期末提纲

麦克斯韦方程组

$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint \rho_0 dV \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \quad \oiint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}$

$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0 \quad \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

各向同性介质电磁性能方程 $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \quad \vec{j}_0 = \sigma(\vec{E} + \vec{K})$ $\left[\begin{array}{l}\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \\ \vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\end{array}\right.$

电流连续方程 $\oiint \vec{j}_0 d\vec{S} + \frac{dq}{dt} = 0$，$\nabla\cdot\vec{j}_0 + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$

稳恒条件 $\oiint \vec{j}_0 d\vec{S} = 0 \quad \nabla\cdot\vec{j}_0 = 0$ 似稳条件 $l \ll \frac{c}{f} = \lambda$

稳恒电路 $\mathscr{E} = IR$ $\left(R = \rho\oint\frac{dl}{S},\ \mathscr{E} = \oint \vec{K}\cdot d\vec{l},\ p = \frac{j^2}{\sigma}\right)$

磁路 $\mathscr{E}_m = \Phi_B R_m$ $\left(R_m = \frac{1}{\mu}\oint\frac{dl}{S},\ \mathscr{E}_m = \oint \vec{H}\cdot d\vec{l}\right)$

似稳电路方程 $e = iR + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + M\frac{di'}{dt}$

暂态过程 C电压不突变，L电流不突变 $\tau_L = \frac{L}{R}$ $\tau_C = RC$ β/ω_0

交流电路复数形式 $\tilde{\mathscr{E}} = R\tilde{I} + \frac{1}{j\omega C}\tilde{I} + j\omega L\tilde{I} + j\omega M\tilde{I}'$

有效值… $\mathscr{E} = RI + \frac{1}{j\omega C}I + j\omega LI + j\omega MI'$

$P = \frac{1}{2}V_m I_m\cos\varphi = VI\cos\varphi = S\cos\varphi = \frac{1}{2}(V I^* + V^* I)$

L, R, C

串联谐振 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q =$ 阻抗比、电压比、$2\pi\frac{W_电 + W_磁}{W_耗}$ $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2Q}$

变压器 $Z_1' = \frac{N_1^2}{N_2^2}Z_1$

电容器 $C = \frac{Q}{U}$ 球：$4\pi\varepsilon_0 R$；平板：$\frac{\varepsilon_0 S}{R}$，$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}$；球壳：$\frac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_A - R_B}$；柱：$\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R_A/R_B)}$

霍尔元件 $U = K\frac{\vec{B}\times\vec{I}}{d}$ 磁镜 $\theta_c = \arcsin\sqrt{\frac{B}{B_m}}$ 介 $\vec{E}' = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}$

$\vec{m}$ I $\vec{B} = -\frac{\mu_0\vec{m}}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0\vec{r}_0(\vec{m}\cdot\vec{r}_0)}{4\pi r^5}$ $\vec{m} = \frac{1}{2}\oint \vec{R}\times I d\vec{R} = \frac{1}{2}\iint \vec{R}\times \vec{i} dS = \frac{1}{2}\iiint \vec{R}\times\vec{j} dV$

$\vec{L} = \vec{m}\times\vec{B}$ $\vec{F} = (\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}$ $W_m = \vec{m}\cdot\vec{B}$

I $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$ $B = \begin{cases}\frac{1}{2}\mu_0 i r, & r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > R\end{cases}$ $B_z = \frac{n\mu_0 I}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$

$B = \frac{1}{2}\mu_0 i$ 螺绕线圈 $a = IR =$

电感器 $\mathscr{E}_1 = -\left(L\frac{dI_1}{dt} \pm M\frac{dI_2}{dt}\right)$ $L_串 = L_1 + L_2 \pm 2M$ $L_并 = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$ $M = k\sqrt{L_1L_2}$

$B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$ 轨道磁矩 $\vec{m} = -er^2\frac{\omega}{2}$ $\vec{m} = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B}$ 不变

静电能

$W_{互}=\frac{1}{2}\sum qU_i$ $W_{极}=-\frac{1}{2}\iiint \rho_e' U dV$ $W_e=\frac{1}{2}\iiint \rho_{e0} U dV$

外场中 $W_e=\sum qU$

$w_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$

$\vec{F}=-(\nabla W_e)_Q=(\nabla W_e)_U$ $L=-(\frac{\partial W}{\partial\theta})_Q=(\frac{\partial W}{\partial\theta})_U$

磁能

$W_m=\frac{1}{2}\sum I_i\Phi_i$ 外场中 $W_m=\sum I_n\iint \vec{B}\cdot d\vec{S}$ $w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

$\vec{F}=-(\nabla W_e)_\Phi=(\nabla W_e)_I=-(\nabla W_m')_m$

电磁波 $w=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$ $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ $\vec{g}=\vec{D}\times\vec{B}$ $\vec{l}=\vec{r}\times\vec{g}$

平面~ ($\rho_0=0,\ \vec{j}_0=0$)

$\nabla\cdot\vec{E}=0$ $\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ $\nabla\cdot\vec{H}=0$ $\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\vec{E}$ $\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\vec{H}$

$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$ $\vec{H}=\vec{H}_0 e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$ $\nabla=i\vec{k}$ $\frac{\partial}{\partial t}=-i\omega$ $\vec{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\hat{k}$

$w_e=w_m$ $v=\frac{\omega}{k}$ $n=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ ($\mu\approx\mu_0$) $\vec{k}\times\vec{E}=\mu\omega\vec{H}$ $\vec{k}\times\vec{H}=-\varepsilon\omega\vec{E}$

$w=\varepsilon E^2=\mu H^2$ $\vec{S}=w\vec{v}$ $\vec{g}=\frac{1}{v^2}\vec{S}$

$\bar{w}=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2=\frac{1}{2}\mu H_0^2$ $\bar{\vec{S}}=\bar{w}\vec{v}$ $\bar{\vec{g}}=\frac{1}{v^2}\bar{\vec{S}}$

光 $w=h\nu$ $\vec{p}=\frac{h}{2\pi}\vec{k}$ $p_{压}=(1+R)\bar{w}$

综合求解	$\vec{j}$	$\vec{E}$	I	σ
纯静电场	$\vec{D}$	$\vec{E}$	Q	ε

$RC=\rho\varepsilon$

静磁量	$\vec{H}$	$\vec{B}$	$\vec{j}$	q_m	σ_m	$\vec{p}_m$	μ_0	μ	χ_m
静电量	$\vec{E}$	$\vec{D}$	$\vec{P}$	Q	σ_e	$\vec{p}$	ε_0	ε	χ_e

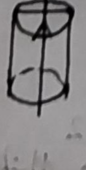
($\vec{j}=\mu_0\vec{M}$)

边值关系

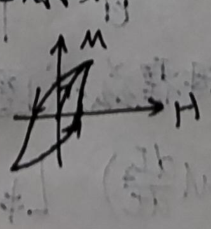
$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_0$ $\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0$ $\vec{n}\cdot(\vec{P}_2-\vec{P}_1)=-\sigma'$

$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$ $\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{i}_0$ $\vec{n}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)=\vec{i}'$

毕萨 $d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$ 高斯无源、安培有旋 ($\propto 1/r^2$)



