

# 一、Poisson 过程

2016-2017 秋

(1) 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是一个强度为  $\lambda > 0$  的 Poisson 过程, 则  $\text{Cov}(N(t), N(s)) = \lambda \min\{s, t\}$   
if  $t > s$   $\text{Cov}(N(t), N(s))$   
 $= \text{Cov}(N(s), N(t) - N(s) + N(s)) = \text{Cov}(N(s), N(s)) = \lambda s$

(3) 设某路口白、红、灰三种颜色的汽车的到达数量分别为强度为  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  的 Poisson 过程到达, 且相互独立。若不论颜色, 第一辆汽车平均到达时间为  $\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$ ; 第一辆红色汽车的平均到达时间为  $\frac{1}{\lambda_1}$ 。参考 EX5 第 6 题

(4) 设  $[0, t]$  内到达某商店门口的顾客数  $\{N(t), t \geq 0\}$  是一个强度为  $\lambda > 0$  的 Poisson 过程, 每个达到的顾客依概率  $p$  进入店内, 以概率  $1 - p$  不进店即离开, 且顾客是否进店是相互独立的; 进店的每个顾客又独立地以概率  $q$  进行消费, 以概率  $1 - q$  不消费。则进店的顾客数的均值和方差为  $\lambda p$  和  $\lambda p$ ; 消费的顾客数的均值和方差为  $\lambda p(1 - q)$  和  $\lambda p(1 - q)$

批注: 这里两个空都是  $pt$

批注: 这里两个空都是  $pqt$

(4) 解: 略, EX5 第 1 题

二、(16分) 设某人甲负责订阅杂志, 前来订阅的顾客数是日均到达率为6的泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 。

若每个顾客的订阅季数 $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ 。且各人的选择相互独立。设 $N_i(t)$ 为订阅 $i$ 季杂志的顾客人数,  $i=1, 2, 3$ 。并以 $\{X(t)\}$ 表示到时刻 $t$ 为止甲所得全部手续费(假设每订出一季杂志, 甲可得手续费1元),

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

(1) 问 $N_i(t)$ ,  $i=1, 2, 3$ 分别是什么过程? 它们是否相互独立?

(2) 试求:  $E[X(t)]$ ,  $Var(X(t))$ , 及 $X(t)$ 的矩母函数 $g_{X(t)}(u) = E[e^{uX(t)}]$ 。

解: (1) 易验证 $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$ ,  $N_3(t)$ 分别服从 $HPP(3)$ ,  $HPP(2)$ ,  $HPP(1)$

下面验证相互独立:

$$\begin{aligned} P(N_1(t)=n_1, N_2(t)=n_2, N_3(t)=n_3) &= P(N_1(t)=n_1, N_2(t)=n_2, N_3(t)=n_3 | N(t)=n) \cdot P(N(t)=n) \\ &= C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_2} \left(\frac{1}{6}\right)^{n_3} \frac{e^{-\lambda t}}{n!} (\lambda t)^n \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_2} \left(\frac{1}{6}\right)^{n_3} \frac{e^{-\lambda t}}{n!} (\lambda t)^n \\ &= P(N_1(t)=n_1) \cdot P(N_2(t)=n_2) \cdot P(N_3(t)=n_3) \Rightarrow \text{相互独立} \quad \# \end{aligned}$$

$$(2) X(t) = N_1(t) + 2N_2(t) + 3N_3(t)$$

$$EX(t) = 1 \cdot 3t + 2 \cdot 2t + 3 \cdot t = 10t$$

$$\begin{aligned} Var(X(t)) &= Var(N_1(t)) + Var(N_2(t)) + Var(N_3(t)) \\ &= 10t \end{aligned}$$

批注: 这个方差 $Var(Xt)$ 应该为 $20t$ , 解答忘了将系数进行平方

$$\begin{aligned} g_{X(t)}(u) &= E[e^{uX(t)}] \\ &= E[e^{(N_1(t) + 2N_2(t) + 3N_3(t))u}] \end{aligned}$$

$$= g_{N_1(t)}(u) \cdot g_{N_2(t)}(2u) \cdot g_{N_3(t)}(3u)$$

$$g_{N_1(t)}(u) = E[e^{uN_1(t)}]$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{u \cdot n} \cdot P(N_1(t)=n)$$

$$= e^{\lambda t} (e^u - 1)$$

$$\therefore g_{X(t)}(u) = e^{t[3(e^u - 1) + 2(e^{2u} - 1) + (e^{3u} - 1)]} \quad \#$$

2. 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是一个强度为  $\lambda$  的 Poisson 过程, 则  $E[N(1)N(2)] = \frac{\lambda + 2\lambda^2}{1}$ ;  
 $E[N(10)|N(5)] = \lambda + N(5)$ ; 若又已知  $N(3) = 1$ , 则  $P(N(2) - N(1) = 1) = \frac{1}{3}$ .
3. 假定某天文台观测到的流星流是一个 Poisson 过程, 据以往资料统计为每小时平均观测到 3 颗流星. 则在晚上 8 点到 10 点期间, 该天文台没有观察到流星的概率是  $e^{-6}$ . 凌晨 0 点后该天文台观察到第一颗流星的时间的分布是  $Exp(3)$   $\lambda=3$
8. 关于平稳过程, 下列说法正确的是 (C)  
 (A) 宽平稳过程具有平稳增量性  $\Rightarrow$  平稳. 增量是指相同间隔内分布相同, 而宽平稳只有协方差相同  
 (B) Poisson 过程是宽平稳过程  $\Rightarrow Cov(X(s), X(t)) = \lambda \min\{s, t\}$   
 (C) 初始状态服从平稳分布的 Markov 过程为严平稳过程  
 (D) 严平稳过程一定是宽平稳过程  $\Rightarrow$  需要二阶矩存在

$$\text{解. 2. } E[N(1)N(2)] = Cov(N(1), N(2)) + E[N(1)] \cdot E[N(2)]$$

$$Cov(N(1), N(2)) = \lambda \min\{1, 2\} = \lambda$$

$$E[N(1)] \cdot E[N(2)] = \lambda \cdot 2\lambda = 2\lambda^2$$

$$2^{\circ} E[N(10)|N(5)]$$

$$= E[(N(10) - N(5)) + N(5) | N(5)]$$

$$= E[N(10) - N(5) | N(5)] + N(5)$$

$$= 5\lambda + N(5)$$

$$3^{\circ} P(N(2) - N(1) = 1 | N(3) = 1)$$

$$= P(N(2) - N(1) = 1, N(3) = 1) / P(N(3) = 1)$$

$$P(N(2) - N(1) = 1, N(3) = 1)$$

$$= P(N(1) = 0, N(2) = 1, N(3) = 1)$$

$$= P(N(1) = 0) \cdot P(N(2) - N(1) = 1) \cdot P(N(3) - N(2) = 0)$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} = \lambda e^{-3\lambda}$$

$$P(N(3) = 1) = 3\lambda e^{-3\lambda}$$

#

二. (12分) 假设一个电子管内到达阳极的电子数目  $N(t)$  服从参数为  $\lambda$  的 Poisson 过程, 每个电子携带能量相互独立且与电子数目  $N(t)$  相互独立, 并均服从区间  $[1, 2]$  上的均匀分布, 设到  $t$  时刻的阳极接受的能量为  $S(t)$ . 求  $S(t)$  的均值  $E[S(t)]$  和方差  $\text{Var}[S(t)]$ .

