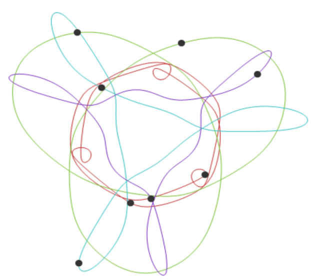
(USTC) 微分方程引论习题课讲义

2022 秋 (宁班)

作者：黄天一, 陈禹汐

时间：January 14, 2023

版本：4.3



All the other laws since discovered are nothing else; they are in sum, differential equations.

——Henri Poincaré

目录

第 1 章 第一次习题课 (by 黄天一)

1.1 习题讲解 (作业题 & 补充题)

作业 1.1 (14-2(2)(4)(5))

验证下列函数分别是所示函数的解:

1. 函数: $x = Ce^{\int p(t)dt}$, 方程: $\dfrac{dx}{dt} = p(t)x$.
2. 函数: $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$, 方程: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$.
3. 函数: $x = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ t^{\frac{3}{2}}, & t > 0, \end{cases}$ 方程: $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}$.

解

1. 直接计算可得 $x'(t) = p(t) \cdot Ce^{\int p(t)dt} = p(t)x$.
2. 直接计算可得
$$x'(t) = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt), \quad x''(t) = -k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) = -k^2x.$$
3. 由于 $x(t)$ 在 $t = 0$ 的左右导数均为 0, 因此 $x(t)$ 可微, 且
$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \dfrac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}, & t > 0 \end{cases} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}.$$

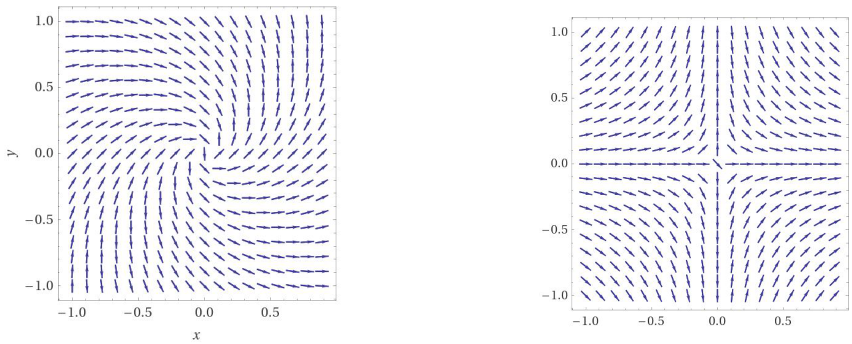
作业 1.2 (14-3(3)(4))

试作下列方程的方向场, 并画出原点附近的积分曲线.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$.
2. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$.

解

1. 对应的等倾线方程为 $\dfrac{x+y}{x-y} = k$, 即 $(k-1)x = (k+1)y$. 取对应的 k 值作出等倾线, 并绘制对应斜率的线素即可. 最后绘制近似的积分曲线.
2. 等倾线方程为 $y = -kx$, 其余同上.



(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ 的方向场　　(b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ 的方向场

作业 1.3 (14-7)

一高温物体在 20°C 的恒温介质中冷却,设在冷却过程中降温速度随物体与介质的温差成正比,物体的初始速度为 u_0, 10 分钟以后的温度为 u_1, 求该物体在任意时刻 t 的温度 $u(t)$.

解 记 $T = 20°\mathrm{C}$, 设降温速度与温差的比例系数为 k, 则 $\frac{du}{dt} = k(u-T)$. $u = T$ 是一个特解, 但不符合题意. $u \neq T$ 时, 有

$$\frac{du}{u-T} = kdt \Rightarrow \int \frac{du}{u-T} = \int kdt \Rightarrow u = T + Ce^{kt}.$$

将 $u(0) = u_0, u(10) = u_1$ 代入上述通解可得

$$C = u_0 - 20, \quad k = -\frac{1}{10}\ln\frac{u_0-20}{u_1-20}.$$

因此物体在 t 时刻的温度为

$$u(t) = 20 + (u_0 - 20)\left(\frac{u_0-20}{u_1-20}\right)^{-\frac{t}{10}}.$$

作业 1.4 (14-8)

已知平面曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 (x, y) 的切线与坐标原点到这点的连线相交为定角 α, 求 $y(x)$ 适合的微分方程.

解 (x, y) 处的切线斜率为 $y'(x)$, 原点与其连线的斜率为 $\tan\theta = \frac{y}{x}$. 因此

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta \pm \alpha) = \frac{y\cos\alpha + x\sin\alpha}{x\cos\alpha - y\sin\alpha} \quad \text{or} \quad \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{x\cos\alpha + y\sin\alpha}.$$

笔记 我们来求解第一个方程, 这实际上是一个齐次 ODE. 作变换 $y = ux$ 可得

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - u\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\cot\alpha - u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x}.$$

令 $b = \cot\alpha$, 积分求得

$$\frac{ae^{b\arctan u}}{\sqrt{1+u^2}} = |x| \xrightarrow{u=y/x} \sqrt{x^2+y^2} = ae^{b\arctan\frac{y}{x}}.$$

在极坐标下, 通解曲线的方程即为 $\rho = ae^{b\theta}$. 实际上, 题干即为对数螺线的定义, 而 $\rho = ae^{b\theta}$ 即为对数螺线的一般方程.

作业 1.5 (14-9)

已知曲线的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标, 求该曲线适合的微分方程.

解 曲线在任一点 (x,y) 处的切线方程为 $Y-y=y'(x)(X-x)$, 纵截距为 $y-xy'(x)$, 故曲线适合的微分方程为 $xy'(x)=y-x$.

作业 1.6 (31-4)

求解 $t(x^2-1)dt+x(t^2-1)dx=0$.

解 首先 $t=\pm1, x=\pm1$ 都是方程特解. 若 $t\neq\pm1, x\neq\pm1$, 则方程化为

$$\frac{xdx}{x^2-1}=-\frac{tdt}{t^2-1}\Rightarrow\int\frac{xdx}{x^2-1}=-\int\frac{tdt}{t^2-1}.$$

求解上述积分并化简可得 $(x^2-1)(t^2-1)=C(C\neq0)$, 而特解即对应 $C=0$ 的情况.

作业 1.7 (31-8)

求解 $(3x-7t+7)dt+(7x-3t+3)dx=0$.

解 作变换 $\xi=x, \eta=t-1$, 方程化为 $(3\xi-7\eta)d\eta+(7\xi-3\eta)d\xi=0$. 再作变换 $\xi=u\eta$, 上述方程化为

$$\eta(3u-7)d\eta+\eta(7u-3)(ud\eta+\eta du)=0\Rightarrow\eta^2(7u-3)du+7\eta(u^2-1)d\eta=0.$$

若 $u^2=1$, 对应 $x=\pm(t-1)$, 验证可得这是原方程的解; 若 $\eta=0$, 对应 $t=1$, 验证可得这不是原方程的特解. 若 $u^2\neq1, \eta\neq0$, 则方程化为

$$\frac{7u-3}{u^2-1}du=-\frac{7d\eta}{\eta}.$$

由此求解整理可得

$$\frac{(u+1)^5(u-1)^2}{\eta^7}=C\Rightarrow(x+t-1)^5(x-t+1)^2=C(C\neq0).$$

上述特解 $x\pm(t-1)=0$ 即对应 $C=0$ 的情况.

作业 1.8 (31-9)

求解 $x^2+t^2\dfrac{dx}{dt}=tx\dfrac{dx}{dt}$.

解 首先 $x=0$ 是方程的一个特解. 若 $x\neq0$, 作变换 $x=ut$, 则 $dx=udt+tdu$, 代入化简可得

$$(u-1)\left(u+t\frac{du}{dt}\right)=u^2\Rightarrow(u-1)t\frac{du}{dt}=u\Rightarrow\frac{u-1}{u}du=\frac{dt}{t}\Rightarrow Ce^u=ut.$$

(C 为任一非零常数). 因此原方程通积分为 $x=Ce^{\frac{x}{t}}$, 特解即对应 $C=0$ 的情况.

作业 1.9 (32-30)

求方程 $t\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+t^2}\dfrac{dx}{dt}=0$ 的通积分, 并求过点 $(0,1)$ 的积分曲线.

解 整理方程可得

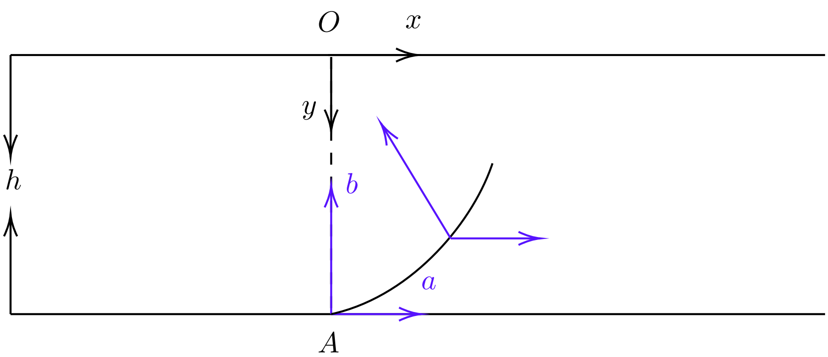
$$\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=0\Rightarrow d(\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+x^2})=0.$$

因此方程的通积分为 $\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+x^2}=C(C>2)$. 从而过点 $(0,1)$ 的积分曲线为

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+t^2}=\sqrt{2}+1.$$

作业 1.10 (附加 1-1)

设河边点 O 的正对岸为点 A, 河宽 $OA = h$, 两岸为平行直线, 水流速度为 a. 有一只鸭子由点 A 始终朝着点 O 游动, 其在静水中游速为 $b(b > a)$. 求鸭子游过的轨迹方程.



解 以点 O 为坐标原点, 按如图建立坐标系. 在轨迹上一点 (x, y) 处, 鸭子自身的速度朝向点 $O(0,0)$, 因此速度分量为

$$v_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}b, \quad v_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}b.$$

由此可得初值问题

$$\frac{dx}{dt} = a - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}b, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}b, \quad (x(0), y(0)) = (0, h).$$

视 y 为自变量, 则

$$\frac{dx}{dy} = \frac{bx - a\sqrt{x^2+y^2}}{by}, \quad x(h) = 0$$

作变换 $u = x/y$, 则上述方程整理化简为

$$y\frac{du}{dy} = -\frac{a}{b}\sqrt{1+u^2} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{a}{b}\frac{dy}{y}.$$

积分整理可得

$$x + \sqrt{x^2+y^2} = Cy^{1-\frac{a}{b}}.$$

由初值条件可得 $C = h^{\frac{a}{b}}$, 进一步整理即得

$$x = \frac{y}{2}\left[\left(\frac{h}{y}\right)^{\frac{a}{b}} - \left(\frac{h}{y}\right)^{-\frac{a}{b}}\right].$$

作业 1.11 (附加 1-2)

某湖泊的水量为 V, 每年排入湖泊内含污染物砷的污水量为 $\frac{V}{3}$, 流入湖泊内不含砷的水量为 $\frac{V}{2}$, 流出湖泊的水量为 $\frac{5V}{6}$. 已知 2021 年底湖中砷的含量为 $5m_0$, 超过国家标准 m_0. 为了治理污染, 从 2022 年初起, 限定排入湖泊中含污染物砷的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$. 假设湖水中砷的浓度是均匀的.

1. 第 t 年砷的最大含量 $m(t)$ 所满足的微分方程.
2. 至多要经过多少年才能使湖泊中砷的含量降至 m_0?

解 考虑从 t 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻, 其中 Δt 是微小量. 在 Δt 时间内, 流入砷的最大含量为

$$\frac{V}{3}\Delta t \cdot \frac{m_0}{V} = \frac{m_0}{3}\Delta t.$$

流出砷的含量为

$$\frac{5V}{6}\Delta t \cdot \frac{m(t)}{V} = \frac{5m(t)}{6}\Delta t.$$

因此成立

$$\frac{m(t+\Delta t)-m(t)}{\Delta t} = \frac{m_0}{3} - \frac{5m(t)}{6}.$$

令 $\Delta t \to 0$ 即得

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_0}{3} - \frac{5m}{6}.$$

这是一阶线性方程, 结合初值 $m(0) = 5m_0$ 求解可得

$$m(t) = \frac{2m_0}{5} + \frac{23m_0}{5}e^{-\frac{5t}{6}}.$$

令 $m(t) \leqslant m_0$ 即求得 $t \geqslant \frac{6}{5}\ln\frac{23}{3} \approx 2.44$, 因此至多要经过 2.44 年使湖泊中砷的含量降至 m_0(也可以向上取整为 3).

作业 1.12 (32-18)

求解 $t\dfrac{dx}{dt} + x = tx^2 \ln t$.

解 这是一个 Bernoulli 方程, $x \equiv 0$ 是方程的特解. 若 $x \neq 0$, 令 $y = 1/x$, 则

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{xt} - \ln t = \frac{y}{t} - \ln t.$$

求解该一阶线性方程可得通解为

$$y = \frac{t}{2}(C - \ln^2 t).$$

其中 C 为任意常数. 故原方程通解为

$$x = \frac{2}{t(C-\ln^2 t)}.$$

作业 1.13 (32-24)

求解 $(t-x^2)dt + 2txdx = 0$.

解 令 $y = x^2$, 则由方程可得 $(t-y)dt + tdy = 0$. 首先 $t \equiv 0$ 是方程的特解. 若 $t \neq 0$, 则方程乘以积分因子 t^{-2} 可得

$$\frac{dt}{t} + \frac{tdy - ydt}{t^2} = 0 \Rightarrow d\left(\ln|t| + \frac{y}{t}\right) = 0.$$

因此通积分为 $\ln|t| + \frac{y}{t} = C$, C 为任意常数. 整理可得原方程通积分为

$$x^2 = t(C - \ln|t|).$$

作业 1.14 (32-29)

考察函数 $x = 3t$, 并求解方程 $t\dfrac{dx}{dt} + x^2 - x = 9t^2$.

解 这是一个 Riccati 方程, 验证可得 $x = 3t$ 是方程的特解. 考虑 $y = x - 3t$, 代入题设方程并整理可得

$$t\frac{dy}{dt} + y^2 + (6t-1)y = 0.$$

特解 $y\equiv 0$ 即对应 $x=3t$. 若 $y\neq 0$, 令 $z=\frac{1}{y}$, 则有

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt}=\frac{6t-1}{ty}+\frac{1}{t}=\frac{6t-1}{t}z+\frac{1}{t}.$$

求解该一阶线性方程可得

$$z=\frac{Ce^{6t}-1}{6t}.$$

因此原方程的通解为

$$x=\frac{6t}{Ce^{6t}-1}+3t.$$

作业 1.15 (32-37)

已知方程 $\frac{dx}{dt}=kx+f(t)$ 中的 k 是不等于零的常数, $f(t)$ 是以 ω 为周期的周期函数. 试证它只有一个周期为 ω 的周期解, 并求出这个周期解.

证明 设 $x(t)$ 是题设方程的解, 断言: $x(t)$ 以 ω 为周期 $\Leftrightarrow x(\omega)=x(0)$.

该断言左推右是显然的. 反之, 设 $x(\omega)=x(0)$, 由于 $f(t)$ 以 ω 为周期, 故 $x(t+\omega)$ 也是题设方程的解, 从而 $y(t)\triangleq x(t+\omega)-x(t)$ 是对应齐次方程的解, 即 $y'(t)=ky$. 又因为 y 满足初值条件 $y(0)=x(\omega)-x(0)=0$, 故 $y\equiv 0$, 即 $x(t)$ 以 ω 为周期.

根据断言, 我们只需求出满足 $x(\omega)=x(0)$ 的解. 设满足初值 $x(0)=x_0$, 则方程的解为

$$x(t)=e^{kt}\left(x_0+\int_0^t f(s)e^{-ks}ds\right).$$

此时计算可得

$$x(\omega)-x(0)=x_0(e^{k\omega}-1)+\int_0^\omega f(s)e^{k(\omega-s)}ds=0\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{1-e^{k\omega}}\int_0^\omega f(s)e^{k(\omega-s)}ds.$$

因此以 ω 为周期的解存在且唯一, 表达式为

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{kt}\left(\frac{e^{k\omega}}{1-e^{k\omega}}\int_0^\omega f(s)e^{-ks}ds+\int_0^t f(s)e^{-ks}ds\right)\\&=\frac{1}{1-e^{k\omega}}\left(e^{k(t+\omega)}\int_0^\omega f(s)e^{-ks}ds+e^{kt}\int_0^t f(s)e^{-ks}ds-e^{k(t+\omega)}\int_0^t f(s)e^{-ks}ds\right)\\&=\frac{1}{1-e^{k\omega}}\left(e^{k(t+\omega)}\int_t^\omega f(s)e^{-ks}ds+e^{k(t+\omega)}\int_0^t f(s)e^{-k(s+\omega)}ds\right)\\&=\frac{e^{k(t+\omega)}}{1-e^{k\omega}}\int_t^{t+\omega} f(s)e^{-ks}ds.\end{aligned}$$

笔记 本题我们利用断言简化了问题的求解, 这一方法在更为复杂的问题中仍然适用, 如下例:

问题 1.1(丁-37-5(2)) 考虑方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$, 其中 p,q 都是以 $\omega>0$ 为周期的连续函数. 试证明: 当 $q(x)$ 不恒为零时, 方程有唯一的 ω-周期解的充要条件是 $\bar{p}\neq 0$, 并求出此解. 这里

$$\bar{p}\triangleq\frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(x)dx.$$

证明 此时断言仍然成立, 我们只需证明方程存在唯一满足 $y(\omega)=y(0)$ 的解 $y(x)$ 的充要条件是 $\bar{p}\neq 0$. 设 $y(x)$ 满足初值 $y(0)=y_0$, 则

$$y(x)=e^{-\int_0^x p(s)ds}\left(y_0+\int_0^x q(s)e^{\int_0^s p(u)du}ds\right).$$

计算可得

$$y(\omega)-y(0)=y_0(e^{\omega\bar{p}}-1)+e^{-\omega\bar{p}}\int_0^\omega q(s)e^{\int_0^s p(u)du}ds.$$

若 $\bar{p}\neq 0$, 则求得唯一的 ω-周期解, 对应初值为

$$y_0=\frac{e^{-\omega\bar{p}}}{1-e^{-\omega\bar{p}}}\int_0^\omega q(s)e^{\int_0^s p(u)du}ds.$$

若 $\bar{p}=0$, 由解式可得方程要么不存在周期解, 要么所有解都是周期解, 因此不唯一.

问题 1.2(19mid) 求解方程 $x'(t)=\cos^2(x-t)$.

解 作变换 $y=x-t$, 则方程化为

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}-1=\cos^2 y-1=-\sin^2 y.$$

$\sin y$ 的零点为 $y=k\pi(k\in\mathbb{Z})$, 因此原方程的特解为 $x=k\pi+t$. $\sin y\neq 0$ 时, 有

$$-\frac{dy}{\sin^2 y}=dt\Rightarrow\cot y=t+C.$$

因此方程的通积分为 $\cot(x-t)-t=C$.

笔记 本题演示了一个常用的变换: 对一切形如 $x'(t)=f(ax+bt+c)(a,b\neq 0)$ 的方程, 可以作变换 $y=ax+bt+c$ 求解.

问题 1.3 求解下列方程:

1. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{t+x^3}$.
2. $\dfrac{dx}{dt}(t^2x^3+tx)=1$.

解 这两题演示了一个相同的解法: 反转 t 和 x 的"地位", 即把 t 视为 x 的函数 $t(x)$. 这种解法的合理性由逆映射定理保证.

1. 首先 $x=0$ 是方程特解. 若 $x\neq 0$, 原方程化为
$$\frac{dt}{dx}=\frac{t+x^3}{x}\Rightarrow\frac{dt}{dx}-\frac{t}{x}=x^2.$$
求解该一阶线性方程可得通积分 $2t=x^3+Cx$.
2. 由方程可得 $x,t\neq 0$. 方程化为
$$\frac{dt}{dx}=t^2x^3+tx.$$
这是关于 x 的 Bernoulli 方程, 求解可得通积分为 $t(Ce^{-\frac{x^2}{2}}-x^2+2)=1$.