$\vec{B}=\alpha\vec{B}_0$ $\oint_L \frac{\vec{B}}{\mu}\cdot d\vec{l}=\sum I_{c0}$



一、真空中的静电场

1、电荷守恒

自然界中存在两种电荷。电荷是量子化的。存在电荷对称性。电荷守恒。

2、库仑定律

库仑扭秤实验：扭力正比于扭转角度。

库仑定律：$\vec{F}_{10}=k\frac{q_1q_0}{r_{10}^3}\vec{r}_{10}$，$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

要求带电体尺度远小于距离，电荷静止（或速度远低于光速），光子静止质量为零

3、叠加原理

数学表述：$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0\sum\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$

带电体系对静止点电荷作用力：要求微元宏观小微观大。$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_0\iiint_V\frac{\rho_e(\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)dV'$

带电体系之间作用力：多重积分

4、电场强度

定义：$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$

各类带电体电场强度：$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\vec{r}^3}\vec{r}$ 满足叠加原理。

电场的物质性：具有能量交换能量转换能量客观存在。

计算举例：电偶极子为电量相等、符号相反、相隔某段微小距离的两点电荷组成的系统。中垂面一点：$\vec{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}$，$p=ql$ 为电偶极矩，指+q，对于任意一点，则为 $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{p}}{r^5}$；

细环心中轴：$\vec{E}=-\frac{\lambda_e Rz}{2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}$；

无穷大平板：$\vec{E}=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}$；

半球面球心：$\vec{E}=-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$；

5、高斯定理

电通量：$\Delta\Phi_E=E\Delta S\cos\theta$，$\Phi_E=\iint_S\vec{E}d\vec{S}$ 指向外法线方向，满足叠加原理。

高斯定理：通过任意闭合曲面 S 的电通量等于面内全部电荷代数和除于电容率。穿过高斯面的电通量与穿过单位球面的电通量相等。高斯面外电荷对高斯面电通量不做贡献。

$$\oiint_S\vec{E}\,d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho_\varepsilon(\vec{r})\ dV=\frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

与库仑定律关系：验证距离平方反比律间接法

举例：无限长细棒：$\vec{E}=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0r^2}\vec{r}$

球外：$E=\frac{R^3\rho_e}{3\varepsilon_0r^2}$ 与集中点电荷同；球内：$E=\frac{\rho_e r}{3\varepsilon_0}$

球壳内为零，球壳外 $E=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$ 为无限平面两倍

球内空腔电场均匀，$\vec{E}=\frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\vec{a}$

电场线：$E=\Delta N/\Delta S$ 记作电场线数密度。电场为零的点为中性点，电场线只能无限逼近却无法抵达中性点。电通量为电场线根数，等于点和代数和除以电容率。

6、环路定理 $\oint_L\vec{E}d\vec{l}=\frac{A}{q_0}$

电路的环量：等于单位正电荷延闭合路径绕行一周做功。

环路定理：静电场环量为零。功与路径无关，只与起终点有关。静电场是个无旋场。

7、电势

电势差与电势：$U_P=\frac{W_P}{q_0}=\int_P^\infty\vec{E}d\vec{l}$ 电势沿电场线单调减小。

电势的一般表达式：$U(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ 满足叠加原理

场强与电势的微分关系：$\nabla U=-E=\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}$

称为电势梯度，指向电势增加方向。

等势面：电场线与等势面处处正交。电场大小可用等势面疏密程度度量。

均匀带电球壳电势：$U=$

$$\begin{cases}\frac{\rho_e(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r}\\ \frac{\rho_e}{6\varepsilon_0}\left(3R_2^2-\frac{2R_1^3}{r}-r^2\right)\\ \frac{\rho_e(R_2^2-R_1^2)}{2\varepsilon_0}\end{cases}$$

二、静电场中的导体和电介质

1、物质的电性质

物质的电性质：导体（$10^{-8}\sim10^{-6}\Omega\cdot m$）：金属、合金、石墨、酸碱盐的水溶液、等离子体；绝缘体（$10^{6}\sim10^{18}\Omega\cdot m$）：玻璃、橡胶、一般塑料、油类物质、非电离气体；半导体（$10^{-6}\sim10^{6}\Omega\cdot m$）。物质的导电能力随外界条件变化而变化，当温度降低至T_C（超导体的临界温度），某些物质电阻率会突然消失，称为超导电性。

电场对电荷系统的作用：$\mathbf{E}=\mathbf{E_t}-\mathbf{E_1}$，对于$\mathbf{E_1}$，体电荷元可忽略，面电荷元可视为无限平面

2、静电场中的导体

导体达到静电平衡的条件：导体内自由电荷分布及导体内外电场分布不再发生变化

处在静电平衡条件下导体的性质：（1）导体内部电场为零（2）导体是等势体（3）导体内部电荷密度处处为零（4）电荷将只能出现在导体表面（5）导体表面外侧附近电场与表面垂直，大小为$\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$（6）若导体外表面存在电荷，面电荷密度与曲率有关。

3、电容和电容器

孤立导体电容：$C=\frac{Q}{U}$，球 $C=4\pi\varepsilon_0R$

电容器：电容值大，静电屏蔽

（1）平行金属板：$C=\frac{\varepsilon_0S}{d}$

（2）同心导体球壳：$C=\frac{4\pi\varepsilon_0R_AR_B}{R_A-R_B}$

（3）：同轴圆柱导体壳：$C=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R_A/R_B)}$

电容器的连接：并联增加电容，串联减少电容，增加耐压性能

4、电介质

电介质在外电场中会产生极化电荷或束缚电荷，抵消部分外电场，即极化。无极分子产生位移极化，有极分子产生位移极化和取向极化，取向极化与温度有关。

5、极化强度矢量 P

$$\mathbf{P}=\frac{\sum p}{\Delta V}$$

P 与极化电荷的关系：$Q=-\oiint\mathbf{P}d\mathbf{S}$，$\rho=-\nabla\cdot\mathbf{P}$

P 与电场 **E** 的关系：(1)各向同性介质：$\mathbf{P}=\chi_e\varepsilon_0\mathbf{E}$ 场强不大时，χ_e与 **E** 无关，对取向极化电介质χ_e还与温度有关。(2)各向异性电介质：$\mathbf{P}=\hat{\chi}_e\varepsilon_0\mathbf{E}$。若$\chi_e$与电场无关，且可忽略介质损耗，如可忽略其发热损耗，则以上两种介质统称为线性无损耗介质。（3）铁电体，存在电滞回线，存在居里点（4）压电体，存在压电效应及其逆效应（5）永电体或驻电体

6、电介质中静电场的基本定理

高斯定理：$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$，$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_{e0}$。对于线性各向同性介质，$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$

环路定理：有介质存在时，静电场仍是无旋场。

7、边值关系和唯一性定理

电场强度：介质界面切向电场强度连续

电位移矢量;介质界面有$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D_2}-\mathbf{D_1})=\sigma_{e0}$。又（$\mathbf{E_2}-\mathbf{E_1}$）$\cdot\mathbf{n}=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$。如果电介质是线性各向同性介质，那么$\frac{E_{n2}}{E_{n1}}=\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$。一般情况下，$\sigma_{e0}=0$，故$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D_2}-\mathbf{D_1})=0$，即电位移矢量法向方向连续。