$$\text{解: } S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k & N(t) \geq 1 \\ 0 & N(t) = 0 \end{cases}$$

$$1^\circ E[S(t)] = E[E(S(t) | N(t))]$$

$$E(S(t) | N(t) = n)$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{3}{2}n & n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{统一成 } \frac{3}{2}n$$

$$\therefore E[S(t)] = \frac{3}{2} E[N(t)] = \frac{3}{2} \lambda t$$

$$2^\circ \text{Var}(S(t)) = E[\text{Var}(S(t) | N(t))] + \text{Var}[E(S(t) | N(t))]$$

$$\text{Var}[S(t) | N(t) = n]$$

$$= n \text{Var} Y_i = \frac{n}{12}$$

$$\therefore \text{Var}(S(t)) = \frac{9}{4} \text{Var}(N(t)) + \frac{1}{12} E(N(t))$$

$$= \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{12}\right) \lambda t = \frac{7}{3} \lambda t \quad \#$$

$$\text{Var}(S(t)) = \text{Var}(Y_i) \cdot E[N(t)] + [E(Y_i)]^2 \cdot \text{Var}[N(t)]$$

复合泊松过程的方差

三. (20分) 现有红色、黄色、蓝色三种汽车, 分别按强度为  $\lambda_1, \lambda_2$  和  $\lambda_3$  且相互独立的 Poisson 过程通过公路上的某观察站,

- (1) 若不论颜色, 求第一辆车通过该观察站所需的时间的概率密度函数与期望;
- (2) 在已知时刻  $t_0$  观察到一辆红车的条件下,
  - (a) 下一辆仍是红车的概率是多少? (b) 下一辆是黄车的概率是多少?
- (3) 已知时刻  $t_0$  观察到一辆红车的条件下, 接下来通过的  $k$  辆全是红车, 而后是非红车的概率是多少? ( $k \geq 0$ )
- (4) 在相继两辆红车之间通过该观察站的蓝车恰有  $n$  辆的概率,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

解: 略, EX 5 第 6 题

#

(3) 设有复合泊松过程  $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ , 其中  $N(t)$  是强度为  $\lambda$  的泊松过程,  $Y_i \sim \text{Exp}\{\mu\}$ . 则  $EX(t) = \frac{\lambda t}{\mu}$ ,  $E[X^2(t)] = \frac{\lambda t(\lambda t + 2)}{\mu^2}$ ,  $g_{X(t)}(s) = E \exp\{sX(t)\} = e^{\frac{\lambda t s}{\mu - s}}$ .

解: 同上面第二题

$$1^\circ EX(t) = EY_i \cdot EN(t) = \frac{\lambda t}{\mu}$$

$$2^\circ \text{Var } X(t) = (EY_i)^2 \text{Var } (N(t)) + (\text{Var } Y_i) \cdot E(N(t)) \\ = \frac{1}{\mu^2} \cdot \lambda t + \frac{1}{\mu^2} \lambda t = \frac{2\lambda t}{\mu^2}$$

$$\therefore E[X^2(t)] = \frac{2\lambda t}{\mu^2} + \left(\frac{\lambda t}{\mu}\right)^2 = \frac{\lambda t(\lambda t + 2)}{\mu^2}$$

$$3^\circ g_{X(t)}(s) = E[e^{sX(t)}]$$

$$E[e^{sX(t)} | N(t) = n]$$

$$= [g_Y(s)]^n$$

$$g_Y(s) = \frac{\mu}{\mu - s}$$

指数分布的mgf

$$\therefore g_{X(t)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} [g_Y(s)]^n \cdot P(N(t) = n)$$

$$= e^{\frac{\lambda t s}{\mu - s}}$$

#

二、(8分) 保险公司的理赔次数  $N(t)$  是强度为  $\lambda$  的泊松过程, 诸次理赔额  $C_i (i \geq 1)$  为独立同分布, 且与  $N(t)$  独立,  $EC_i = \mu$ . 又设  $W_i$  为第  $i$  次理赔发生的时间 ( $i \geq 1$ ), 则到时刻  $t$  为止的理赔总额的折现值为:

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i}$$

其中  $\alpha > 0$  为折现率, 试求  $C(t)$  的期望值.

$$\text{解: } E[C(t) | N(t) = n]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha W_i} | N(t) = n\right]$$

$$= E(C_i) \cdot E\left[\sum_{i=1}^n e^{-\alpha W_i} | N(t) = n\right]$$

$$= \mu \cdot E\left[\sum_{i=1}^n e^{-\alpha U_i} | N(t) = n\right]$$

$$= \mu \cdot \frac{n}{\alpha t} (1 - e^{-\alpha t})$$

$$\therefore E[C(t)] = \frac{\mu}{\alpha t} (1 - e^{-\alpha t}) \cdot E[N(t)] = \frac{\lambda \mu}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \quad \#$$

(1) 设  $X$  与  $Y$  相互独立, 分别服从指数分布  $Exp\{\lambda\}$  与  $Exp\{\mu\}$ , 则:

(a)  $X + Y \sim Exp\{\lambda + \mu\}$ . (X)

(b)  $\min\{X, Y\} \sim Exp\{\lambda + \mu\}$ . (✓)

(c)  $\max\{X, Y\} \sim Exp\{\lambda + \mu\}$ . (X)

(d)  $P\{X > h\} = 1 - \lambda h + o(h)$ ,  $h \downarrow 0$ . (✓)

(e)  $P\{X \leq s + t | X > s\} = P\{X \leq t\}$ ,  $s, t > 0$ . (✓)

无记忆性

解: (c)  $P(\max\{X, Y\} \leq x)$

$$= P(X \leq x, Y \leq x) = (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\mu x})$$

(d)  $P(X > h) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)$  (Taylor 展开) #

2019.1.10

(3) (填空) 设  $X_1, X_2, X_3$  相互独立, 且  $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  (指数分布), 则

$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, X_3\}$  的分布为  $Exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ , 概率  $P\{X_1 = X_{(1)}\}$  等于  $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$ .

