线性代数B1期末复习及知识点整理

卓展鹏

2024 年 6 月 24 日

先放个花体字母表,不会写花体可以参考一下,但考试不会因为你花体写错了就扣分的

$\mathscr{A}\,\mathscr{B}\,\mathscr{C}\,\mathscr{D}\,\mathscr{E}\,\mathscr{F}\,\mathscr{G}\,\mathscr{H}\,\mathscr{I}\,\mathscr{J}\,\mathscr{K}\,\mathscr{L}\,\mathscr{M}\,\mathscr{N}\,\mathscr{O}\,\mathscr{P}\,\mathscr{Q}\,\mathscr{R}\,\mathscr{S}\,\mathscr{T}\,\mathscr{U}\,\mathscr{V}\,\mathscr{W}\,\mathscr{X}\,\mathscr{Y}\,\mathscr{Z}$

1 后半学期内容纲要

本部分的内容中加*表示该内容不是必要掌握的内容,但是由于该内容很有用或者有助于必要内容的理解,所以推荐掌握.

1.1 Part 1:线性变换,特征值与特征向量

本部分的要求如下:

(1)会计算线性变换在一组给定基下的矩阵

(2)会计算矩阵、线性变换的特征值与特征向量

(3)了解矩阵相似对角化的充要条件

(4)*了解特征值的几何重数与代数重数

1.2 Part 2:欧几里得空间

本部分的要求如下:

(1)知道内积的定义、性质、计算方法

(2)在给定内积的情况下,会计算$schmidt$正交化过程(一般不会太烦)

(3)了解(反)对称矩阵的特征值、特征向量的性质

(4)了解实对称矩阵的(正交)相似对角化

1.3 Part 3:二次型

本部分的要求如下:
(1)能写出给定二次型的矩阵表示
(2)根据实对称矩阵的(正交)相似对角化给出二次型的标准型
(3)了解矩阵的实相合标准型(如不加说明,考试时提到实二次型的相合一般默认是实相合)
(4)了解(半)正定矩阵的相关性质
(5)了解二次曲线及曲面的分类(考试必背)

2 考试中可以使用的定理及命题

本部分抄录了书上的定理,有些我认为一点用都没有的定理没有抄下来.

定理 设V是数域F上的线性空间,$\mathscr{A}$是V上的线性变换,若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是V中线性相关的向量,则$\mathscr{A}(\alpha_1),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_m)$线性相关

定理 设线性变换$\mathscr{A}$在V的两组基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$下的矩阵分别是A,B.若基$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$到 $\beta_1,\cdots,\beta_m$的过渡矩阵为T, 即$\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_m\end{pmatrix}T$,则

$$B = T^{-1}AT$$

定理 相似的矩阵有相同的特征多项式,从而他们有相同的特征值.

命题 设A是C上的n阶方阵,$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征值,则
(1)$tr(A) = \Sigma_{i=1}^n\lambda_i$
(2)$det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

推论 n阶方阵A可逆当且仅当他的n个特征值都不是0.

定理 设A是数域F上的 n阶方阵,则属于A的不同特征值的特征向量线性无关.

定理 数域F上的方阵A相似于对角阵的充要条件是 A有n个线性无关的特征向量.

推论 如果A有n个互异的特征值,则A可以相似对角化.

定理 设A是C上的 n阶方阵,λ_i是A的特征值,m_i是λ_i的几何重数,n_i是λ_i的代数重数,则$m_i \leqslant n_i$

定理 复方阵A可对角化等价于 A的每个特征值的几何重数等于代数重数.

定理 任何一个n阶复方阵A都可以相似于一个上三角矩阵,该上三角矩阵的对角元就是A的特征值.

定理 设V是欧几里得空间,$<\cdot,\cdot>$是 V上的内积,则对V中任意两个向量 a,b,都有

$$|<a,b>| \leqslant \sqrt{<a,a><b,b>}$$

命题 欧几里得空间中的正交向量组线性无关.

定理 从n维欧几里得空间V的任意一组基出发,可以构造一组标准正交基.