问题 1.4 求解下列方程:

1. $y(1+x^2y^2)dx=xdy$.
2. (20 丘赛) $x\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x^6-y^2}+3y$.

解 我们的目标就是将这两个方程"凑齐次".

1. 首先 $x=0,y=0$ 都是特解. $x,y\neq 0$ 时, 为了化齐次, 我们从"让人为难"的一项 $1+x^2y^2$ 着手. 存在两种可能的变换: $x\mapsto\frac{1}{x},y\mapsto\frac{1}{y}$. 我们采用前一种 (后一种也可), 令 $u=\frac{1}{x}$. 则
$$\left(1+y^2/(\frac{1}{x})^2\right)\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{xy}dy\Rightarrow\frac{dy}{du}=-\frac{y}{u}\left(1+\frac{y^2}{u^2}\right).$$
作变换 $z=y/u$, 则方程化为
$$u\frac{dz}{du}+z=-z-z^3\Rightarrow\frac{u^2z}{\sqrt{z^2+2}}=C(C\neq 0).$$

由此可得原方程的通积分为 $y=Cx\sqrt{2+x^2y^2}(C\neq 0)$, $C=0$ 即对应特解 $y=0$.

2. 从 $\sqrt{x^6-y^2}$ 一项着手, 为了保证齐次, 我们作变换 $u=x^3$, 则

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{du}=\frac{\sqrt{x^6-y^2}+3y}{3x^3}=\frac{y}{u}+\frac{\operatorname{sgn}u}{3}\sqrt{1-\frac{y^2}{u^2}}.$$

作变换 $z=\frac{y}{u}$, 则方程化为

$$z+u\frac{dz}{du}=z+\frac{\operatorname{sgn}u}{3}\sqrt{1-z^2}\Rightarrow z=\sin\left(\frac{\operatorname{sgn}u}{3}\ln|u|+C\right).$$

由此可得原方程的通解为 $y=x^3\sin(C+\operatorname{sgn}x\ln|x|)$.

笔记 对于方程 1, 利用分组积分因子法还可以给出一个解法: 将方程分组为

$$(xdy-ydx)-x^2y^3dx=0.$$

第一组方程的一个积分因子为 $\mu_1=\frac{1}{x^2}$, 通积分为 $\Phi_1=\frac{y}{x}$; 第二组方程的一个积分因子为 $\mu_2=-\frac{1}{y^3}$, 通积分为 $\Phi_2=\frac{x^3}{3}$. 取可微函数 g_1,g_2 为

$$g_1(t)=\frac{1}{t^3},\quad g_2(t)=-\sqrt[3]{3t},$$

则有 $\mu_1g_1(\Phi_1)=\mu_2g_2(\Phi_2)=\frac{x}{y^3}\triangleq\mu$. 因此 μ 是方程的一个积分因子, 代入可得

$$\frac{x^2dy-xydx}{y^3}-x^3dx=-d\left(\frac{x^2}{2y^2}+\frac{x^4}{4}\right)=0\Rightarrow y=Cx\sqrt{2+x^2y^2}.$$

问题 1.5(赵班 20mid) 利用凑齐次或分组积分因子法求方程

$$(1+xy)ydx+(1-xy)xdy=0$$

的通解.(留给同学自行计算)

答案. $y=Cxe^{-\frac{1}{xy}}$.

问题 1.6(16mid) 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$. 证明: 方程 $x'+4x=f(t)$ 的任一解 $x(t)$ 均满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$.

证明 方程的通解为

$$x(t)=x_0e^{-4t}+\int_0^t f(s)e^{4(s-t)}ds\triangleq x_0e^{-4t}+F(t).$$

其中 $x(0)=x_0$, 由于 $x_0e^{-4t}\to 0$, 只需证明 $F(t)\to 0(t\to+\infty)$. 首先由题设可得 $|f(t)|$ 有界, 设其上确界为 M. 任取 $\varepsilon>0$, 由 $f(t)\to 0(t\to+\infty)$ 可得存在 $T>0$, 对任意 $t\geqslant T$, 成立 $|f(t)|<\varepsilon$. 由此可得

$$|F(t)|\leqslant\int_0^T|f(s)|e^{4(s-t)}ds+\int_T^t|f(s)|e^{4(s-t)}ds<\frac{M}{4}e^{4(T-t)}+\frac{\varepsilon}{4}.$$

因此对任意 $t\geqslant\frac{1}{4}\ln\frac{M}{3\varepsilon}+T$, 成立

$$|F(t)|<\frac{M}{4}\cdot\frac{3\varepsilon}{M}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

由此可得任一解均满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$.

1.2 补充内容

1.2.1 关于通解定义中独立参数的理解

对于一般的 n 解常微分方程 $F(t,x,\cdots,x^{(n)})=0$, 我们在第一节课就定义了它的通解 $x=\varphi(t;C_1,\cdots,C_n)$, 其中称 n 个参数独立是指

$$\frac{\partial(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(C_1,C_2,\cdots,C_n)}\neq 0.$$

关于上述定义, 存在一些待解释的地方:

- 这里独立性的定义是否与我们对参数独立的理解相符合?
- 为什么我们将这样的函数族称为 "通解"?
- 方程的通解为什么一定包含 n 个独立参数?

这里我们对前两个问题作一些解释, 第三个问题会在首次积分一节得到回答.

直观上来看, 参数独立 $\Leftrightarrow$ 参数间不存在函数关系. 反之, 存在非常值函数 V 使得 $V(C_1,\cdots,C_n)=0$. 在这种情况下, 由于 ∇V 不恒为零, 根据隐映射定理, 在某个子区域上通解所依赖的参数个数可以减少. 于是, 我们设参数组 $(B_1,\cdots,B_{n-1})=\psi(C_1,\cdots,C_n)$ 使得方程通解形如

$$\varphi(t;C_1,\cdots,C_n)=\phi(t;B_1,\cdots,B_{n-1}).$$

如果能验证此时定义中的 Jacobi 行列式为零, 就导出了与定义的矛盾, 从而说明了定义的合理性. 上式两边求偏导可得

$$\frac{\partial\varphi^{(i)}(t)}{\partial C_j}=\frac{\partial\phi^{(i)}(t)}{\partial C_j}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\phi^{(i)}(t)}{\partial B_k}\frac{\partial B_k}{\partial C_j}.$$

用矩阵形式表示, 即为

$$J\triangleq\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi(t)}{\partial C_n}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}(t)}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}(t)}{\partial C_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi(t)}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial\phi(t)}{\partial B_{n-1}}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial\phi^{(n-1)}(t)}{\partial B_1} & \cdots & \frac{\partial\phi^{(n-1)}(t)}{\partial B_{n-1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial B_1}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial B_1}{\partial C_n}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial B_{n-1}}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial B_{n-1}}{\partial C_n}\end{pmatrix}\triangleq J_1J_2.$$

注意到 $J_1\in\mathbb{R}^{n\times(n-1)}$, $J_2\in\mathbb{R}^{(n-1)\times n}$, 根据推广的 Binet-Cauchy 公式[1], 可以得到 Jacobi 行列式 $\det J=0$, 矛盾!

其次解答第二个问题, 我们来证明可以利用初值条件在局部范围内确定通解族中唯一对应的解. 在整个区域上成立

$$\begin{cases}x=\varphi(t;C_1,\cdots,C_n)\\ x'=\varphi'(t;C_1,\cdots,C_n)\\ \vdots\\ x^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(t;C_1,\cdots,C_n)\end{cases}$$

我们在点 $P:t=\xi,C_1=a_1,\cdots,C_n=a_n$ 附近考虑初值, 并令 $\eta_k=\varphi^{(k)}(\xi;a_1,\cdots,a_n)(k=0,1,\cdots,n-1)$. 由通解定义可得在 P 点处关于 $C_1,\cdots,C_n$ 的 Jacobi 行列式非零, 由隐映射定理可得在附近可以反

[1] 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, 若 $m>n$, 则 $\det(AB)=0$. $m\leqslant n$ 情况下公式较为复杂, 可以参考王新茂线性代数讲义 3.2 节

解出参数 $C_1, \cdots, C_n$:

$$C_k = C_k(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}), \quad k = 1, \cdots, n,$$

满足 $C_k(\xi, \eta_0, \cdots, \eta_{n-1}) = a_k$. 这样, 对 $(\xi, \eta_0, \cdots, \eta_{k-1})$ 附近的初值 $(t_0, x_0, \cdots, x_{n-1})$ 可以确定唯一的常数族 $(C_1^0, \cdots, C_n^0)$ 使得 $x = \varphi(t; C_1^0, \cdots, C_n^0)$ 是初值问题的解.

同样利用隐映射定理, 各位可以证明丁书上的一道习题: 设 $y = g(x; C_1, \cdots, C_n)$ 是一个光滑函数族, 则存在 n 阶 ODE, 它的通解恰好就是该函数族. 我们来演示一个具体的例子.

问题 1.7 求平面上一切圆满足的微分方程.

解 平面上圆周的一般方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 其中 D, E, F 为独立参数. 对 x 求两次偏导可得

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ 2x + 2yy' + D + Ey' = 0 \\ 2 + 2(y')^2 + 2yy'' + Ey'' = 0 \end{cases}$$

由此求得

$$E = -\frac{2 + 2(y')^2 + 2yy''}{y''}.$$

再对原方程关于 x 求第三次偏导, 将参数代入可得

$$6y'y'' + 2y'y''' + Ey''' = 0 \Rightarrow y''' = \frac{3y'(y'')^2}{1 + (y')^2}.$$

1.2.2 分离型方程的初值问题解的局部唯一性

本节的目标是以具体的方程为例, 介绍初值问题解的局部唯一性的相关结论, 为本学期学习一般方程组的基本理论作铺垫. 考虑分离型方程的初值问题:

$$\frac{dx}{dt} = X(x)T(t), \quad x(\xi) = \eta. \tag{1.1}$$

在 $X(\eta) = 0$ 时, 初值问题存在解 $x \equiv \eta$. 我们希望能给出上述解在局部唯一的充分条件. 下面首先给出初值问题解不唯一的例子:

例 1.1 考虑方程 $x'(t) = \sqrt{|x|}$. 若 $x(t)$ 是方程的解, 则 $-x(-t)$ 也是方程的解, 因此我们只需讨论方程的正解. 此时有

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = dt \Rightarrow 2\sqrt{x} = t + C \Rightarrow x = \frac{(t + C)^2}{4}.$$

其中 $t > -C$. 方程的负通解为 $-x(-t; C) = -\frac{(C-t)^2}{4}$. 此外, 方程特解为 $x \equiv 0$. 因此初值条件 $x(0) = 0$ 下, 初值问题存在两个不同的解:

$$x_1(t) \equiv 0, \quad x_2(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4}, & t \geqslant 0 \\ -\dfrac{t^2}{4}, & t < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn}(t)\frac{t^2}{4}.$$

下面我们给出判定初值问题 (1.1) 解的局部唯一性的一个充分条件.

定理 1.1

设初值问题 (1.1) 中的 $X(x), T(t)$ 均为连续函数, 且在 η 的某个邻域 $(\eta-\varepsilon, \eta+\varepsilon)$ 上成立 $X(x) = 0 \Leftrightarrow x = \eta$. 若反常积分

$$\left| \int_{\eta}^{\eta\pm\varepsilon} \frac{dy}{X(y)} \right| = \infty,$$

则 (1.1) 的解局部唯一.

注 这其实是 Osgood 条件的一个特例.

证明 假设此时 (1.1) 的解在局部不唯一, 设 $x(t)$ 是异于特解 $x \equiv \eta$ 的解. 不妨设存在 $\bar{\xi} > \xi$, 使得 $x(\bar{\xi}) = \bar{\eta} \in (\eta, \eta+\varepsilon)$, 设 $t_0 = \sup\{t < \bar{\xi} : x(t) = \eta\}$. 则在区间 $t \in (t_0, \bar{\xi}]$ 上, 总成立

$$\frac{dx}{X(x)} = T(t)dt \Rightarrow \int_{\bar{\eta}}^{x(t)} \frac{dx}{X(x)} = \int_{\bar{\xi}}^{t} T(s)ds.$$

令 $t \to t_0^+$, 上式中 LHS 为发散的反常积分, RHS 为有限积分, 矛盾! 因此初值问题的解在局部唯一.

值得注意的是, 上述反常积分发散只能作为充分条件而非必要条件, 反例如下:

例 1.2 考虑以下 ODE:

$$\frac{dx}{dt} = -t\,\mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|} = \begin{cases} -t\sqrt{x}, & x \geqslant 0 \\ t\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

若 $x(t)$ 是上述方程的解, 则 $-x(t)$ 也是方程的解. 因此我们只需求方程的正解. 此时有

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = -tdt \Rightarrow 2\sqrt{x} = \frac{C-t^2}{2}.$$

因此正通解为

$$x = \frac{(C-t^2)^2}{16}, \quad -\sqrt{C} < t < \sqrt{C}(C>0).$$

负通解为 $x = -\frac{(C-t^2)^2}{16}$. 此时方程在初值条件 $x(0) = 0$ 下存在唯一解 $x \equiv 0$. 但是在 $x = 0$ 附近, 有

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|}} = 2\sqrt{\varepsilon}, \quad \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|}} = -2\sqrt{\varepsilon}.$$

这说明反常积分收敛不是局部解唯一的必要条件.

第 2 章 第二次习题课 (by 陈禹汐)

2.1 习题讲解

作业 2.1 (33-42)

若 $M(x,y), N(x,y)$ 都是 m 次齐次函数, 求齐次方程 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 的积分因子. ♡

解 设 $y = ux$, 则有

$$M(x,y) = x^m M(1,u), \quad N(x,y) = x^m N(1,u), \quad dy = xdu + udx.$$

代入方程可得

$$x^m(M(1,u) + uN(1,u))dx + x^{m+1}N(1,u)du = 0.$$

这是分离型方程, 所以一个积分因子为

$$\mu = \frac{1}{x^{m+1}(M(1,u) + uN(1,u))} = \frac{1}{xM(x,y) + yN(x,y)}.$$

作业 2.2 (33-44)

试求出方程 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 具有形状为 $\mu(x+y)$ 以及 $\mu(xy)$ 的积分因子的充要条件. ♡

解 不妨设 $M \neq N$ 以及 $xM \neq yN$(若等号成立, 则方程自动成为恰当方程). 我们断言:

1. 方程有形如 $\mu(x+y)$ 的积分因子的充要条件是 $H \triangleq \frac{1}{M-N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})$ 形如 $H(x+y)$.
2. 方程有形如 $\mu(xy)$ 的积分因子的充要条件是 $K \triangleq \frac{1}{xM-yN}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})$ 形如 $K(xy)$.

下面证明断言.

1. $\Rightarrow$: 此时有
$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \Rightarrow \mu'(x+y)M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \mu'(x+y)N + \mu\frac{\partial N}{\partial x}.$$
因此 $H = -\frac{\mu'(x+y)}{\mu(x+y)}$ 形如 $H(x+y)$.
$\Leftarrow$: 取 $\mu(x+y) = e^{-H(x+y)}$, 则
$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) = (M-N)\mu\left(\frac{\mu'(x+y)}{\mu(x+y)} - H(x+y)\right) = 0.$$
因此 $\mu(x+y)$ 是方程的一个积分因子.
2. 类似证明.

作业 2.3 (33-46)

求解方程

$$(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0.$$

♡

解 首先 $x \equiv 0, y \equiv 0$ 均为方程的特解. 若 $x, y \neq 0$, 对原方程分组可得

$$x^2y^2(ydx + xdy) + (ydx - xdy) = 0.$$

其中方程 $x^2y^2(ydx + xdy) = 0$ 的一个积分因子为 $\mu_1(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}$, 对应通积分为 $\Phi_1(x,y) = xy = C_1$; 方程 $ydx - xdy = 0$ 的一个积分因子为 $\mu_2(x,y) = \frac{1}{y^2}$, 对应通积分为 $\Phi_2(x,y) = \frac{x}{y} = C_2$. 选取函数

$g_1(t)=t, g_2(t)=\frac{1}{t}$, 则有

$$\mu_1 g_1(\Phi_1)=\mu_2 g_2(\Phi_2)=\frac{1}{xy}.$$

因此 $\frac{1}{xy}$ 是原方程的一个积分因子. 代入计算可得

$$(xy^2dx+x^2ydy)+\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)=0\Rightarrow d\left(\frac{x^2y^2}{2}+\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)=0.$$

因此方程的通积分为 $\frac{x^2y^2}{2}+\ln\left|\frac{x}{y}\right|=C$.

作业 2.4 (34-50)

求解 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t-x^2}{2x(t+x^2)}$.

解 令 $y=x^2$, 则

$$\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}=\frac{t-x^2}{t+x^2}=\frac{t-y}{t+y}.$$

由此可得

$$(y-t)dt+(t+y)dy=(ydt+tdy)+(ydy-tdt)=0\Rightarrow d\left(ty+\frac{y^2-t^2}{2}\right)=0.$$

因此原方程的通积分为

$$tx^2+\frac{x^4-t^2}{2}=C.$$

其中 C 为任一常数.

作业 2.5 (34-51)

求解 $t\dfrac{dx}{dt}+x=x\ln(tx)$.

解 令 $y=\ln x$, 则

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{\ln(tx)-1}{t}=\frac{y}{t}+\frac{\ln t-1}{t}.$$

由此可得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{t}\right)=\frac{\ln t-1}{t^2}.$$

两边积分求得

$$y=Ct-\ln t\Rightarrow x=\frac{e^{Ct}}{t}.$$

其中 C 为任意常数.

作业 2.6 (Page 34, 52)

求解 $\dfrac{dx}{dt}(t^2+x^2+3)=2t\left(2x-\dfrac{t^2}{x}\right)$.

解 作变换 $\xi=x^2+1, \eta=t^2+2$, 则

$$\frac{d\xi}{d\eta}=\frac{x}{t}\frac{dx}{dt}=\frac{x}{t}\cdot\frac{2t}{x}\frac{2x^2-t^2}{t^2+x^2+3}=\frac{2(2\xi-\eta)}{\xi+\eta}.$$

令 $u=\frac{\xi}{\eta}$, 则有

$$u+\eta\frac{du}{d\eta}=\frac{4u-2}{u+1}.$$

首先 $u\equiv 1,2$ 均为上述方程特解, 对应原方程特解为 $x^2-t^2=1$ 和 $x^2-2t^2=3$. 若 $u\neq 1,2$, 则

$$\frac{u+1}{(u-1)(u-2)}du+\frac{d\eta}{\eta}=0.$$

积分求解可得

$$\frac{(u-2)^3}{(u-1)^2}\eta=C,$$

其中 C 为非零常数. 进一步整理可得原方程的通积分为

$$(x^2-2t^2-3)^3=C(x^2-t^2-1)^2.$$

$C=0$ 即对应特解 $x^2-2t^2=3$.

作业 2.7 (40-7)

求解 $t\dot{x}^2-2x\dot{x}+t+2x=0$.

解 令 $p=\dot{x}$, 若 $p\equiv 0$, 则 x 恒为常数, 代回方程可得这不是解. 若 $p\neq 0$, 则有

$$t=\frac{2x(p-1)}{p^2+1}\Rightarrow\frac{dt}{dx}=\frac{1}{p}=\frac{2(p-1)}{p^2+1}-\frac{2x(p^2-2p-1)}{(p^2+1)^2}\frac{dp}{dx}.$$

由此可得

$$(p^2-2p-1)\left(\frac{2x}{p^2+1}\frac{dp}{dx}-\frac{1}{p}\right)=0.$$

若 $p^2-2p-1=0$, 则 $p=1\pm\sqrt{2}$, 则 $x=(1\pm\sqrt{2})t+C$, 将该解代回原方程可得 $C=0$, 由此可得特解 $x=(1\pm\sqrt{2})t$.

若 $p^2-2p-1\neq 0$, 则

$$\frac{2x}{p^2+1}\frac{dp}{dx}-\frac{1}{p}=0\Rightarrow\frac{2p}{p^2+1}dp=\frac{dx}{x}\Rightarrow x=C(p^2+1)(C\neq 0).$$

代回原方程可得 $t=2C(p-1)\Rightarrow p=1+\frac{t}{2C}$, 因此求得

$$x=C\left[\left(1+\frac{t}{2C}\right)^2+1\right]=\frac{t^2}{4C}+t+2C.$$

作业 2.8 (40-11)

求解 $\dot{x}^4=4x(t\dot{x}-2x)^2$.