电势：界面两侧电势连续。

静电场的唯一性定理：已知各导体电势或电量时，静电场唯一。

应用举例：（1）介质界面与电场线重合，极化面电

荷只可能存在于介质与导体的边界面上。

$\alpha\sum\iint \varepsilon_l \mathbf{E_0} d\mathbf{S_i} = Q_0$解域中只含有两个导体，带有等量异号电荷时$\alpha$相同。对具有一维对称性问题，$E\sum\varepsilon_i S_i = Q_0$。

（2）介质界面与等势面重合。$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$

8、电像法

原则为不能影响原边界条件

像电荷为共轭变换，半平面需要角度为$\frac{\pi}{n}$，否则需要使用角度变换，个数为 $2n-1$

三、静电能

1、真空中点电荷间的相互作用

把点电荷由无限远离状态即零势能态移到各自的制定位置时，外界必须克服静电力做功，该功就被定义为指定位置下点电荷间的相互作用能，简称点电荷系统的静电能。

$$W_{互} = \frac{1}{2}\sum q_i U_i$$

2、连续电荷分布的静电能

体电荷、面电荷可忽略自能，互能即为静电能。

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint \rho_e(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})dV$$

线电荷和点电荷自能发散，我们只关心互能。

对于线性无损耗介质，静电能等于宏观静电能以及极化能的和，即外界做功。其中，宏观静电能为自由电荷、极化电荷储存的能量和。

$$W_e = W_{e0} + W_{极}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint \rho_{e0}(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})dV$$

$$W_{极} = -\frac{1}{2}\iiint \acute{\rho}_e(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})dV$$

3、电荷体系在外电场中的静电能

电荷体系在外电场中的静电能属于相互作用能，不包括自能。

4、电场的能量与能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$$

$$W_e = \iiint w_e dV = \frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}dV$$

这里的静电能密度与静电能计入了介质极化能，它要求介质是线性无损耗的。

5、非线性介质及电滞损耗

对线性无损耗介质，电源做功全部转化为电容器的静电能；对非线性有损耗介质，电滞回线围成面积为电滞损耗热。

6，利用静电能求静电力

系统孤立：$\mathbf{F} = -(\nabla \mathbf{W}_e)_Q$

外界通过提供电荷做功，设外接电源使各导体电势恒定：$\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{W}_e)_U$

真空平行板电容器极板受力

$$F_x = -\frac{\sigma_e^2 S}{2\varepsilon_0}$$

力矩只需对θ求偏导

介质体系电容：$C = \frac{Q^2}{2W_e}$

在场的观点下，互能

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon_0(\boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E}_2)^2 dV$$

四、稳恒电流

1、稳恒条件

电流强度和电流密度：

$$\mathbf{j} = \frac{\Delta I}{\Delta \mathbf{S_0}}\mathbf{n}_0$$

$$\mathbf{I} = \iint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$$

如果导体中有 k 种载流子，电量为 q，数密度为 n，定向速度为 u，则$\mathbf{j} = \sum qnu$

电流连续方程：

$$\oiint_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{dq}{dt} = -\iiint_V \frac{\partial\rho_e}{\partial t}dV$$

$$\nabla\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial\rho_e}{\partial t} = 0$$

稳恒条件：

$$\oiint_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{j} = 0$$

2、欧姆定律

欧姆定律：

稳恒条件下

$$I = \frac{U}{R},\ G = \frac{1}{R}$$

对于横截面均匀的各向同性导体，且电流沿导体截面均匀分布，则

$$R = \int\frac{\rho dl}{S}$$

材料的电阻率与温度有关。纯金属电阻率在温度变化不大时，呈线性关系，即：

$$\rho = \rho_0（1 + \alpha t）$$

ρ_0是零摄氏度时的电阻率，大部分金属电阻α在 0.4%左右。因此电阻随温度变化的较精确关系式为：

$$R = R_0(1 + \alpha T - \beta T^2)$$

对于均匀材料，电阻为：

$$R = \rho\frac{l}{S},\ \sigma = \frac{1}{\rho}$$

关于电流密度，对于载有稳恒电流的各向同性导体：

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$$

由边值关系，导体界面出现电荷积累，电流密度法向分量不相等：

$$\mathbf{n}\cdot(\frac{\mathbf{j_2}}{\sigma_2} - \frac{\mathbf{j_1}}{\sigma_1}) = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$$

若电流和面积相等

$$\sigma_e = \frac{\varepsilon_0 I}{S}\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}$$

对于单一材料，电荷不可能在交界面堆积，否则电流不稳恒。在导线与真空的交界面上，电流密度只能在交界面上，没有法向分量。

焦耳定律：

$$P_e = UI$$

根据欧姆定律：

$$P = I^2R = \frac{U^2}{R}$$

电功率在纯电阻情况等于热功率，其他情况大于热功率。

$$p = \frac{P}{V}$$

$$p = \frac{j^2}{\sigma}$$

从经典电子论观点解释欧姆定律和焦耳定律：

金属中原子倾向于失去部分电子而成为正离子。全部正离子在金属中周期有序排列，形成所谓“晶体点阵”或“晶格”。脱离原子的电子称为自由电子，它们不再为某一特定的正离子所束缚，而是为全体正离子所共有。在无外电场或其他原因时，金属中的自由电子好像气体中的分子一样不停地做无规则热运动，朝任一方向运动的概率都一样，不会发生定向运动，因而$\mathbf{j} = 0$。当有外电场时，自由电子将受力而获得加速度。但是电子不会无限制地加速，而会与晶格碰撞发生散射，从而改变运动方向和速率，并将部分能量转移给晶格上的正离子，使其热振动加剧。

$$j = neu，\mathbf{j} = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}\mathbf{E}$$

欧姆定律的失效问题：

欧姆定律的微分形式在电流随时间变化时也成立，但是 **E** 随时间变化的周期应比平均自由时间大得多。

（1）电场很强时，电场施加速度与热运动速度相比拟，高速电子碰撞正离子使其进一步电离，使**j**与**E**非线性

（2）低气压下电离气体，平均自由程很长，电场施加速度很大

（3）晶体管、电子管等 I 与 U 也不是线性的

稳恒电场场强的切向分量连续，但电流密度的切向分量不连续，有：

$$\frac{j_{1t}}{j_{2t}}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$RC=\rho\varepsilon$$