Rmk.相较于这个定理而言,这个定理给出的构造方法更加重要.

定理 设V是一个n维的欧几里得空间,$\mathscr{A}$是 V上的线性变换,则$\mathscr{A}$是正交变换当且仅当下列两个条件之一成立

(1)$\mathscr{A}$保持任意向量的模长不变.

(2)$\mathscr{A}$将标准正交基变换为标准正交基.

定理 欧几里得空间中的线性变换$\mathscr{A}$是正交变换当且仅当 $\mathscr{A}$在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

命题 设$\mathscr{A}$是欧几里得空间V上的正交变换,则

(1)$\mathscr{A}$的特征值的模长为1.特别地,$\mathscr{A}$的实特征值只能是1或-1.

(2)如果V的维数是奇数且$\mathscr{A}$是第一类正交变换,则$\mathscr{A}$一定存在值为1的特征

值.

定理 设$\mathscr{A}$是欧几里得空间上的线性变换,则$\mathscr{A}$是对称变换当且仅当$\mathscr{A}$在任意一组标准正交基下的矩阵是实对称方阵.

定理 设$\mathscr{A}$是欧几里得空间V上的对称变换,则$\mathscr{A}$的不同特征值对应的特征向量正交.

推论 实对称阵A的属于不同特征值的特征向量相互正交.

命题 实对称阵的特征值是实数.

定理 对于任意一个n阶实对称矩阵A,存在一个 n阶正交阵T,使得$T^{-1}AT$是对角阵.

定理 给定一个实二次型

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$$

则存在正交变换$x=Py$将Q化为二次型

$$\tilde{Q}(y_1,\cdots,y_n)=y^TJy=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

这里$J=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, λ_i是A的特征值.称$\tilde{Q}$是Q的标准型.

定理 设A是一个n阶实对称矩阵,则存在可逆矩阵P,使得

$$P^TAP=\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0\\ 0 & -I_s & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

定理 n元实二次型

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$$

正定的充要条件是Q的正惯性指数为n.也就是A 相合于单位阵.

定理 设A是n阶实对称方阵.
(1)若P是n阶实可逆方阵,$B=P^TAP$,则 $B>0$当且仅当$A>0$.

(2)$A>0$当且仅当$A=P^TP$,其中P是n阶实可逆方阵.
(3)若$A>0$,则$det(A)>0$.

定理 一个实二次型

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$$

正定的充要条件是,A的各阶顺序主子式均大于零.

3 我认为可以直接使用的结论

下面这些命题或许会在考试中用到,建议掌握证明

命题 若A与B相似,则对任意的正整数k,A^k与B^k相似,进而对任意的多项式f,$f(A)$与 $f(B)$相似.

命题 若λ是A的特征值,则对任意的正整数k,λ^k是A^k的特征值.

命题 A,B是同阶方阵,则 AB与BA有相同的特征多项式,从而有相同的特征值.

命题 $A\in C^{m\times n}$, $B\in C^{n\times m}$,则AB与BA的非零特征值相同.

命题 设A是 n阶实对称矩阵,则A正定的充要条件是A的特征值全大于零.

4 例题

4.1 线性变换

1.设$A\in C^{m\times n},B\in C^{n\times m}$,则 AB与BA的非零特征值相同.

首先回顾一下我们在学习行列式时的一个结论及证明:
设A是$m\times n$矩阵,B是$n\times m$矩阵,$\lambda\in C$,则有

$$\lambda^n det(\lambda I - AB) = \lambda^m det(\lambda I - BA)$$

证明如下:

$\lambda = 0$时原等式显然成立,下面考虑$\lambda \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_m - AB & O \\ B & \lambda I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_m & \lambda A \\ B & \lambda I_n \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} I_m & O \\ \frac{1}{\lambda}B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_m & \lambda A \\ O & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}$$

等式两边同时取行列式,可以得到

$$\lambda^n det(\lambda I - AB) = \lambda^m det(\lambda I - BA)$$

注意到这个结论中的两个行列式恰好是AB与BA的行列式,所以假设 AB有非零的特征值λ_0,则由

$$\lambda_0^n det(\lambda_0 I - AB) = \lambda_0^m det(\lambda_0 I - BA)$$

可得λ_0也是BA的特征值.因而 AB与BA的非零特征值相同.