解 首先 $x=0$ 是方程的一个特解. 若 $\dot{x}=0$, 代回原方程依然可得解 $x=0$. 下考虑 $\dot{x}\neq 0, x>0$ 的情况, 此时

$$t=\pm\frac{p}{2\sqrt{x}}+\frac{2x}{p}\Rightarrow\frac{dt}{dx}=\frac{1}{p}=\frac{2}{p}-\frac{2x}{p^2}\frac{dp}{dx}\pm\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dp}{dx}\mp\frac{p}{4x^{\frac{3}{2}}}.$$

整理可得

$$\left(\frac{1}{p}\pm\frac{p}{4x^{\frac{3}{2}}}\right)\left(\frac{2x}{p}\frac{dp}{dx}-1\right)=0.$$

若 $\frac{1}{p}\pm\frac{p}{4x^{\frac{3}{2}}}=0$, 可求得 $x=(\frac{C\pm t}{2})^4$, 代回原方程可得 $C=0$, 因此一个特解为 $x=\frac{t^4}{16}$. 若 $\frac{1}{p}\pm\frac{p}{4x^{\frac{3}{2}}}\neq 0$,

则有

$$\frac{2x}{p}\frac{dp}{dx}-1=0\Rightarrow\frac{2dp}{p}=\frac{dx}{x}\Rightarrow p=2C\sqrt{x}(C\neq 0).$$

即有

$$\frac{dx}{dt}=2C\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x}=Ct+C'\Rightarrow x=(Ct+C')^2.$$

代回原方程可得 $C'=\pm C^2$, 方程通解可写为 $x=C^2(t-C)^2$, 特解 $x=0$ 即对应 $C=0$ 的情况.

作业 2.9 (40-15)

求解 $\dot{x}^2-x\dot{x}+e^t=0$.

解 验证可得 $p=0$ 不是方程特解. 若 $p\neq 0$, 则

$$x=\frac{p^2+e^t}{p}=p+\frac{e^t}{p}\Rightarrow p=\frac{dp}{dt}+\frac{e^t}{p}-\frac{e^t}{p^2}\frac{dp}{dt}\Rightarrow\left(1-\frac{e^t}{p^2}\right)\left(\frac{dp}{dt}-p\right)=0.$$

若 $1-\frac{e^t}{p^2}=0$, 即 $e^t=p^2$, 代回可得 $x=2p$, 因此 $x^2=4e^t$. 验证可得这是方程特解. 若 $\frac{dp}{dt}-p=0$, 求解可得 $p=Ce^t(C\neq 0)$, 进而积分可得 $x=Ce^t+C'$. 代回原方程可得通解 $x=Ce^t+\frac{1}{C}$.

作业 2.10 (41-21)

求解 $x^2\dot{x}^2+x^2=a^2(a>0)$.

解 由方程可得 $x\neq 0$. 题设方程参数化可得

$$x\dot{x}=a\cos\theta,\quad x=a\sin\theta\Rightarrow x=a\sin\theta,\quad \dot{x}=\cot\theta.$$

若 $\dot{x}=0$, 则 $x\equiv C$. 代回原方程可得特解 $x=\pm a$. 若 $\dot{x}\neq 0$, 则

$$dt=\frac{dx}{\dot{x}}=\frac{a\cos\theta d\theta}{\cot\theta}=a\sin\theta d\theta\Rightarrow t=C-a\cos\theta.$$

由此可得 $x^2+(C-t)^2=a^2$. 验证可得这是原方程的通积分.

作业 2.11 (50-4(1)(2))

求解方程

1. $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$.
2. $\frac{d^2x}{dt^2}-\omega^2x=0$.

解 令 $p=\frac{dx}{dt}$, 则有

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dp}{dt}=\frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt}=p\frac{dp}{dx}.$$

1. 此时方程化为

$$p\frac{dp}{dx}+\omega^2x=0\Rightarrow d(p^2+\omega^2x^2)=0.$$

因此通积分为 $p^2+\omega^2x^2=C^2(C\geqslant 0)$, 若 $p=0$, 则 x 恒为常数, 代回方程可得特解 $x=0$. 若 $p\neq 0$, 则 $C>0$. 存在 θ 使得 $p=C\cos\theta$ 以及 $x=\frac{C}{\omega}\sin\theta$. 则

$$dt=\frac{dx}{p}=\frac{\frac{C}{\omega}\cos\theta d\theta}{C\cos\theta}=\frac{1}{\omega}d\theta.$$

由此可得 $\theta=\omega t+D$, 因此

$$x=\frac{C}{\omega}\sin(\omega t+D)=A\sin\omega t+B\cos\omega t.$$

反之可验证 $A\sin\omega t + B\cos\omega t$ 是方程的解, 其中 A, B 为任意实常数, 从而即为通解.

2. 此时方程化为

$$p\frac{dp}{dx} - \omega^2 x = 0 \Rightarrow d(p^2 - \omega^2 x^2) = 0.$$

因此通积分为 $p^2 - \omega^2 x^2 = \pm C^2 (C \geqslant 0)$. 若 $p = 0$, 则 x 恒为常数, 代回方程可得特解 $x = 0$. 下面设 $p \neq 0$. 若 $p^2 \geqslant \omega^2 x^2$, 则存在 θ 使得 $p = C\cosh\theta$ 且 $x = \frac{C}{\omega}\sinh\theta$. 因此

$$dt = \frac{dx}{p} = \frac{\frac{C}{\omega}\cosh\theta d\theta}{C\cosh\theta} = \frac{1}{\omega}d\theta.$$

因此 $\theta = \omega t + D$, 所以

$$x = \frac{C}{\omega}\sinh(\omega t + D) =: Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}.$$

若 $p^2 \leqslant \omega^2 x^2$ 同样可推导出 $x = A'e^{\omega t} + B'e^{-\omega t}$. 反之可验证得对任意实常数 A, B, $Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ 是方程的解, 从而为通解.

作业 2.12 (51-10)

求解 $t\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dx}{dt} + t\sin\left(\dfrac{1}{t}\dfrac{dx}{dt}\right)$.

解 令 $y = \frac{dx}{dt}$, 则有

$$\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = \sin\frac{y}{t}.$$

令 $u = \frac{y}{t}$, 则

$$t\frac{du}{dt} = \sin u.$$

首先 $u = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 是上述方程的特解, 对应 $\frac{dx}{dt} = k\pi t$. 由此可得 $x = \frac{k\pi}{2}t^2 + C$, 验证可得上述为原方程特解. 若 $u \neq k\pi$, 则 $\sin u \neq 0$, 因此有

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{dt}{t} \Rightarrow u = 2\arctan(C_1 t) + 2k\pi.$$

其中 C_1 为非零常数, k 为任意整数. 因此

$$\frac{dx}{dt} = y = 2t\arctan(C_1 t) + 2k\pi t.$$

代回方程积分可得

$$x(t) = \frac{1 + C_1^2 t^2}{C_1^2}\arctan(C_1 t) - \frac{t}{C_1} + k\pi t^2 + C_2.$$

作业 2.13 (51-16)

一个质点徐徐沉入液体, 设下沉时的反作用力和速度成正比, 试求质点的运动.

解 设反作用力同速度的比例系数为 k, 则 $f = -k\dot{x}$. 因此质点的运动满足

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt}.$$

令 $p = \dot{x}$, 则有

$$\frac{dp}{dt} + \frac{k}{m}p = g.$$

求解该一阶线性方程可得

$$\frac{dx}{dt} = p = Ce^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}.$$

由初值 $p(0)=0$ 可得 $C=-\frac{mg}{k}$, 代入积分可得

$$x=\frac{mg}{k}t+\frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{kt}{m}}+C'.$$

不妨设初始位置为 0, 代入即得

$$x=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}(1-e^{-\frac{kt}{m}}).$$

作业 2.14 (附加)

求解 $p^3-4txp+8x^2=0$, 其中 $p=\dfrac{dx}{dt}$.

解 若 $x=0$ 或 $p=0$, 这两种情况都对应特解 $x\equiv 0$. 若 $x,p\neq 0$, 则

$$4t=\frac{p^3+8x^2}{xp}=\frac{p^2}{x}+\frac{8x}{p}.$$

由于

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt}=p\frac{dp}{dx},$$

方程两边对 t 求导可得

$$\left(\frac{2p^2}{x}-\frac{8x}{p}\right)\frac{dp}{dx}+8-\frac{p^3}{x^2}=4.$$

进一步化简可得

$$\frac{p^3-4x^2}{x^2}\left(\frac{2x}{p}\frac{dp}{dx}-1\right)=0.$$

若 p^3-4x^2, 则 $\frac{dx}{dt}=p=(2x)^{\frac{2}{3}}$, 求解可得 $x=\frac{1}{2}(\frac{2t}{3}+C)^3$, 代入原方程验算可得 $C=0$, 因此对应特解 $x=\frac{4t^3}{27}$. 若 $p^3-4x^2\neq 0$, 则

$$\frac{2x}{p}\frac{dp}{dx}-1=0\Rightarrow\frac{2dp}{p}=\frac{dx}{x}.$$

积分可得 $p^2=C^2x$, 因此 $\frac{dx}{dt}=C_1\sqrt{x}$, 其中 C_1 为任意非零常数. 求解可得

$$x=\left(\frac{C_1}{2}t+C_2\right)^2.$$

C_2 为任一常数. 将该解代回方程验算, 可得 $C_2=-\frac{C_1^3}{8}$. 综上所述, 方程的通解为

$$x=\left(\frac{C_1}{2}t-\frac{C_1^3}{8}\right)^2.$$

而特解 $x\equiv 0$ 即对应 $C_1=0$ 的情况.

作业 2.15 (62-7)

求解 $\dfrac{dx}{x(x+y)}=\dfrac{dy}{-y(x+y)}=\dfrac{dz}{(y-x)(2x+2y+z)}$.

解 由方程可得

$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}\Rightarrow xy=C_1,$$

这是第一个首次积分. 另一方面,

$$\frac{d(x+y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{d(x+y+z)}{(y-x)(x+y+z)}\Rightarrow\frac{d(x+y)}{(x+y)}+\frac{d(x+y+z)}{x+y+z}=0.$$

由此解得第二个首次积分 $(x+y)(x+y+z)=C_2$.

作业 2.16 (62-10)

求解 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+xf'(t)-yg'(t)=0, \\ \dfrac{dy}{dt}+xg'(t)+yf'(t)=0. \end{cases}$

♡

解 由方程组可得

$$d(x^2+y^2)=2xdx+2ydy=-2(x^2+y^2)f'(t)dt.$$

由此可得

$$\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+2f'(t)dt=0\Rightarrow x^2+y^2=C_1e^{-2f(t)}.$$

另一方面, 令 $u=\frac{x}{y}$, 则有

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)g'(t)=(1+u^2)g'(t).$$

由此可得

$$\arctan u=g(t)+C_2\Rightarrow\frac{x}{y}=\tan(g(t)+C_2).$$

作业 2.17 (63-13)

质量为 m 的一物体自高度 h 处下落, 设阻力与物体速度成正比, 而物体下落的初速度为 v_0, 方向与水平线成倾角 α, 试求物体运动的轨道.

♡

解 以物体初始位置正下方的地面为坐标原点, 向上为 y 轴, 向 v_0 的水平分量方向为 x 轴. 根据物理原理可得初值问题

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k\dfrac{dx}{dt} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=k\dfrac{dy}{dt}-mg \\ x(0)=0, y(0)=h \\ \dot{x}(0)=v_0\cos\alpha, \dot{y}(0)=-v_0\sin\alpha \end{cases}$$

分别整理可得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}e^{\frac{k}{m}t}\right)=0\Rightarrow\frac{dx}{dt}=A_1e^{-\frac{k}{m}t}\Rightarrow x=-\frac{m}{k}A_1e^{-\frac{k}{m}t}+B_1.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-\frac{k}{m}t}\right)=-ge^{-\frac{k}{m}t}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{mg}{k}+A_2e^{\frac{k}{m}t}\Rightarrow y=\frac{mg}{k}t+\frac{m}{k}A_2e^{\frac{k}{m}t}+B_2.$$

代入初值计算可得

$$\begin{cases} A_1=v_0\cos\alpha \\ B_1=\dfrac{mv_0}{k}\cos\alpha \end{cases}\qquad \begin{cases} A_2=-v_0\sin\alpha-\dfrac{mg}{k} \\ B_2=h+\dfrac{m^2g}{k^2}+\dfrac{mv_0\sin\alpha}{k} \end{cases}$$

因此可得

$$x=\frac{mv_0\cos\alpha}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}),\quad y=\frac{mg}{k}t+\left(\frac{m^2g}{k^2}+\frac{mv_0\sin\alpha}{k}\right)(1-e^{\frac{k}{m}t})+h.$$

作业 2.18 (63-14)

火炮以仰角 α 和初速度 v_0 发射

1. 求出炮弹的运动.
2. 试证炮弹的运动轨线是 $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$, 其中 g 是重力加速度.

解 由物理原理可得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg \\ x(0) = y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0\cos\alpha, \dot{y}(0) = v_0\sin\alpha \end{cases}$$

由此解得

$$x = (v_0\cos\alpha)t, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t.$$

由于 $t = x/(v_0\sin\alpha)$, 可得

$$y = v_0\sin\alpha\cdot\frac{x}{v_0\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

作业 2.19 (附加 2-1)

将如下高阶微分方程化为一阶微分方程组.

1. $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = a + \varepsilon u^2$(水星运动的 Einstein 方程).
2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2-1)\dfrac{dx}{dt} + x = 0$(Van der Pol 方程).
3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x + ax^3 = 0$(Duffing 方程).
4. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \mu\left[1 - \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2\right]\dfrac{dx}{dt} + x = 0$(Rayleigh 方程).

其中 $a, \mu, \omega, \varepsilon$ 均为参数.

解

1. 令 $v = \dot{u}$, 则方程化为
$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\theta} = v \\ \dfrac{dv}{d\theta} = a + \varepsilon u^2 - u \end{cases}$$
2. 令 $y = \dot{x}$, 则方程化为
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\mu(x^2-1)y - x \end{cases}$$

3. 令 $y=\dot{x}$, 则方程化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-ax^3-\omega^2 x\end{cases}$$

4. 令 $y=\dot{x}$, 则方程化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=\mu(1-y^2)y-x\end{cases}$$

作业 2.20 (附加 2-2)

求二阶拟线性方程的通解

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x^2\frac{dx}{dt}+x^2=0.$$

解 作 Lienard 变换 $y=\frac{dx}{dt}+\frac{x^3}{3}$, 则有

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}+x^2\frac{dx}{dt}.$$

由此可得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-\dfrac{x^3}{3}\\ \dfrac{dy}{dt}=-x^2\end{cases}$$

若 $\frac{dy}{dt}=0$, 则得特解 $x=0$. 若 $\frac{dy}{dt}\neq 0$, 则有

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x^3-3y}{3x^2}\Rightarrow\frac{d}{dy}(x^3)=x^3-3y.$$

求解 x^3 关于 y 的一阶线性方程可得 $x^3=C_1e^y+3(y+1)$. 若 $C_1=0$, 则 $\frac{dx}{dt}=-1\Rightarrow x=C_2-t$. 这是原方程的一个特解. 若 $C_1\neq 0$, 令 $C=-C_1^{-1}$, 则

$$e^y+C(x^3-3y-3)=0\Rightarrow e^{p+\frac{x^3}{3}}=C(p+1)\Rightarrow x=\sqrt[3]{3\ln(C(p+1))-3p}.$$

进而有

$$\begin{aligned}t&=\int\frac{1}{p}\frac{dx}{dp}dp=\int\frac{dx}{p}=\frac{x}{p}+\int\frac{x}{p^2}dp+C'\\&=\frac{\sqrt[3]{3\ln(C(p+1))-3p}}{p}+\int\frac{\sqrt[3]{3\ln(C(p+1))-3p}}{p^2}dp+C'.\end{aligned}$$

结果的不定积分表示某个具体的原函数. 因此方程的通解由如下参数方程确定

$$\begin{cases}x=\sqrt[3]{3\ln(C(p+1))-3p}\\ t=\dfrac{\sqrt[3]{3\ln(C(p+1))-3p}}{p}+\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{3\ln(C(p+1))-3p}}{p^2}dp+C'\end{cases}$$

2.2 课程回顾

积分曲线 解的几何表示.

方向场 微分方程的几何解释. 辅助工具: 等斜线.

一阶方程的初等解法

1. 变量可分离: $T_1(t)X_1(x)dt + T_2(t)X_2(x)dx = 0$.
2. 可化为变量分离的方程:
   (a). 齐次方程: $\frac{dx}{dt} = g(\frac{x}{t})$, 变量代换 $u = \frac{x}{t}$.
   (b). 可化为齐次的方程: 利用平移变换求解
   $$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right).$$
   (c). 线性方程: $\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t)$, 利用积分因子法或常数变易法求解.
   (d). 可化为线性方程: (a) Euler 方程, (b) Bernoulli 方程, (c) Riccati 方程.
3. 全微分方程和积分因子法:
   (a). Main Thm. $Mdt + Ndx = 0$ 为恰当方程的充要条件为 $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$.
   (b). 积分因子法: 找到合适的 μ 使得 $\mu M dt + \mu N dx = 0$. 一般 μ 很难解出, 可以考虑特殊情况, 例如 $\mu = \mu(x)$ 或 $\mu = \mu(t)$; 熟记常见的积分因子.

一阶隐式方程 $F(t, x, \dot{x})$, 可以分为不显含未知函数 x 和未知变量 t 的情形. 解法: 对 t(或 x) 求偏导, 总的原则是化归为关于导数 $\dot{x}$ 的显示方程, 必要时可以理解为 t 关于 x 的导数.

高阶方程的降阶 微分方程组的初等积分法和首次积分:

1. 化为高阶方程.
2. 首次积分. 技巧: 观察对称性, 利用已得到的首次积分化简.

第 3 章 第三次习题课 (by 黄天一)

3.1 习题讲解 (作业题 & 补充题)

作业 3.1 (74-4)

设 t 是实值变量, λ 是一复值常数, $p \in \mathbb{C}[t]$.

1. 当且仅当 $\operatorname{Re}\lambda < 0$ 时 $\lim\limits_{t\to+\infty} |p(t)e^{\lambda t}| = 0$.
2. 当 $\operatorname{Re}\lambda > 0$ 时, $\lim\limits_{t\to+\infty} |p(t)e^{\lambda t}| = +\infty$.
3. 当且仅当 $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ 时, $e^{\lambda t}$ 在 $0 \leqslant t < +\infty$ 上是有界的.

证明 设 $\lambda = \alpha + \beta i(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, 则 $|e^{\lambda t}| = e^{\alpha t}|e^{i\beta t}| = e^{\alpha t}$, 由此立得 3 成立.

- 若 $\alpha < 0$, 只需证明 $\lim\limits_{t\to+\infty} |t^n e^{\lambda t}| = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 则对任意多项式 $p \in \mathbb{C}[t]$ 都成立 $\lim\limits_{t\to+\infty} |p(t)e^{\lambda t}| = 0$. 对 $e^{-\alpha t}$ 作 Taylor 展开可得
$$e^{-\alpha t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha t)^k}{k!} \geqslant \frac{(-\alpha t)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall t > 0.$$
因此对 $t > 0$ 成立
$$|t^n e^{\lambda t}| = \frac{t^n}{e^{-\alpha t}} \leqslant t^n \Big/ \frac{(-\alpha t)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(-\alpha)^{n+1}} \frac{1}{t} \xrightarrow{t\to+\infty} 0.$$
这样就证明了 1 的左推右.
- 若 $\alpha > 0$, 则 $|e^{\lambda t}| = e^{\alpha t} \xrightarrow{t\to+\infty} +\infty$. 另一方面, $|p(t)|$ 要么为正常数, 要么在 $t \to +\infty$ 时趋于 $+\infty$, 因此 $\lim\limits_{t\to+\infty} |p(t)e^{\lambda t}| = +\infty$. 这样就证明了 2. 若 $\alpha = 0$, 则 $|p(t)e^{\lambda t}| = |p(t)|$, 当 $t \to +\infty$ 时不趋于 0. 综上可得 $\alpha \geqslant 0$ 时 $|p(t)e^{\lambda t}| \not\to 0$, 这样就证明了 1 的右推左.

