 (单连通域的 Green 函数). 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 单连通, 若**保形变换** (即解析的一一映射) $w : D \rightarrow D_1$ (单位圆盘) 满足

$$w(z_0) = 0 (z_0 = \xi + i\eta \in D), \quad |w(z)| = 1 (z = x + iy \in \partial D),$$

则 D 上第 I 类边值问题的 Green 函数为

$$G(x, y, \xi, \eta) = G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |w(z)|.$$

即满足

$$\begin{cases} \Delta G = \delta(x - \xi, y - \eta), & (x, y), (\xi, \eta) \in D \\ G|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

证明. 由于 $G|_{\partial D} = \frac{1}{2\pi} \ln |w(z)| \Big|_{|w(z)|=1} = 0$, $\Delta \left(\frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0| \right) = \delta(x - \xi, y - \eta)$, 只需证明 $\ln \frac{|w(z)|}{|z - z_0|}$

在 D 内调和, 从而 $G = \frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0| + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|w(z)|}{|z - z_0|}$ 是 Green 函数. 令

$$F(z) = \begin{cases} \frac{w(z)}{z - z_0}, & z \neq z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w(z) - w(z_0)}{z - z_0} = w'(z_0) \neq 0, & z = z_0 \end{cases}$$

则有 $F(z) \neq 0$, 从而 $\ln F(z)$ 在 D 内单值解析. 由 Cauchy-Riemann 方程立得 $\operatorname{Re}(\ln F(z)) = \ln \frac{|w(z)|}{|z - z_0|}$ 在 D 内调和. \square

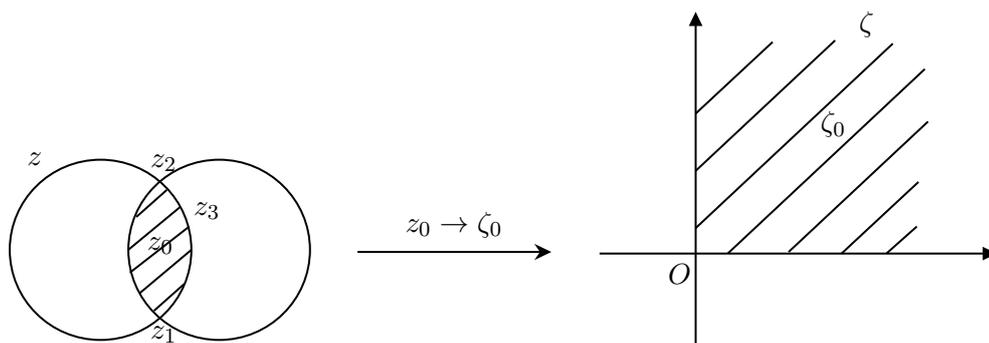
例 10.6. 1. 若 $w(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow D_1$, 则 $G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|$.

2. 若 $w(z) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - z\bar{z}_0} : D_R \rightarrow D_1$, 则 $G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{R(z - z_0)}{R^2 - z\bar{z}_0} \right|$.

3. 若 $w(z) = \frac{e^z - e^{z_0}}{e^z - e^{\bar{z}_0}} : \{0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\} \rightarrow D_1$, 则 $G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{e^z - e^{z_0}}{e^z - e^{\bar{z}_0}} \right|$.

4. $\zeta = g(z) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$, $f(\zeta) = \frac{\zeta^2 - \zeta_0^2}{\zeta^2 - \bar{\zeta}_0^2}$, $w(z) = f(g(z))$, 则

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |w(z)| = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{g^2(z) - g^2(z_0)}{g^2(z) - \bar{g}^2(z_0)} \right|.$$



Fourier 展开法 基本思路: 在保持同样的齐次边界的前提下, 将 Green 函数按正交基作广义 Fourier 展开, 再利用方程和边界条件确定相关系数.

例 10.7. 二维矩形区域:

$$\begin{cases} \Delta_2 G = \delta(x - \xi, y - \eta), & 0 < x, \xi < a, 0 < y, \eta < b \\ G|_{x=0,a} = G|_{y=0,b} = 0 \end{cases}$$

解. 考虑以下特征值问题:

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b \\ v|_{x=0,a} = v|_{y=0,b} = 0 \end{cases}$$

将分离解 $X(x)Y(y)$ 代入方程可得

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, & 0 < x < a \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}, n \geq 1.$$

$$\begin{cases} Y''(y) + \nu Y(y) = 0, & 0 < y < b \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \nu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, Y_m(y) = \sin \frac{m\pi y}{b}, m \geq 1.$$

因此原特征值问题的特征值和特征函数为

$$\lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, v_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

令形式解为

$$G(x, y) = \sum_{n,m \geq 1} C_{nm} v_{nm}(x, y) = \sum_{n,m \geq 1} C_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

从而

$$\Delta_2 G = - \sum_{n,m \geq 1} C_{nm} \left(\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} = \delta(x - \xi, y - \eta).$$

对 $\delta(x - \xi, y - \eta)$ 作广义 Fourier 展开可得

$$\Delta_2 G = \sum_{n,m \geq 1} \frac{\langle \delta(x - \xi, y - \eta), v_{nm}(x, y) \rangle}{\|v_{nm}(x, y)\|^2} v_{nm}(x, y) = \sum_{n,m \geq 1} \frac{\sin \frac{n\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi \eta}{b}}{\frac{a}{2} \frac{b}{2}} v_{nm}(x, y).$$