Rmk.特别地,如果这里A, B都是方阵,则 AB与BA有相同的特征值.

2.设$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$,已知$A$由3个线性无关的特征向量,$\lambda = 2$是$A$的二重特征值,求可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP$是对角阵.

因为A由3个线性无关的特征向量,所以A可对角化,从而A的每个特征值的代数重数等于几何重数,则特征值$\lambda = 2$的几何重数是2,因此 $rank(2I - A) = 1$

$$2I - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

进而得到$x = 2, y = -2$.且特征值2对应的特征向量是

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

结合$tr(A)=\Sigma_{i=1}^{3}\lambda_i$可得第三个特征值是6,解得对应的特征向量是

$$x_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

将三个特征向量排列即可得到矩阵P.

3.已知矩阵$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$与矩阵$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$相似,求$a+b$.

由两个矩阵相似可得两个矩阵的特征值相同,而 -2显然是A的特征值,从而-2是 B的特征值,因此$b=-2$.由两矩阵相似还可以得到$tr(A)=tr(B)$,即$a-1=b+1$.所以$a=0$.因此$a+b=-2$.

4.证明:n阶全1方阵$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$与同阶方阵$B=\begin{pmatrix}n&0&\cdots&0\\n-1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\2&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\end{pmatrix}$相似.

只需要证明两个矩阵都可以相似到同一个对角阵即可.首先考察B.显然B有特征值n,代数重数为1,特征值0,代数重数为$n-1$.而方程组$Bx=0$有$n-1$个线性无关解 $e_2,\cdots,e_n$,所以特征值0的几何重数是$n-1$.因此B可对角化.

下面考察A,根据上面,我们可以猜测 A的特征值也是n,0,下面来证明这件事,并计算出特征值对应的重数.

首先考察方程$Ax=0$,这个方程组的一组基解是

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\-1\\1\end{pmatrix}$$

所以0是A的特征值,且它的几何重数是$n-1$,从而它的代数重数一定大于等于$n-1$.

考察方程$(nI-A)x=0$,注意到

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是方程组的一个解,从而n是A的一个特征值,且几何重数至少为1,从而n的代数重数至少为1. 又因为A的特征值的代数重数之和为n,所以n 的代数重数被迫只能是1,0的代数重数被迫只能是$n-1$.从而A可对角化.

综上可得A与B都可以相似到对角阵

$$\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

从而他们相似.

5.设$A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_n & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$,求$A$的特征值和特征向量.

首先,我们记$J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,它有性质$J^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$.则$A = \Sigma_{i=0}^n c_i J^i$.

因此,我们只需要考察方阵J的特征值和特征向量即可.

$$|\lambda I_n - J| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

按照第一列展开得到

$$|\lambda I_n - J| = \lambda |diag(\lambda, \cdots, \lambda)| + (-1)^{n+1}(-1)(-1)^{n-1} = \lambda^n - 1$$

所以得到J有n个互不相同的特征值

$$\omega_k = cos\tfrac{2k\pi}{n} + isin\tfrac{2k\pi}{n}, 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

解方程得到ω_k对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

所以得到A的特征值是$f(\omega_k), 0 \leqslant k \leqslant$,特征向量就是$J$的特征向量.

4.2 欧几里得空间

1.$A \in R^{m\times n}$,$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$, $rank(A) = m$,其中a_i是n维行向量.$\xi_1, \cdots, \xi_s$是方程组 $Ax = 0$解空间的一组标准正交基,证明: $\alpha_1^T, \cdots, \alpha_m^T, \xi_1, \cdots, \xi_s$线性无关.