解: (3)  $P(X_{(1)} > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x)$   
 $= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x}$

$P(X_1 = X_{(1)}) = P(X_1 < X_2, X_1 < X_3)$  联合分布  
 $= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$

(4) (填空) 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是一强度为  $\lambda$  的 Poisson 过程,  $W_k$  为其第  $k$  个事件发生的时间, 并设  $1 \leq k \leq n, t > 0$ , 则  $E\{W_k | N(t) = n\} = \left(\frac{k}{n+1}\right) \cdot t$ ,  $E(W_k) = \left(\frac{k}{\lambda}\right)$ 。

解: 给定  $N(t) = n$  下,  $(W_1, \dots, W_n)$  同分布于均匀分布次序统计量

$$\therefore E\{W_k | N(t) = n\} = E U_{(k)}$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ k-1 & & n-k+1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \downarrow & \\ & u & \end{array}$

$$U_{(k)} \text{ 的 pdf 为: } f_k(u) = n C_{n-1}^{k-1} F(u)^{k-1} f(u) \bar{F}(u)^{n-k}$$

$$= n C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{u}{t}\right)^{k-1} \frac{1}{t} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-k}$$

$$E U_{(k)} = \int_0^t u C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{u}{t}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-k} \frac{1}{t} du$$

$$= t n C_{n-1}^{k-1} \int_0^1 v^k (1-v)^{n-k} dv$$

$$= t n C_{n-1}^{k-1} B(k+1, n-k+1)$$

$$= t \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$

$$= t \cdot \frac{k}{n+1}$$

2°  $N(t) \geq k \Leftrightarrow W_k \leq t$

某次作业证明过  $W_k$  服从  $\Gamma(k, \lambda)$

$$g_k(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \quad t \geq 0$$

$$E W_k = \int_0^{+\infty} t g_k(t) dt$$

$$= \frac{k}{\lambda}$$

二、(8分) 假设汽车按强度为  $\lambda$  的泊松过程进入一条单向行驶的无限长的公路，进入的第  $i$  辆车以速度  $V_i$  行驶。假定诸  $V_i$  ( $i \geq 1$ ) 为相互独立的正随机变量，有共同分布  $F$ 。

试求在时刻  $t$  位于区间  $(a, b)$  内的平均汽车辆数。

解：设第  $i$  辆车于时刻  $s$  进入公路

若  $t$  时刻正在区间  $(a, b)$  内，记为 I 型事件

则要求  $a < V_i(t-s) < b$

$$\begin{aligned} \therefore p(s) &= P(a < V_i(t-s) < b) \\ &= F\left(\frac{b}{t-s}\right) - F\left(\frac{a}{t-s}\right) \end{aligned}$$

即时刻  $s$  发生的事件以概率  $p(s)$  划入 I 型事件

$N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda pt)$

$$p = \int_0^t p(s) ds$$

$$\therefore EN_1(t) = \lambda pt = \lambda \int_0^t [F\left(\frac{b}{t-s}\right) - F\left(\frac{a}{t-s}\right)] ds \quad \#$$

(3) 到达某邮箱的正常电子邮件和垃圾邮件数分别是强度为 9 和 3 的泊松过程，且相互独立。则第一封邮件的平均到达时间为  $\left(\frac{1}{12}\right)$ ，第一封垃圾邮件到达之前恰好到达了  $k$  封正常邮件的概率为  $\left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{1}{4}$

解： $1^\circ$   $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$

$N(t) \sim \text{HPP}(12)$

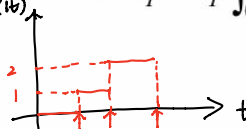
$2^\circ$  参考 EX5 第 6 题

$$\left(\frac{9}{12}\right)^k \cdot \frac{3}{12}$$

#



(4) 设  $\{X(t), t \geq 0\}$  是强度为  $\lambda$  的泊松过程, 命  $X_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$ , 则:

$$E(X_T) = \left(\frac{1}{2}\lambda T\right), \quad \text{Var}(X_T) = \left(\frac{1}{3}\lambda T\right).$$


$$\text{解} \int T \cdot X_T = \sum_{k=1}^{X(T)} (S_k - S_{k-1})(k-1) + [T - S_{X(T)}] \cdot X(T)$$

$$= X(T) \cdot T - \sum_{k=1}^{X(T)} S_k$$

$$X_T = X(T) - \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{X(T)} S_k$$

$$E(X_T | X(T) = n) = n - \frac{1}{T} E\left[\sum_{k=1}^n S_k | X(T) = n\right]$$

$$= n - \frac{1}{T} \cdot \frac{nT}{2} = \frac{n}{2}$$

$$\therefore E(X_T) = E\left\{\frac{1}{2}X(T)\right\} = \frac{1}{2}\lambda T$$

$$2^\circ \text{Var}(X_T) = \text{Var}[E(X_T | X(T))] + E[\text{Var}(X_T | X(T))]$$

$$\text{Var}(X_T | X(T) = n) = \frac{1}{T^2} \text{Var}\left(\sum_{k=1}^n S_k | X(T) = n\right)$$

$$= \frac{1}{T^2} \text{Var}\left(\sum_{k=1}^n U_k | X(T) = n\right)$$

$$= \frac{1}{T^2} \cdot \frac{1}{2} T^2 \cdot n = \frac{n}{2}$$

$$\therefore \text{Var}(X_T) = E\left[\frac{1}{2}X(T)\right] + \text{Var}\left[\frac{1}{2}X(T)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lambda T + \frac{1}{4}\lambda T = \frac{3}{4}\lambda T$$

#

(5) 到达某商店的顾客数  $N(t)$  是一强度为  $\lambda(t) = 2 + t/2$  的非齐次泊松过程, 若该商店早上 8:00 开门, 则午时段(11:00-13:00)没有顾客到达的概率为( $e^{-8}$ ), 午时段到达商店的平均人数为( $8$ )。

解: 以 8:00 为起点, 对非齐次 Poisson 过程, 有:

$$P(N(t+s) - N(t) = n) = \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!} e^{-[m(t+s) - m(t)]}$$