比较系数可得

$$C_{nm} = -\frac{4 \sin \frac{n\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi\eta}{b}}{ab \left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} \right)}.$$

例 10.8. 三维球域第 III 类边值问题:

$$\begin{cases} \Delta_y G = \delta(x-y), & x, y \in B_R(0) \subset \mathbb{R}^3 \\ \left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = 0 \end{cases}$$

解. Green 函数为 $G(x, y) = V(y-x) + H(y, x)$, 其中 $V(y, x) = -\frac{1}{4\pi|y-x|}$, $H(y, x)$ 满足球轴对称问题:

$$\begin{cases} \Delta_y H = 0, & x, y \in B_R(0) \\ \left(\alpha H + \beta \frac{\partial H}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = - \left(\alpha V + \beta \frac{\partial V}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} \end{cases}$$

利用球坐标及分离变量法可求得

$$H(y, x) = \sum_{n \geq 0} C_n \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \theta),$$

其中 $P_n(\cdot)$ 为 Legendre 多项式. 由边界条件可得

$$\left(\alpha H + \beta \frac{\partial H}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \sum_{n \geq 0} \left(\alpha + \frac{n\beta}{R} \right) C_n P_n(\cos \theta).$$

利用 Legendre 多项式的母函数可得 $\rho := |x| < r := |y|$ 时有

$$-4\pi V(y-x) = \frac{1}{|y-x|} = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \theta).$$

由此可得

$$- \left(\alpha V + \beta \frac{\partial V}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha R - (n+1)\beta}{4\pi R^{n+2}} \rho^n P_n(\cos \theta).$$

比较系数可得

$$C_n = \frac{\alpha R - (n+1)\beta}{\alpha R + n\beta} \frac{\rho^n}{4\pi R^{n+1}}.$$

代入 Green 函数表达式可得

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{|y-x|} + \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha R - (n+1)\beta}{(\alpha R + n\beta) R^{2n+1}} |x|^n |y|^n P_n \left(\frac{|x|^2 + |y|^2 - |y-x|^2}{2} \right) \right).$$

一般有界区域上的定解问题 一般有界区域 $D \subset \mathbb{R}^d (d \geq 1)$ 上的定解问题形式如下:

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u, & x \in D, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2\Delta u, & x \in D, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

设分离解为 $v(x)T(t)$, 代入可得

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{\Delta v(x)}{v(x)} =: -\lambda \text{ 或 } \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{\Delta v(x)}{v(x)} =: -\lambda.$$

代入边界条件可得 **Helmholtz 方程** 的特征值问题

$$\begin{cases} \Delta v(x) + \lambda v(x) = 0 \text{ in } D \\ v|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

特征值 $\lambda_n (n \geq 1)$ 满足 $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$, 对应的特征函数系 $\{v_n(x)\}_1^\infty$ 是 $L^2(D)$ 的正交基. 设形式解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n k t} v_n(x) \text{ 或 } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos c\sqrt{\lambda_n} t + D_n \sin c\sqrt{\lambda_n} t) v_n(x).$$

代入初始条件确定系数即可.

Pólya 猜想 1954 年 George Pólya 提出如下 Pólya 猜想: 特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = \lambda v(x) \text{ in } D \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2 \\ v|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

的特征值 λ_n 满足 $\lambda_n \geq \left(\frac{nC_N}{|D|}\right)^{\frac{2}{N}}$, $n \geq 1$, 其中 $C_N = \frac{(2\pi)^N}{\omega_N}$. Pólya 猜想目前仍然是世界级 Open Problem. 目前最好的结果是于 1983 年丘成桐证明了

$$\lambda_n \geq \frac{N}{N+2} \left(\frac{nC_N}{|D|}\right)^{\frac{2}{N}}.$$

第十一章 高维发展型偏微分方程 (含线性和非线性 PDE)

11.1 三维波动方程初值问题解的唯一性

定理 11.1 (唯一性定理). 三维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta_3 u = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad (11.1.1)$$

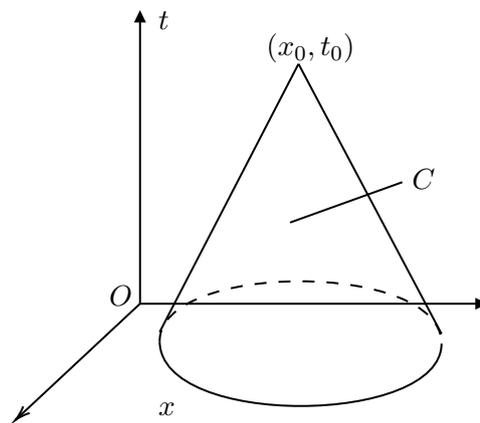
至多有一个经典解.