假设这组向量线性相关,则存在一系列系数使得

$$k_1\alpha_1^T + \cdots + k_m\alpha_m^T + l_1\xi_1 + \cdots + l_s\xi_s = 0$$

在等式两边同时对ξ_j做内积得到

$$k_1 < \alpha_1^T, \xi_j > + \cdots + k_m < \alpha_m^T, \xi_j > + l_1 < \xi_1, \xi_j > + \cdots + l_s < \xi_s, \xi_j >= 0$$

首先,因为ξ_j是方程组$Ax = 0$的解,所以我们可以得到

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \xi_j = \begin{pmatrix} \alpha_1\xi_j \\ \alpha_2\xi_j \\ \cdots \\ \alpha_m\xi_j \end{pmatrix} = 0$$

从而$< \alpha_i^T, \xi_j >= \alpha_i\xi_j = 0$.

另一方面,ξ_i是一组标准正交基,所以对任意的$i \neq j$,$< \xi_i, \xi_j >= 0$.因此我们就得到了

$$l_j < \xi_j, \xi_j >= 0$$

从而$l_j=0$.所以原等式就化成了

$$k_1\alpha_1^T+\cdots+k_m\alpha_m^T=0$$

而由$rank(A)=m$知α_i^T线性无关,从而 $k_i=0,\forall i$.

综上,给定向量组线性无关.

2.设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$满足$A^*=A^T$,且 $a_{11}=a_{12}=a_{13}$,求a_{11}.

假设$a_{11}=a_{12}=a_{13}=a$,下面对 a的正负性进行讨论.

(1)若$a=0$,则由$A^*=A^T$可得

$$a_{11}=A_{11},a_{12}=A_{12},a_{13}=A_{13}$$

从而$A_{11}=A_{12}=A_{13}=0$.而若$i>1$,则 A_{ij}的第一行全零,从而$A_{ij}=0$.则 A的所有二阶代数余子式全为0,从而$rank(A)<2$.若$rank(A)=1$,则有$rank(A^*)=0$,这与$A^T=A^*$矛盾,因此$rank(A)=0$,所以$a_{11}=0$满足条件

(2)若$a>0$,则类似(1)可以得到

$$A_{11}=A_{12}=A_{13}=a>0$$

所以$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=3a^2>0$.由 $A^T=A^*$可知

$$|A|=|A^*|=|A|^2$$

所以$|A|=1$,则$3a^2=1$,结合$a>0$可知 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)若$a<0$,同(2)一样分析可得$a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.设V是n维欧几里得空间,$\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in V$,对于$s$阶矩阵$A=(a_{ij})_{s\times s}$,其中$a_{ij}=<\alpha_i,\alpha_j>$,证明:矩阵$A$的秩等于向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的秩.

假设向量组的秩为r,不妨设$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$是极大无关组.则对任意的$j>r$,存在一系列系数使得

$$\alpha_j=\Sigma_{i=1}^r l_{ji}\alpha_i$$

考察A的行向量组为$\beta_1,\cdots,\beta_s$,则由A的定义可知

$$\beta_j=\Sigma_{i=1}^r l_{ji}\beta_i$$

所以A的行向量组的秩至多为r.即 $rank(A)\leqslant r$.

再考虑A的左上角的r阶子式,注意到它是$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$的$Gram$方阵,由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关可知他们的 $Gram$方阵可逆,从而A有r阶非零子式,所以$rank(A)\geqslant r$.

综上,$rank(A)=r$.

4.在R^3中给定向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}$,$\alpha_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
(1)将向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$经过$schmidt$正交化为一组标准正交基$e_1,e_2,e_3$.
(2)令A是以e_1,e_2,e_3为行构成的三阶方阵,定义R^3上的线性变换

$$\mathscr{A}x:=Ax,x\in R^3$$

证明:$\mathscr{A}$是绕某一轴线的旋转变换.