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

$$\therefore P(N(15) - N(13) = 0) = e^{-8}$$

$$E[N(15) - N(13)] = m(15) - m(13) = 8$$

#

二、(15分) 设某种健康险投保者中的出险人数  $N(t)$  为强度为 5 的泊松过程，若以

也注意强度、速率均指入

$Y_i$  表示第  $i$  个出险者应获赔偿，并假定  $Y_i \sim U(1, 3)$  (均匀分布，单位：万元)，且  $\{Y_i, i \geq 1\}$

为 i.i.d.，试求到时刻  $t$  为止保险公司应付全部赔偿  $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$  的期望  $EX(t)$ 、方差

$Var[X(t)]$  及矩母函数  $g_{X(t)}(s)$ 。(均匀分布矩母函数： $g(s) = \frac{e^{bs} - e^{as}}{(b-a)s}$ )

$$g_Y(s) = \frac{e^{3s} - e^s}{2s}$$

解：1°  $E[X(t) | N(t) = n]$

$$= n \cdot EY = 2n$$

$$\therefore EX(t) = E[2N(t)] = 2\lambda t = 10t$$

$$2^\circ Var(X(t)) = E[Var(X(t) | N(t))] + Var[E(X(t) | N(t))]$$

$$Var(X(t) | N(t) = n)$$

$$= n Var(Y_i)$$

$$\therefore Var[X(t)] = E[X(t)] \cdot Var Y_i + (EY)^2 \cdot Var[N(t)]$$

$$= \frac{4}{3}t$$

$$3^\circ g_{X(t)}(s) = E e^{sX(t)}$$

$$= E \{ E(e^{s \cdot X(t)} | X(t) = n) \}$$

$$E(e^{s \cdot X(t)} | X(t) = n)$$

$$= E(e^{s \cdot \sum_{i=1}^n Y_i} | X(t) = n)$$

$$= E[e^{s \cdot Y_1} \cdots e^{s \cdot Y_n}] = E(e^{s Y_1}) \cdots E(e^{s Y_n})$$

$$= [g_Y(s)]^n$$

$$\therefore g_{X(t)}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} [g_Y(s)]^k \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t g_Y(s)}$$

$$= e^{\lambda t (g_Y(s) - 1)}$$

#

## 二、平稳分布

(5) 设  $X(t) = A \sin(2\pi\Theta_1 t + \Theta_2)$ ,  $A$  为常数,  $\Theta_1, \Theta_2$  为相互独立的随机变量,  $\Theta_1$  的密度函数为一个偶函数, 而  $\Theta_2$  服从区间  $[-\pi, \pi]$  上的均匀分布, 则其均值函数为 0, 协方差函数为  $\frac{1}{4\pi^2} \sin 2\pi^2 \tau$ , 从而该过程为 宽平稳.

解: 1<sup>o</sup>  $X(t) = A[\sin 2\pi\Theta_1 t \cos \Theta_2 + \cos 2\pi\Theta_1 t \sin \Theta_2]$

$$E[X(t)] = A[E(\sin 2\pi\Theta_1) E(\cos \Theta_2) + E(\cos 2\pi\Theta_1) E(\sin \Theta_2)]$$

$$E \sin \Theta_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta_1 d\theta_1 = 0$$

$$E \cos \Theta_1 = 0$$

$$\therefore E[X(t)] = 0$$

$$E(\cos 2\Theta_2) = 0$$

$$E(\sin 2\Theta_2) = 0$$

2<sup>o</sup>  $\text{Cov}(X(t), X(t+\tau))$

$$= E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$= \frac{1}{2} E[\cos(2\pi\Theta_1 \tau) - \cos(4\pi\Theta_1 t + 2\pi\Theta_1 \tau + 2\Theta_2)]$$

$$= \frac{1}{2} E[\cos 2\pi\Theta_1 \tau] + 0$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\pi\theta_1 \tau d\theta_1$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \sin 2\pi^2 \tau$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sin 2\pi^2 \tau$$

#

五、(16分) 已知平稳过程  $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$  的均值函数为 0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 5}{\omega^4 + 11\omega^2 + 24}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

(1) 求  $X(t)$  的协方差函数  $R(\tau)$ ;

(2)  $X(t)$  是否有均值遍历性? 为什么?

$$\begin{aligned} (1) \quad S(\omega) &= \frac{2}{5} \frac{1}{\omega^2 + 3} + \frac{3}{5} \frac{1}{\omega^2 + 8} \\ &= \frac{1}{5 \times \sqrt{3}} \frac{2 \times \sqrt{3}}{\omega^2 + 3} + \frac{3}{5 \times 2\sqrt{2}} \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{\omega^2 + 8} \\ R(\tau) &= \frac{\sqrt{3}}{5} e^{-\sqrt{3}|\tau|} + \frac{3\sqrt{2}}{40} e^{-2\sqrt{2}|\tau|} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |R(\tau)| d\tau < +\infty \quad \text{存} \quad \#$$

2017 年春

五. (8分) 设  $X(t) = Y \cos(\omega t + \Theta)$ , 其中  $\omega$  为常数,  $Y$  服从均值为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$  正态分布,  $\Theta$  服从区间  $[0, 2\pi]$  上的均匀分布, 且  $Y$  与  $\Theta$  相互独立. 试判断  $X(t)$  是否为宽平稳过程. 如是, 请给出证明; 否则, 请说明原因.

解:  $1^\circ E[X(t)]$

$$= E(Y) \cdot E(\cos(\omega t + \Theta))$$

$$E(\cos(\omega t + \Theta))$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sin(\theta + \omega t) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} [\sin(2\pi + \omega t) - \sin \omega t] = 0$$

$$2^\circ R(\tau) = E[X(t) X(t+\tau)]$$

$$= E(Y^2) E[\cos(\omega t + \Theta) \cos(\omega t + \omega \tau + \Theta)]$$

$$= (\mu^2 + \sigma^2) \frac{1}{2} E[\cos \omega \tau + \cos(2\omega t + \omega \tau + 2\Theta)]$$

$$= \frac{1}{2} (\mu^2 + \sigma^2) \cos \omega \tau$$

宽平稳.

#

六. (16分) 已知平稳过程  $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$  的均值函数为 0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 21}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

- (1) 求  $X(t)$  的协方差函数  $R(\tau)$ ;
- (2)  $X(t)$  是否有均值遍历性? 为什么?