证明. 设 u_1, u_2 是初值问题 (11.1.1) 的经典解, 令 $u := u_1 - u_2$, 则 w 满足齐次初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta_3 u = 0 \\ u|_{t=0} = 0, & u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (11.1.2)$$

只需证明 (11.1.2) 仅有平凡解. 任意固定 $x_0 \in \mathbb{R}^3, t_0 > 0$, 考虑**特征锥**:

$$C := \{(x, t) \in \mathbb{R}^4 : |x - x_0| \leq c(t_0 - t), 0 \leq t \leq t_0\}.$$



特征锥 C 同平面 $\tilde{t} = t$ 的截面即为 $B_{c(t_0-t)}(x_0) \times \{t\}$. 定义能量函数为

$$E(t) = E_K(t) + E_P(t) = \frac{1}{2} \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx$$

为动能和势能之和. 记 $S_{c(t_0-t)}(x_0) = \partial B_{c(t_0-t)}(x_0)$. 从而

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{c(t_0-t)} dr \int_{S_r(x_0)} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dS \\ &\stackrel{\text{含参变量微分}}{=} \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} (u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t) dx - \frac{c}{2} \int_{S_{c(t_0-t)}(x_0)} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dS \\ &\stackrel{\text{Green 第 I 公式}}{=} \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} u_t (u_{tt} - c^2 \Delta_3 u) dx + c \int_{S_{c(t_0-t)}(x_0)} \left(cu_t \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2}{2} \right) dS. \end{aligned}$$

由波动方程可得 $u_{tt} - c^2 \Delta_3 u = 0$, 且由 Cauchy 不等式可得

$$\left| cu_t \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| = |u_t| \cdot |c \nabla u \cdot \nu| \leq |u_t| \cdot |c \nabla u| \leq \frac{u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2}{2}.$$

因此 $\frac{dE(t)}{dt} \leq 0$, 即 $E(t)$ 关于 t 在 \mathbb{R}^+ 上递减. 由边界条件可得 $E(0) = 0$, 从而

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = 0.$$

即 $E(t) \equiv 0 \Rightarrow u_t \equiv 0, \nabla u \equiv 0 \Rightarrow u \equiv C$ 为常数, 结合 $u|_{t=0} = 0$ 及连续性可得 $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$, 从而 $u_1 \equiv u_2$, 经典解唯一. \square

11.2 高维偏微分方程初边值问题的唯一性和分离变量法

高维波动方程的初边值问题 考虑以下初边值问题 (D 为有界区域):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t), & x \in D \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \bar{D} \\ u|_{\partial D} = g(x, t), & x \in \partial D, t \geq 0 \quad (\text{D}) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial D} = g(x, t), & x \in \partial D, t \geq 0 \quad (\text{N}) \\ \left(\sigma(x)u + \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \Big|_{\partial D} = g(x, t), & x \in \partial D, t \geq 0 \quad (\text{R}) \end{cases} \quad (11.2.1)$$

其中 (D), (N), (R) 分别对应第 I, II, III 类边界条件, $\sigma(x) \geq 0$.

定理 11.2 (唯一性定理). 高维波动方程的初边值问题 (11.2.1) 在任一边界下至多有一个经典解.

证明. 设 u_1, u_2 是 (11.2.1) 的解, 令 $w := u_1 - u_2$, 则 w 满足

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 \Delta w = 0, & x \in D, t > 0 \\ \text{齐次初始条件和边值条件} \end{cases} \quad (11.2.2)$$

对于边界条件 (D) 和 (N), 定义 (11.2.2) 的能量为

$$E_{\text{DN}}(t) = \frac{1}{2} \int_D (w_t^2 + c^2 |\nabla w|^2) dx, \quad t \geq 0.$$

对于边界条件 (R), 定义能量为

$$E_R(t) = \frac{1}{2} \int_D (w_t^2 + c^2 |\nabla w|^2) dx + \frac{c^2}{2} \int_{\partial D} \sigma(x) w^2 dS, \quad t \geq 0.$$

应用 Green 第一公式可得

$$\int_D \nabla w_t \cdot \nabla w dx = \int_{\partial D} w_t \frac{\partial w}{\partial \nu} dS - \int_D w_t \Delta w dx.$$

对能量函数求导并利用边界条件可得

$$\begin{aligned} \frac{dE_{DN}(t)}{dt} &= \int_D (w_t w_{tt} + c^2 \nabla w_t \cdot \nabla w) dx \\ &= \int_D w_t (w_{tt} - c^2 \Delta w) dx + c^2 \int_{\partial D} w_t \frac{\partial w}{\partial \nu} dS = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_R(t)}{dt} &= \int_D (w_t w_{tt} + c^2 \nabla w_t \cdot \nabla w) dx + c^2 \int_{\partial D} \sigma(x) w w_t dS \\ &= \int_D w_t (w_{tt} - c^2 \Delta w) dx + c^2 \int_{\partial D} w_t \left(\sigma(x) w + \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) dS = 0. \end{aligned}$$

因此 $E_{DN}(t) \equiv E_{DN}(0) = 0$, $E_R(t) \equiv E_R(0) = 0$, 从而 $w_t \equiv 0$, $\nabla w \equiv 0$, 结合连续性及 $w|_{t=0} = 0$ 可得 $w \equiv 0$ in $D \times \mathbb{R}^+$, 因此 $u_1 \equiv u_2$, 经典解唯一. \square

例 11.1. 高维热方程的 Dirichlet 初边值问题

$$\begin{cases} u_t - k \Delta u = f(x, t), & x \in D \subset \mathbb{R}^n, t > 0, k > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{\partial D} = g(x, t), & x \in \partial D, t \geq 0 \end{cases} \quad (11.2.3)$$

至多有一个经典解.