如果讨论稳定过程，导体优先，如果讨论接瞬间，介质优先，如果讨论中间过程，则为瞬态过程。

3、电源及电动势

电源及其电动势：

在稳恒电路中，还有一种非静电本质的力作用于电荷。电源内部：

$$\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{K})$$

单位正电荷从负极经电源内部移到正极时非静电里所做的功为

$$\mathfrak{E}=\int_{-}^{+}\mathbf{K}\mathrm{d}\mathbf{l}$$

有些电源无法区分内部和外部，我们沿闭合回路对 **K** 积分。

常见的几种电源：

1、化学电池：伏打电池、丹聂尔电池

2、光电池：太阳能电池

3、温差发电机：

$$\mathfrak{E}=\alpha(T_1-T_2)$$

金属的温差电效应较小，常用于测量温度，半导体温差电效应较大，用来制造温差发电机

4、核能电池：能给负载提供恒定电流

5、直流发电机

路端电压、电动势和全电路欧姆定律

$$U=\int_{+}^{-}\mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{l}=\mathfrak{E}-I\int_{-}^{+}\frac{\rho}{S}\mathrm{d}\mathbf{l}=\mathfrak{E}-Ir$$

$$\mathfrak{E}=I(r+R)$$

稳恒电路特点

$$\nabla\cdot(\sigma\mathbf{E})=0$$

如果导体均匀

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$$

稳恒电流下，均匀导体内部宏观电荷密度等于零，净电荷只分布在导体表面以及导体内的非均匀部分。外电路中电流线与电力线方向一致，且在导体表面附近平行于导体表面。在电源内部，电流方向由推广欧姆定律决定。

稳恒电路中静电场的作用

（1）调节电荷分布

（2）静电场起着能量中转的作用

4、基尔霍夫定律

（1）第一定律：汇合于任一节点的各电流代数和为 0

（2）第二定律：电路中任一闭合回路的全部支路上的电压代数和为 0

基尔霍夫第一方程适用于电路的节点，也可以把它推广到电路的任一个假想封闭面。

基尔霍夫定律组使用范围：

（1）恒定电流

（2）似稳条件（即整个电路的尺度远小于电路工作频率下的电磁波波长）

（3）交流电路

电流叠加原理：在具有几个电动势的电路中，几个电动势共同在某一支路中引起的电流，等于每个电动势单独存在时在该支路上所产生的电流之和。

5、稳恒电流和静电场的综合求解

基本方程：

$$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l}=0$$

$$\oiint_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

$$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$$

基本方程的闭合性：

（1）载流导电介质中的稳恒电流和静电场分布规律取决于导电介质的导电性质

（2）载流导电介质的总电荷分布取决于导电介质的导电性质

（3）导电介质中的自由电荷和极化电荷所占份额取决于介电常量

与纯静电场问题类比：

综合求解问题	$\mathbf{j}$	E	I	σ	$\sigma\to\infty$（电极电场为 0）
纯静电场问题	D_i	E_i	Q_i	ε_i	$\varepsilon_i\to\infty$（导体电场为零）

五、真空中的静磁场

1，磁现象与磁场

磁的基本现象与磁的库仑定律：

$$\boldsymbol{F}=\frac{q_{m0}q_m}{4\pi\mu_0 r^3}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_{m0}}=\frac{q_m}{4\pi\mu_0 r^3}\boldsymbol{r}$$

奥斯特实验——电流磁效应

磁感应强度：

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

安培力公式与洛伦兹力公式：

$$d\boldsymbol{F}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}dV$$

$$d\boldsymbol{F}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{B}dS$$

$$d\boldsymbol{F}=Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

2,毕奥-萨伐尔定律

毕奥-萨伐尔定律：

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\boldsymbol{B}=\oint d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iint\frac{\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{r}}{r^3}dS$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}}{r^3}dV$$

毕奥-萨伐尔定律应用举例：

无穷长直导线：

$$B=\frac{\mu_0 I}{\mathbf{2}\pi r_0}$$

载流圆线圈：

$$\begin{cases} B_x=\dfrac{\mu_0 IRr_0\cos\theta}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos\varphi d\varphi}{\left(r_0^2+R^2-2Rr_0\sin\theta\cos\varphi\right)^{3/2}} \\ B_y=0 \\ B_z=\dfrac{\mu_0 IR}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{(R-r_0\sin\theta\cos\varphi)d\varphi}{\left(r_0^2+R^2-2Rr_0\sin\theta\cos\varphi\right)^{3/2}} \end{cases}$$

在 z 轴，

$$B_z=\frac{\mu_0 IR^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}}$$

在远离圆线圈处，

$$\boldsymbol{B}=\frac{3\mu_0\boldsymbol{r_0}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r_0})-\mu_0 r_0^2\boldsymbol{m}}{4\pi r_0^5}$$

$$\boldsymbol{m}=I\pi R^2\hat{\boldsymbol{z}}=I\boldsymbol{S}$$

对于任意形状的非平面线圈电流，

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\oint\boldsymbol{R}\times d\boldsymbol{R}$$

螺线管中轴线：

$$B_z=\frac{n\mu_0 I}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$$

有限长直线电流：

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$$

3，安培定律

$$d\boldsymbol{F_{12}}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 d\boldsymbol{l_2}\times(d\boldsymbol{l_1}\times\boldsymbol{r_{12}})}{4\pi r_{12}^3}$$

安培定律：上式不满足牛顿第三定律，但积分满足

安培力及其应用:

$$d\boldsymbol{F_{12}}=I_2 d\boldsymbol{l_2}\times d\boldsymbol{B_{12}}$$

4，静磁场的基本定理

磁场的高斯定理：

$$\oiint\boldsymbol{B}d\boldsymbol{S}=0$$

安培环路定理：

$$\oint\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0\sum I$$

两条定理与毕奥-萨伐尔定理的关系：

高斯定理反映了磁场的无源性，环路定理反应了磁场的有旋性。对于随时间变化的磁场，麦克斯韦假定高斯定理仍然成立，但安培环路定理应该予以修正。

安培环路定理的应用：

无限长直圆柱导线：

$$B=\begin{cases}\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}\hat{r}, r<R\\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{r}, r\geq R\end{cases}$$
无限长螺线管：
$$B=\begin{cases}\mu_0 nI\hat{z}, r<R\\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{r}, r\geq R\end{cases}$$
无穷大平面导体薄板：
$$B(x)=\frac{\mu_0 i}{2}$$
螺绕环管内：
$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$
无限长直导线对有限长导线作用力：
$$F=\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d}$$
磁矢势：
$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{I\boldsymbol{dl}}{R}$$
$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$
$$\iint \boldsymbol{BdS}=\oint \boldsymbol{Adl}$$
$$\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{C^2}$$
亥姆霍兹线圈：线圈之间距离正好等于圆形线圈的平均半径时，磁场均匀。

5，带电粒子在磁场中的运动
运动特征：
$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}=0$$
对均匀磁场：
$$\begin{cases}v_x=v_\perp cos(\omega t+\varphi)\\ v_y=-v_\perp sin(\omega t+\varphi)\end{cases}$$
$$\omega=\frac{qB}{m}$$
$$\begin{cases}x=x_0+Rsin(\omega t+\varphi)\\ y=y_0+Rcos(\omega t+\varphi)\end{cases}$$
$$R=\frac{mv_\perp}{qB}$$
各种场中的漂移速度：
$$\boldsymbol{v_F}=\frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{B}}{qB^2}$$
对非均匀磁场，只要磁场的非均匀尺度远大于带电粒子的回旋半径，则粒子的运动可近似看成是绕磁力线的螺旋运动。
非均匀磁场中：
$$B_r=-\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$
第一绝热不变量为粒子的回旋磁矩：
$$\mu=\frac{mv_\perp^2}{2B}$$
对于任意随空间、时间缓慢变化的磁场，运动带电粒子的磁矩近似守恒。
第二绝热不变量为磁通量：
$$\Phi=2\pi\frac{m}{q^2}\mu$$
应用举例：
1，速度选择器
2，磁聚焦
3，质谱仪
4，回旋加速器（同步回旋加速器）
5，磁境装置
$$sin^2\theta_m=\frac{B_0}{B_m}=\frac{1}{R_{mi}}$$
6，托卡马克受控核聚变装置
宏观效应：
1，安培力：
$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$$
2，霍尔效应：
$$U=\frac{1}{nq}\frac{\mathbf{B}\times\mathbf{I}}{d}$$