(1)
第一问没什么好说的,直接计算即可.答案是

$$e_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

$$e_2=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$$

$$e_3=\begin{pmatrix}0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

(2)
借这题讲一下正交矩阵的实相似,以及旋转矩阵.先不加证明地给出如下结论
定理.对于实正交阵$A\in R^{n\times n}$,A可以相似对角化.更一般地,对于方阵$A\in R^{n\times n}$,如果$AA^T=A^TA$,那么A可以相似对角化.
定理.对于实正交阵$A\in R^{n\times n}$,存在可逆实矩阵$P\in R^{n\times n}$,使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}R_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & R_k & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1\end{pmatrix}$$

其中

$$R_i=\begin{pmatrix}cos\theta_i & sin\theta_i \\ -sin\theta_i & cos\theta_i\end{pmatrix}$$

这个定理表明正交矩阵大体上可以分为三个部分,一个是旋转部分,一个是反射部分,一个是恒同部分(以上全是我自己取得名字,说法也不太严谨),分别对应复特征值,特征值1,特征值-1.如果-1不是A的特征值,那么就称A是一个旋转矩阵.这可以看做是旋转矩阵的一个定义.以这题为例,我们来看看A是不是旋转矩阵.

考察矩阵是否为旋转矩阵只需要验证两件事.第一件是矩阵是否为正交矩阵,如果不是正交矩阵,那么自然不是旋转矩阵.第二件事是矩阵是否有特征值 -1,如果有特征值-1的话就不是旋转矩阵.对于$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$,只需要计算$det(I-A) = 2 + \frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3} \neq 0$就可以知道$-1$不是$A$的特征值,从而$A$是一个旋转矩阵.

如果要确定旋转轴的话,那么只需要计算特征值1对应的特征向量即可.

4.3 实二次型

1.设实向量$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^T$,$\beta = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}^T$非零,而且$A = \alpha\beta^T$是对称阵

(1)证明α, β是A的特征向量.

(2)证明$A+I$是正定阵当且仅当 α与β的内积大于-1.

(1)由A对称知道$\alpha\beta^T = (\alpha\beta^T)^T = \beta\alpha^T$.设 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha = \lambda$,则

$$A\alpha = \alpha\beta^T\alpha = \lambda\alpha$$

$$A\beta = \beta\alpha^T\beta = \lambda\beta$$

则α, β都是A的特征向量.

(2)首先,考察$I+A$的特征多项式为$det(\lambda I - I - A) = det((\lambda-1)I - A)$,所以$I+A$的特征值恰好是$A$的特征值加一.要证明$I+A$正定,就是要证明 $I+A$的特征值全正,等价于是要证明 A的特征值全部大于-1.利用线性变换部分的第一道例题中已经证明的结论就可以得到$A = \alpha\beta^T$与 $\beta^T\alpha$的非零特征值相同.注意到 $\beta^T\alpha$是一个数,他的特征值只能是他本身,所以A的特征值全大于-1就等价于$\beta^T\alpha > -1$,即α与 β的内积大于-1.

2.设A是n阶实对称阵,证明:

(1)若存在可逆矩阵B,使得 $A=B^TB$,则A的主对角线上的元素全部大于0.

(2)设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是 A的n个正交单位特征向量,对应的特征值是$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,则

$$A=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^T+\cdots+\lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$$

(3)当$n=3$时,已知A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,对应的特征向量为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

,求A.

(1)先证明A正定.对于任意的$x\in R^n,x\neq 0$ 由B可逆知,存在 $y\in R^n,y\neq 0$,使得 $x=B^{-1}y$.则

$$x^TB^TBx=(Bx)^T(Bx)=y^Ty>0$$

从而$A>0$.考察$x=e_i$,由 $x^TAx>0$即可得到$a_{ii}>0$.

(2)令$P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$,则$P$正交,且

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}P^T$$

其中λ_i是A的特征值.取 A_i是第(i,i)个元素为λ_i,其余位置全为0的矩阵,则

$$A=\Sigma_{i=1}^nPA_iP^T$$

经过计算可得$PA_iP^T=\lambda_i\alpha_i\alpha_i^T$.则原命题得证.

(3)令$P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$,则

$$A=P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13 & -2 & -5\\ -2 & 10 & -2\\ -5 & -2 & 13\end{pmatrix}$$

3.证明:若A是n阶实对称矩阵,则当实数t充分大时,$tI+A$正定.

考虑A的正交相似标准型

$$A=P\Lambda P^T$$

其中P正交阵Λ是以A的特征值为对角元的对角阵.则

$$tI + A = tI + P\Lambda P^T = P(tI + \Lambda)P^T$$

因此取$t > max_{i=1}^n|\lambda_i|$,$tI + A$的特征值全正,从而正定.