证明. 设 u_1, u_2 是初边值问题 (11.2.3) 的解, 令 $u := u_1 - u_2$, 则 u 满足齐次初边值问题

$$\begin{cases} u_t - k \Delta u = 0, & x \in D, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

定义能量为 $E(t) = \frac{1}{2} \int_D u^2 dx$, 则由 Green 第一公式可得

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_D u u_t dx = k \int_D u \Delta u dx = k \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - k \int_D \nabla u \cdot \nabla u dx = -k \int_D |\nabla u|^2 dx \leq 0.$$

因此 $E(t)$ 关于 t 在 \mathbb{R}^+ 上递减, 由边界条件可得 $E(0) = 0$, 因此

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = 0,$$

从而 $E(t) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$ in $D \times \mathbb{R}^+$, 因此 $u_1 \equiv u_2$, 经典解唯一. \square

球域内三维波动方程的初边值问题 考虑以下初边值问题的分离变量解法:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0, & x^2 + y^2 + z^2 < a^2, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), & x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), & x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \\ u|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (11.2.4)$$

第一步 首先分离时间变量和空间变量, 即求分离解

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z)T(t).$$

代入 (11.2.4) 的方程中可得

$$v(x, y, z) : \begin{cases} \Delta v + \lambda v := \Delta v + k^2 v = 0 \\ v|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = 0 \end{cases}$$

$$T(t) : T''(t) + k^2 c^2 T(t) = 0.$$

其中 $v(x, y, z)$ 满足的方程称为亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程.

第二步 求解 $T(t)$. 当 $k = 0$ 时, $T(t) = C + Dt$; 当 $k \neq 0$ 时,

$$T(t) = C \cos(kct) + D \sin(kct).$$

其中 C, D 为常数.

第三步 求解 $v(x, y, z)$. 由 Laplace 算子的三维极坐标形式可得 $v(x, y, z)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k^2 v = 0 \\ v|_{r=a} = 0, v|_{r=0} = \text{有限值} \\ v(r, \theta, \varphi) = v(r, \theta, \varphi + 2\pi) \\ v|_{\theta=0, \pi} = \text{有限值} \end{cases}$$

再次利用分离变量法, 设分离解为 $v(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$, 代入方程可得

$$R(r) : \begin{cases} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - l(l+1))R = 0 \\ R(a) = 0, R(0) = \text{有限值} \end{cases}$$

$R(r)$ 满足球 Bessel 方程, 特征值 $k_n (n \geq 1)$ 对应的特征函数为球 Bessel 函数:

$$R_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_n r}} A J_{l+\frac{1}{2}}(k_n r).$$

其中 $J_{l+\frac{1}{2}}(\cdot)$ 为 $l + \frac{1}{2}$ 阶第一类 Bessel 函数. 函数 $Y(\theta, \varphi)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y = 0 \\ Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi + 2\pi) \\ Y_{\theta=0, \pi} = \text{有限值} \end{cases}$$

上述问题的解为球函数 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ ($m, l \geq 0$), 关于球函数的相关推导可以参考季孝达《数学物理方程》.

第四步 利用分离解可得 (11.2.4) 的形式解为

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_l^m(\cos \theta) (A_{lm} \cos m\varphi + B_{lm} \sin m\varphi) \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{k_n r}} J_{l+\frac{1}{2}}(k_n r) (C_n \cos(k_n ct) + D_n \sin(k_n ct)). \end{aligned}$$

类似可以求解以下球域内三维热方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad x^2 + y^2 + z^2 < a^2, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \\ u|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = 0, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

它的形式解为

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_l^m(\cos \theta) (A_{lm} \cos m\varphi + B_{lm} \sin m\varphi) \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{k_n r}} J_{l+\frac{1}{2}}(k_n r) \exp(-k k_n^2 t). \end{aligned}$$

11.3 高维发展型方程初值问题的解

球面平均法 我们可以利用球面平均法研究三维波动方程初值问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta_3 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad (11.3.1)$$

首先考虑特殊情形, 即 (11.3.1) 中的初始函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 是形如 $\varphi(r), \psi(r), r = |x|$ 且 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ 的径向函数, 此时可以求形如 $u = u(r, t)$ 的径向解. 由 Laplace 算子的三维极坐标形式可得 (11.3.1) 中的方程可化为

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right).$$

设 $ru = w$, 则

$$w_{tt} = ru_{tt}, \quad w_{rr} = ru_{rr} + 2u_r.$$

从而得到关于 w 的初值问题

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{rr}, & r > 0, t > 0 \\ w|_{t=0} = r\varphi(r), & w_t|_{t=0} = r\psi(r), & r \geq 0 \end{cases}$$

这是一维波动方程的半直线问题, 仿照 8.1 节进行奇延拓并利用 d'Alembert 公式可得

$$u(r, t) = \begin{cases} \frac{1}{2r}((r+ct)\varphi(r+ct) + (r-ct)\varphi(r-ct)) + \\ \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} \tau\psi(\tau)d\tau, & 0 \leq at \leq r \\ \frac{1}{2r}((r+ct)\varphi(r+ct) - (ct-r)\varphi(ct-r)) + \\ \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{r+ct} \tau\psi\tau d\tau, & 0 \leq r \leq at \end{cases}$$

如果初始函数不是球对称, 我们可以利用以下球面平均法: 任意固定 $x \in \mathbb{R}^3$, $S_r(x)$ 表示以 x 为球心, $r = |y - x|$ 为半径的球面, 其中 y 是球面 $S_r(x)$ 上的点. 引入 u 的**球面平均函数**

$$\widehat{M}u(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x)} u(y, t) dS(y). \quad (11.3.2)$$