解: 略

井

2019 年期末

(2) 关于平稳过程, 下列说法是否正确

(a) 宽平稳过程具有平稳增量性. (X)

(b) Poisson 过程是平稳过程. (X)

(c) 二阶矩存在的严平稳一定是宽平稳过程. (✓)

(d) 初始状态分布为平稳分布的 Markov 过程一定是严平稳的. (✓)

解: 略, 同前面  
某一选择题

五、(15分) 设  $A$  与  $\Theta$  独立且分别服从均匀分布  $U(0, 1)$  与  $U(0, 2\pi)$ , 定义过程:

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta) \quad (t \in R, \omega_0 \text{ 为非零常数})$$

(1) 证明  $\{X(t), t \in R\}$  为宽平稳过程;

(2) 试求其功率谱密度函数  $S(\omega)$ 。

解: 略

六、(12分) 设平稳过程  $X = \{X(t), t \in R\}$  (均值为 0) 的功率谱密度函数为:

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

(1) 试求  $X$  的协方差函数  $R(\tau)$ ;

(2) 问  $X$  的均值是否有遍历性? 为什么?

解: 略

(2) (是非) 下列关于  $\tau$  的函数  $R(\tau)$  是否为(实或复)平稳过程的协方差函数?

(a)  $R(\tau) = e^{-|\tau|}(|\tau|+1)^2$  (X); (b)  $R(\tau) = |\tau|e^{-\tau^2/2}$  (X); (c)  $R(\tau) = \frac{\sin \tau}{\pi \tau}$  (✓)

$R(1) = \frac{4}{e} > R(0) = 1$        $R(0) < R(1)$

(d)  $R(\tau) = \sigma^2 e^{i\lambda \tau}$  (✓); (e)  $R(\tau) = \sigma^2 e^{-i\lambda|\tau|}$  (X)。 (注:  $\sigma, \lambda > 0, i = \sqrt{-1}$ )

$\Downarrow$   
 $\overline{R(\tau)} \neq R(1-\tau)$

解:  $R(\tau)$  有如下性质:

- ①  $\overline{R(\tau)} = R(1-\tau)$
  - ②  $R(0) \geq |R(\tau)|$
  - ③
  - ④
- }  $\Rightarrow$  常用这两条判断
- #

2019 期末

五、(15分) 考察下列函数  $S_i(\omega)$ , ( $\omega \in R$ ):

$S_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 9}{(\omega^2 + 4)(\omega + 1)^2}$  (② X)     
  $S_2(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}$      
  $S_3(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 - 4\omega^2 + 3}$  (③ X)

$S_4(\omega) = \frac{\omega^2 - 4}{\omega^4 + 4\omega^2 + 3}$  (③ X)     
  $S_5(\omega) = \frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2 + 2}$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) (① X)     
  $S_6(\omega) = \frac{4a \cos \omega}{\omega^2 + a^2}$  ( $a > 0$ ) (③ X)

(1) 问哪些可以作为平稳过程的谱密度函数? 并进而求出其对应的协方差函数  $R(\tau)$ 。

(2) 问相应的平稳过程的均值是否有遍历性? 为什么?

解: 谱密度函数特点: ①  $\overline{S(\omega)} = S(\omega) \Rightarrow$  实函数  
 ②  $S(\omega) = S(-\omega) \Rightarrow$  偶函数  
 ③  $S(\omega) \geq 0$

(2)  $S_2(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 + 2} + \frac{2}{\omega^2 + 3}$   
 $R_2(\tau) = -\frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}|\tau|} + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\sqrt{3}|\tau|}$   
 $\int_{-\infty}^{+\infty} |R_2(\tau)| d\tau < +\infty$  有

#

六、(7分) 设

$$X_t = S_t + \varepsilon_t = b \cos(\omega t + U) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

其中  $U \sim U(0, 2\pi)$ ,  $\{\varepsilon_t\}$  零均值平稳, 方差为  $\sigma^2$  的白噪声序列,  $U$  与  $\{\varepsilon_t\}$  独立. 作矩形窗滤波,  $M > 0$ :

$$Y_t = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^M X_{t-j}$$

1) 试问  $Y_t$  是平稳过程吗? 为什么?

2) 求出  $Y_t$  的方差.

解: (1)  $1^\circ E X_t = b E[\cos(\omega t + U)] + E(\varepsilon_t)$

$$= 0$$

$$2^\circ R(\tau) = E[X_t X_{t+\tau}]$$

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau=0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases}$$

$$= b^2 E[\cos(\omega t + U) \cdot \cos(\omega(t+\tau) + U)] + \sigma^2 f(\tau)$$

$$= \frac{1}{2} b^2 E[\cos(\omega \tau) + \cos(2\omega t + \omega \tau + 2U)] + \sigma^2 f(\tau)$$

$$= \frac{1}{2} b^2 \cos \omega \tau + \sigma^2 f(\tau)$$

$X_t$  宽平稳,

对  $Y_t$ :

$$1^\circ E Y_t = 0$$

$$2^\circ R_Y(\tau) = E(Y_t Y_{t+\tau})$$

$$= \frac{1}{(2M+1)^2} E\left[\sum_{j=-M}^M \sum_{i=-M}^M X_{t-j} X_{t+\tau-i}\right]$$

$$= \frac{1}{(2M+1)^2} \sum_{j=-M}^M \sum_{i=-M}^M \left[\frac{b^2}{2} \cos \omega(\tau - i + j) + \sigma^2 \delta(\tau - i + j)\right]$$

$\therefore Y_t$  宽平稳,

$$(2) \text{Var } Y_t = R(0)$$

#

2020年1月

$$\textcircled{1} \overline{S(\omega)} = S(\omega)$$

$$\textcircled{2} S(\omega) = S(-\omega)$$

$$\textcircled{3} S(\omega) \geq 0$$

(2) 下列函数是否为平稳过程的谱密度函数:

a.  $S_1(\omega) = \frac{\omega^2 - 16}{\omega^4 + 11\omega^2 + 18}$  (X);      b.  $S_2(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}$  (√);

c.  $S_3(\omega) = \frac{\omega^2 \cos \omega}{\omega^4 + 1}$  (X);      d.  $S_4(\omega) = \frac{e^{-i|\omega|}}{\omega^2 + a^2}, (i = \sqrt{-1})$  (X)

$\textcircled{3} X$

$\textcircled{1} X$

五、(15分) 设  $A$  与  $\Theta$  独立,  $A \sim \text{Exp}(1/3)$  (指数分布),  $\Theta \sim U(0, 2\pi)$  (均匀分布), 定义随机过程:

$$X(t) = A \cos(t + \Theta), \quad (t \in R)$$

(1) 证明  $\{X(t), t \in R\}$  为宽平稳过程;

解: 略

(2) 试求其功率谱密度函数  $S(\omega)$ 。

六、(10分) 设平稳过程  $X = \{X(t), t \in R\}$  (均值为 0) 的功率谱密度函数为:

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

解: 略

(1) 试求  $X$  的协方差函数  $R(\tau)$ ;

(2) 问  $X$  的均值是否有遍历性? 为什么?