六、静磁场中的磁介质
1，磁场对电流的作用
磁场对电流的力和力矩：
$$\mathbf{B}=\mathbf{B_t}-\mathbf{B_1}$$
体电流元在其附近产生的磁感应强度为零；面电流元在其两侧产生的磁感应强度存在间断，大小为$\frac{\mu_0 i}{2}$。
电流受力和力矩的计算举例：
两无限长直导线，其一单位长度受力：
$$F=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$
载流线圈：
$$\mathbf{F}=(\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$
$$\mathbf{L}=\mathbf{m}\times\mathbf{B}$$
无穷长螺线管单位表面受力：
$$F=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$$

2，磁介质及其磁化强度 M
磁化强度：
$$\mathbf{M}=\frac{\sum\mathbf{m}}{\Delta V}$$
磁化电流：
$$\boldsymbol{m_a}=\frac{\sum\mathbf{m}}{n\Delta V}$$
$$\mathbf{M}=n\boldsymbol{m_a}$$
$$\boldsymbol{m_a}=I_a\boldsymbol{S_a}$$
$$\oint\mathbf{Mdl}=\sum I`$$
$$\mathbf{i`}=\mathbf{M}\times\mathbf{n}$$
均匀磁化球
$$i`=M\sin\theta$$
$$B=\begin{cases}\frac{2\mu_0 Ma^3}{3|z|^3}, z>a\\ \frac{2\mu_0 M}{3}, z<a\end{cases}$$

3，磁介质中的静磁场的基本定理
$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M}$$
$$\oint\mathbf{Hdl}=\sum I_0$$

4，介质的磁化规律
介质按磁化规律的分类：
对线性各向同性介质
$$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\mu H}$$
$$\mu=\mu_0(1+\chi_m)$$
顺磁质和抗磁质：这两种磁化率绝对值都很小，属于弱磁性介质。一般抗磁质的磁化率不随温度变化而改变，一般顺磁质磁化率遵从居里温度：
$$\chi_m=\frac{C}{T}$$
对各向异性磁介质，相应的磁化率和磁导率均为张量。
铁磁质：磁滞回线（剩余磁化强度、矫顽力），硬磁材料和软磁材料具有强磁性。温度高于居里点时转变为顺磁质，磁导率遵从居里-外斯定律
$$\chi_m=\frac{C}{T-T_c}$$
亚铁磁质属于强磁质，反铁磁质在奈尔温度前表现为反铁磁性，之后表现为顺磁性。
介质磁化的微观机制：
顺磁质：分子具有磁矩。
抗磁质：分子固有磁矩为零，电子轨道运动受外磁场影响产生附加轨道磁矩。
铁磁质、亚铁磁质、反铁磁质：磁畴

5，边值关系和唯一性定理
磁场在磁介质界面上的边值关系：
$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B_2}-\mathbf{B_1})=0$$
$$\mathbf{i`}=\mathbf{n}\times(\mathbf{M_2}-\mathbf{M_1})$$
$$\boldsymbol{i_0}=\boldsymbol{n}\times(\mathbf{H_2}-\mathbf{H_1})$$
如果$\boldsymbol{i_0}=\mathbf{0}$
$$\frac{tan\theta_1}{tan\theta_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$$
静磁场的唯一性定理
分区均匀线性各向异性介质中的静磁场：
介质界面与磁感应线重合：
$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B_0}}{\mu_0}$$
$$\oint\mathbf{B_0dl}=\mu_0\sum I_0$$
介质界面与磁感应线垂直：
$$\mathbf{B}=\alpha\mathbf{B_0}$$
$$\oint\frac{\mathbf{B}}{\mu}\boldsymbol{dl}=\sum I_0, \alpha=\frac{\sum I_0}{\oint\frac{\mathbf{B_0}}{\mu}\boldsymbol{dl}}$$

6，磁像法
介质界面为无限平面：
$$\begin{cases}j`_x=-\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}j_x\\ j`_y=-\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}j_y\\ j`_z=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}j_z\end{cases}$$
$$\begin{cases}j``_x=-j`_x\\ j``_y=-j`_y\\ j``_z=j`_z\end{cases}$$
介质界面为无穷长圆柱面：
$$I`=\frac{\mu_2(\mu_1-\mu_2)}{\mu_0(\mu_1+\mu_2)}I$$
$$I`_0=-I`$$
$$xd=R^2$$

7,磁路定理及其应用
磁路定理的基本方程：
$$\oint\mathbf{Hdl}=\sum I_0=\mathfrak{E}_m$$

$$R_m=\oint\frac{dl}{\mu S}$$
$$U_m=\Phi R_m$$

8，磁荷法

磁荷观点下的静磁场规律：

1，真空中静磁场的高斯定理和环路定理：

$$\oiint \boldsymbol{H}d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\sum q_m$$
$$\oint \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l}=0$$
$$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_m$$

2，磁偶极子：

$$p_m=q_m l$$
$$\boldsymbol{H}=\frac{3(\boldsymbol{p_m}\cdot\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}-r^2\boldsymbol{p_m}}{4\pi\mu_0 r^5}$$
$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{p_m}\times\boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{p_m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{p_m}\cdot\boldsymbol{H})]_{p_m}$$
$$\boldsymbol{H}\leftrightarrow\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}，\boldsymbol{p_m}\leftrightarrow\mu_0\boldsymbol{m}$$

3，磁介质的“磁极化”规律

$$\boldsymbol{J}=\frac{\sum\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{m}分子}}{\Delta V}$$
$$\oiint \boldsymbol{J}d\boldsymbol{S}=-\sum q`_m$$
$$\sigma`_m=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}$$
$$\boldsymbol{J}=\chi_m\mu_0\boldsymbol{H}$$

4，磁介质中静磁场的高斯定理

$$\mathbf{B}=\mu_0\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J}$$
$$\oiint \boldsymbol{B}d\boldsymbol{S}=0$$
$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$
$$\mu=\mu_0(1+\chi_m)$$

磁荷法和电流法的等效性：

$$\boldsymbol{J}=\mu_0\boldsymbol{M}$$
$$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}$$
$$\oint \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l}=\sum I_0$$

磁荷法的应用

精磁量	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{J}$	q_m	σ_m	$\boldsymbol{p_m}$	μ_0	μ	χ_m
静电量	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{P}$	Q	σ_e	$\boldsymbol{p}$	ε_0	ε	χ_e