作变量代换 $y = x + rz$, 则 z 位于单位球面 $S_1(0)$ 上, 且 $z = \frac{y-x}{r}$ 是球面 $S_r(x)$ 的单位外法向. 于是

$$\widehat{M}u = \frac{1}{4\pi} \int_{|z|=1} u(x + rz, t) d\tilde{S}(z).$$

对 (11.3.1) 的方程在三维球 $B_r(x)$ 上积分可得

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} u_{tt} dy &= c^2 \int_{B_r(x)} \Delta_3 u(y, t) dy \\ &= c^2 \int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial z}(y, t) dS(y) \\ &= c^2 \sum_{i=1}^3 \int_{S_r(x)} z_i u_{y_i}(y, t) dS(y) \\ &= c^2 r^2 \sum_{i=1}^3 \int_{|z|=1} z_i u_{y_i}(x + rz, t) d\tilde{S}(z) \\ &= c^2 r^2 \int_{|z|=1} \frac{\partial u}{\partial r}(x + rz, t) d\tilde{S}(z) \\ &= 4\pi c^2 r^2 \frac{\partial}{\partial r}(\widehat{M}u). \end{aligned}$$

由上述可得

$$4\pi c^2 r^2 (\widehat{M}u)_r = \int_{B_r(x)} u_{tt}(y, t) dy = \int_0^r d\rho \int_{S_\rho(x)} u_{tt}(y, t) dS(y).$$

两边对 r 求偏微商, 可得

$$4\pi c^2 (r^2 (\widehat{M}u)_r)_r = \int_{S_r(x)} u_{tt}(y, t) dS(y) = \left(r^2 \int_{|z|=1} u(x + rz, t) d\tilde{S}(z) \right)_{tt} = 4\pi (r^2 \widehat{M}u)_{tt}.$$

整理可得

$$(r^2 \widehat{M}u)_{tt} - c^2 (r^2 \widehat{M}u)_{rr} = 0.$$

这是一维波动方程, 行波解为 $r \widehat{M}u = f(r + ct) + g(r - ct)$. 上式令 $r \rightarrow 0^+$, 则有 $0 = f(ct) + g(-ct)$, 因此行波解可写为

$$r \widehat{M}u = f(r + ct) - f(ct - r).$$

上式对 r 求偏微商, 并取 $r \rightarrow 0^+$ 可得 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \widehat{M}u = 2f'(ct)$. 另一方面, 由球面平均公式定义可得

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \widehat{M}u = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi} \int_{|z|=1} u(x + rz, t) d\tilde{S}(z) = u(x, t),$$

因此 $u(x, t) = 2f'(ct)$, 所以只需要由初始条件确定函数 f' 即可. 行波解对 r 和 t 求偏微商可得

$$\begin{aligned} (r \widehat{M}u)_r &= f'(r + ct) + f'(ct - r), \\ \frac{1}{c} (r \widehat{M}u)_t &= f'(r + ct) - f'(ct - r). \end{aligned}$$

取 $t \rightarrow 0^+$, 上述两式相加可得

$$(r \widehat{M}u)_r|_{t=0} + \frac{1}{c} (r \widehat{M}u)_t|_{t=0} = 2f'(r).$$

由初始条件可得

$$\begin{aligned} (r \widehat{M}u)|_{t=0} &= \left(\frac{r}{4\pi} \int_{|z|=1} \varphi(x + rz) d\tilde{S}(z) \right)_r = (r \widehat{M}\varphi)_r, \\ \frac{1}{c} (r \widehat{M}u)_t|_{t=0} &= \frac{r}{4\pi c} \int_{|z|=1} \psi(x + rz) d\tilde{S}(z) = \frac{r}{c} \widehat{M}\psi. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2f'(at) = t \widehat{M}\psi + (t \widehat{M}\varphi)_t \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} \psi(y) dS(y) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} \varphi(y) dS(y) \right). \end{aligned} \quad (11.3.3)$$

上式称为波动方程初值问题 (11.3.1) 解的 **Kirchhoff 公式**. 对于二维波动方程初值问题的解, 可由 Kirchhoff 公式通过降维法得到, 具体可参考陈祖墀 PDE 的相关章节. 公式为

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{\Sigma_{ct}(x_1, x_2)} \frac{\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} d\xi d\eta + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi c} \int_{\Sigma_{ct}(x_1, x_2)} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} d\xi d\eta \right).$$

其中 $\Sigma_{ct}(x_1, x_2)$ 是以 (x_1, x_2) 为心, 以 ct 为半径的二维圆盘, $r = \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}$.

高维 Fourier 变换法 类似一维情况, 可以引入高维 Fourier 变换来求解发展型偏微分方程.

定义 11.1. $\forall f(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, 定义 **Fourier 变换** 和 **Fourier 逆变换**:

$$\begin{aligned} F[f(x)](\xi) &= \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \\ F^{-1}[f(\xi)](x) &= \check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

类似一维 Fourier 变换, 高维 Fourier 变换仍然成立以下性质:

性质 11.1.

1. 线性: $\widehat{c_1 f + c_2 g} = c_1 \hat{f} + c_2 \hat{g}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.
2. 共轭: $\widehat{\hat{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.
3. 微分: $\widehat{D^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 为多重指标.
4. 幂乘: $\widehat{x^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} D^\alpha \hat{f}(\xi)$.
5. 平移: $\widehat{f(x - x_0)}(\xi) = e^{-ix_0 \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$.
6. 相似: $\widehat{f(ax)}(\xi) = |a|^{-n} \hat{f}(a^{-1}\xi)$.
7. 卷积: $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$.
8. 反演: $f = \check{\hat{f}}$ ($L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的线性同构).