# 三、马氏过程

2016-2017 秋

批注：此题C选项是正确的，j是非周期，证明思路可以从证明 $P_{jj}^{(m)}$ 大于0以及 $P_{jj}^{(m+1)}$ 大于0说明j非周期，还是有问题的话可以问我或者去看21号的习题课视频

(2) (判断是非) 设有  $m \geq 1$  使得对于马氏链的所有状态  $i$ , 有  $P_{i,j}^{(m)} > 0$ , 则:

A  $d(j)|m$ , 其中  $d(j)$  为  $j$  的周期;

B  $d(j) = m$ ;

C  $j$  是非周期的;

D  $j$  的周期为无穷;

$$P_{ij}^{(m)} = \sum_{k=0}^m f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(m-k)} \quad (\checkmark)$$

$$P_{jj}^{(m)} = \sum_{k=0}^m f_{jj}^{(k)} P_{jj}^{(m-k)} \quad (\times)$$

(6) 设马氏链的状态  $i$  是周期为  $d$  的常返状态,  $\mu_i$  为状态  $i$  的平均常返时, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$ . 见课本 P39 Th 3.3.

(2) 解: A.  $P_{jj}^{(m)} > 0 \therefore d(j)|m$

$$D. P_{jj}^{(m)} = \sum_{k=0}^m f_{jj}^{(k)} P_{jj}^{(m-k)} > 0$$

$\therefore \exists f_{jj}^{(k)} > 0$ , 知  $j$  的周期一定不是无穷

$$C. P_{jj}^{(m+1)} = \sum_i P_{ji} P_{ij}^{(m)}$$

$$\therefore \sum_i P_{ji} = 1 \Rightarrow \exists i^* \text{ s.t. } P_{ji^*} > 0$$

$$\Rightarrow P_{jj}^{(m+1)} \geq \frac{P_{ji^*}}{>0} \underbrace{P_{i^*j}^{(m)}}_{\text{条件知}} > 0.$$

三、(20分) 设有夏普、大金两个品牌的空气净化器在某地市场占有率开始时 ( $n = 0$ ) 均为1/3(其他品牌总的市场占有率为1/3). 而每过一个月(单位时间) 顾客消费倾向的改变可以用一个三状态的马氏链  $\{X_n, n \geq 0\}$  来描述, 其一步转移概率(状态1、2、3分别表示购买夏普、大金、其他品牌的空气净化器)如下图所示.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 2 & 0.35 & 0.3 & 0.35 \\ 3 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

见本学期 EX8 题 2-3.

解, 略 EX7 第 2 题

(1) 证明该链为不可约、遍历的;

(2) 问两个月后各品牌的市场占有率将变成多少?

(3) 各品牌对市场的占有率最终会稳定于什么样的比例?

四、(16分) 逐个随机地把球放入到  $a$  个盒子中去 (可重复放), 以  $X_n$  表示放了  $n$  个球之后的空盒数, 则  $\{X_n, n \geq 0\}$  为马氏链,

(1) 写出该马氏链的转移概率矩阵  $P$ , 并进行状态分类;

(2) 试求放满  $a$  个盒子的平均时间 (次数)。解: 田各,  $E\{X\}$  第3题

2017 秋

4. 设  $\{X_n, n \geq 0\}$  是一个 Markov 链, 且一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.45 & 0.15 \\ 0.27 & 0.45 & 0.27 \\ 0.15 & 0.45 & 0.4 \end{pmatrix}$$

若  $X_0$  的分布律为  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ , 则  $X_2$  的分布律为 \_\_\_\_\_; 且该 Markov 链的平稳分布为 \_\_\_\_\_.

$$P(X_2=1) = P(X_2=1|X_0=1) \cdot P(X_0=1) + P(X_2=1|X_0=2) \cdot P(X_0=2) + P(X_2=1|X_0=3) \cdot P(X_0=3)$$

解: 1°  $X_2$  分布律为:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) P^2$$

$$2^\circ \text{ 平稳分布 } \pi P = \pi$$

$j \rightarrow i$  且  $j$  常返

$\Rightarrow$  常返, 反之不行.

5. 在离散时间 Markov 链中, 关于常返性下列说法正确的是 (C)

(A) 若状态  $j$  常返且  $j \rightarrow i$ , 则状态  $i$  也是常返的

(B) 若状态  $i$  常返且  $i \rightarrow j$ , 则状态  $j$  不一定是常返的

(C) 若状态  $i$  零常返, 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$  一定存在 为 0

(D) 若状态  $i$  正常返, 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$  一定存在 (考虑周期情形)

批注: 第6题答案是 ABC, 具体要清楚极限分布的定义, 可以去看第五次习题课讲义最后部分

6. 关于离散时间 Markov 链的平稳分布和极限分布, 下列说法正确的是 (A).

(A) 只要有正常返类, 则必有平稳分布  $E\{X\}$  第7题的结论 (只要有正常返类, 必有平稳分布, 若只有一个正常返类, 则平稳分布唯一)

(B) 平稳分布和极限分布都存在, 则它们必相等

(C) 极限分布若存在则与  $X_0$  的取值无关

(D) 平稳分布若存在则必唯一

极限分布与  $X_0$  取值有关  
平稳分布与其无关

7. 关于直线上的简单对称随机游动  $\{X_n, n \geq 0\}$ , 下列说法错误的是 (D).