作业 3.2 (85-9)

试讨论二阶常 (实) 系数齐次线性微分方程 $a_0\dfrac{d^2x}{dt^2} + a_1\dfrac{dx}{dt} + a_2 x = 0$ 具有非零的周期解的充要条件.

证明 设方程的两个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. 以下出现的 A, B 均为复常数.

1. $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$, 则 λ_1, λ_2 为相异实根, 任一非零解形如 $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$. 若 $x(t)$ 以 $\omega > 0$ 为周期, 则
$$0 = x(t+\omega) - x(t) = A(e^{\lambda_1\omega} - 1)e^{\lambda_1 t} + B(e^{\lambda_2\omega} - 1)e^{\lambda_2 t}.$$
由于 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ 线性无关, 故有 $A(e^{\lambda_1\omega} - 1) = B(e^{\lambda_2\omega} - 1) = 0$. 为了保证非零, 不失一般性, 可得 $\lambda_1 = B = 0, A \neq 0$, 此时 $x(t)$ 为非零常数解, 是周期解. 对应原系数为 $a_2 = 0, a_1 > 0$.
2. $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, 任一非零解形如 $x(t) = (A + Bt)e^{\lambda t}$. 若 $x(t)$ 以 $\omega > 0$ 为周期, 则
$$0 = x(t+\omega) - x(t) = e^{\lambda t}(B(e^{\lambda\omega} - 1)t + A(e^{\lambda\omega} - 1) + B\omega e^{\lambda\omega}).$$
此时可得 $B(e^{\lambda\omega} - 1)t + A(e^{\lambda\omega} - 1) + B\omega e^{\lambda\omega} = 0$, 求解可得 $B = \lambda = 0, A \neq 0$. 此时 $x(t)$ 为非零常数解, 是周期解, 对应原系数为 $a_2 = 0, a_1 = 0$.

3. $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$, 则 $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha + i\beta$, 其中 $\beta \neq 0$. 此时任一非零解形如 $x(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$. 非零周期解在 $\pm\infty$ 处的极限非零 (check it!), 若 $\alpha > 0$, 则 $|x(t)|$ 在 $-\infty$ 处的极限为零; 若 $\alpha < 0$, 则 $|x(t)|$ 在 $+\infty$ 处的极限为零, 均不成立. 在 $\alpha = 0$ 时, $x(t) = Ae^{i\beta t} + Be^{-i\beta t}$ 以 $\frac{2\pi}{|\beta|}$ 为正周期, 对应原系数为 $a_1 = 0, a_0a_2 > 0$.

综上可得, 方程存在非零周期解的充要条件是 $a_1 = 0, a_0a_2 > 0$ 或 $a_2 = 0$.

作业 3.3 (85-11(4),103-3)

1. 求方程 $5x'' + 5x = \sin t - \cos 2t$ 的一个特解.
2. 试用运算子法求解方程 $5x'' + 5x = \sin t - \cos 2t$.

♡

解 我们分别在 1, 2 中用待定系数法和运算子法求一个特解.

1. 由叠加原理, 只需分别求 $5x'' + 5x = \sin t$ 和 $5x'' + 5x = -\cos 2t$ 的一个特解, 然后相加即可.
   由于齐次方程的特征值为 $\pm i$, 重数为 1. 因此可设第一个方程的特解为 $x(t) = t(A\cos t + B\sin t)$, 则
   $$x'(t) = (A\cos t + B\sin t) + t(-A\sin t + B\cos t).$$
   $$x''(t) = 2(-A\sin t + B\cos t) - t(A\cos t + B\sin t).$$
   代回方程求解可得 $A = -\frac{1}{10}, B = 0$. 因此一个特解为 $x(t) = -\frac{1}{10}t\cos t$.
   对于第二个方程, 设一个特解为 $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$, 则
   $$x'(t) = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t, \quad x''(t) = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t.$$
   代回方程求解可得 $A = \frac{1}{15}, B = 0$. 因此一个特解为 $x(t) = \frac{1}{15}\cos 2t$.
   综上可得原方程的一个特解为 $-\frac{1}{10}t\cos t + \frac{1}{15}\cos 2t$.
2. 记算子 $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$. 我们依然利用叠加原理首先求两个方程各自的特解.
   将 $\sin t$ 复数化求解可得一个特解
   $$\begin{aligned}\frac{1}{5\mathcal{D}^2+5}\sin t &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{5\mathcal{D}^2+5}e^{it}\right) = \frac{1}{5}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\mathcal{D}-i}\frac{1}{\mathcal{D}+i}e^{it}\right) = \frac{1}{10}\mathrm{Im}\left(-i\frac{1}{\mathcal{D}-i}e^{it}\right)\\ &= \frac{1}{10}\mathrm{Im}\left(-ie^{it}\frac{1}{\mathcal{D}}1\right) = \frac{1}{10}\mathrm{Im}(-ite^{it}) = -\frac{1}{10}t\cos t.\end{aligned}$$
   对于第二个方程, 求得特解
   $$\frac{1}{5\mathcal{D}^2+5}(-\cos 2t) = \frac{1}{5(-2^2)+5}(-\cos 2t) = \frac{1}{15}\cos 2t.$$
   综上可得原方程的一个特解为 $-\frac{1}{10}t\cos t + \frac{1}{15}\cos 2t$.

作业 3.4 (95-1(1))

求方程 $\frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 8\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 4x = 0$ 的实通解和复通解.

♡

解 特征方程为 $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$. 整理配方可得
$$\lambda^2(\lambda+2)^2 + 4(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow (\lambda(\lambda+2) + 2i(\lambda+1))(\lambda(\lambda+2) - 2i(\lambda+1)) = 0.$$
由此可得特征值为 $\lambda_1 = -1-i, \lambda_2 = -1+i$, 重数均为 2. 因此方程的复线性无关解组为
$$\{e^{(-1-i)t}, te^{(-1-i)t}, e^{(-1+i)t}, te^{(-1+i)t}\},$$

实线性无关解组为 $\{e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, te^{-t}\cos t, te^{-t}\sin t\}$. 因此方程的复通解和实通解分别为

$$x(t) = (A_1 + B_1 t)e^{(-1-i)t} + (A_2 + B_2 t)e^{(-1+i)t}.$$

$$x(t) = (A_1 + B_1 t)e^{-t}\cos t + (A_2 + B_2 t)e^{-t}\sin t.$$

作业 3.5 (96-4(3))

求方程 $\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{1}{t}\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{2}{t^2}\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{2}{t^3}x = 0$ 的所有实值解.

解 作变换 $u = \ln|t|$, 则有

$$\frac{d}{du} = \frac{dt}{du}\frac{d}{dt} = t\frac{d}{dt}.$$

断言. 设 $\mathcal{D} = \frac{d}{du}$, 则

$$t^n\frac{d^n}{dt^n} = \mathcal{D}(\mathcal{D}-1)\cdots(\mathcal{D}-n+1).$$

利用归纳法证之. $n=1$ 是已证的, 设断言对 $n \geqslant 1$ 成立, 则

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\cdots(\mathcal{D}-n+1)(\mathcal{D}-n) &= t^n\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{d}{du} - n\right) = t^n\frac{d^n}{dt^n}\left(t\frac{d}{dt} - n\right) \\
&= t^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^{(n-k)}\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} - nt^n\frac{d^n}{dt^n} \\
&= t^n\left(t\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} + n\frac{d^n}{dt^n}\right) - nt^n\frac{d^n}{dt^n} \\
&= t^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}.
\end{aligned}$$

断言成立. 原方程可化为

$$\left(t^3\frac{d^3}{dt^3} - t^2\frac{d^2}{dt^2} + 2t\frac{d}{dt} - 2\right)x = 0 \Rightarrow (\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2) - \mathcal{D}(\mathcal{D}-1) + 2\mathcal{D} - 2)x = 0.$$

整理可得 $(\mathcal{D}-1)^2(\mathcal{D}-2)x = 0$. 特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 重数分别为 2,1. 因此实线性无关解组为 $\{e^u, ue^u, e^{2u}\}$, 即为 $\{|t|, |t|\ln|t|, t^2\}$, 因此原方程通解为 $x(t) = |t|(C_1 + C_2\ln|t|) + C_3t^2$.

注 本题有同学作变换 $x = tu$ 来求解, 也是可行的.

问题 3.1 讨论 n 阶 Euler 方程

$$a_0t^n\frac{d^nx}{dt^n} + a_1t^{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_nx = 0$$

的求解方法.

解 将上题的断言代入即可得 x 关于 u 的常系数齐次方程.

作业 3.6 (96-5)

给出 n 阶常系数齐次线性微分方程的解具有如下性质之一的充要条件:

1. 它的每一解当 $t \to +\infty$ 时趋向于零.
2. 它的每一解在 $0 \leqslant t < \infty$ 上是有界的.
3. 存在在 $0 \leqslant t < \infty$ 上无界的解.

解 设 n 阶常系数齐次线性微分方程的 k 个互异特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, 其中 $\operatorname{Re}\lambda_i = \alpha_i, \operatorname{Im}\lambda_i = \beta_i$, λ_i 的重数为 n_i.

1. 每一解当 $t \to +\infty$ 时趋于零的充要条件是 $\alpha_i < 0, i = 1, \cdots, k$(74-4(1) 的直接推论).

2. 每一解在 $0 \leqslant t < \infty$ 上有界的充要条件是 $\alpha_i \leqslant 0, i = 1, \cdots, k$, 并且若 $\alpha_i = 0$, 则 $n_i = 1$.
   $\Rightarrow$: $\alpha_i \leqslant 0$ 是容易验证的 (74-4(2) 的直接推论). 若某个特征值 λ_i 满足 $\alpha_i = 0$ 且重数 $n_i > 1$, 则 $t^{n_i-1}e^{i\beta_i t}$ 是方程的解, 它是无界的.
   $\Leftarrow$: 不妨设 $\alpha_k = 0, n_k = 1$. 此时方程通解形如
   $$x(t) = p_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + p_{k-1}(t)e^{\lambda_{k-1}t} + Ce^{i\beta_k t}.$$
   其中 $\deg p_i < n_i$, C 为复常数. 由于 $p_i(t)e^{\lambda_i t}$ 在 $+\infty$ 处的极限为 0(74-4(1)), 而 $|Ce^{i\beta_k t}| = |C| < +\infty$, 故方程的每一解在 $0 \leqslant t < \infty$ 上都有界.
3. 2 的充要条件取否即可: $\alpha_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, k$, 并且若 $\alpha_i = 0$, 则 $n_i > 1$.

问题 3.2(赵班 20mid) 考虑方程 $y'' + 4y' + 3y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上连续, 且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 证明: 方程的任意解 $y(x)$ 均成立 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

证明 齐次方程的线性无关解组为 $\{e^{-x}, e^{-3x}\}$. 因此一个特解为
$$y(x) = \int_0^x \frac{e^{-s-3x} - e^{-x-3s}}{-e^{-4s}} f(s)ds = \int_0^x (e^{s-x} - e^{3(s-x)})f(s)ds.$$
注意到齐次方程的任一解 $Ae^{-x} + Be^{-3x}$ 在 $+\infty$ 处的极限均为零, 因此只需证明特解 $y(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

任取 $\varepsilon > 0$, 则存在 $R > 0$, 对任意 $x > R$, 成立 $|f(x)| < \varepsilon$; 另一方面, 由题设可得 $|f(x)|$ 在 $x \geqslant 0$ 上有界, 设 $M > 0$ 为其上界. 由此可得 $x \geqslant R$ 时
$$\begin{aligned}
|y(x)| &\leqslant \left(\int_0^R + \int_R^x\right)(e^{s-x} - e^{3(s-x)})|f(s)|ds \\
&< \left(e^{R-x} - e^{-x} - \frac{1}{3}e^{3(R-x)} + \frac{1}{3}e^{-3x}\right)M + \left(\frac{2}{3} - e^{R-x} + \frac{1}{3}e^{3(R-x)}\right)\varepsilon \\
&< 2Me^{R-x} + \frac{2}{3}\varepsilon.
\end{aligned}$$
对任意 $x > R + \ln\frac{6M}{\varepsilon}$, 成立 $2Me^{R-x} < \frac{\varepsilon}{3}$, 此时成立 $|y(x)| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

作业 3.7 (96-8)

求微分方程
$$\frac{d^4x}{dt^4} - 4\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + x = (t+1)e^t$$
的全部解.

解 对应齐次方程的特征值为 $\lambda = 1$, 重数为 4. 利用算子法可求得特解
$$\frac{1}{(\mathcal{D}-1)^4}((t+1)e^t) = e^t\frac{1}{\mathcal{D}^4}(t+1) = e^t\left(\frac{t^5}{5!} + \frac{t^4}{4!}\right).$$
因此通解为 $x(t) = (C_0 + C_1t + C_2t^2 + C_3t^3)e^t + e^t(\frac{t^5}{5!} + \frac{t^4}{4!})$.

作业 3.8 (97-10)

求微分方程
$$\frac{d^4x}{dt^4} + x = 2e^t$$
满足初值条件
$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \dddot{x}(0) = 1$$

的解.

证明 首先求得一个特解为

$$2\frac{1}{\mathcal{D}^4+1}e^t = 2\frac{1}{1^4+1}e^t = e^t.$$

齐次方程的特征值为 $\omega_k(k=1,2,3,4)$, 其中 $\omega_k = e^{\frac{2k-1}{4}\pi i}$, 重数各为 1. 故原方程的通解为 $x(t) = e^t + \sum C_k e^{\omega_k t}$. 代入初值条件可得

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ 1 & \omega_3 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \\ 1 & \omega_4 & \omega_4^2 & \omega_4^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

由 Vandermonde 行列式非零可得 $C_k = 0$. 故初值问题的解为 $x(t) = e^t$.

作业 3.9 (103-5)

试用运算子法求解方程 $\dfrac{d^4x}{dt^4} + 2\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = t$.

解 方程可写为 $(\mathcal{D}^2+1)^2 x = t$, 故一个特解为

$$\frac{1}{(\mathcal{D}^2+1)^2}t = \left(1-\mathcal{D}^2+\cdots\right)^2 t = (1-2\mathcal{D}^2+\cdots)t = t.$$

求得通解为 $x(t) = (C_1+C_2t)\cos t + (C_3+C_4t)\sin t + t$.

作业 3.10 (附加 3-1)

1831 年在英国曼彻斯特附近发生过军队齐步过桥时使桥共振 (即驱动力的频率接近物体的固有频率时受迫振动的振幅增大) 致塌的事故, 利用 $x'' + px' + \omega_0^2 x = q\sin(\omega t)(p, q, \omega_0, \omega$ 均为实常数$)$ 分析此事故并给出合理建议.

解 记 $p = 2\beta\omega_0$, 其中 β 为阻尼系数. 将方程复数化可得

$$x'' + 2\beta\omega_0 x' + \omega_0^2 x = qe^{i\omega t}.$$

考虑形如 $x(t) = Ae^{i\omega t}$ 的特解. 计算可得

$$A = \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta\omega\omega_0 i}.$$

化简可得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{q(\cos\omega t + i\sin\omega t)}{\omega_0^2-\omega^2+2\beta\omega\omega_0 i} \\ &= \frac{q}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\omega_0^2}[((\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t + 2\beta\omega\omega_0\sin\omega t) \\ &\qquad + i((\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t - 2\beta\omega\omega_0\cos\omega t)]. \end{aligned}$$

因此原方程的一个实解为

$$x(t) = \frac{q((\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t - 2\beta\omega\omega_0\cos\omega t)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\omega_0^2}.$$

当军队齐步过桥时, 输入能量 q 的值较大; 另一方面, 当驱动力频率 ω 与固有频率 ω_0 很接近时, 上述解

近似化为

$$x(t) = -\frac{q\cos\omega_0 t}{2\beta\omega_0^2}.$$

若阻尼系数 β 较小,振幅 $x(t)$ 的值将会非常大,这时就会发生共振事故. 建议: 军队便步、轻步过桥.

作业 3.11 (附加 3-2)

求在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的 $f(t)$, 且分别满足

1. $f(t) = \sin t - \int_0^t (t-s)f(s)ds.$
2. $f(t) = e^t + \int_0^t (t-s)f(s)ds.$

♡

解 两种情况下 $f(t)$ 均为可微函数.

1. 由积分方程可得
$$f'(t) = \cos t - \int_0^t f(s)ds, \quad f(0) = 0.$$
从而 $f'(t)$ 也是可微函数, 且
$$f''(t) + f(t) = -\sin t, \quad f'(0) = 1.$$
齐次方程 $f''(t)+f(t)=0$ 的线性无关解组为 $\{\cos t, \sin t\}$, 因此上述方程的一个解为
$$\int_0^t \frac{\cos s\sin t - \cos t\sin s}{\cos^2 s + \sin^2 s}\cdot(-\sin s)ds = \frac{1}{2}(t\cos t - \sin t).$$
结合初值条件 $f(0)=0, f'(0)=1$ 可得 $x(t) = \frac{1}{2}(t\cos t + \sin t)$.
2. 类似 (1) 可得积分方程等价于初值问题
$$f''(t) - f(t) = e^t, \quad f(0)=1,\ f'(0)=1.$$
齐次方程 $f''(t)-f(t)=0$ 的线性无关解组为 $\{e^t, e^{-t}\}$, 因此方程的一个特解为
$$\int_0^t \frac{e^{s-t}-e^{t-s}}{-2}e^s ds = \frac{1}{2}((t-1)e^t + e^{-t}).$$
结合初值条件 $f(0)=1, f'(0)=1$ 可得 $x(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^t$.

3.2 补充内容

3.2.1 ODE 的幂级数解法

我们已经讨论了诸多方程的求解, 并给出了它们的显式解. 但对于绝大部分的方程, 并不存在 closed form 的解, 这时我们希望退而求其次, 给出它们的级数解. 既然要将函数写为级数形式, 自然避不开解析这一概念:

定义 3.1 (解析)

设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中区域, $f: U \to \mathbb{R}$ 为光滑函数. 称 f 在 $p=(p_1,\cdots,p_n)\in U$ 处解析, 是指在 p 的某个邻域内, f 可以展开成收敛幂级数

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_\alpha (x_1-p_1)^{\alpha_1}\cdots(x_n-p_n)^{\alpha_n}.$$

♣

注 容易验证函数在某点解析, 则必然光滑; 反之未必.

Cauchy 定理

首先简要讨论 Cauchy 问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.1}$$

在 $P_0 = (t_0, x_0)$ 附近可以用幂级数法求解的条件. 直观来看, 如果 f 在 P_0 附近解析, 我们自然希望初值问题 (3.1) 的解也能保持解析性质. 反之, 如下例子说明: 如果 f 在某点附近不解析, 即使 f 光滑, (3.1) 的解也可以不解析.

例 3.1 考虑函数 $f(t) = t^{-2}e^{-\frac{1}{t}}(t > 0), 0(t \leqslant 0)$, 则 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处光滑但不解析 (why?), 此时 (3.1) 的解为 $x(t) = e^{-\frac{1}{t}}(t > 0), 0(t \leqslant 0)$, 它在 $t = 0$ 处也是光滑但不解析.