平行磁极受力

$$F_m=-\frac{\sigma_m^2 S}{2\mu_0}=-\frac{1}{2}\mu_0 M^2 S$$

七、电磁感应

1，电磁感应定律

法拉第电磁感应定律：

$$\mathfrak{E}=-\frac{d\Psi}{dt}$$

楞次定律：感应电流的效果总是反抗引起感应电流的原因。

电磁感应定律和磁场的高斯定理：

随时间变化的磁场也满足高斯定理。

2，动生电动势和感生电动势

动生电动势：

$$\mathfrak{E}=\oint(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

感生电动势：

$$\mathfrak{E}=-\iint\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$\mathfrak{E}=\oint\boldsymbol{E}_{旋}\cdot\boldsymbol{dl}$$
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{势}+\boldsymbol{E}_{旋}$$
$$\oint\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dl}=-\iint\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

电子感应加速器：

$$B_R=\frac{1}{2}\overline{B}$$

3，互感和自感

互感现象和互感系数：

$$\mathfrak{E}_1=-M\frac{dI_2}{dt}$$

两螺线管密绕：

$$M=\frac{\mu_0N_1N_2S}{l}$$

同心共面单匝线圈互感：

$$M=\frac{\mu_0\pi r^2}{2R}$$

自感现象和自感系数：

$$\mathfrak{E}=-L\frac{dI}{dt}$$

螺线圈自感：

$$L=\frac{\mu_0N^2S}{l}$$

高频近似下同轴电缆：

$$L=\frac{\mu_0}{2\pi}ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

对高频交流电，电流大体分布在导线表面，导线内部磁场近似为零

两线圈的串联和互联：

1，同名端和异名端：

$$\mathfrak{E}_1=-\left(L_1\frac{dI_1}{dt}\pm M\frac{dI_2}{dt}\right)$$

2，两线圈的串联：

顺接：

$$L=L_1+L_2+2M$$

反接：

$$L=L_1+L_2-2M$$
$$M\le\frac{1}{2}(L_1+L_2)$$

3，两线圈的并联：

同名端：

$$L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

异名端：

$$L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}$$
$$M\le\sqrt{L_1L_2}$$
$$M=k\sqrt{L_1L_2}$$

4，似稳电路和暂态过程

似稳条件：

$$\frac{l}{c}\ll\frac{1}{f}$$

似稳电路方程：

电容相当于$-\frac{q}{C}$的电源，电感相当于e_i的电源。

暂态过程：

电容的电压不能瞬间突变，电感的电流不能瞬间突变。

1，R-L 电路

充电：

$$iR+L\frac{di}{dt}=\mathfrak{E}$$
$$i=I_0\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right),I_0=\frac{\mathfrak{E}}{R}$$

放电：

$$iR+L\frac{di}{dt}=0$$
$$i=I_0e^{-\frac{R}{L}t}$$
$$\tau_L=\frac{L}{R}$$

2，R-C 电路

充电：

$$iR+\frac{q}{C}=\mathfrak{E}$$
$$q=q_0\left(1-e^{-\frac{1}{\tau_C}t}\right),q_0=C\mathfrak{E}$$
$$i=I_0e^{-\frac{1}{\tau_C}t},I_0=\frac{\mathfrak{E}}{R}$$

放电：

$$iR+\frac{q}{C}=0$$
$$q=q_0e^{-\frac{1}{\tau_C}t}$$
$$i=-I_0e^{-\frac{1}{\tau_C}t}$$

3，R-L-C 电路

充电：

$$iR+\frac{q}{C}+L\frac{di}{dt}=\mathfrak{E}$$
$$\beta=\frac{R}{2L},\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},q_0=C\mathfrak{E}$$

（1）欠阻尼（$\beta<\omega_0$）

$$q=q_0-q_0e^{-\beta t}\left(cos\omega t+\frac{\beta}{\omega}sin\omega t\right)$$
$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

（2）过阻尼（$\beta>\omega_0$）

$$q=q_0-\frac{1}{2\gamma}q_0e^{-\beta t}[(\beta+\gamma)e^{\gamma t}-(\beta-\gamma)e^{-\gamma t}]$$
$$\gamma=\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$$

（3）临界阻尼（$\beta=\omega_0$）

$$q=q_0-q_0(1+\beta t)e^{-\beta t}$$

放电：

$$q`=q_0-q$$

八、磁能

1，载流线圈的磁能

一个载流线圈的磁能：

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}I\Phi_m$$

N 个载流线圈的磁能：

$$W_m=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{N}M_{ik}I_iI_k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}I_i\Phi_i$$

2，载流线圈在外磁场中的磁能

$$W_m=\sum_{k=1}^{N}I_k\iint\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

当外场均匀或非均匀磁场中的小载流线圈：

$$W_m=\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{B}I_k\boldsymbol{S}_k=\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{B}\boldsymbol{m}_k$$

3，磁场的能量和磁能密度

$$\omega_m=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$$

4，非线性介质及磁性损耗

宏观磁化能密度：

$$\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{H^2}$$

磁化能密度：

$$\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{H}$$

5，利用磁能求磁力

$$F=(\nabla W_m)_I$$
$$F=-(\nabla W_m)_\Phi$$
$$L_\theta=\left(\frac{\partial W_m}{\partial\theta}\right)_I$$
$$L_\theta=-\left(\frac{\partial W_m}{\partial\theta}\right)_\Phi$$

固有磁矩：

$$F=-(\nabla W`_m)_{\boldsymbol{m}}$$
$$L_\theta=-\left(\frac{\partial W`_m}{\partial\theta}\right)_{\boldsymbol{m}}$$

九、交流电路

1，基本概念和描述方法

基本概念：

似稳判据：

$$l\ll\lambda$$

描述方法：

函数描述

矢量描述,可以实现同频率简谐量叠加

复数描述;

$$\widetilde{A}=Ae^{j(\omega t+\varphi)}$$
$$\widetilde{A}=\sqrt{2}\dot{A}e^{j\omega t}$$
$$\dot{A}=Ae^{j\varphi}$$

2，交流电路的复数解法

交流电路的基本方程：

$$e=iR+\frac{1}{C}\int idt+L\frac{di}{dt}+M\frac{di`}{dt}$$

电路方程的复数形式：

$$\widetilde{\mathfrak{E}}=R\tilde{I}+\frac{1}{j\omega C}\tilde{I}+j\omega L\tilde{I}+j\omega M\tilde{I}`$$
$$\dot{\mathfrak{E}}=R\dot{I}+\frac{1}{j\omega C}\dot{I}+j\omega L\dot{I}+j\omega M\dot{I}`$$

交流电路元件的复阻抗：

元件	电阻	电容	自感	互感
复阻抗$\dot{Z}$	R	$1/j\omega C$	$j\omega L$	$j\omega M$
阻抗Z	R	$1/\omega C$	ωL	ωM
幅角φ	0	-π/2	π/2	π/2

3,交流电的功率

瞬时功率：

$$p(t)=u(t)i(t)$$

平均功率：

$$\bar{p}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$
$$P=VIcos\varphi$$

