第 10 章 多变量函数的重积分

§10.1 二重积分

10.1.1 二维区间上的积分

设 $D=[a,b]\times[c,d]$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的二维闭区间. 分别作 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上的分割:

$$T_x:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b;$$
$$T_y:\ c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d.$$

两族平行直线 $x=x_i,(i=0,1,\cdots,n)$ 和 $y=y_j,(j=0,1,\cdots,m)$ 把 D 分成 $n\times m$ 个子区间:

$$D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\,(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m).$$

这些子区间组成 D 的一个分割 $T=T_x\times T_y$. 对于在 D 上定义的函数

$f(x,y)$, 在每个 D_{ij} 中取一点 ξ_{ij}, 作和式 (Riemann 和)

$$S(f,T) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij})\sigma(D_{ij}), \tag{10.1}$$

其中 $\sigma(D_{ij})$ 是 D_{ij} 的面积. 记 $\|T\| = \max_{i,j}\{\mathrm{diam}(D_{ij})\}$, 这里 $\mathrm{diam}(D_{ij})$ 是 D_{ij} 的对角线长度, 称 $\|T\|$ 为分割 T 的宽度. 称 ξ_{ij} 为值点.

定义 1 设 $f(x,y)$ 是定义在 D 上的函数. 如果存在数 A, 使得对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|T\| < \delta$ 时, 不论值点 ξ_{ij} 在 D_{ij} 中如何选, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij)}\sigma(D_{ij}) - A\right| < \varepsilon,$$

则称函数 f 在区间 D 上可积, 并将 A 写作

$$\iint_D f(x,y)dxdy \quad 或 \quad \int_D f d\sigma,$$

称为 f 在区间 D 上的二重积分.

例 1 常值函数 c 在 D 上可积, 且 $\int_D c d\sigma = c\sigma(D)$.

定理 1 如果 f 在 D 上可积, 那么 f 在 D 上有界.

定理 2 若 f 和 g 都在 D 上可积, c_1, c_2 是常数, 则 $c_1 f + c_2 g$ 也在 D 上可积, 且

$$\int_D (c_1 f + c_2 g) d\sigma = c_1 \int_D f d\sigma + c_2 \int_D g d\sigma.$$

定理 3 设 f 和 g 都在 D 上可积.

(1) 若 $f \geqslant 0$, 则 $\int_D f d\sigma \geqslant 0$;

(2) 若 $f \geqslant g$, 则 $\int_D f d\sigma \geqslant \int_D g d\sigma$.

10.1.2 累次积分

定理 4 (二重积分的累次积分) 设 $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积.

1° 如果对每个 $y\in[c,d]$, $f(x,y)$ 是 $[a,b]$ 上关于 x 的可积函数, 则积分 $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 定义了关于变量 y 在 $[c,d]$ 上的可积函数, 并有

$$\int_c^d \varphi(y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

2° 同理, 如果对每个 $x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 是 $[c,d]$ 上关于 y 的可积函数, 则 $\psi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ 是关于 x 在 $[a,b]$ 上的可积函数, 并有

$$\int_a^b \psi(x)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

3° 特别, 如果 $f(x,y)$ 连续, 显然分别对 x 和 y 连续, 因此上面 1° 和 2° 的条件都满足, 因此有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

即, 分别对 x 和 y 积分的次序是可以交换的.

证明 设 A 是 f 在 D 上的积分, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 D 的分割 T 的宽度 $\|T\| < \delta$, 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, 并记 $P_{ij} = (\xi_i, \eta_j) \in D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, 就都有

$$A - \varepsilon < \sum_{i,j} f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j < A + \varepsilon.$$

或

$$A - \varepsilon < \sum_{j=1}^{m} \Delta y_j \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i < A + \varepsilon.$$

注意到, 对于给定的 $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i$$

是 $f(x, \eta_j)$ 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 和. 因为对于任何固定的 y, $f(x, y)$ 作为 x 的函数是可积的, 所以

$$\lim_{\|T_x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i = \varphi(\eta_j).$$

这里, $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)dx$. 令 $\|T_x\|\to 0$, 只要 $\|T_y\|<\delta$ 就有

$$A-\varepsilon\leqslant\sum_{j=1}^{m}\varphi(\eta_j)\Delta y_j\leqslant A+\varepsilon.$$

由此可知 $\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 可积, 并有

$$\int_c^d\varphi(y)dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=A=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

这就证明了 1°. 同理可证明 2°.

上述结果告诉我们, 只要满足定理中的条件, 二维区间上函数的二重积分, 就化为两个一元函数的定积分 (先对一个变量作一元函数的积分, 在对另一个变量作一元函数的积分). 这种积分过程被称为累次积分. 当累次积分可交换时, 选择先对谁积分, 完全根据积分的方便而定.

例 2 求 $\iint_D e^{x+y}dxdy$, 其中 $D=[0,1]\times[0,1]$.

解

$$\iint_D e^{x+y}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^1 e^{x+y}dx=\int_0^1 e^y dy\int_0^1 e^x dx$$
$$=(e-1)\int_0^1 e^y dy=(e-1)^2.$$

例 3 求 $\iint_D x\cos xy\,dxdy$, 其中 $D=[0,\pi]\times[0,1]$.

解

$$\iint_D x\cos xy\,dxdy=\int_0^\pi dx\int_0^1 x\cos xy\,dy$$
$$=\int_0^\pi\left(\sin xy\Big|_{y=0}^{y=1}\right)dx=\int_0^\pi \sin x\,dx=2.$$

在这个例子中, 如果先对 x 积分, 计算量就要大些.