下面我们来谈谈如何证明上述的"直观来看", 这是 Cauchy 在 1840 年左右证明的理论. 出于篇幅考虑, 这里只列出证明思路, 各位可以自行补充完整的证明内容. 先给出清晰的定理叙述:

定理 3.1 (Cauchy 定理)

若 (3.1) 中的函数 $f(t,x)$ 在 (t_0, x_0) 附近解析, 则 Cauchy 问题 (3.1) 在 t_0 附近存在唯一的解析解. ♡

证明 证明的核心是引入"优函数"的概念: 对于解析函数 $f(x,t) = \sum \lambda_{ij}(t-t_0)^i(x-x_0)^j$, 我们希望找到找到一个更易于控制和讨论的解析函数 $g(t,x) = \sum \mu_{ij}(t-t_0)^i(x-x_0)^j$, 它比 $f(x,t)$ 更"优", 即满足 $|\lambda_{ij}| \leqslant |\mu_{ij}|$. 我们现在需要做的工作是:

1. 找到满足上述的优函数 $g(t,x)$. 一个合适的优函数为:
$$g(t,x) = \frac{M}{(1-\frac{t-t_0}{a})(1-\frac{x-x_0}{b})}.$$
其中 $M, a, b > 0$ 为某常数.
2. 证明 $g(t,x)$ 对应的 Cauchy 问题 $x'(t) = g(t,x), x(t_0) = x_0$ 在局部存在解析解.
3. 给出 (3.1) 的形式解, 并证明 (2) 中初值问题的解也是此时求出的形式解的优函数, 进而形式解确实是收敛的, 于是证明了存在性.

这里的形式解即为不考虑敛散性的前提下给出的级数解. 这样就证明了存在性, 至于唯一性是容易检验的.

上述定理完全可以推广到一阶方程组的情形: 对于一阶方程组的初值问题 $x_k'(t) = f_k(t, x_1, \cdots, x_n)(k = 1, \cdots, n), x_k(t_0) = \xi_k$, 若 f_k 在 $(t_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ 附近解析, 则初值问题在 $t = t_0$ 附近存在唯一解析解. 这启发我们把幂级数解法推广至高阶方程.

我们知道: 首一的二阶线性方程 $x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$ 可以写为一阶方程组

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -q(t)x - p(t)y \end{cases}$$

若 $p(t), q(t)$ 在 t_0 附近解析, 则由 Cauchy 定理可得上述方程组在 t_0 附近也存在解析解. 这也就说明首一的二阶线性方程存在解析解. 更进一步, 对于方程 $a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x = 0$(不妨设 a, b, c 不存在公因子 $t - t_0$, 不然约去即可), 若 $a(t_0) \neq 0$, 则可以化归为前文所述的情形, 因此也存在解析解.

问题 3.3(20mid) 给出方程 $x'' + x\sin t = 0$ 的 $O(t^6)$ 的通解.

解 设方程的幂级数解为 $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i t^i$, 由于 $\sin t$ 展开为 Taylor 级数为 $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1}$, 代回原方

程可得

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i i(i-1)t^{i-2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1} \sum_{i=0}^{\infty} C_i t^i = 0.$$

整理比较系数可得

$$C_{i+2}(i+1)(i+2) + \sum_{\substack{2j+1+k=i \\ j,k\geqslant 0}} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} C_k = 0.$$

写出前面几项系数的递归式如下:

$$C_2 = 0, \quad 6C_3 + C_0 = 0, \quad 12C_4 + C_1 = 0, \quad 20C_5 + C_2 - \frac{C_0}{6} = 0, \quad 30C_6 + C_3 - \frac{C_1}{6} = 0.$$

求解可得 $O(t^6)$ 的通解

$$x(t) = C_0 + C_1 t - \frac{C_0}{6}t^3 - \frac{C_1}{12}t^4 + \frac{C_0}{120}t^5 + \frac{C_0 + C_1}{180}t^6 + o(t^6).$$

二阶线性方程的广义幂级数解

上文中我们证明了某些二阶线性方程可以使用幂级数法求解. 但如果二阶线性方程

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = 0 \tag{3.2}$$

无法化为首一且系数函数解析的形式时, 幂级数法可能失效. 例如:

例 3.2 考虑微分方程 $t^2x''+(3t-1)x'+x=0$, 设它在 $t=0$ 附近存在非平凡的幂级数解 $x(t)=\sum_{i=0}^{\infty} C_i t^i$, 代入可得

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i i(i-1)t^i + (3t-1)\sum_{i=0}^{\infty} C_i i t^{i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} C_i t^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty}(C_i(i+1)^2 - C_{i+1}(i+1))t^i = 0.$$

由此可得 $C_{i+1} = (i+1)C_i$, 因此 $C_i = i!C_0$. 因此幂级数解为 $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_0 i! t^i$. 若 $C_0 = 0$, 即对应零解, 这是平凡的; 若 $C_0 \neq 0$, 则幂级数的收敛半径为零, 即级数只在 $t=0$ 处收敛, 矛盾!

对于这种方程, 我们有如下定义:

定义 3.2 (正则奇点)

设 (3.2) 可以重写为

$$(t-t_0)^2 p(t)x''(t) + (t-t_0)q(t)x'(t) + r(t)x(t) = 0. \tag{3.3}$$

其中 p, q, r 在 t_0 附近是解析的, 并且满足 $p(t_0) \neq 0, q(t_0)^2 + r(t_0)^2 \neq 0$, 则称 t_0 是 (3.2) 的一个正则奇点.

我们本节的目标就是通过引入所谓**广义幂级数**来求解 (3.2) 在正则奇点 t_0 附近的解. 在幂级数的基础上, 我们对指数进行恰当的微操, 得到

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i (t-t_0)^{i+\rho},$$

其中 ρ 为实常数, 则上式称为广义幂级数. 我们证明如下核心定理:

定理 3.2

(3.3) 给出的方程在正则奇点 t_0 附近存在收敛的广义幂级数解.

证明 与 Cauchy 定理的证明一样, 我们仍旧先给出形式解, 再验证形式解确实局部收敛. 设 (3.3) 在 t_0 附

近的形式广义幂级数解为

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty} C_i(t-t_0)^{i+\rho}.$$

方程 (3.3) 在局部可以写为

$$(t-t_0)^2x''(t)+(t-t_0)\left(\sum_{i=0}^{\infty} q_i(t-t_0)^i\right)x'(t)+\left(\sum_{i=0}^{\infty} r_i(t-t_0)^i\right)x(t)=0.$$

将广义幂级数代入, 比较系数可得

$$C_i(i+\rho)(i+\rho-1)+\sum_{\substack{j+k=i\\ j,k\geqslant 0}}(r_j+(k+\rho)q_j)C_k=0.$$

方便起见, 令 $f_0(\rho)=\rho(\rho-1)+q_0\rho+r_0$, $f_j(\rho)=q_j\rho+r_j(j\geqslant 1)$, 则上式可写为

$$C_0f_0(\rho)=0,\quad C_if_0(\rho+i)+\sum_{j=0}^{i-1}C_jf_{i-j}(\rho+j)=0.$$

为了便于确定系数, 我们希望找到合适的 ρ 使得 $f_0(\rho)=0$ 且 $f_0(\rho+i)\neq 0(i\geqslant 1)$. 这是可以做到的, 事实上, 设二次方程 $f_0(\rho)$ 的两个根为 ρ_1,ρ_2. 若均为实根, 则选取 $\rho=\max\{\rho_1,\rho_2\}$; 若为共轭复根, 则选取 $\rho=\rho_1$ 或 ρ_2 均可. 在如此选取的 ρ 下, 由递归式可以将 $C_1,\cdots,C_i,\cdots$ 唯一地表示为有关 C_0 的形式, 以下不妨设 $C_0=1$.

下面我们证明: 上述得到的广义幂级数解在局部是收敛的. 首先估计 q_j,r_j 的上界. 设幂级数 $\sum q_j(t-t_0)^j$ 和 $\sum r_j(t-t_0)^j$ 在邻域 $|t-t_0|<h$ 内收敛, 任取 $R<h$, 比较收敛半径可得存在常数 $M>0$, 使得

$$|q_j|\leqslant\frac{M}{R^j},\quad |r_j|\leqslant\frac{M}{R^j}.$$

不妨设 M 也使得 $|f_j(\rho)|\leqslant\frac{M}{R^j}(j\geqslant 1)$.

其次估计 $f_0(\rho+i)$. 设 $f_0(\rho)$ 的另一个根是 ρ', 则 $\rho+\rho'=1-q_0$. 因此

$$f_0(\rho+i)=(\rho+i)(\rho+i-1)+q_0(\rho+i)+r_0=2i\rho+q_0i+i(i-1)=i(\rho-\rho')+i^2.$$

记 $d=\mathrm{Re}(\rho-\rho')\geqslant 0$, 则 $|f_0(\rho+i)|\geqslant i(i+d)$.

现在万事俱备, 只欠放缩了. 我们断言: $|C_i|\leqslant(\frac{M}{R})^i, i=1,2,\cdots$. 利用归纳法证明断言.

- 对于 $i=1$, 我们有

$$|C_1|=\frac{|f_1(\rho)|}{|f_0(\rho+1)|}\leqslant\frac{M}{R(d+1)}\leqslant\frac{M}{R}.$$

- 设断言对于 $i-1(i\geqslant 2)$ 成立, 那么由递归式可得 (一个马后炮, 不妨设 $M>2$)

$$\begin{aligned}|C_i|&\leqslant\sum_{j=0}^{i-1}|C_j|\frac{|f_{i-j}(\rho+j)|}{|f_0(\rho+i)|}\leqslant\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{M}{R}\right)^j\frac{|f_{i-j}(\rho)|+j|q_{i-j}|}{i(i+d)}\\&\leqslant\sum_{i=0}^{i-1}\frac{M^{j+1}}{R^i}\frac{j+1}{i(i+d)}\leqslant\frac{1}{R^i(i+d)}\sum_{j=1}^{i}M^j=\frac{M^i-1}{R^i(i+d)}\frac{M}{M-1}\\&\leqslant\frac{2(M^i-1)}{R^i(i+d)}<\left(\frac{M}{R}\right)^i.\end{aligned}$$

断言证毕, 因此广义幂级数解 $x(t)=\sum C_i(t-t_0)^{i+\rho}$ 在邻域 $|t-t_0|<R$ 内收敛, 由 R 选取的任意性可得 $x(t)$ 在邻域 $|t-t_0|<h$ 内收敛, happy!

注 这个定理演示了估计系数以证明解析性的一般手法, 此后在 PDE 部分的 Laplace 方程部分我们还会利用梯度估计来证明调和函数的解析性 (大概率是在习题课上).

3.2.2 Sturm-Liouville 边值问题

S-L 边值问题的引入

为了陈述我们研究 S-L 边值问题的动机, 我们介绍一个与物理有关的例子, 这也是后半学期 PDE 的重要内容之一.

例 3.3(一维弦振动) 考虑一条长为 L 的弦, 它可以在横向自由振动. 设 $u(x,t)$ 为弦上质点 $x(0 \leqslant x \leqslant L)$ 在时刻 t 的横向位移, 在初始时刻给弦一个微小扰动, 使它满足初值条件

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x).$$

然后弦进行自由振动, 满足一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

其中 $c > 0$ 为波速. 我们还要求弦的两端固定 (例如吉他弦), 即满足

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \forall t \geqslant 0.$$

这是一个二阶 PDE 的初边值问题, 求解不易. 为此, 我们考虑先求出方程的**驻波解** (又叫**分离解**): $u(x,t) = X(x)T(t)$. 代入方程可得

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \triangleq -\lambda \tag{3.4}$$

(因为 LHS 只与 t 有关, RHS 只与 x 有关, 二者相等则为常数). 由此, 结合边值条件我们得到

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(L) = 0.$$

这就化为了 ODE 的边值问题, 它属于 S-L 边值问题. 如果上述问题存在可数个特征值 $\{\lambda_n : n = 1,2,\cdots\}$, 对应特征函数为 $\{X_n(x) : n = 1,2,\cdots\}$, 则我们代回 (3.4) 可求得对应的 $T_n(t;A_n,B_n)$(解出的 T_n 带待定参数), 这样就得到了一列驻波解 $X_n(x)T_n(t)$. 但是, 我们还希望得到满足初值条件的解, 所以我们叠加驻波解得到

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t;A_n,B_n).$$

代入初值条件可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0;A_n,B_n) = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n'(0;A_n,B_n) = \psi(x).$$

如果特征函数系是函数空间内的一组完备正交基, 我们就可以对 φ, ψ 作 Fourier 展开来求出 A_n, B_n, 进而求出初边值问题的一个解.

所以, 我们希望研究 S-L 边值问题是否满足: (1) 特征值可数; (2) 特征函数系构成完备正交基 (用来作 Fourier 展开). 这正对应着 S-L 定理的主要内容. 在研究 S-L 理论之前, 我们先计算一个具体的实例:

问题 3.4 求如下 S-L 边值问题的特征值与特征函数:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ X(0) = 0, \ X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

解 由于我们现在没有任何可用的工具, 所以耐心讨论就好.

- 若 $\lambda < 0$, 设 $\lambda = -\omega^2 (\omega > 0)$, 则方程化为 $X''(x) - \omega^2 X(x) = 0$, 通解为 $X(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$. 将边值条件代入可得

$$A + B = 0, \quad \omega A e^{\omega\pi} - \omega B e^{-\omega\pi} = 0.$$

由 Cramer 法则可得上述方程组只有零解, 故此时 λ 非特征值.

- 若 $\lambda = 0$, 则通解为 $X(x) = A + Bx$. 将边值条件代入可得 $A = B = 0$, 此时边值问题只有零解, $\lambda = 0$ 非特征值.
- 若 $\lambda > 0$, 设 $\lambda = \omega^2(\omega > 0)$, 则方程化为 $X''(x)+\omega^2X(x) = 0$, 通解为 $X(x) = A\cos\omega x+B\sin\omega x$. 将边值条件代入可得
$$A = 0, \quad -\omega A\sin\omega\pi + \omega B\cos\omega\pi = 0.$$
要使 A, B 不同时为零, 求得 $A = 0, \omega = n + \frac{1}{2}, n = 0, 1, \cdots$. 因此求得边值问题的特征值和特征函数为
$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x, \quad n = 0, 1, \cdots$$

注 上面给出的 S-L 边值问题具有可数个非负特征值, 并且随 n 的增大趋向 $+\infty$; 同时, $\{X_n(x)\}$ 作为一组三角函数系, 根据 Fourier 级数的相关知识可得它构成了函数空间上的一组完备正交基.

笔记 在此后的类似习题中, 若边值问题满足常点条件, 大家可以直接由 S-L 定理推得特征值非负, 从而省去第一种情况的讨论.

常点情形的 Sturm-Liouville 定理

我们的核心目标就是尽量不借助泛函工具来证明常点情形的 S-L 定理. 回忆一般的 S-L 边值问题形如:
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{dX}{dx}\right) - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0 \\ \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0,\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

记算子 $\mathcal{L}_\lambda = \frac{d}{dx}(k(x)\frac{d}{dx}) - q(x) + \lambda\rho(x)$. 我们的核心定理如下:

定理 3.3 (Sturm-Liouville 定理)

对于 S-L 边值问题 (3.5), 若在 $[a, b]$ 上恒有 $k(x) > 0, \rho(x) > 0, q(x) \geqslant 0$, 并且 $\alpha_i, \beta_i \geqslant 0, \alpha_i^2+\beta_i^2 \neq 0(i = 1, 2)$, 则成立:

1. 非负性: 所有特征值 λ 均为非负实数.
2. 可数性: 全体特征值构成无穷数列 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$, 且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. 对应于每个特征值 λ_n, 只存在一个线性独立的特征函数 $X_n(x)$.
3. 正交性: 特征函数系 $\{X_n(x)\}$ 相互加权正交, 即对于任意 $n \neq m$, 有
$$\langle X_n, X_m\rangle = \int_a^b \rho(x)X_n(x)X_m(x)dx = 0.$$
4. 完备性: 特征函数系 $\{X_n(x)\}$ 构成函数空间 $\mathscr{L}_\rho^2[a, b]$ 的完备正交基.

其中, 前三条性质是我们现在可以证明的. 完备性的证明需要借助泛函工具, 故略过.

引理 3.1

特征值 λ 对应的边值问题解的全体构成一维线性空间.

证明 容易验证 $\mathcal{L}_\lambda$ 是一个线性微分算子, 边值条件也是线性的, 因此 $\mathcal{L}_\lambda X = 0$ 的解的全体构成线性空间. 我们只需证明它是一维的, 即证明任意两个解 X_1, X_2 都是线性相关的.

(3.5) 中的 S-L 方程可以化为 X, X' 关于 x 的一阶线性方程组, 于是我们只需证明 X_1, X_2 的 Wronskian 在某点处为零. 由边值条件可得

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\beta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1(a) & X_2(a)\\ X_1'(a) & X_2'(a)\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

由条件可得 $\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\beta_1\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$, 因此 X_1, X_2 在 $x=a$ 处的 Wronskian 为零.

笔记 引理 2.1 证明了可数性的后半部分, 即对于每个特征值 λ, 只存在一个线性独立的特征函数 $X(x)$. 换言之, λ 对应解的全体为 $\mathrm{Span}(X)$.

命题 3.1 (非负性)

所有的特征值 λ 均为非负实数.

证明 设 λ 对应的特征函数为 $X(x)$, X 自然非零. 由

$$\begin{aligned}\lambda\int_a^b\rho(x)|X(x)|^2dx&=\int_a^b X(x)\cdot\lambda\rho(x)X(x)dx\\&=-\int_a^b X(x)\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX(x)}{dx}\right)dx+\int_a^b q(x)|X(x)|^2dx\\&=\int_a^b k(x)\left|\frac{dX(x)}{dx}\right|^2dx-k(x)X(x)\frac{dX(x)}{dx}\bigg|_a^b+\int_a^b q(x)|X(x)|^2dx\\&\geqslant k(a)X(a)X'(a)-k(b)X(b)X'(b).\end{aligned}$$

- 若 $\beta_1=0$, 则 $X(a)=0$; 若 $\beta_1\neq0$, 则 $k(a)X(a)X'(a)=\frac{\alpha_1}{\beta_1}k(a)|X(a)|^2\geqslant0$.
- 若 $\beta_2=0$, 则 $X(b)=0$; 若 $\beta_2\neq0$, 则 $-k(b)X(b)X'(b)=\frac{\alpha_2}{\beta_2}k(b)|X(b)|^2\geqslant0$.

综上可得 $k(a)X(a)X'(a)$ 和 $-k(b)X(b)X'(b)$ 一定非负, 进而

$$\lambda\int_a^b\rho(x)|X(x)|^2dx\geqslant0\Rightarrow\lambda\geqslant0.$$

命题 3.2 (加权正交)

特征函数系 $\{X_n(x)\}$ 相互加权正交.

证明 设 λ_m 和 λ_n 分别对应特征函数 $X_m(x)$ 和 $X_n(x)$, 其中 $m\neq n$. 则

$$\begin{aligned}&(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b\rho(x)X_m(x)X_n(x)dx\\&=\int_a^b X_n(x)\left(-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX_m(x)}{dx}\right)+q(x)X_m(x)\right)dx-\int_a^b X_m(x)\left(-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX_n(x)}{dx}\right)+q(x)X_n(x)\right)dx\\&=\left(\int_a^b k(x)X_m(x)X_n(x)dx-k(x)X_n(x)\frac{dX_m(x)}{dx}\bigg|_a^b\right)-\left(\int_a^b k(x)X_n(x)X_m(x)dx-k(x)X_m(x)\frac{dX_n(x)}{dx}\bigg|_a^b\right)\\&=k(a)\begin{vmatrix}X_n(a) & X_m(a)\\ X_n'(a) & X_m'(a)\end{vmatrix}-k(b)\begin{vmatrix}X_n(b) & X_m(b)\\ X_n'(b) & X_m'(b)\end{vmatrix}=0.\end{aligned}$$

其中最后一式的两个 Wronskians 为零类比前文可证.

现在软柿子捏完了, 我们必须面对余下的可数性. 可数性的证明不甚平凡, 首先我们要把 (3.5) 转化为更简洁的形式:

引理 3.2

S-L 边值问题 (3.5) 可以转化为

$$\begin{cases} X''(x)+(\lambda+P(x))X(x)=0 \\ X(0)\cos\alpha - X'(0)\sin\alpha=0 \\ X(1)\cos\beta - X'(1)\sin\beta=0 \end{cases} \tag{3.6}$$

其中 $0\leqslant\alpha<\pi, 0\leqslant\beta<\pi$.