视在功率和功率因素：

$$S=VI$$

由电压和电流复有效值计算平均功率

$$P=\frac{1}{2}\left(\dot{V}\dot{I}^*+\dot{V}^*\dot{I}\right)$$

4,交流电路分析举例

串联谐振电路：

当

$$\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{CL}}$$

时，电流取最大值，阻抗取最小值。

当$\omega<\omega_0$，电路呈电容性；当$\omega>\omega_0$，电路呈电感性；当$\omega=\omega_0$，电路呈纯电阻性。

品质系数

$$\mathrm{Q}=\frac{1}{\mathrm{R}\omega_0 C}=\frac{\omega_0 L}{\mathrm{R}}=\frac{1}{\mathrm{R}}\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}}$$

取$I=I_{max}/\sqrt{2}$,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{1}{2Q},2\Delta f=\frac{f_0}{Q}$$
$$Q=2\pi\frac{\frac{1}{2}LI^2+\frac{1}{2}CV^2}{I^2RT}$$

并联谐振电路：

$$\omega_c=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{Q^2}}$$

通常 Q≫1，以至于$\omega_c\approx\omega_c`\approx\omega_0$，近似取$\omega_c=\omega_0$，有

$$\mathrm{Z}=\mathrm{Q}^2\mathrm{R}$$

变压器电路：

反射阻抗：

$$\dot{Z}`=\frac{N_1^2}{N_2^2}\dot{Z}$$

十、麦克斯韦电磁理论

1，麦克斯韦方程组

静电场基本定理：

$$\oiint\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\sum q_0$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}=\rho_{e0}$$
$$\oint\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0$$
$$\nabla\times\mathbf{E}=0$$

静磁场基本定理：

$$\oiint\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0$$
$$\oint\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\sum I_0$$
$$\nabla\times H=\boldsymbol{j_0}$$

电荷守恒方程：

$$\oiint\boldsymbol{j_0}\cdot d\boldsymbol{S}+\frac{dq_0}{dt}=0$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{j_0}+\frac{\partial\rho_0}{\partial t}=0$$

稳恒条件：

$$\oiint\boldsymbol{j_0}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{j_0}=0$$

两个大胆推广：

高斯定理对于随时间变化的场成立。

两个重要的推广：

1，涡旋电场假设

$$\mathfrak{E}=\oint\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}d\boldsymbol{S}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

2，位移电流假设

$$\oint\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint\left(\boldsymbol{j_0}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)d\boldsymbol{S}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j_0}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

麦克斯韦方程组：

$$\oiint\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\sum q_0$$
$$\oint\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}d\boldsymbol{S}$$
$$\oiint\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$
$$\oint\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint\left(\boldsymbol{j_0}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)d\boldsymbol{S}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}=\rho_{e0}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j_0}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

各向同性介质电磁性能方程：

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon E}$$
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\mu H}$$
$$\boldsymbol{j_0}=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})$$

边值关系：

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D_2}-\mathbf{D_1})=\sigma_0$$
$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E_2}-\mathbf{E_1})=0$$
$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B_2}-\mathbf{B_1})=0$$
$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H_2}-\mathbf{H_1})=\boldsymbol{i_0}$$

2，平面电磁波

平面电磁波产生机制：

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 E}{\partial z^2},c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$
$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\boldsymbol{E}$$
$$\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\boldsymbol{H}$$

平面电磁波的性质：

$$\mathbf{E}=\mathbf{E_0}\boldsymbol{e}^{-i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$$
$$\mathbf{H}=\mathbf{H_0}\boldsymbol{e}^{-i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$$

则

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$
$$\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{E_0}=\sqrt{\mu}\boldsymbol{H_0}$$
$$v=\frac{c}{n},n=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$$

3，电磁场的能量、动量和角动量

电磁场的能量、动量和角动量：

$$\omega=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}$$
$$\frac{d}{dt}(W+W_n)=-\oiint\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{A}$$

平面电磁波的能量和动量：

$$\omega = \varepsilon E^2 = \mu H^2$$
$$\boldsymbol{S} = \omega \boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{v^2}\boldsymbol{S}$$
$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$
$$\overline{\boldsymbol{S}} = \omega \boldsymbol{v}$$
$$\overline{\boldsymbol{g}} = \frac{1}{v^2}\overline{\boldsymbol{S}}$$
$$W = h\nu, \boldsymbol{p} = \frac{h}{2\pi}\boldsymbol{k}$$

光压：

$$p = (1 + R)\omega$$
$$\overline{p} = (1 + R)\overline{\omega}$$

另记

1,汤姆孙定理：导体在达到静电平衡时，电荷分布使电场能量最小。

2,$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-x}t^{x-1}dt=(x-1)\Gamma(x-1)$

3,$\oint Adl=\iint \nabla\times AdS$

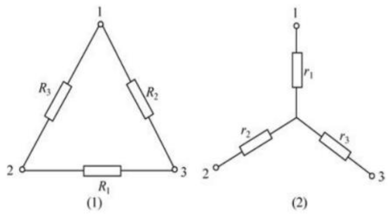
4,$\oiint AdS=\iiint \nabla\cdot AdV$

5,$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}=\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}$

6, $\vec{A}\cdot\vec{B}=\sum A_i B_i$

7, $\vec{A}\times\vec{B}=\sum \varepsilon_{\mathrm{ijk}} A_j B_k \vec{e}_i$

8,



$$r_1=\frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}$$

9, 电荷是球对称分布时，在这电荷外面任一点的电场强度，等于把这电荷都集中到球心时所产生的电场强度。两个球对称分布电荷之间的相五作用力等于两个电荷各自集中到球心(成为两个点电荷)时的相互作用力

静电场　电荷守恒

库仑定律 $\vec F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_0}{r^2}\hat r$

叠加原理

电场强度 $\vec E=\frac{\vec F}{q_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat r$

高斯定理 $\Phi=\iint_S \vec E\cdot d\vec S$　$\oint_S \vec E\cdot d\vec S=\frac{1}{\varepsilon_0}Q$

环路定理 $\oint_L \vec E\cdot d\vec l=0$

电势 $W_p=q_0\int_p^\infty \vec E\cdot d\vec l$　$U_p=-\int_\infty^p \vec E\cdot d\vec l$　$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$

电场对电荷系统 $\vec E=\vec E_e-\vec E_i$ 体略面计 点线无为

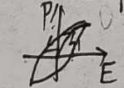
导体和电介质　导体 $\vec E=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$

电介质　位移极化、取向极化

极化强度矢量 $\vec P=\frac{\sum\vec p}{\Delta V}$　$Q'=-\oint_S\vec P\cdot d\vec S$　$\rho_e'=-\nabla\cdot\vec P$　$\sigma_e'=(\vec P_1-\vec P_2)\cdot\vec n$

线性无损　各向同性 $\vec P=\chi_e\varepsilon_0\vec E$　$\varepsilon_r=1+\chi_e$　$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$　$C=\varepsilon_r C_0$

各向异性 $\vec P=\overset{\leftrightarrow}{\chi}_e\varepsilon_0\vec E$

铁电体 

压电体

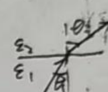
永电体、驻电体

电容和电容器 $C=\frac{Q}{U}=\frac{Q^2}{2W_e}$　串倒并加

电介质中静电场基本定理：$\vec D=\varepsilon_0\vec E+\vec P$　$\nabla\cdot\vec D=\rho_{e0}$

线性各向同性：$\vec D=\varepsilon\vec E$

边值关系　$\vec n\times(\vec E_2-\vec E_1)=0$　$\vec n\cdot(\vec D_2-\vec D_1)=\sigma_{e0}$　$\vec n\cdot(\vec E_2-\vec E_1)=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$