(A) 所有状态的周期均为 2

所有状态, 零常返

(B)  $\{X_n, n \geq 0\}$  为一个 Markov 链且无平稳分布

(C) 若  $X_0 = 0$ , 则对任意整数  $n$ , 其最终能到达它的概率为 1

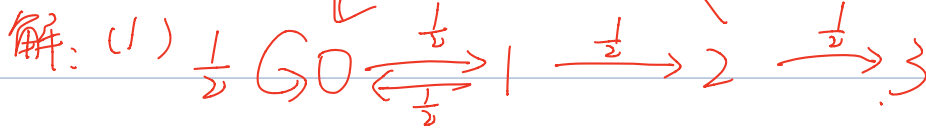
(D) 若  $X_0 = 0$ , 则其首次返回原点所需平均时间是有限的

四. (15分) 设马氏链  $\{X_n, n \geq 0\}$  的状态空间为  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$  (全体非负整数), 转移概率为

$$P_{i,i+1} = P_{i,0} = \frac{1}{2}, \quad i \geq 0.$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{2} & & \\ & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

- (1) 证明该马氏链为不可约遍历的;  
 (2) 试求该马氏链的极限分布  $\pi = \{\pi_i, i \geq 0\}$ .



只有一个正常返类, 所以平稳分布唯一

所有状态互达 + ~~有限状态~~  $\Rightarrow$  所有状态正常返

$f_{00}^1 = \frac{1}{2} < 1, \quad d(0) = 1 \quad \therefore$  不可约遍历

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum \pi_i = 1 \\ \pi_i \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \pi_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

#

2019. 1.10

$\forall n, X_n$  的分布也为平稳分布

(1) (是非) 若马氏链  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  的初始分布  $\pi = \{\pi_j, j \geq 0\}$  为其平稳分布, 则:

(a)  $\sum_{i \geq 0} \pi_i p_{i,j}^{(n)} = \pi_j, (j \geq 0, n \in \mathbb{N})$  ( $\checkmark$ ); (b)  $X$  为严格平稳过程 ( $\checkmark$ )

(c)  $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)}, (i, j \geq 0)$  ( $\times$ ); (d)  $X$  必有正常返状态 ( $\checkmark$ ).

$\Downarrow$   
考虑周期情形

$\Downarrow$   
对应  $\pi_i > 0$  的那些状态

解: (a) 若  $X_0$  为平稳分布, 则  $\forall n, X_n$  均为平稳分布

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(X_n = j | X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}^n \end{aligned}$$

(b) 由 M.C. 性质, 对  $\forall n \in \mathbb{N}_+, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ , 有:

$$(X(t_1), \dots, X(t_n)) \stackrel{d}{=} (X(t_1+k), \dots, X(t_n+k)). \quad \#$$

三、(15分) 设马氏链  $\{X_n, n \geq 0\}$  的转移概率为:

$$p_{0,j} = a_j > 0, (j \geq 0) \quad p_{i,i-1} = 1, (i \geq 1)$$

(1) 证明该马氏链为不可约常返的, 且为非周期;

(2) 试求过程由 0 出发后首次返回到 0 的平均时间  $\mu_0$ , 并据以回答: 过程何时为正常

返? 何时为零常返?

(3) 在正常返时, 试求该马氏链的极限分布:  $\pi = \{\pi_i, j \geq 0\}$ 。

解: (1) 易知所有状态均互达, 所以不可约

$$P = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$f_{00}^1 = a_0 \Rightarrow d(0) = 1$$

$$f_{00}^2 = P(X_1=1, X_2=0 | X_0=0) = a_1$$

$\vdots$

$$f_{00}^n = P(X_1=n-1, X_2=n-2, \dots, X_n=0 | X_0=0) = a_{n-1}$$

$$\therefore f_{00} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{00}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

$\therefore$  不可约, 正常返, 非周期

由 Th 3.4 (P41)

$$(2) \mu_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{00}^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n-1}$$

$$\text{知 } \pi_0 = \frac{1}{\mu_0}$$

$$\text{正常返} \Leftrightarrow \mu_0 < +\infty$$

$$(3) \begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum \pi_i = 1 \\ \pi_i \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \pi_0 = a_0 \pi_0 + \pi_1 \\ \pi_1 = a_1 \pi_0 + \pi_2 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi_1 = (1 - a_0) \pi_0$$

$$\pi_2 = (1 - a_0 - a_1) \pi_0$$

$\vdots$

$$\therefore \pi_j = \left( \sum_{k \geq j} a_k \right) \cdot \frac{1}{\mu_0} = \left( 1 - \sum_{k < j} a_k \right) \cdot \frac{1}{\mu_0}$$

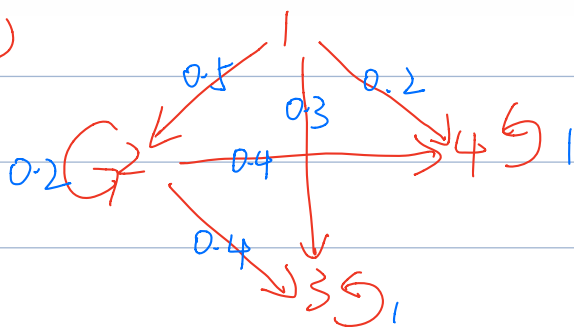
四、(20分) 设马氏链  $\{X_n, n \geq 0\}$  的一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(1) 试讨论该马氏链的状态分类 (即: 分为几个等价类、各类的周期性如何、是否为常返、是否为正常返?)。

(2) 试求过程由状态  $k$  出发而被状态  $j$  吸收的概率  $f_{k,j}$ , ( $k=1,2; j=3,4$ )。

解: (1)



状态分类	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
$f_{11}^k = 0$	$k=1, 2, \dots$			1为暂态, $d(1)=+\infty$
$f_{22}^1 = 0.2$ , $f_{22}^k = 0$	$k=2, \dots$			2为暂态, $d(2)=1$
$f_{33}^1 = 1$				3为常返, $d(3)=1$
$f_{44}^1 = 1$		从1到3		4为常返, $d(4)=1$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 f_{1,3} &= P(X_1=3 | X_0=1) + 0.5 f_{2,3} \\
 &= 0.3 + 0.5 f_{2,3} \quad \text{先从1跳到2} \\
 f_{1,4} &= P(X_1=4 | X_0=1) + 0.5 f_{2,4} \\
 &= 0.2 + 0.5 f_{2,4} \\
 f_{2,3} &= 0.4 + 0.2 f_{2,3} \\
 f_{2,4} &= 0.4 + 0.2 f_{2,4} \\
 \Rightarrow f_{1,3} &= \frac{11}{20}, f_{1,4} = \frac{9}{20}, f_{2,3} = f_{2,4} = \frac{1}{2} \quad \#
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

(4) 现有对于一个三状态的马氏链  $\{X_n, n \geq 0\}$  的 25 个连续观察数据:

-1, 0, 0, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, -1,  
-1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, -1, 1, 1, 1,

则据此可估计出该马氏链的转移概率矩阵  $P$  为 \_\_\_\_\_.