例 11.2. 求解非齐次三维波动方程初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta_3 u + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

解. 定义波动方程的**基本解** $U(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 \Delta_3 U, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ U|_{t=0} = 0, \quad U_t|_{t=0} = \delta(x) \end{cases}$$

若求得基本解, 设

$$u(x, t) = U(x, t) * \psi(x) + \partial_t(U(x, t) * \varphi(x)) + \int_0^t U(x, t - \tau) * f(x, \tau) d\tau,$$

则有

$$\begin{aligned} u_{tt} &= U_{tt}(x, t) * \psi(x) + U_{ttt}(x, t) * \varphi(x) + \int_0^t U_{tt}(x, t - \tau) * f(x, \tau) d\tau + f(x, t) \\ &= c^2 \Delta U(x, t) * \psi(x) + c^2 \partial_t(\Delta U(x, t) * \varphi(x)) + c^2 \int_0^t \Delta U_{tt}(x, t - \tau) * f(x, \tau) d\tau + f(x, t) \\ &= c^2 \Delta u + f(x, t). \end{aligned}$$

$$u(x, 0) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(y) \varphi(x - y) dy = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(y) \psi(x - y) dy = \psi(x).$$

下面我们利用 Fourier 变换求基本解 $U(x, t)$. 作关于空间变量 x 的 Fourier 变换, 可得

$$\begin{cases} \frac{d^2 \hat{U}}{dt^2} = -c^2 \rho^2 \hat{U}, \quad \rho = |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \\ \hat{U}|_{t=0} = 0, \quad \hat{U}_t|_{t=0} = \hat{\delta} = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\xi) e^{-ix \cdot \xi} d\xi = 1. \end{cases}$$

由此解得

$$\hat{U}(\xi, t) = \frac{\sin(c\rho t)}{c\rho}.$$

作 Fourier 逆变换可得

$$\begin{aligned} U(x, t) &= F^{-1}[\hat{U}(\xi, t)](x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(c\rho t)}{c\rho} e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\sin(c\rho t)}{c\rho} e^{ir\rho \cos\theta} \rho^2 \sin\theta d\varphi \quad (r = |x|) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 c} \int_0^\infty \sin(c\rho t) \frac{-e^{-ir\rho \cos\theta}}{ir} \Big|_0^\pi d\rho \\ &= \frac{1}{2\pi^2 cr} \int_0^\infty \sin(c\rho t) \sin(r\rho) d\rho \\ &= \frac{1}{4\pi^2 cr} \int_0^\infty (\cos\rho(r-ct) - \cos\rho(r+ct)) d\rho \\ &= \frac{1}{8\pi^2 cr} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\rho(r-ct)} - e^{i\rho(r+ct)}) d\rho \\ &= \frac{1}{4\pi cr} (\delta(r-ct) - \delta(r+ct)). \end{aligned}$$

由于 $r \geq 0, c > 0, t > 0$, 因此 $\delta(r+ct) = 0$, 从而 $U(x, t) = \frac{\delta(r-ct)}{4\pi cr}$. 设 $S_r(x)$ 为以 x 为中心, 半径为 $r := |y-x|$ 的球面, 则 $\forall g(x)$, 有

$$\begin{aligned} U(x, t) * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(|x-y|-ct)}{4\pi c|x-y|} g(y) dy \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int_0^\infty \frac{\delta(r-ct)}{r} \int_{S_r(x)} g(y) dS(y) dr \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} g(y) dS(y). \end{aligned}$$

代入 $u(x, t)$ 的表达式可得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U(x, t) * \psi(x) + \partial_t(U(x, t) * \varphi(x)) + \int_0^t U(x, t-\tau) * f(x, \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} \psi(y) dS(y) + \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} \varphi(y) dS(y) \right) \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2 (t-\tau)} \int_{S_{c(t-\tau)}(x)} f(y, \tau) dS(y) d\tau. \end{aligned}$$

上式称为三维非齐次波动方程解的 **Kirchhoff 公式**, 最后一项称为**推迟势**.

11.4 非线性偏微分方程简介

变分法

定义 11.2 (泛函). 设 \mathbb{M} 为函数空间 (集合), 则

$$J : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R} (u(x) \in \mathbb{M} \mapsto J[u(x)] \in \mathbb{R})$$

称为 \mathbb{M} 上的**泛函**.

求泛函的极值问题称为**变分问题**, 相应的方法称为**变分法** (Calculus of Variations, Variational method).

定义 11.3. 若存在 $u_0 \in \mathbb{M}$, 使得任意与 u_0 相邻近的 $u_0 + \delta u_0 \in \mathbb{M}_0$ 满足

$$J[u_0] \leq (\geq) J[u_0 + \delta u_0],$$

则称泛函 J 在 u_0 达到**极小值** (或**极大值**), u_0 称为泛函 J 的**极小元** (或**极大元**).

定义 11.4 (变分). 泛函 $J : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 的**变分定义**为

$$\delta J[u] = \left. \frac{d}{d\alpha} J[u + \alpha \delta u] \right|_{\alpha=0}.$$

例 11.3 (Fermat 原理, 光学最小作用原理). 光沿光程为极值的路径传播, 即

$$\delta J[y(x)] = \delta \int_a^b n(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = 0.$$

其中 $y = y(x)$ 为光的路径, $n(x, y)$ 为介质的折射率.