10.1.3 可积性

对于区间 D 以及分割 T, 记

$$m_{ij} = \inf f(D_{ij}), \quad M_{ij} = \sup f(D_{ij}), \ (i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, \cdots, m).$$

$\omega_{ij} = M_{ij} - m_{ij}$ 称为 f 在 D_{ij} 上的振幅. 定义

$$\underline{S}(f, T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\sigma(D_{ij}), \quad \overline{S}(f, T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\sigma(D_{ij}),$$

分别称为 f 关于分割 T 的下和与上和. 显然有

$$\underline{S}(f, T) \leqslant S(f, T) \leqslant \overline{S}(f, T).$$

设 $T = T_x \times T_y$ 与 $T' = T'_x \times T'_y$ 是 D 的两个分割. 如果 T'_x 比 T_x 细, 同时 T'_y 比 T_y 细, 则称 T' 比 T 细, 记为 $T \leqslant T'$.

定理 5 设 T 与 T' 是 D 的两个分割, 且 $T \leqslant T'$. 则有

$$\underline{S}(f,T) \leqslant \underline{S}(f,T') \leqslant \overline{S}(f,T') \leqslant \overline{S}(f,T).$$

这就是说, 在分割加细的过程中, 上和不增下和不减.

定理 6 设 T_1 与 T_2 是 D 的两个分割. 则有

$$\underline{S}(f,T_1) \leqslant \overline{S}(f,T_2).$$

也就是说任意下和不会大于任意上和.

显然下和所成之集有上界, 上和所成之集有下界. 上和的下确界称为上积分, 记为 $\overline{\int} f\, dxdy$; 下和的上确界称为下积分, 记为 $\underline{\int} f\, dxdy$. 于是

$$\underline{\int} f\, dxdy \leqslant \overline{\int} f\, dxdy.$$

定理 7 设 f 是定义在区间 D 上的有界函数. 那么下面的四个条件等价:

(1) f 在 D 上可积;

(2) $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_{ij}\sigma(D_{ij})=0$, 其中 $\omega_{ij}=M_{ij}-m_{ij}$;

(3) 对任意 $\varepsilon>0$ 存在 D 的一个分割 T 使得

$$\overline{S}(f,T)-\underline{S}(f,T)<\varepsilon.$$

(4) f 的上积分和下积分相等, 即

$$\underline{\int} f\,dxdy=\overline{\int} f\,dxdy.$$

定义 2 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个集合. 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在有限个或一列二维区间(即, 矩形) $\{I_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ 使得

$$D \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(I_n) \leqslant \varepsilon,$$

(这里 $\sigma(I_n)$ 表示 I_n 的面积), 那么称 D 为 (二维) 零测度集, 简称零测集. 若上面的 I_n 只需要有限个, 则 D 称为零面积集.

定理 8 (1) 至多可数集是零测集, 至多可数个零测集的并集还是零测集;
(2) 有限个零面积集的并集还是零面积集;
(3) B 是零面积集等价于 $\overline{B}$ 是零面积集;
(4) 设 B 是有界闭集. 则 B 是零测集等价于 B 是零面积集;
(5) $\mathbb{R}^2$ 中光滑曲线段是零面积集.

定理 9 (Lebesgue **定理**) 设 $f(x,y)$ 是二维闭区间 $I \subset \mathbb{R}^2$ 上的有界函数, 那么 f 在 I 上可积的充分必要条件是: f 的间断点全体是一个零测集.

定理 10 设 $f(x,y)$ 是二维闭区间 $I\subset\mathbb{R}^2$ 上的有界函数. 如果集合 $B:=\{(x,y)\in I:\ f(x,y)\neq 0\}$ 是一个零面积集, 那么 f 在 I 上可积, 且积分为零.

证明 显然开集 $I^\circ\setminus\overline{B}$ 中的点都是 f 的连续点, 因此 f 的间断点都在 $\partial I\cup\overline{B}$ 中. 因为 ∂I 和 $\overline{B}$ 都是零面积集, 故 $\partial I\cup\overline{B}$ 也是零面积集. 根据 Lebesgue 定理知 f 在 I 上可积. 以下说明 f 的积分为零.

对 I 的任意分割 $T:\ \{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$, 由于 $\overline{B}$ 是零面积集, 故在任意子矩形 I_i 中存在 ξ_i, 使得 $f(\xi_i)=0$. 这时 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma(I_i)=0.$$

由积分的存在性, 可知

$$\int_I f\,d\sigma=0.$$

定理 11 设 f 和 g 都是二维闭区间 $I \subset \mathbb{R}^2$ 上的有界函数, 且集合 $B := \{(x, y) \in I : f(x, y) \neq g(x, y)\}$ 是一个零面积集. 如果 f 和 g 中有一个在 I 上可积, 那么另一个也在 I 上可积, 并且

$$\int_I f d\sigma = \int_I g d\sigma.$$

证明 不妨设 g 在 I 上可积. 因为使得有界函数 $f - g$ 不为零的点集是零面积集, 所以根据定理10 知 $f - g$ 在 I 上可积, 且

$$\int_I (f - g) d\sigma = 0.$$

因为 g 在 I 上可积, 所以 $f = (f - g) + g$ 也在 I 上可积, 且

$$\int_I f d\sigma = \int_I (f - g) d\sigma + \int_I g d\sigma = \int_I g\, d\sigma.$$