证明 定义常数 $C=\int_a^b\sqrt{\frac{\rho(x)}{k(x)}}dx$, 作以下 Liouville 变换即可.

$$t=\frac{1}{C}\int_0^x\sqrt{\frac{\rho(s)}{k(s)}}ds,\quad Y=\sqrt{C}\sqrt[4]{\rho k}X,\quad \mu=C^2\lambda.$$

笔记 注意到上述给出的变换是可逆的, 并且 $\mu=C^2\lambda$ 保持可数性. 于是我们只需证明边值问题 (3.6) 的特征值满足可数性即可.

下面我们考虑如何证明 (3.6) 特征值的可数性. 为此, 我们还需要进一步的变换. 设 $X(x;\lambda)$ 是 (3.6) 中方程满足第一个初值条件的非零解 (写成一阶方程组的形式, 由解的存在性定理可知 $X(x;\lambda)$ 存在), 我们需要确定合适的 λ 使得 $X(x;\lambda)$ 满足第二个初值条件. 引入如下 Prufer 变换:

$$X(x;\lambda)=R(x;\lambda)\sin\Theta(x;\lambda),\quad \frac{\partial X}{\partial x}(x;\lambda)=R(x,\lambda)\cos\Theta(x;\lambda).$$

其中 $R(x;\lambda)>0$. 则有

$$R(x;\lambda)=\sqrt{X^2+X_x^2},\quad \Theta(x;\lambda)=\arctan\frac{X}{X_x}.$$

将第一个初值条件代入可得

$$R(0;\lambda)\sin(\Theta(0;\lambda)-\alpha)=0.$$

因此 $\Theta(0;\lambda)=\alpha+k\pi(k\in\mathbb{Z})$, 不妨设 $k=0$. 求导可得

$$\frac{d\Theta}{dx}=\frac{X_x^2-XX_{xx}}{X_x^2}\frac{X_x^2}{X^2+X_x^2}=\frac{X_x^2}{X^2+X_x^2}+(\lambda+P(x))\frac{X^2}{X^2+X_x^2}=\cos^2\Theta+(\lambda+P(x))\sin^2\Theta.$$

于是我们得到了 Θ 关于 x 的初值问题:

$$\begin{cases} \Theta'(x)=\cos^2\Theta+(\lambda+P(x))\sin^2\Theta(0\leqslant x\leqslant 1) \\ \Theta(0;\lambda)=\alpha \end{cases} \tag{3.7}$$

由解的存在唯一性定理可得, 对任一 λ, 上述初值问题存在唯一解 $\Theta(x;\lambda)$, 并且由解对初值的可微性定理可得 $\Theta(x;\lambda)$ 关于 λ 可微. 要使 $X(x;\lambda)$ 满足第二个初值条件, 则有 $\Theta(1;\lambda)=\beta+n\pi$. 因此求特征值 λ 的问题转化为了方程 $\Theta(1;\lambda)=\beta+n\pi$ 的求根问题. 以下我们记 $\omega(\lambda)=\Theta(1;\lambda)$.

命题 3.3 (可数性)

对任意 $n=0,1,2,\cdots$, 方程 $\omega(\lambda)=\beta+n\pi$ 存在唯一解 λ_n, 并且满足 $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$.

借助下面两个引理, 我们就能证明上述可数性.

引理 3.3

$\omega(\lambda)$ 关于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 严格递增.

证明 (3.7) 中的方程两边对 λ 求导可得

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda} = (\lambda + P(x) - 1)\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}\sin 2\Theta + \sin^2\Theta.$$

这是 $\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}$ 关于 x 的一阶线性方程, 且由初值可得满足 $\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}(0;\lambda) = 0$. 求解可得

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda} = \int_0^x \sin^2\Theta(s;\lambda) e^{\int_s^x (\lambda + P(u) - 1)\sin 2\Theta(u;\lambda)du} ds.$$

由此即可得 $\omega'(\lambda) = \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}(1;\lambda) > 0$, 因此 $\omega(\lambda)$ 关于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 单调递增.

引理 3.4

$\omega(\lambda)$ 的值域为 $\omega(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

证明 由于 $\omega(\lambda)$ 在 $-\infty < \lambda < +\infty$ 上严格递增, 我们只需证明:

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \omega(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \omega(\lambda) = +\infty.$$

- 对于第一个极限, 任取 $0 < \varepsilon < \min\{\pi - \alpha, \frac{\pi}{2}\}$, 构造函数

  $$U_\varepsilon(x) = (\pi - \varepsilon)(1 - x) + \varepsilon x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

  这是一个满足 $U_\varepsilon(0) = \pi - \varepsilon > \alpha, U_\varepsilon(1) = \varepsilon$ 的严格递减函数, 其导数为 $U_\varepsilon'(x) = 2\varepsilon - \pi$. 我们希望能证明: 当负数 λ 充分小时, $\Theta(x;\lambda)$ 的图像总夹在 x 轴与 U_ε 的图像之间, 进而 $0 < \Theta(1;\lambda) \leqslant U_\varepsilon(1) \Rightarrow 0 < \omega(\lambda) \leqslant \varepsilon$, 这样就导出了结论.

  首先证明 $\Theta(x;\lambda) > 0, \forall x \in (0,1), \forall \lambda (\heartsuit)$. 初值条件告诉我们 $\Theta(0;\lambda) = \alpha \geqslant 0$. 若 $\alpha = 0$, 由方程可得 $\Theta'(x;\lambda) = 1$, 即 $\Theta(x;\lambda)$ 在 $x = 0$ 附近递增, 所以存在 $h > 0$ 使得 $\Theta(x;\lambda) > 0, \forall x \in (0, h]$. 若 $\alpha > 0$ 则上述结论显然.

  现在我们反证, 假设待证命题 $(\heartsuit)$ 不成立, 则 $\xi \triangleq \inf\{0 < x < 1 : \Theta(x;\lambda) \leqslant 0\}$ 存在, 且 $h < \xi < 1$. 由连续性可得 $\Theta(\xi) = 0$, 且由于 $\forall x \in [h, \xi)$, $\Theta(x) > 0$, 故有 $\Theta'(\xi;\lambda) \leqslant 0$. 但是由方程可得 $\Theta'(\xi;\lambda) = 1$, 矛盾!

  其次证明当 λ 充分小时, $\Theta(x;\lambda) < U_\varepsilon(x)$ 在 $x \in [0,1)$ 上恒成立. 假设不然, 由于我们给定 $\alpha = \Theta(0;\lambda) < U_\varepsilon(x) = \pi - \varepsilon$, 故 $\eta \triangleq \inf\{0 < x < 1 : \Theta(x;\lambda) = U_\varepsilon(x)\} \in (0,1)$. 在 η 处, 积分曲线的斜率 $\Theta'(x;\lambda)$ 大于等于直线 U_ε 的斜率 $2\varepsilon - \pi$(why?) 但是由于在 $0 \leqslant x \leqslant \eta$ 上恒有 $\varepsilon < \Theta(x;\lambda) < \pi - \varepsilon$, 因此当 λ 充分小时, 有

  $$\Theta'(x;\lambda) = 1 + (\lambda + P(x) - 1)\sin^2\Theta \leqslant 1 + (\lambda + \max P - 1)\sin^2\varepsilon.$$

  若取 $\lambda < \frac{2\varepsilon - \pi - 1}{\sin^2\varepsilon} + 1 - \max P$, 则可得 $\Theta'(x;\lambda) < 2\varepsilon - \pi, \forall x \in [0, \eta]$, 这与 $\Theta'(\eta;\lambda) \geqslant 2\varepsilon - \pi$ 矛盾!

- 现在我们证明第二个极限. 当 λ 充分大时, 总有

  $$\Theta'(x;\lambda) \geqslant 1 + \frac{1}{2}\lambda\sin^2\Theta \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{\Theta'(x;\lambda)}{2 + \lambda\sin^2\Theta}.$$

  我们作积分以估计之, 因为涉及三角函数, 这个过程要十分小心. 首先有

  $$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{\Theta'(x;\lambda)}{2 + \lambda\sin^2\Theta}dx = \int_\alpha^{\omega(\lambda)} \frac{dt}{2 + \lambda\sin^2 t}.$$

任取 $n \in \mathbb{N}$, 则我们得到

$$\int_{n\pi}^{\omega(\lambda)} \frac{dt}{2+\lambda\sin^2 t} \geqslant \frac{1}{2} - \int_{\alpha}^{n\pi} \frac{dt}{2+\lambda\sin^2 t} \geqslant \frac{1}{2} - \int_{0}^{n\pi} \frac{dt}{2+\lambda\sin^2 t} = \frac{1}{2} - 2n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\lambda\sin^2 t}$$
$$\geqslant \frac{1}{2} - 2n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\lambda\frac{4t^2}{\pi^2}} = \frac{1}{2} - \frac{n\pi}{\sqrt{2\lambda}}\arctan\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{n\pi^2}{2\sqrt{2\lambda}}.$$

由上式可得当 λ 充分大时, 有 $\int_{n\pi}^{\omega(\lambda)} \frac{dt}{2+\lambda\sin^2 t} > 0$, 故 $\omega(\lambda) > n\pi$. Happy!

由上述两个引理可得 $\omega(\lambda)$ 严格递增且值域为 $(0, +\infty)$, 可数性立证.

第 4 章 第四次习题课 (by 陈禹汐)

4.1 习题讲解

作业 4.1 (116-4(2))

利用 e^{At} 求解下列常微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + e^t \end{cases} \qquad x(0) = x_0, y(0) = y_0.$$

♡

解 记方程组为 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$, 其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

金福临 P14 的结论: 对于 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 有 $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$, 根据非齐次方程组的解公式, 对于 $t_0 = 0$, 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\boldsymbol{f}(s)ds &= \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & (t-s)e^{-(t-s)} \\ 0 & e^{-(t-s)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ e^s \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t}x_0 + te^{-t}y_0 \\ e^{-t}y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} (t-s)e^{2s-t} + e^{s-t} \\ e^{2s-t} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} (x_0 - \frac{5}{4} + (y_0 - \frac{1}{2})t)e^{-t} + \frac{1}{4}e^t + 1 \\ (y_0 - \frac{1}{2})e^{-t} + \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

作业 4.2 (116-6)

证明常系数线性微分方程组 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ 具有周期为 $\omega(\omega \neq 0)$ 的非零周期解的充要条件是 A 具有形状如 $\frac{2k\pi}{\omega}i$ 的特征根, 其中 $k \in \mathbb{Z}$.

♡

证明 由于方程的通解为 $\boldsymbol{x} = e^{At}\boldsymbol{C}$, 因此

$$\begin{aligned} \exists \text{周期为 } \omega \neq 0 \text{ 的非零解} &\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{C}_0 \neq \boldsymbol{0}, \text{ s.t. } e^{A(t+\omega)}\boldsymbol{C}_0 = e^{At}\boldsymbol{C}_0, \quad \forall t \\ &\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{C}_0 \neq \boldsymbol{0}, \text{ s.t. } e^{At}(e^{A\omega} - I)\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{0}, \quad \forall t \\ &\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{C}_0 \neq \boldsymbol{0}, \text{ s.t. } (e^{A\omega} - I)\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{0}, \quad \forall t \\ &\Leftrightarrow \det(e^{A\omega - I}) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{A\omega} - I \text{ 存在零特征值} \\ &\Leftrightarrow e^{A\omega} \text{ 的某个特征值为} 1. \end{aligned}$$

设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 $A\omega$ 的特征值, 则存在可逆阵 P, 使得 $A\omega = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$. 由上三角阵的乘积仍

为上三角阵可得 $e^{A\omega}$ 的特征值为 $e^{\lambda_1},\cdots,e^{\lambda_n}$. 所以

$$\begin{aligned}\exists\text{周期为 }\omega\neq 0\text{ 的非零解 }&\Leftrightarrow \exists A\omega\text{ 的某一特征值 }\lambda_j\text{ s.t. }e^{\lambda_j}=1\\&\Leftrightarrow \exists A\text{ 的某一特征值 }\tilde{\lambda}_j=\frac{2k\pi i}{\omega}.\end{aligned}$$

作业 4.3 (附加)

证明以下命题:

1. 若 $A,B\in\mathbb{M}_n$, $AB=BA$, 则 $e^{A+B}=e^Ae^B$.
2. 对任何 $A\in\mathbb{M}_n$, e^A 可逆, 且 $(e^A)^{-1}=e^{-A}$.
3. 若 $P\in\mathbb{M}_n$ 是非奇异的, 即 $\det P\neq 0$, 则 $e^{PAP^{-1}}=Pe^AP^{-1}$.

♡

证明

1. 由 $AB=BA$ 可得
$$e^{A+B}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A+B)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{i+j=k\\i,j\geqslant 0}}\frac{k!}{i!j!}A^iB^j=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^i}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B^j}{j!}=e^Ae^B.$$
2. 由 1 可得 $e^Ae^{-A}=e^{-A}e^A=e^{-A+A}=e^O=I_n$, 所以 e^A 可逆且 $(e^A)^{-1}=e^{-A}$.
3. 直接计算可得
$$e^{PAP^{-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(PAP^{-1})^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}P\frac{A^k}{k!}P^{-1}=Pe^AP^{-1}.$$

作业 4.4 (138-1(2)(6)(9))

求解下列常微分方程组.

1. $\dfrac{dx}{dt}=-5x-y,\ \dfrac{dy}{dt}=2x-3y.$
2. $\dfrac{dx}{dt}=2x-11y-6z,\ \dfrac{dy}{dt}=2x-8y-4z,\ \dfrac{dz}{dt}=-x+3y.$
3. $\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=y+z,\ \dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dz}{dt}=z+x,\ \dfrac{dz}{dt}+\dfrac{dx}{dt}=x+y.$

♡

解 以下均用 A 表示系数矩阵.

1. A 的特征值为 $\lambda_1=-4+i,\lambda_2=-4-i$. λ_1 对应特征向量 $\boldsymbol{h}_1=(1,-1-i)$. 因为 λ_1,λ_2 共轭, 且
$$e^{\lambda_1t}\boldsymbol{h}_1=e^{(-4+i)t}\begin{pmatrix}1\\-1-i\end{pmatrix}=e^{-4t}\begin{pmatrix}\cos t\\-\cos t+\sin t\end{pmatrix}+ie^{-4t}\begin{pmatrix}\sin t\\-\sin t-\cos t\end{pmatrix}.$$
化为实基解矩阵
$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^{-4t}\cos t & e^{-4t}\sin t\\ e^{-4t}(\sin t-\cos t) & e^{-4t}(-\sin t-\cos t)\end{pmatrix}.$$
通解为 $\boldsymbol{x}=\Phi(t)\boldsymbol{C},\boldsymbol{C}=(C_1,C_2)^T,C_1,C_2$ 为任意常数.
2. Step 1. A 的特征值为 $\lambda=-2$, 重数为 3.
Step 2. $(A-\lambda I)^3=O$. 可取 $(A-\lambda I)^3$ 的基础解系为 $\boldsymbol{r}_{1,0}=(1,0,0)^T,\boldsymbol{r}_{2,0}=(0,1,0)^T,\boldsymbol{r}_{3,0}=(0,0,1)^T$.

Step 3. 按照公式计算可得

$$\boldsymbol{r}_{1,1}=(A-\lambda I)\boldsymbol{r}_{1,0}=(4,2,1)^T,\quad \boldsymbol{r}_{1,2}=(A-\lambda I)^2\boldsymbol{r}_{1,0}=(0,0,0)^T.$$

$$\boldsymbol{r}_{2,1}=(A-\lambda I)\boldsymbol{r}_{2,0}=(-11,-6,3)^T,\quad \boldsymbol{r}_{2,2}=(A-\lambda I)^2\boldsymbol{r}_{2,0}=(4,2,-1)^T.$$

$$\boldsymbol{r}_{3,1}=(A-\lambda I)\boldsymbol{r}_{3,0}=(-6,-4,2)^T,\quad \boldsymbol{r}_{3,2}=(A-\lambda I)^2\boldsymbol{r}_{3,0}=(8,4,-2)^T.$$

Step 4. 计算可得

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t)=e^{\lambda t}\left(\boldsymbol{r}_{1,0}+\frac{t}{1!}\boldsymbol{r}_{1,1}+\frac{t^2}{2!}\boldsymbol{r}_{1,2}\right)=\begin{pmatrix}(1+4t)e^{-2t}\\ 2te^{-2t}\\ -te^{-2t}\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t)=e^{\lambda t}\left(\boldsymbol{r}_{2,0}+\frac{t}{1!}\boldsymbol{r}_{2,1}+\frac{t^2}{2!}\boldsymbol{r}_{2,2}\right)=\begin{pmatrix}(-11t+2t^2)e^{-2t}\\ (1-6t+t^2)e^{-2t}\\ (3t-\frac{t^2}{2})e^{-2t}\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t)=e^{\lambda t}\left(\boldsymbol{r}_{3,0}+\frac{t}{1!}\boldsymbol{r}_{3,1}+\frac{t^2}{2!}\boldsymbol{r}_{3,2}\right)=\begin{pmatrix}(-6t+4t^2)e^{-2t}\\ (-4t+2t^2)e^{-2t}\\ (1+2t-t^2)e^{-2t}\end{pmatrix}.$$

因此基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1(t) & \boldsymbol{\varphi}_2(t) & \boldsymbol{\varphi}_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+4t)e^{-2t} & (-11t+2t^2)e^{-2t} & (-6t+4t^2)e^{-2t}\\ 2te^{-2t} & (1-6t+t^2)e^{-2t} & (-4t+2t^2)e^{-2t}\\ -te^{-2t} & (3t-\frac{t^2}{2})e^{-2t} & (1+2t-t^2)e^{-2t}\end{pmatrix}.$$

通解即为 $\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}=(C_1,C_2,C_3)^T$, C_1,C_2,C_3 为任意常数.

3. 三式相加可得

$$2\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}\right)=2(x+y+z)\Rightarrow\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=x+y+z.$$

相减整理可得

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=z,\quad \frac{dz}{dx}=x.$$

A 为系数矩阵, 则 $\det(A-\lambda I)=1-\lambda^3\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\lambda_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$($\lambda=1$ 不是三重根!) 分别计算可得 λ_1,λ_2 的特征向量为

$$\boldsymbol{r}_{1,0}=(1,1,1)^T,\quad \boldsymbol{r}_{2,0}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-1,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^T.$$

由于 λ_2,λ_3 是共轭复根, 考虑其实虚部即可. 因此

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t)=e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{r}_{1,0}=(e^t,e^t,e^t)^T,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t)+i\boldsymbol{\varphi}_2(t)+i\boldsymbol{\varphi}_3(t)=e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{r}_{2,0}=e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ -\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ \frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{pmatrix}+ie^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ -\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{pmatrix}.$$

因此基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t & e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\pi}{3}) \\ e^t & e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ e^t & e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}t) & e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{3})\end{pmatrix}.$$

通解为 $\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{C},\boldsymbol{C}=(C_1,C_2,C_3)^T,C_1,C_2,C_3$ 为任意常数.

作业 4.5 (140-9)

利用定理 3 推导 n 阶常系数线性微分方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx=0$$

的解的表达式.

解 令 $x=x_0,x'(t)=x_1,\cdots,x^{(n-1)}(t)=x_{n-1}$, 原微分方程化为方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_0}{dt}=x_1\\ \dfrac{dx_1}{dt}=x_2\\ \vdots \\ \dfrac{dx_{n-2}}{dt}=x_{n-1}\\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt}=-a_1x_{n-1}-a_2x_{n-2}-\cdots-a_nx_0\end{cases}\Rightarrow\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x},\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1\end{pmatrix}.$$

由 Laplace 计算可得

$$I_n=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1\\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & \lambda+a_1\end{vmatrix}=\lambda I_{n-1}+a_n.$$

归纳可得

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n.$$

因此 A 的特征值即为上述多项式的根. 若 $(\lambda_iI-A)\boldsymbol{h}=\boldsymbol{0}$, 可令 $h_1=1,h_2=\lambda_i,\cdots,h_n=\lambda_i^{n-1}$, 故特征向量为 $(1,\lambda_i,\cdots,\lambda_i^{n-1})^T$. 设 λ_i 的重数为 n_i, 根据定理 3 可得存在 n 个循环向量多项式 $\boldsymbol{p}_1(t),\cdots,\boldsymbol{p}_n(t)$ 使得 $\boldsymbol{p}_1(0),\cdots,\boldsymbol{p}_n(0)$ 线性无关, 且 λ_i 对应 $\boldsymbol{p}_i(t)$ 的多项式次数为 n_i-1. 解可表示为 $\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n}C_j\boldsymbol{p}_j(t)e^{\lambda_jt}$.