定理 11.3 (变分基本原理). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界光滑区域, $f \in C(\Omega)$. 任取检验函数 $v \in C_0^\infty(\Omega)$, 则

$$\int_{\Omega} f v dx = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

证明. 利用反证法. 假设 $\exists x_0 \in \Omega$, $f(x_0) > 0$. 则由连续性可得 $\exists \varepsilon > 0$, $\forall x \in B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$, $f(x) > 0$. 任取恒正函数 $v \in C_0^\infty(B_\varepsilon(x_0))$, 则 $v \in C_0^\infty(\Omega)$, 从而

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{B_\varepsilon(x_0)} f v dx > 0,$$

矛盾. □

Euler-Lagrange 方程 (组) 对 Lagrange 函数 $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\nabla u(x), u(x), x) \mapsto L(\nabla u(x), u(x), x)$, 考虑泛函

$$J[u(x)] = \int_{\Omega} L(\nabla u(x), u(x), x) dx,$$

其中光滑函数 $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足某一边界条件, 例如 $u|_{\partial D} = \varphi$. 为方便引入以下记号:

$$p = (p_1, \dots, p_N) = \nabla u(x), \quad z = u(x),$$

$$L(\nabla u(x), u(x), x) = L(p, z, x) = L(p_1, \dots, p_N, z, x_1, \dots, x_N).$$

若 u 是上述泛函 J 的极值元, 则 u 满足

$$-\sum_{i=1}^N (L_{p_i}(\nabla u(x), u(x), x))_{x_i} + L_z(\nabla u(x), u(x), x) = 0.$$

上式称为 **Euler-Lagrange 方程**, 可由分部积分和变分基本原理证得.

例 11.4 (Euler-Lagrange 方程).

1. $L(p, z, x) = \frac{1}{2}|p|^2 - zf(x)$, 则 $L_{p_i} = p_i$, $L_z = -f(x)$, 此时泛函

$$J[u] = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - uf \right) dx, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi$$

的极值元 u 满足 $\begin{cases} \Delta u = -f(x) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$, 即 Poisson 方程的 Dirichlet 边值问题.

2. $L(p, z, x) = \sqrt{1 + |p|^2}$, 则 $L_{p_i} = \frac{p_i}{\sqrt{1 + |p|^2}}$, $L_z = 0$, 此时泛函

$$J[u] = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi$$

的极值元 u 满足 $\begin{cases} \sum_{i=1}^N \left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_{x_i} = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$, 当 $N = 2$ 时, 化为极小曲面方程

$$\begin{cases} (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

类似可以定义 Euler-Lagrange 方程组, 这里不再赘述.

极小元的存在唯一性定理

定理 11.4. 设常数 $1 < q < \infty$, 定义容许集 \mathbb{M} 如下:

$$\mathbb{M} := \left\{ u : \int_{\Omega} (|u|^q + |\nabla u|^q) dx < +\infty, \quad u|_{\partial D} = \varphi \right\} \neq \emptyset.$$

1. (存在性). 若 $L(p, z, x)$ 关于 p 是凸函数且存在常数 $\alpha > 0, \beta \geq 0$ 满足

$$L(p, z, x) \geq \alpha|p|^q - \beta,$$

则存在极小元 $u_0 \in \mathbb{M}$ 使得 $J[u_0] = \min_{u \in \mathbb{M}} J[u] = \min_{u \in \mathbb{M}} \int_{\Omega} L(\nabla u, u, x) dx$.

2. (唯一性). 若存在常数 $\theta > 0$ 使得

$$\sum_{i,j=1}^N L_{p_i p_j}(p, x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$$

(一致凸性), 则 $J[u] = \int_{\Omega} L(\nabla u, x) dx$ 在 \mathbb{M} 中的极小元是唯一的.

上述定理的证明可以参考 L.C.Evans 的 PDEs P448-P449. 该定理可以用于判断很多非线性偏微分方程定解问题的解的存在唯一性.

非线性方程的解法: 初等解法和复杂解法 初等解法主要是通过变换将方程化为线性方程求解. 例如:

1. Kirchhoff 变换. $\nabla \cdot (\sigma(u)\nabla u) = 0$, 令 $w = \int_{u_0}^u \sigma(\xi)d\xi$, 则

$$\Delta w = \nabla \cdot \nabla w = \nabla \cdot \nabla \left(\int_{u_0}^u \sigma(\xi)d\xi \right) = \nabla \cdot (\sigma(u)\nabla u) = 0.$$

2. Cole-Hopf 变换. $u_t + uu_x = \beta u_{xx}$, 令 $u = -2\beta \frac{\partial \ln v}{\partial x}$, 则 $v_t = \lambda v_{xx}$.