注意行和为 1.

解: EX7 第 1 题, 略

三、(20分) 质点在一正  $N$  边形 ( $N \geq 3$ ) 的周边上作随机游动 (顶点  $1, 2, \dots, N$  按顺时针方向排列), 质点以概率  $p$  顺时针游动一格, 以概率  $q = 1 - p$  逆时针游动一格, 试用一马氏链  $\{X_n, n \geq 0\}$  描述该模型, 并

(1) 写出该马氏链的转移概率矩阵  $P$ , 并作状态分类;

类似 复习题最后一题

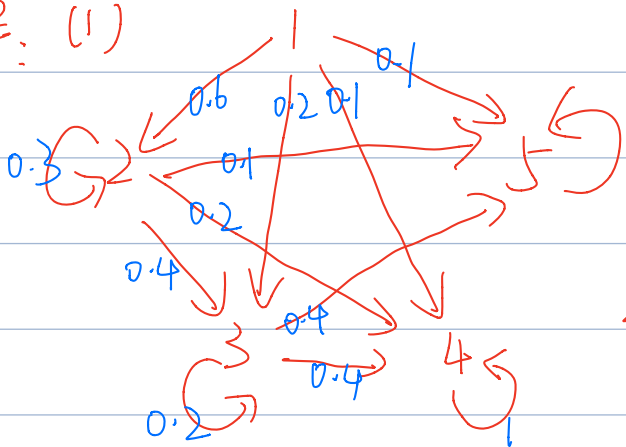
解: 类似 EX7 第 6 题, 略

四、(20分) 设马氏链  $\{X_n, n \geq 0\}$  的转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- (1) 试对该马氏链作状态分类 (分为几类、各类的周期性、常返性、正常返性等);
- (2) 试求过程从状态  $k$  出发而被状态 4 吸收的概率  $f_{k,4}$  及  $f_{k,5}$ , ( $k = 1, 2, 3$ ).

解: (1)



$S: \{1\} \{2\} \{3\} \{4\} \{5\}$

所有状态均不互达

1<sup>o</sup>  $f_{11}^n = 0$  ( $n \geq 1$ )  $f_{11} = 0$   $d(1) = +\infty$

2<sup>o</sup>  $f_{22}^1 = 0.3$

$f_{22}^n = 0$  ( $n \geq 2$ )

$f_{22} = 0.3$   $d(2) = 1$

3<sup>o</sup>  $f_{33}^1 = 0.2$ ,  $f_{33}^n = 0$  ( $n \geq 2$ )  $f_{33} = 0.2$   $d(3) = 1$

4<sup>o</sup>  $f_{44} = 1$   $f_{44}^n = 0$  ( $n \geq 2$ )  $f_{44} = 1$   $d(4) = 1$

5<sup>o</sup>  $f_{55} = 1$   $f_{55}^n = 0$  ( $n \geq 2$ )  $f_{55} = 1$   $d(5) = 1$

(2)  $T$ : 状态进入吸收态的时间

对第一步取条件

$$f_{k,4} = P(X_T = 4 | X_0 = k)$$

$$= \sum_i P(X_T = 4 | X_1 = i) P(X_1 = i | X_0 = k)$$

$$\therefore f_{1,4} = 0.6 f_{2,4} + 0.2 f_{3,4} + 0.1$$

$$f_{2,4} = 0.3 f_{2,4} + 0.4 f_{3,4} + 0.2$$

$$f_{3,4} = 0.2 f_{3,4} + 0.4$$

$$\Rightarrow f_{1,4} = \frac{19}{35}, f_{2,4} = \frac{4}{7}, f_{3,4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{同理 } f_{1,5} = \frac{11}{35}, f_{2,5} = \frac{3}{7}, f_{3,5} = \frac{1}{2} \quad \#$$

三、(18分) 圆周上有 1,2,3,4 四个位置按顺时针方向排列, 一个粒子在这四个位置上(沿圆周)作随机游动。它从任何一个位置各以概率 0.5 顺时针方向或逆时针方向游动至其相邻位置, 若以  $X_n = j$  表示时刻  $n$  粒子处于位置  $j$  ( $j = 1,2,3,4$ ), 则  $\{X_n, n \geq 0\}$  为一马氏链,

(1) 求该马氏链的转移概率矩阵  $P$  及  $P^{(2)}$ , 并求  $P\{X_{n+3} = 3, X_{n+1} = 1 | X_n = 2\} = ?$

(2) 讨论该马氏链状态分类并求其平稳分布  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ ;

(3) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$  是否存在? 为什么?

1  
4 2  
3

解: 易知所有状态互达 + 状态有限  $\Rightarrow$  所有状态正常返

$$(1) \quad P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P(X_{n+3} = 3, X_{n+1} = 1 | X_n = 2)$$

$$= P(X_{n+3} = 3 | X_{n+1} = 1) \cdot P(X_{n+1} = 1 | X_n = 2)$$

$$= P_{13}^2 \cdot P_{21} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(2) 不可约、正常返, 周期为 2

$$\begin{aligned} f_{11}^1 &= 0 \\ f_{11}^2 &= \frac{1}{2} \\ \therefore d &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum \pi_i = 1 \\ \pi_i \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \pi = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

(3) 不存在  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{2n} = \frac{2}{\mu_i} = 2 \cdot \pi_i = \frac{1}{2} > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{2n-1} = 0$$

#



四、(12分) 设  $\{X_n, n \geq 0\}$  为区间  $[0, 3]$  上的随机游动, 其转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

试求粒子由  $k$  出发而被 0 吸收的概率  $p_k$  及它被吸收的平均步数  $\nu_k$ , ( $k = 1, 2, 3$ )。

解: 定义首次到达时  $T = \min\{n: n \geq 0, X_n = 0\}$

$$p_k = P(X_T = 0 | X_0 = k)$$

$$\nu_k = E(T | X_0 = k)$$

易知  $p_0 = 1, \nu_0 = 0$ , 对第一步取条件有,

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 \\ p_2 = \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3 \\ p_3 = p_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \nu_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(\nu_1 + 1) + \frac{1}{3}(\nu_2 + 1) \\ \nu_2 = \frac{1}{3}(\nu_1 + 1) + \frac{1}{3}(\nu_2 + 1) + \frac{1}{3}(\nu_3 + 1) \\ \nu_3 = \nu_2 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = p_2 = p_3 = 1 \\ \nu_1 = 7, \nu_2 = 11, \nu_3 = 12 \end{cases}$$

#