7.1.3 一般级数的收敛性

(1) 交错级数

所谓交错级数就是级数的项一项正、一项负, 可以写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,$$

其中 $a_n \geqslant 0$. 因为当 a_n 单调减趋于 0 时, 交错级数的部分和满足

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \leqslant S_{2n+2}$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - a_{2n} \leqslant a_1$$

所以, S_{2n} 单调增有上界, 因而收敛: $S_{2n} \to S$. 且

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \to S + 0 = S.$$

误差估计:

因为

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leqslant S_{2n-1}.$$

所以 S_{2n-1} 单调递减趋于 S. 从不等式

$$S_{2n} \leqslant S_{2n+2} \leqslant S \leqslant S_{2n+1} \leqslant S_{2n-1},$$

可知

$$|S - S_n| \leqslant |S_n - S_{n+1}| = a_{n+1}.$$

即, 前 n 项和与级数和的误差不超过第 $n+1$ 个通项的绝对值. 于是有

定理 1 (Leibniz **判别法**) 设 $\{a_n\}$ 单调趋于零, 则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 且前 n 项部分和 S_n 与级数的和 S 的误差不超过 a_{n+1}.

一个典型例子是: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. 以后, 我们将知道它的和是 $\ln 2$.

(2) 绝对收敛性和条件收敛

对于一般级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 来说 (即对通项的正负没有限制), 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **绝对收敛**.

定理 2 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则级数本身一定收敛.

证明 显然有

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}|,$$

故由 Cauchy 准则就可证得结果.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 就称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为 **条件收敛**.

例如, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 都收敛, 但是通项取绝对值后, 级数是发散的, 所以这两个级数是条件收敛的.

将通项分为正部和负部, 令

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

即

$$a_n^+ = \begin{cases} 0, & a_n \leqslant 0, \\ a_n, & a_n \geqslant 0; \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n \leqslant 0, \\ 0, & a_n \geqslant 0. \end{cases}$$

因此由 a_n^+ 和 a_n^- 构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都是正项级数, 而且满足

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^-, \quad a_n = a_n^+ - a_n^-,$$

所以当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛, 而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

定理 3 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则任意改变求和次序后所得的新级数仍收敛, 并且其和不变.

证明 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的求和次序改变后, 相应的 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ 的求和次序作对应的改变. 而后者是正项级数, 改变次序后收敛性和收敛的值不变. 因此前者的收敛性和收敛值也不会变. 证毕.

问题 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$ 敛散性如何?

当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$ 都发散到 $+\infty$, 因而可以证明下面的 Riemann 重排定理.

定理 4 (Riemann **重排定理**) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则适当改变求和的次序可以使新级数收敛于给定的任意实数, 也可使新级数发散到 $+\infty$ 或发散到 $-\infty$.

(3) 一般级数收敛的判别法

引理 1 (Abel **分部求和公式**) 设有两串数: $a_1, a_2, \cdots, a_n$; $b_1, b_2, \cdots, b_n$. 记 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

证明 记 $A_0 = 0$, 则 $a_k = A_k - A_{k-1}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.\end{aligned}$$

引理 2 (Abel **引理**) 设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ 或者 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$. 记 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. 如果 $|A_k| \leqslant M, (k = 1, 2, \cdots, n)$. 那么

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M(|b_1| + 2|b_n|).$$

证明 由 Abel 分部求和公式

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |A_k|\,|b_k - b_{k+1}| + |A_n|\,|b_n| \\
&\leqslant M\left(\sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| + |b_n|\right) \\
&= M\left(\left|\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1})\right| + |b_n|\right) \\
&= M(|b_1 - b_n| + |b_n|) \leqslant M(|b_1| + 2|b_n|).
\end{aligned}$$

定理 5 (Dirichlet **判别法**) 若 $\{b_n\}$ 是单调递减趋于零的数列, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有界: $|A_n| = |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leqslant M$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明 因为

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = |A_m - A_n| \leqslant 2M,$$

所以对任意 $\varepsilon > 0$, 由 $b_k \to 0$ $(k \to \infty)$, 存在自然数 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时, 有 $|b_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{6M}$. 因为 $\{b_k\}$ 单调, 所以根据 Abel 引理, 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| &\leqslant 2M(|b_{n+1}| + 2|b_{n+p}|) \\ &\leqslant 2M\left(\frac{\varepsilon}{6M} + 2\frac{\varepsilon}{6M}\right) = \varepsilon,\end{aligned}$$

对一切 $n \geqslant N$ 记一切自然数 p 成立. 根据 Cauchy 准则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

定理 6 (Abel **判别法**) 若 $\{b_n\}$ 是单调有界的数列, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明 因为 $\{b_k\}$ 单调有界, 所以 $\{b_k\}$ 有极限, 设 $b = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$, 则 $\{b_k - b\}$ 单调趋于 0. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 有界. 于是根据 Dirichlet 判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ 收敛. 从

$$a_k b_k = a_k(b_k - b) + b a_k$$

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

例 1 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 的敛散性.

解 当 $x=2k\pi$ 时, 该级数就是调和级数, 故发散.

若 $x\neq 2k\pi$, 记

$$A_n=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

于是

$$|A_n|<\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

故根据 Dirichlet 判别法知级数收敛. 类似可讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 的收敛性.

例 2 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}\cos 3n$ 的敛散性.

解 由上例, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}$ 收敛. 又 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调有界, 因此根据 Abel 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}\cos 3n$ 收敛.

例 3 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 的敛散性.

解 因为

$$(-1)^n\cos 2n=\cos n\pi\cos 2n=\cos n(\pi+2),$$

所以

$$(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}=(-1)^n\frac{1-\cos 2n}{2n}=\frac{(-1)^n}{2n}-\frac{(-1)^n\cos 2n}{2n}$$
$$=\frac{(-1)^n}{2n}-\frac{\cos n(\pi+2)}{2n}$$

由 Leibniz 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ 收敛, 由前面的例子知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\pi+2)}{4n}$$

也收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛.

例 4 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 的敛散性.

解 因为

$$\begin{aligned} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi + n\pi) \\ &= \cos n\pi \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi) \\ &= (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}, \end{aligned}$$

而数列 $\left\{\sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}$ 单调递减趋于零, 所以根据 Leibniz 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 收敛.

例 5 试作一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 是发散的.

解 设

$$a_n = \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{n^{1/3}}.$$

则由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 利用恒等式

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

可得

$$a_n^3 = \frac{1}{n}\left(\cos \frac{2n\pi}{3}\right)^3 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + 3\cos \frac{2n\pi}{3}}{4}$$
$$= \frac{1}{4n} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{n}.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{n}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 发散.