3. 相似变换. $u_t = (\sigma(u)u_x)_x$, 令 $u = u(\xi), \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$, 则

$$(\sigma(u)u')' + \frac{\xi}{2}u' = 0.$$

4. 行波变换: $u_t = (u^n u_x)_x$, 令 $u = f(\xi), \xi = x + at$, 则

$$af' = (f^n f')' \Rightarrow u = f(\xi) = (n(a(x + at) + c))^{\frac{1}{n}}.$$

5. 平面波变换. $iu_t + u_{xx} + \beta|u|^2u = 0$, 令 $u = e^{i(kx - \mu t)}v(\xi), \xi = x - bt, k = b/2, \mu = k^2 - a^2$. 则

$$v_{\xi\xi} - a^2v + \beta v^3 = 0 \Rightarrow v_{\xi}^2 = a^2v^2 - \frac{\beta}{2}v^4 \Rightarrow v(\xi) = a\sqrt{\frac{2}{\beta}}\operatorname{sech} a\xi,$$

$$u = a\sqrt{\frac{2}{\beta}}e^{i(\frac{1}{2}bx - (\frac{1}{4}b^2 - a^2)t)}\operatorname{sech}(a(x - bt)).$$

目前发展比较成熟的复杂解法包括: 反散射法、Backlund 变换法、Darboux 变换法、齐次平衡法、Hirota 双线法、tanh 函数展开法... 例如 2000, Ann.Math, Montgomery 和 2002, 中国科学 A, 张世清用变分法证明了三体问题“8”字平面周期解的存在性.

非线性特征值问题与 Lagrange 乘子 考虑泛函 $J[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, u|_{\partial\Omega} = 0$ (此时 $L = |p|^2/2$) 在约束条件

$$I[u] = \int_{\Omega} G(u)dx = 0 (G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ 为光滑函数})$$

下的极小元, 此类问题称为泛函的**条件极值问题**.

定理 11.5. 设 $g(z) = G'(z)$ 满足 $|g(z)| \leq C(|z| + 1) \Rightarrow |G(z)| \leq C(|z|^2 + 1)$, 其中 $z \in \mathbb{R}, C > 0$ 为常数. 令

$$\mathbb{M} = \left\{ u : \int_{\Omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx < +\infty, u|_{\partial\Omega} = 0, I[u] = 0 \right\} \neq \emptyset,$$

则存在极小元 $u_0 \in \mathbb{M}$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得

$$J[u_0] = \min_{u \in \mathbb{M}} J[u], \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} g(u_0)v dx, \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

即 u_0 为非线性特征值问题 $\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) \text{ in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$ 的广义解. 称 λ 为对应约束条件 $I[u] = 0$ 的

Lagrange 乘子.

上述定理的证明可参考 Evans PDEs P464. 对一般情形, 类比多元函数的条件极值求法, 有

定理 11.6. 设 $J_i[u]$ ($0 \leq i \leq N_0$) 为 \mathbb{M} 上的连续可微泛函, u_0 为泛函 $J_0[u]$ 在约束条件

$$G = \{u : J_i[u] = \alpha_i, 1 \leq i \leq k, J_i[u] \leq \alpha_i, k+1 \leq i \leq N_0\} (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

下的极值元, 则存在不全为零的 $\lambda_i \in \mathbb{R}$, 使得

$$\sum_{i=0}^{N_0} \lambda_i J'_i[u_0] = 0,$$

其中

$$\delta J_i[u_0] = \left. \frac{d}{d\alpha} J_i[u_0 + \alpha \delta u_0] \right|_{\alpha=0} = J'_i[u_0] \delta u_0.$$

例 11.5 (等周问题). $J_1[y(x)] = \int_0^a \sqrt{1+y'^2} dx = l > a$ (等周条件), $y(0) = y(a) = 0$, 求 $J_0[y(x)] = \int_0^a y(x) dx$ 的极大元和极大值 (面积).

略解. 对极大元 y_0 和 $\forall v \in C_0^\infty(0, a)$, 计算可得 $\left. \frac{d}{d\alpha} J_i[y_0 + \alpha v] \right|_{\alpha=0} = J'_i[y_0], i = 0, 1$. 讨论 $\lambda_0 J'_0[y_0] + \lambda_1 J'_1[y_0] = 0$, 利用分部积分和变分基本原理可得

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left(\frac{y'_0}{\sqrt{1+y_0'^2}} \right)' + 1 = 0.$$

结合边界条件可得极大元为圆.

山路定理与应用 本部分内容可参考张恭庆《变分法讲义》.

定理 11.7 (山路定理). 设 E 为实 Banach 空间, 泛函 $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ 满足 Palais-Smale 条件, 即任何满足 $J[u_k]$ 有界及 $J'[u_k] \rightarrow 0$ 的序列 $\{u_k\}_{k \geq 1} \subset E$ 均有收敛子列, 以及 (1) $J[0] = 0, \forall u$ 满足 $\|u\| = r, \exists r, \alpha > 0$, 满足 $J[u] \geq \alpha$; (2) $\exists e \in E, \|e\| > r$ 满足 $J[e] \leq 0$. 令 $\Gamma = \{g \in C([0, 1], E) : g(0) = 0, g(1) = e\}$, 则 $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J[g(t)]$ 是 J 的临界值 (鞍点).

例 11.6 (山路定理和变分法的应用实例).

1. 当 $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ 时, 边值问题
$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 3 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$
 对某些 λ 存在正解. (1983, CPAM, Brezis & Nirenberg)
2. $\left(a + b \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u + V(x)u = \mu u + |u|^{p-1}u$ in \mathbb{R}^3 ($a, b, \mu > 0, 3 < p < 5, V(x) \rightarrow +\infty, |x| \rightarrow +\infty$) 存在无穷多个平凡解. (数学物理学报, 2019, 39A(2))
3. $-\Delta u = g(u) - \mu u$ in \mathbb{R}^N ($N \geq 2$), $\|u\|^2 = m$ 在不同情形下至少存在一个, 有限多, 或无穷多个解. (2019, Adv.Nonlinear Stud., Hirata & Tanaka)