作业 4.6 (157-2)

设 $\Phi(t)$ 是方程组 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}$ 的基本解方阵, 试证 $X(t)$ 为方程组的解方阵的充要条件是存在 n 阶常值阵 C, 使得 $X(t)=\Phi(t)C$. 并给出 $X(t)$ 为基本解方阵的条件.

证明 设 $\Phi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t)\end{pmatrix}$, 则 $\varphi_k(t)$ 是方程组的解且线性无关.

设 $X(t)$ 的第 k 个列向量为 $\boldsymbol{x}_k(t)$, 由于 $\{\varphi_k(t):k=1,\ldots,n\}$ 构成 n 维解空间的一组基, 故 $X(t)$ 是解方阵 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}_k(t)$ 是方程组的解, $\forall k$ $\Leftrightarrow$ 存在常数 $c_{1k},\cdots,c_{nk}$ 使得 $\boldsymbol{x}_k(t)=c_{1k}\varphi_1(t)+\cdots+c_{nk}\varphi_n(t)$ $\Leftrightarrow$ $X(t)=\Phi(t)C$, 其中 $C=(c_{ij})$.

$X(t)$ 为基本解方阵的充要条件是存在 n 阶可逆阵 C 使得 $X(t)=\Phi(t)C$.

作业 4.7 (158-6(2))

求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1\cos^2 t+x_2\sin^2 t\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1\sin^2 t+x_2\cos^2 t\end{cases}$$

解 两方程相加可得

$$\frac{d(x_1+x_2)}{dt}=x_1(\cos^2 t+\sin^2 t)+x_2(\sin^2 t+\cos^2 t)=x_1+x_2\Rightarrow x_1+x_2=C_1e^t.$$

两方程相减有

$$\frac{d(x_1-x_2)}{dt}=x_1(\cos^2 t-\sin^2 t)-x_2(\cos^2 t-\sin^2 t)=(x_1-x_2)\cos 2t\Rightarrow x_1-x_2=C_2e^{\frac{1}{2}\sin 2t}.$$

由上述解得

$$x_1=\frac{1}{2}(C_1e^t+C_2e^{\frac{1}{2}\sin 2t}),\quad x_2=\frac{1}{2}(C_1e^t-C_2e^{\frac{1}{2}\sin 2t}).$$

作业 4.8 (158-7(7))

求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+x+y=t^2\\ \dfrac{dy}{dt}+y+z=2t\\ \dfrac{dz}{dt}+z=t\end{cases}$$

解 方程组可写为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}t^2\\2t\\t\end{pmatrix}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t).$$

$\det(\lambda I-A)=(\lambda+1)^3\Rightarrow$ 特征值 $\lambda=-1$, 重数为 3. 由于 $(A-\lambda I)^3=O$, 可取基础解系 $\boldsymbol{r}_{1,0}=(1,0,0)^T,\boldsymbol{r}_{2,0}=(0,1,0)^T,\boldsymbol{r}_{3,0}=(0,0,1)^T$. 代入公式计算可得

$$\boldsymbol{r}_{1,1}=(0,0,0)^T,\quad \boldsymbol{r}_{2,1}=(-1,0,0)^T,\quad \boldsymbol{r}_{3,1}=(0,-1,0)^T.$$
$$\boldsymbol{r}_{1,2}=(0,0,0)^T,\quad \boldsymbol{r}_{2,2}=(0,0,0)^T,\quad \boldsymbol{r}_{3,2}=(1,0,0)^T.$$

因此有

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t)=e^{\lambda t}\left(\boldsymbol{r}_{1,0}+\frac{t}{1!}\boldsymbol{r}_{1,1}+\frac{t^2}{2!}\boldsymbol{r}_{1,2}\right)=\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t)=e^{\lambda t}\left(\boldsymbol{r}_{2,0}+\frac{t}{1!}\boldsymbol{r}_{2,1}+\frac{t^2}{2!}\boldsymbol{r}_{2,2}\right)=\begin{pmatrix}-te^{-t}\\e^{-t}\\0\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t)=e^{\lambda t}\left(\boldsymbol{r}_{3,0}+\frac{t}{1!}\boldsymbol{r}_{3,1}+\frac{t^2}{2!}\boldsymbol{r}_{3,2}\right)=\begin{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^{-t}\\ -te^{-t}\\ e^{-t}\end{pmatrix}.$$

因此齐次方程 $\frac{dx}{dt}=A\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^{-t} & -te^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t}\\ 0 & e^{-t} & -te^{-t}\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{pmatrix}.$$

记 $Q=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 则 $\Phi(t)=e^{-t}(I_3+Qt+\frac{1}{2!}Q^2t^2+\cdots)=e^{-t}e^{Qt}=e^{(Q-I)t}$. 因此逆矩阵为

$$\Phi^{-1}(t)=e^{(I-Q)t}=e^t\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2}\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

因此求得

$$\boldsymbol{C}(t)=\boldsymbol{C}+\int_0^t e^s\begin{pmatrix}1 & s & \frac{s^2}{2}\\ & 1 & s\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s^2\\ 2s\\ s\end{pmatrix}ds=\boldsymbol{C}+\begin{pmatrix}(\frac{t^3}{2}+\frac{3t^2}{2}-3t+3)e^t\\ t^2e^t\\ (t-1)e^t\end{pmatrix}.$$

因此通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{C}(t)=\begin{pmatrix}e^{-t} & -te^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t}\\ 0 & e^{-t} & -te^{-t}\\ 0 & 0 & e^{-t}\end{pmatrix}\left[\boldsymbol{C}+\begin{pmatrix}(\frac{t^3}{2}+\frac{3t^2}{2}-3t+3)e^t\\ t^2e^t\\ (t-1)e^t\end{pmatrix}\right].$$

笔记 本题也可以根据第三个方程解出 $z(t)$, 再带回其他方程, 更简便.

作业 4.9 (169-2)

试证明可用 $x=a(t)y$ 把二阶线性方程 $x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x$ 化为 $y''(t)+r(t)y=0$, 并求出 $a(t)$ 和 $r(t)$.

证明 将 $x=a(t)y$ 代入原方程可得

$$ay''+2a'y'+a''y+p(a'y+ay')+qay=0\Rightarrow ay''+(2a'+pa)y'+(a''+pa'+qa)y=0.$$

要使方程形如 $y''+r(t)y=0$, 则

$$2a'+pa=0,\quad a''+pa'+qa=ar.$$

分别求解可得

$$\frac{da}{dt}=-\frac{1}{2}p(t)a(t)\Rightarrow a(t)=Ce^{-\int\frac{1}{2}p(t)dt}.$$

$$a'(t)=-\frac{1}{2}Cp(t)e^{-\int\frac{1}{2}p(t)dt},\quad a''(t)=-\frac{1}{2}C\left(p'(t)e^{-\int\frac{1}{2}p(t)dt}-\frac{1}{2}p^2(t)e^{-\int\frac{1}{2}p(t)dt}\right).$$

$$r(t)=\frac{a''+pa'+qa}{a}=-\frac{1}{2}p'(t)-\frac{1}{4}p^2(t)+q(t).$$

作业 4.10 (169-3)

求解微分方程 $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}-4t\dfrac{dx}{dt}+6x=t.$

解 (利用广义幂级数法, 一般情况下需要考察使用广义幂级数法的条件) 观察原方程的一个特解得 $x=\frac{t}{2}$. 对齐次方程, 考虑广义幂级数解 $x=\sum_{k=0}^{\infty}C_kt^{k+\rho}$, 其中 $C_0\neq 0$. 代入可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+\rho)(k+\rho-1)-4(k+\rho)+6]C_kt^{k+\rho}=0.$$

当 $k=0$ 时, $(\rho(\rho-1)-4\rho+6)C_0t^{\rho}=0\Rightarrow\rho(\rho-1)-4\rho+6=0\Rightarrow\rho_1=2,\rho_2=3.$

- $\rho_1=2$, 当 $k\geqslant 1$ 时, 有
$$[(k+2)(k+1)-4(k+2)+6]C_kt^{2+k}=(k^2-k)C_kt^{k+2}=0\Rightarrow C_k=0,\forall k\geqslant 1\Rightarrow x_1=C_0t^2.$$
- $\rho_2=3$, 当 $k\geqslant 1$ 时, 有
$$[(k+3)(k+2)-4(k+3)+6]C_kt^{3+k}=(k^2+k)C_kt^{k+2}=0\Rightarrow C_k=0,\forall k\geqslant 1\Rightarrow x_2=\tilde{C}_0t^3.$$

因此原方程的解为 $x(t)=C_1t^2+C_2t^3+\frac{t}{2}$.

作业 4.11 (170-10)

验证 $x=t$ 是方程 $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}+t\dfrac{dx}{dt}-x=0$ 的解, 并求方程的全部解.

解 (特解 + Liouville 公式) 直接代入可验证 $x=t$ 是解. $t\neq 0$ 时, 方程化为 $x''(t)+\frac{x'(t)}{t}-\frac{x}{t^2}=0$. 根据 Liouville 公式, 方程的另一特解为

$$x_2=x_1\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left(-\int\frac{dt}{t}\right)dt=t\int\frac{1}{t^2}e^{\int-\frac{dt}{t}}dt=-\frac{1}{2t}.$$

因此原方程的全部解为 $x(t)=C_1t+\frac{C_2}{t}$.

问题 4.1(19mid) 求解 $x''-2tx'+4x=0.$

解 解法一: 幂级数解法. 设 $x=\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^n$, 则

$$x'=\sum_{n=1}^{\infty}nC_nt^{n-1},\quad x''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nt^{n-2}.$$

代回原式可得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nt^{n-2}-2\sum_{n=1}^{\infty}nC_nt^n+4\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^n=0.$$

整理可得 $(n+2)(n+1)C_{n+2}=2(n-2)C_n$. 求解可得

$$C_{2n}=0(n\geqslant 2),\quad C_2=-2C_0.$$
$$C_{2n+1}=\frac{(2n-3)!!}{n!(2n+1)!!}C_1(n\geqslant 1).$$

故方程的解为

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^n=C_0\left(1-2t^2\right)+C_1\left(t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{n!(2n+1)!!}t^{2n+1}\right).$$

解法二: 观察特解再用 Liouville 公式. 观察可得一个特解为 $\varphi_1(t)=t^2-\frac{1}{2}$. 根据 Liouville 公式可得通

解
$$x=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)\left(C_1+C_2\int\frac{1}{(t^2-\frac{1}{2})^2}e^{\int 2tdt}dt\right)=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)\left(C_1+C_2\int\frac{e^{t^2}}{(t^2-\frac{1}{2})^2}dt\right).$$

问题 4.2(赵班 20mid) 已知 $y=x$ 是方程 $y''+\dfrac{x}{1+x^2}y'-\dfrac{y}{1+x^2}=0$ 的解, 求该方程的通解.

解 由 Liouville 公式可得
$$y=x\left(C_1+C_2\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{x}{1+x^2}dx}dx\right)=x\left(C_1+C_2\int\frac{1}{x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\right)=C_1x-C_2\sqrt{1+x^2}.$$

问题 4.3(19mid) 求解下列常微分方程组的初值问题:
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+e^t\sin 2t\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y-2z\\ \dfrac{dz}{dt}=3x+2y+z\\ x(0)=y(0)=0,\ z(0)=-1\end{cases}$$

解 这道题比较典型, 计算量较大, 较为繁琐, 建议同学们自己从头算一遍. 首先
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{pmatrix},\quad \det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+5)\Rightarrow\lambda_1=1,\ \lambda_2=1+2i,\ \lambda_3=1-2i.$$

$\lambda_1=1$ 对应特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-3,2)^T$, $\lambda_2=1+2i$ 对应特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,i,1)^T$. 由于 λ_2,λ_3 共轭, 且
$$e^{(1+2i)t}\boldsymbol{\alpha}_2=e^t(\cos 2t+i\sin 2t)\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}0\\-\sin 2t\\\cos 2t\end{pmatrix}+ie^t\begin{pmatrix}0\\\cos 2t\\\sin 2t\end{pmatrix}.$$

因此实基解矩阵为
$$\Phi(t)=e^t\begin{pmatrix}2&0&0\\-3&-\sin 2t&\cos 2t\\2&\cos 2t&\sin 2t\end{pmatrix}.$$

求逆可得
$$\Phi^{-1}(s)=e^{-s}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{3}{2}\sin 2s-\cos 2s&-\sin 2s&\cos 2s\\\frac{3}{2}\cos 2s-\sin 2s&\cos 2s&\sin 2s\end{pmatrix}.$$

初值向量为 $\boldsymbol{x}_0 = (0,0,-1)^T$, 因此方程组的解为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \Phi(t)\Phi(0)^{-1}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}\boldsymbol{f}(s)ds \\
&= \Phi(t)\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix} e^s \sin 2s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds\right] \\
&= \Phi(t)\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin 2s \\ \frac{3}{4}\cos 4s - \frac{1}{2}\sin 4s - \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}\sin 4s + \frac{1}{2}\cos 4s - \frac{1}{2} \end{pmatrix} ds\right] \\
&= \Phi(t)\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16}\sin 4t + \frac{1}{8}\cos 4t - \frac{3}{4}t - \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{16}\cos 4t + \frac{1}{8}\sin 4t - \frac{t}{2} + \frac{3}{16} \end{pmatrix}\right] \\
&= e^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}t\sin 2t - \frac{t}{2}\cos 2t + \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{5}{4}\sin 2t - \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4}t\cos 2t - \frac{t}{2}\sin 2t - \frac{3}{2}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

如下是一道类似题目.

问题 4.4(16mid) 求解下列线性微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y - 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + 2y + z + e^t \cos 2t \\ x(0) = y(0) = z(0) = 1 \end{cases}$$

4.2 补充内容: 运算子法求非齐次微分方程组的特解

对于方程组 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$, 运算子法在一些特殊情形下可以较为方便地求出方程特解, 但在一般的情形下不一定合适. 下面总结几个方便的特殊情形. 对 $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$, $(\mathcal{D} - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t)$.

1. $\boldsymbol{f}$ 为多项式: 若 A 可逆, 则特解

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\mathcal{D} - A}\boldsymbol{f}(t) = -A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A^{-n}\mathcal{D}^n \boldsymbol{f}(t).$$

2. $\boldsymbol{f}$ 的各个分量是周期相同的三角函数, 特解

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\mathcal{D} - A}\boldsymbol{f}(t) = \frac{\mathcal{D} + A}{\mathcal{D}^2 - A^2}\boldsymbol{f}(t) = \frac{\mathcal{D} + A}{-n^2 I - A^2}\boldsymbol{f}(t).$$

3. 若 a 不是 A 的特征值, 则

$$\frac{1}{\mathcal{D} - A}e^{at}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = (aI - A)^{-1}e^{at}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

我们来求解两个例子.

例 4.1 求解方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

解 首先求出基解矩阵

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -e^t & e^{it} & e^{-it} \\ e^t & ie^{it} & -ie^{it} \\ 0 & e^{it} & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

齐次方程对应的实通解为

$$\boldsymbol{x} = C_1e^t(-1,1,0)^T + C_2(\cos t, -\sin t, \cos t)^T + C_3(\sin t, \cos t, \sin t)^T.$$

利用运算子法求得特解

$$\frac{1}{\mathcal{D}-A}\boldsymbol{f}(t) = -A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A^{-n}\mathcal{D}^n \begin{pmatrix} 2-t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix} = -A^{-1}\begin{pmatrix} 2-t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix} - A^{-2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因此方程的解为

$$\boldsymbol{x} = C_1e^t(-1,1,0)^T + C_2(\cos t, -\sin t, \cos t)^T + C_3(\sin t, \cos t, \sin t)^T + (-1,t,0)^T.$$

例 4.2 求解方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -n^2 \\ -n^2 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} \cos nt \\ \sin nt \end{pmatrix} (n \neq 0).$$

解 运算子法求特解可得

$$\frac{1}{\mathcal{D}-A}\boldsymbol{f}(t) = \frac{\mathcal{D}+A}{\mathcal{D}^2-A^2}\boldsymbol{f}(t) = \frac{\mathcal{D}+A}{-n^2I-A^2}\begin{pmatrix} \cos nt \\ \sin nt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n(n^2+1)}\sin nt \\ \frac{n-1}{n(n^2+1)}\cos nt \end{pmatrix}.$$

第 5 章 第五次习题课 (by 黄天一)

5.1 习题讲解

作业 5.1 (177-1)

求下列边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

的特征值和特征函数.

解 由 S-L 定理可得 $-\lambda$ 非负.

- 若 $\lambda = 0$, 则方程通解为 $y(x) = A + Bx$, 代入初值条件可得 $B = 0$. 因此 $\lambda = 0$ 是特征值, 特征函数为 1.
- 若 $-\lambda > 0$, 设 $\lambda = -\omega^2(\omega > 0)$, 则方程通解为 $y(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$. 代入初值条件可得

$$\omega B = 0, \quad -\omega A\sin\omega\pi + \omega B\cos\omega\pi = 0.$$

为使解非零, 求得 $A \neq 0, B = 0, \omega = n$, 其中 $n = 1, 2, \cdots$.

综上可得边值问题的特征值和特征函数为

$$\lambda_n = -n^2, \quad y_n(x) = \cos nx(n = 0, 1, 2, \cdots).$$

作业 5.2 (177-3)

如果 λ 不是齐次边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

的特征值, 证明: 边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = f(x), \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

的解存在且唯一. 如果 λ 是齐次边值问题的特征值, 试问 $f(x)$ 满足什么条件时非齐次边值问题的解存在? 解是否唯一?

证明 齐次边值问题的特征值和特征函数分别为

$$\lambda_n = n^2, \quad y_n(x) = \sin nx(n = 1, 2, \cdots).$$

设 λ 不是齐次边值问题的特征值, 设 y_1, y_2 均为非齐次问题的解, 则 $y_1 - y_2$ 是齐次问题的解, 进而只能为零. 唯一性得证. 存在性分情况讨论即可.

若 λ 是齐次边值问题的特征值, 则 $\lambda = n^2$, n 为某个正整数. 此时非齐次方程的实通解为

$$y(x) = A\cos nx + B\sin nx + \frac{1}{n}\int_0^x \sin(n(x-s))f(s)ds.$$

代入边界条件可得

$$A = 0, \quad (-1)^n A + \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(n(x-s))f(s)ds.$$

因此非齐次边值问题的解存在的充要条件是

$$\int_0^{\pi} \sin(ns)f(s)ds = 0.$$

此时 $\lambda_n = n^2$ 对应的边值问题的特征函数为

$$y(x) = B\sin(nx) + \frac{1}{n}\int_0^x \sin(n(x-s))f(s)ds,$$

B 为任意实常数. 因此解并不唯一.

作业 5.3 (205-1(1))

设 $p(t), q(t)$ 是区间 (α, β) 内的连续函数, 验证线性方程 $x'(t) + p(t)x = q(t)$ 满足初值问题的解存在唯一.

证明 由于 $q(t) - p(t)x$ 关于 x 连续可微, 因此在任意紧子域上满足 L-条件, 进而方程的初值问题的解存在唯一.

作业 5.4 (206-7(1))

利用逐次逼近法求解下列初值问题:

$$\frac{dx}{dt} = \ln|\sin x|, \quad x(1) = \frac{\pi}{2}.$$

解 $\varphi_k(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ 是初值问题的一个 Picard 序列, 因此初值问题的解为 $\varphi(t) \equiv \frac{\pi}{2}$.

作业 5.5 (207-13)

对微分方程

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} x\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

讨论是否满足初值问题解的存在唯一性定理的条件, 并求解该方程以确定解的唯一性.