$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

(各向同性)

(界面无电)

唯一性定理　导体电势/电量

电像法　共轭像

应用：电场线与界面重合 $\oint_{S_i}\varepsilon_i\vec E\cdot d\vec S=Q_0$

电场线与界面垂直 $\vec D=\varepsilon_0\vec E_0$

静电能　真空中点电荷 $W_互=\frac12\sum q_i U_i$　U_i/q_i

连续电荷分布 $W_e=\frac12\iiint_V\rho_e(\vec r)U(\vec r)dV$　$W_e=\frac12\iint_S\sigma_e(\vec r)U(\vec r)dS$

多个带电体：$W_e=W_自+W_互$

线电荷：$W_互=\frac12\sum_i\int_{L_i}\lambda_e(l)U_i(l)dl$　U_i/q_i

带电导体：$W_e=\frac12\sum q_iU_i$

线性无损耗：$W_{e0}=\frac12\iiint_{V_0}(\rho_{e0}(\vec r)+\rho_e'(\vec r))U(\vec r)dV$

$W_e=W_{e0}+W_{极}$

$W_e=\frac12\iiint_{V_0}\rho_{e0}(\vec r)U(\vec r)dV$

$W_{极}=-\frac12\iiint_V\rho_e'(\vec r)U(\vec r)dV$

电荷体系在外电场中静电能 $W_{互}=\iiint_V \rho_e(\vec r)\,U(\vec r)\,dV$ $W_{互}\to W_e$

电场的能量与能量密度 $W_e=\iiint_V w_e\,dV$

各向同性：$w_e=\frac{1}{2}\vec D\cdot\vec E$ $W_{e0}=\frac{1}{2}\iiint_V \varepsilon_0 E^2 dV$ $W_{极}=\frac{1}{2}\iiint \vec P\cdot\vec E\,dV$

$W_{互}=\frac{1}{2}\iiint \varepsilon_0(\vec E_1+\vec E_2)^2 dV$

非线性介质及电滞损耗 热能

利用静电能求静电力 $\vec F=-(\nabla W_e)_Q=(\nabla W_e)_U$ $L_\theta=-\left(\frac{\partial W_e}{\partial\theta}\right)_Q=\left(\frac{\partial W_e}{\partial\theta}\right)_U$

稳恒电流 稳恒条件 $\vec j=\frac{\Delta I}{\Delta S}\vec n$ $I=\iint_S \vec j\,d\vec S$

电流连续方程 $\oint_S \vec j\cdot d\vec S=-\frac{dq}{dt}=-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho_e dV=-\iiint_V \frac{\partial\rho_e}{\partial t}dV$

稳恒条件：$\oint_S \vec j\,d\vec S=0$ $\nabla\cdot\vec j=0$

欧姆定律 $I=\frac{U}{R}$ $G=\frac{1}{R}$ $R=\int\frac{\rho\,dl}{S}$ $\sigma=\frac{1}{\rho}$ $\vec j=\sigma\vec E$（各向同性）

$P_e=UI$ $P=I^2R=\frac{U^2}{R}$ $p=\frac{P}{V}=\frac{j^2}{\sigma}$

$\vec j=-ne\vec u$ $\vec j=\frac{ne^2\tau}{2m}\vec E$

电源和电动势 $\vec j=\sigma(\vec E+\vec K)$ $\mathcal{E}=\int_-^+\vec K\,d\vec l$ $\mathcal{E}=I(r+R)$

稳恒电路 $\nabla\cdot(\sigma\vec E)=0$

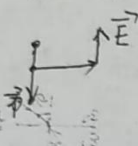
基尔霍夫定律

稳恒电流和静电场综合求解 $\begin{cases}\oint_S \vec j\,d\vec S=I & \oint_L \vec E\,d\vec l=0 \quad \vec j=\sigma\vec E\end{cases}$ $RC=\rho\varepsilon$

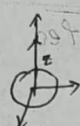
基尔霍夫定律

稳恒电流和静电场综合求解 $\oint_S \vec j\,d\vec S=I$ $\oint_L \vec E\,d\vec l=0$ $\vec j=\sigma\vec E$ $RC=\rho\varepsilon$

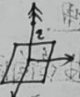
$\oint_S \vec D_i\,d\vec S=Q_i$ $\oint_L \vec E\,d\vec l=0$ $\vec D_i=\varepsilon_i\vec E_i$



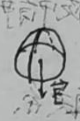
$\vec E=-\frac{\vec p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$



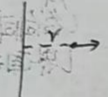
$\vec E=\frac{\eta_e R z}{2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\hat z$



$\vec E=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\hat z$

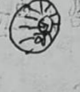


$\vec E=-\frac{P}{3\varepsilon_0}\hat z$

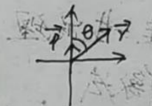


$\vec E=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat r$

$\vec E=\begin{cases}\frac{\rho_e r}{3\varepsilon_0}\hat r, & r<R\\ \frac{R^3\rho_e}{3\varepsilon_0 r^2}\hat r, & r>R\end{cases}$

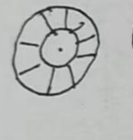


$\vec E=\frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\vec a$

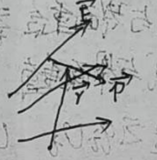


$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}$

$\vec E=-\frac{\vec p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\frac{3(\vec p\cdot\vec r)\vec r}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$



$U=\begin{cases}\frac{\rho_e(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r}, & r>R_2\\ \frac{\rho_e}{6\varepsilon_0}\left(3R_2^2-\frac{2R_1^3}{r}-r^2\right), & R_1\le r\le R_2\\ \frac{\rho_e(R_2^2-R_1^2)}{2\varepsilon_0}, & r\le R_1\end{cases}$



$\vec F=(\vec p\cdot\nabla)\vec E$

$\vec L=\vec p\times\vec E$

$W_e=-\vec p\cdot\vec E$

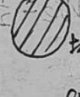
$C=4\pi\varepsilon_0 R$

$C=\frac{\varepsilon S}{d}$

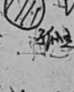
$C=\frac{4\pi\varepsilon R_A R_B}{R_B-R_A}$

$C=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(R_B/R_A)}$

$\sigma_e'=P\cos\theta$

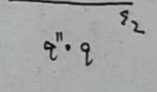


均匀 $W_e=\frac{3}{5}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)$



$W_e=\frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)$

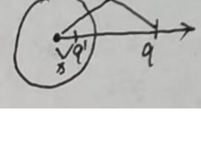
$\int_0^\infty x^n e^{-bx}dx=\frac{n!}{b^{n+1}}$ $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt=(x-1)\Gamma(x-1)$ $\Gamma(n)=(n-1)!$



$q'=q''=q\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$

柱：$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat\phi+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat z$，$\nabla\cdot\vec A=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

球：$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat r+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat\phi$，$\nabla\cdot\vec A=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$



$xd=R^2$

$\frac{q'}{x}=-\frac{q}{R}$