4.设A是n阶正定阵,证明$det(I + A) > 1$

因为A是正定矩阵,所以可以将A正交相似到对角阵Λ且Λ的对角元全是正数.设 $I + A$的特征值为μ_i,A的特征值是λ_i.则由$det(\lambda I - A) = det((\lambda + 1)I - (I + A))$知$\mu_i = \lambda_i + 1$.又因为$A$正定,所以$\lambda_i > 0$,从而$\mu_i > 1$.所以$det(I + A) = \Pi_{i=1}^n \mu_i > 1$.

5.设A, B是正定阵,且$AB = BA$,证明:AB是正定阵.

首先证明AB是对称阵.

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

下面再证明正定性,即证明AB的特征值全大于0.设λ是AB的任意一个特征值,x是对应的特征向量,即

$$ABx = \lambda x$$

于是有

$$Bx = \lambda A^{-1}x$$

两边同时左乘x^T得到

$$x^T Bx = \lambda x^T A^{-1}x$$

因为$A > 0$,所以$A^{-1} > 0$,从而得到$\lambda = \frac{x^T Bx}{x^T A^{-1}x} > 0$.

6.设A的对角元全正,且A是严格主对角占优的对称矩阵,即对任意的i,有

$$|a_{ii}| > \Sigma_{j=1,j\neq i}^n |a_{ij}|$$

则$A > 0$

先来证明A可逆.假设$|A| = 0$,则方程组 $Ax = 0$有非零解$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$,记$|w_i| = max_{j=1}^n|w_j|$,考察第$i$个方程

$$a_{i1}w_1 + \cdots + a_{in}w_n = 0$$

注意到$w_i \neq 0$,则

$$-a_{ii} = a_{i1}\frac{w_1}{w_i} + \cdots + a_{i,i-1}\frac{w_i - 1}{w_i} + a_{i,i+1}\frac{w_i + 1}{w_i} + \cdots + a_{i,n}\frac{w_n}{w_i}$$

等式两边同时取绝对值,由绝对值的三角不等式可得

$$|a_{ii}| \leqslant \Sigma_{k=1,k\neq i}^{n}|a_{ik}||c_i| \leqslant \Sigma_{k=1,k\neq i}^{n}|a_{ik}|$$

这与A的严格主对角占优性质矛盾.因此$|A| \neq 0$.下面考虑A的特征值.对A的特征多项式$det(\lambda I - A)$,当$\lambda \leqslant 0$时

$$det(\lambda I - A) = (-1)^n det(-\lambda I + A)$$

其中$-\lambda \geqslant 0$,从而$-\lambda I + A$是严格主对角占优矩阵.由上面的结论可知,$-\lambda I + A$可逆,从而$det(\lambda I - A) = (-1)^n det(-\lambda I + A) \neq 0$.于是$A$的特征值不可能小于等于0,而对称阵的特征值一定是实数,所以A的特征值全正.所以A正定.

7.设$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 3 & x \\ 3 & 1 & 3 & 10 & x \\ 3 & 0 & x & x & 10 \end{pmatrix}$,证明:当$|x| < 3$时,$|A| < 10^5$.

注意到A是一个对称阵,所以A的特征值都是实数.对于这题的结论,我们可以联想到均值不等式

$$\sqrt[5]{\Pi_{i=1}^{5}\lambda_i} \leqslant \frac{\Sigma_{i=1}^{5}\lambda_i}{5}$$

假如能够使用均值不等式(条件是$\lambda_i \geqslant 0$),那么结合

$$|A| = \Pi_{i=1}^{5}\lambda_i$$

$$tr(A) = \Sigma_{i=1}^{5}\lambda_i$$

就可以得到结论.那么问题就是均值不等式的使用条件是否成立.注意到,在题目条件下,A一定是一个严格主对角占优矩阵(定义参考本部分第六题),从而根据第6题的结论可以得到A正定从而A的特征值全部大于0.