解 设 $f(x) = x\ln x (x > 0)$, 则 $x > 0$ 时有 $f'(x) = \ln x + 1$, 因此 $\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = -\infty$, 因此初值问题不满足 Picard 定理的条件 (若 $f(x)$ 在 $(0, \varepsilon)$ 上 Lipschitz 连续, L 为其 Lipschitz 常数, 则 $|f'(x)| \leqslant L$, $\forall x \in (0, \varepsilon)$, 矛盾). 但是, 题设方程由一特解为 $x \equiv 0$ 以及通解 $x = C^{e^t}$, 其中 $C > 0$ 为常数. 在初值条件 $x(0) = x_0 \geqslant 0$ 下, 若 $x_0 = 0$, 则对应唯一解 $x \equiv 0$. 若 $x_0 > 0$, 则对应唯一解 $x = x_0^{e^t}$. 因此题设方程在初值 $x(0) = x_0$ 下的解总唯一.

笔记 方程中的 $f(x)$ 虽然在 $x = 0$ 附近不满足 Lipschitz 条件, 但是各位可以验证: 它满足 Osgood 条件.

作业 5.6 (214-1)

利用压缩映射原理证明: 当 $|\lambda|$ 充分小时, 积分方程

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds$$

在 $[a,b]$ 上存在唯一解, 这里 $K(t,s)$ 在 $a \leqslant t, s \leqslant b$ 上是连续的.

证明 设 $\max|K| = M < \infty$. 定义 $C[a,b]$ 上的范数为 $\|\varphi\| = \max_{[a,b]} e^{M(t-a)}|\varphi(t)|$, 则 $(C[a,b], \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间. 定义算子 $\mathcal{T} : C[a,b] \to C[a,b]$ 为

$$(\mathcal{T}\varphi)(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds.$$

则我们有

$$|(\mathcal{T}\varphi)(t)-(\mathcal{T}\psi)(t)| \leqslant |\lambda| \int_a^b M|\varphi(s)-\psi(s)|ds = |\lambda| \int_a^b Me^{-M(s-a)} \cdot e^{M(s-a)}|\varphi(s)-\psi(s)|ds$$
$$\leqslant |\lambda|\|\varphi-\psi\| \int_a^b Me^{-M(s-a)}ds \leqslant |\lambda|(1-e^{-M(b-a)})\|\varphi-\psi\|.$$

因此当 λ 满足 $|\lambda|<(1-e^{-M(b-a)})^{-1}$ 时, $\mathcal{T}$ 成为压缩映射, 进而存在唯一的不动点, 即积分方程存在唯一解 $\varphi \in C[a,b]$.

作业 5.7 (217-3)

设 $x=\varphi_n(t)$ 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上是二阶微分方程 $x''(t)=f(t,x)$ 的解, $\varphi_n(t)$ 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上一致收敛于 $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}_n(t_0)(a \leqslant t_0 \leqslant b)$ 收敛. 试证: $\varphi(t)$ 也是二阶微分方程的解. 这里我们假设 $f(t,x)$ 连续. ♡

证明 由 $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ 可得 $f(t,\varphi_n(x)) \rightrightarrows f(t,\varphi(x))$, 即有 $\ddot{\varphi}_n \rightrightarrows f(t,\varphi(x))$. 又因为 $\dot{\varphi}_n(t_0)$ 收敛, 故 $\dot{\varphi}_n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于某个函数 ψ, 且 $\dot{\psi}=f(t,\varphi(x))$. 结合 φ_n 一致收敛于 φ 可得 $\dot{\varphi}=\psi$, 因此

$$\ddot{\varphi}(t)=\dot{\psi}(t)=f(t,\varphi(x)).$$

作业 5.8 (附加 4-1)

讨论 Riccati 方程的初值问题 $\frac{dx}{dt}=t^2+x^2, x(0)=0$ 解的存在唯一区间, 并求在此区间上与真正解的误差不超过 0.05 的近似解的表达式, 其中 $D:-1 \leqslant t \leqslant 1, -1 \leqslant x \leqslant 1$. ♡

解 根据 Picard 定理可得存在唯一区间的半径为 $h=\min(a,\frac{b}{M})=\frac{1}{2}$, 其中 $a=b=1$, $M=\max_D(t^2+x^2)=2$. 因此存在唯一区间为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. 设 $\varphi_k(t)$ 是方程的 Picard 逼近序列, $\varphi(t)$ 是局部唯一解, 则有误差估计

$$|\varphi(t)-\varphi_k(t)| \leqslant \frac{ML^k}{(k+1)!}|t|^{k+1},$$

其中 L 为 t^2+x^2 在 D 中的一个李氏常数, 不妨取 $L=2$. 代入 $|t| \leqslant \frac{1}{2}, M=2$ 可得

$$|\varphi(t)-\varphi_k(t)| \leqslant \frac{1}{(k+1)!}.$$

计算可得 $k=3$ 时, 误差不超过 $\frac{1}{4!}<0.042$, 因此 $\varphi_3(t)$ 是符合题设的一个近似解, 计算可得

$$\varphi_3(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{t^7}{63}+\frac{2t^{11}}{2079}+\frac{t^{15}}{59535}.$$

进一步约去高阶项 (这些项引起的误差不超过 1×10^{-3}), 可得满足要求的近似解为 $\frac{t^3}{3}$.

作业 5.9 (附加 4-2, 19mid)

设 $I=[a,b]$, 设函数 $f(t)$ 在 I 上连续, $K(t,s)$ 在 $I \times I$ 上连续, 证明: 积分方程

$$x(t)=f(t)+\int_a^t K(t,s)x(s)ds$$

在 I 上有唯一解. ♡

证明 我们利用压缩映射原理证明. 设 $\max_{I\times I}|K|=M$, 在函数空间 $C(I)$ 上, 赋予范数 $\|x\|=\max_{t\in I} e^{-M(t-a)}|x(t)|$, 则 $C(I)$ 成为 Banach 空间. 构造算子

$$\mathcal{T}:C(I)\to C(I), \quad (\mathcal{T}x)(t)=f(t)+\int_a^t K(t,s)x(s)ds.$$

则任取 $x_1, x_2 \in C(I)$, 有

$$\begin{aligned}
e^{-M(t-a)}|(\mathcal{T}x_1)(t) - (\mathcal{T}x_2)(t)| &\leqslant e^{-M(t-a)} \int_a^t |K(t,s)||x_1(s) - x_2(s)|ds \\
&\leqslant e^{-M(t-a)} \int_a^t Me^{M(s-a)} \cdot e^{-M(s-a)}|x_1(s) - x_2(s)|ds \\
&\leqslant \|x_1 - x_2\| e^{-M(t-a)} e^{-M(s-a)} \Big|_a^t \\
&\leqslant (1 - e^{-M(b-a)})\|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

进而我们有 $\|\mathcal{T}x_1 - \mathcal{T}x_2\| \leqslant \theta\|x_1 - x_2\|$, 其中 $\theta = 1 - e^{-M(b-a)} \in (0,1)$. 所以 $\mathcal{T}$ 是压缩映射, 由压缩映射原理可得 $\mathcal{T}$ 在 $C(I)$ 中存在唯一的不动点, 进而积分方程在 I 上有唯一解.

作业 5.10 (附加)

证明 Gronwall 不等式: 设连续函数 $a(t) > 0$, 连续函数 $g(t)$ 与 C 均非负, 若成立

$$g(t) \leqslant C \pm \int_{t_0}^t a(s)g(s)ds, \quad \begin{cases} +, & t \geqslant t_0 \\ -, & t < t_0 \end{cases}$$

则 $g(t) \leqslant Ce^{\pm\int_{t_0}^t a(s)ds}$.

证明 只证明 $t \geqslant t_0$ 的情况, $t < t_0$ 时完全类似. 令 $\mu(t) = C + \int_{t_0}^t a(s)g(s)ds \geqslant 0$, 则 $\mu'(t) = a(t)g(t) \leqslant a(t)\mu(t)$. 不妨设 $\mu(t) > 0$, 则

$$\frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt} \leqslant a(t) \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}dt \leqslant \int_{t_0}^t a(t)dt \Rightarrow \mu(t) \leqslant Ce^{\int_{t_0}^t a(s)ds}.$$

由 $g(t) \leqslant \mu(t)$, 结论立证.

问题 5.1(不讲, 用作扩展) 利用压缩映射原理证明欧氏空间之间的隐映射定理.

证明 设 $f(x,y) = (f_1(x,y), \cdots, f_m(x,y))$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的 C^1 映射, 且

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad \det J_y f(x_0, y_0) \neq 0.$$

这里 $J_y f(x,y) = (\frac{\partial f_i}{\partial y_j})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$. 隐映射定理告诉我们存在 (x_0, y_0) 的邻域 $U \times V$ 以及唯一的连续函数 $\varphi : U \to V$ 使得 $f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in U$ 且 $\varphi(x_0) = y_0$. 我们来证明这一结论.

WLOG, 设 $J_y f(x_0, y_0) = I_m$(否则以该矩阵的逆左乘 f, 研究得到的新映射即可). 考虑 $(C(\overline{B(x_0,r)}; \mathbb{R}^m), \|\cdot\|)$, 其中 $r > 0$ 为待定正数, 范数 $\|\cdot\|$ 为 L^∞-范数 (最大模). 定义映射 $\mathcal{T}$ 为 $(\mathcal{T}g)(x) = g(x) - f(x, g(x))$. 由于 $J_y f$ 连续, 故 r 充分小时, $I_m - J_y f(x,y)$ 的各元素的绝对值均不超过 $\frac{1}{2m}$, $\forall x \in \overline{B(x_0,r)}, y \in \overline{B(y_0,r)}$. 任取 $g, h \in X = \{\varphi \in C(\overline{B(x_0,r)}; \mathbb{R}^m) : \varphi(x_0) = y_0, \varphi(x) \in \overline{B(y_0,r)}\}$, 设 $\delta_i(x) = g_i(x) - h_i(x)$, 由中值定理可得

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}g - \mathcal{T}h\| &= \max_{\substack{|x-x_0|\leqslant r \\ 1\leqslant i\leqslant m}} |\delta_i(x) - (f_i(x, g(x)) - f_i(x, h(x)))| \\
&\leqslant \max_{\substack{|x-x_0|\leqslant r \\ 1\leqslant i\leqslant m}} \left| \delta_i(x) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i(x, \tilde{y}_i(x))}{\partial y_j}\delta_j(x) \right| \leqslant \frac{1}{2}\|g - h\|.
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{y}_i(x) = \theta_i(x)g(x) + (1 - \theta_i(x))h(x), 0 < \theta_i(x) < 1$. 容易验证 X 是 Banach 空间, 由压缩映射原理立证.

问题 5.2 设矩阵函数 $A(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明方程组 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}$ 在初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{0}$ 下只有零解.

这里 $t_0 \in [a,b]$.

证明 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程组在初值 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{0}$ 的解, 则

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{\varphi}(t)|^2 = \frac{d}{dt}\langle\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\varphi}(t)\rangle = 2\langle\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t),\boldsymbol{\varphi}(t)\rangle = 2\langle A(t)\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\varphi}(t)\rangle \leqslant 2\|A(t)\||\boldsymbol{\varphi}(t)|^2.$$

结合 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{0}$, 利用 Gronwall 不等式可得 $|\boldsymbol{\varphi}(t)|^2 \equiv 0$, 因此题设初值问题只有零解.

问题 5.3(20mid) 讨论方程 $x'(t)=(2t-x)(1+x^2)$ 过原点的解的最大存在区间.

解 设方程过原点的解为 $\varphi(t)$, 则 $\varphi'(0)=0$. 考虑直线 $L: x=2t$, 则当 $t>0$ 时, 积分曲线 $\varphi(t)$ 始终位于 L 下方; 否则, 设 $\xi=\inf\{t>0:\varphi(t)=2t\}$, 由 $\varphi'(0)=0<2$ 可得 $\xi>0$, 由连续性可得 $\varphi(\xi)=2\xi$, 由方程可得 $\varphi'(\xi)=0$, 这与 ξ 的最小性矛盾! 因此 $\varphi(t)<2t(t>0) \Rightarrow$ 最大存在区间向右延伸至 $+\infty$.

在 $t=0$ 左侧, 类似上述可得积分曲线位于 L 上方, 进而 $\varphi'(t)<0(t<0) \Rightarrow \varphi(t)$ 在 $t<0$ 时严格递减, 因此在 $t=0$ 左侧 $\varphi(t)>0$. 则

$$\varphi'(t)=(2t-\varphi(t))(1+\varphi(t)^2) \leqslant -\varphi(t)(1+\varphi(t)^2) \Rightarrow 1 \leqslant -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)(1+\varphi(t)^2)}.$$

设 $\omega=\varphi(-1)>0$, 假设最大存在区间可延伸到 $-\infty$, 任取 $t<-1$, 积分可得

$$-1-t \leqslant \int_t^{-1}\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)(1+\varphi(t)^2)}dt = \int_\omega^{\varphi(t)}\frac{dx}{x(1+x^2)} = \ln\frac{\varphi(t)}{\sqrt{1+\varphi(t)^2}} - \ln\frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

但 $t \to -\infty$ 时, LHS 无界趋于 $+\infty$ 而 RHS 趋于 $-\ln\frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}$, 矛盾!

问题 5.4 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续且关于 y 满足李氏条件. 证明:

1. 初值问题 $y'=f(x,y)\sin\frac{x}{n}$, $y(0)=0$ 的解 $y_n(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上存在.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)=0$.

证明

1. 设 $L=\mathrm{Lip}(f)$. 初值问题等价于积分方程 $y_n(x)=\int_0^x f(s,y_n(s))\sin\frac{s}{n}ds$. 假设右行极大区间为 $[0,\beta)$, $\beta<\infty$. 则
$$|y_n(x)| \leqslant \int_0^x |f(s,y_n(s))-f(s,0)|ds + \int_0^x |f(s,0)|ds \leqslant M\beta + L\int_0^x |y_n(s)|ds, \quad \forall x \in [0,\beta)$$
其中 $M=\sup_{[0,\beta]}|f(x,0)|$. 由 Gronwall 不等式可得 $|y_n(x)| \leqslant M\beta e^{Lx}$, 但由延伸定理可得当 $x\to\beta^-$ 时 $y_n(x)$ 无界, 矛盾! 所以右行极大区间为 $[0,+\infty)$, 类似可得左行极大区间为 $(-\infty,0]$.
2. 任意固定 $x\in\mathbb{R}$, 设 $R>0$ 使得 $|x|<R$. 由 f 满足 L-条件可得
$$\left|f(x,y_n(x))\sin\frac{x}{n}\right| \leqslant \left|f(x,0)\sin\frac{x}{n}\right| + L\left|y_n(x)\sin\frac{x}{n}\right|.$$
因此可得
$$|y_n(x)| \leqslant \int_0^R |f(s,0)|\frac{R}{n}ds + L\int_0^x |y_n(s)|\frac{R}{n}ds \leqslant \frac{R^2}{n}M' + \frac{LR}{n}\int_0^x |y_n(s)|ds.$$
其中 $M'=\sup_{[0,R]}|f(x,0)|$. 由 Gronwall 不等式可得 $|y_n(x)| \leqslant \frac{R^2}{n}M'e^{\frac{LR}{n}x}$. 令 $n\to\infty$ 即得 $y_n(x)\to 0$.

问题 5.5(19mid) 已知微分方程 $x'(t)=t^2f(x)$, 其中 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 且 $xf(x)<0(\forall x\neq 0)$. 证明: 任一满足 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x(t)$ 必定在 $[t_0,+\infty)$ 上存在.

证明 由 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 可得初值问题的解局部唯一. 由条件可得 $f(0)=0$, $f(x)<0(x>0)$, $f(x)>0(x<0)$.

- 若初值为 $x(t_0)=0$, 则初值问题的解为零解, 结论成立.
- 若 $x(t_0)=x_0>0$, 由解的唯一性可得积分曲线与直线 $x=0$ 无交, 结合 $x'(t)=t^2f(x)<0(x>0)$ 可得积分曲线在 $t\geqslant t_0$ 时递减且始终位于 $x=0$ 上方, 所以右行极大区间为 $[t_0,+\infty)$. $x_0<0$ 时

类似讨论.

问题 5.6(10 丘赛) 已知方程 $\dot{x} = -x + f(t,x)$, 其中 $f \in C(\mathbb{R}^2)$, 且 $|f(t,x)| \leqslant \phi(t)|x|, \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$. 若 $\int_0^\infty \phi(t)dt < +\infty$, 证明方程的任一解在 $t \to \infty$ 时的极限为零.

证明 任取方程的解 $x(t)$, 满足 $x(t_0) = \eta$. 令 $y(t) = x(t)e^t$, 则

$$\frac{d}{dt}(xe^t) = e^t f(t,x) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = e^t f(t, ye^{-t}) \Rightarrow y(t) = \eta + \int_0^t e^s f(s, y(s)e^{-s})ds.$$

由题设条件可得 $t \geqslant 0$ 时, 有

$$|y(t)| \leqslant |\eta| + \int_0^t e^s |f(s, y(s)e^{-s})| ds \leqslant |\eta| + \int_0^t \phi(t)|y(s)|ds.$$

由 Gronwall 不等式可得

$$|y(t)| \leqslant |\eta| e^{\int_0^t \phi(t)dt} \leqslant |\eta| e^{\int_0^\infty \phi(t)dt} \triangleq M \Rightarrow |x(t)| \leqslant Me^{-t}.$$

因此 $x(t)$ 在 $t \to +\infty$ 时的极限为零.

问题 5.7(赵班 20mid, 有改动) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且单调递增, 证明: 对任意给定的常数 C, 初值问题 $y'(x) = -f(y) + C, y(x_0) = y_0$ 在 $[x_0, +\infty)$ 上存在唯一解. 举例说明初值问题在 $(-\infty, x_0]$ 上不一定有唯一解.

证明 解的存在性由 Peano 定理可得, 下面我们证明: (1) 右行解唯一; (2) 右行解可以延伸到 $+\infty$; (3) 左行解不一定唯一.

1. 假设初值问题在 x_0 右侧存在两个不同解 $y(x)$ 和 $z(x)$, 则存在 $x_1 > x_0$ 使得 $y(x_1) - z(x_1) \neq 0$, 不妨设大于零. 令 $\delta(x) = y(x) - z(x)$, 我们来研究区间 $[x_0, x_1)$ 上 δ 最大的那个零点, 即令 $\xi = \sup\{x_0 \leqslant x < x_1 : \delta(x) = 0\} \in [x_0, x_1)$, 则区间 (ξ, x_1) 上成立 $\delta(x) > 0 \Rightarrow y(x) > z(x)$, 因此由 f 单调递增可得

   $$\delta'(x) = y'(x) - z'(x) = f(z(x)) - f(y(x)) \leqslant 0, \quad \forall x \in (\xi, x_1).$$

   即 $\delta(x)$ 在 $[\xi, x_1)$ 上递减. 但是 $\delta(x_1) > \delta(\xi) = 0$, 矛盾! 因此右行解唯一.
2. 设 $m = \inf f(x) \in [-\infty, +\infty)$, $M = \sup f(x) \in (-\infty, +\infty]$. 我们讨论 C 的几种可能取值.

   (1) $m > -\infty$ 且 $C \leqslant m$, 则右行积分曲线单调下降, 进而由 f 递增可得 $y'(x)$ 在右行区间上递增, 因此 $y'(x) \geqslant y'(x_0) = C - f(y_0) \Rightarrow y(x) \geqslant (C - f(y_0))(x - x_0) + y_0$, 因此右行积分曲线延伸至 $+\infty$.

   (2) $M < +\infty$ 且 $C \geqslant M$, 则右行积分曲线单调上升. 进而由 f 递增可得 $y'(x)$ 在右行区间上递减, 因此 $y'(x) \leqslant y'(x_0) = C - f(y_0) \Rightarrow y(x) \leqslant (C - f(y_0))(x - x_0) + y_0$, 因此右行积分曲线延伸至 $+\infty$.

   (3) $m < C < M$, 考虑 $f(y) = C$ 的零点集 $Z = [a,b]$, 其中 $a \leqslant b$. 若 $y_0 \in [a,b]$, 则初值问题有唯一解 $y \equiv y_0$, 自然延伸至 $+\infty$. 若 $y_0 < a$, 假设存在 $x_1 > x_0$ 使得 $y(x_1) > a$, 则考虑 $\xi = \sup\{x_0 \leqslant x < x_1 : y(x) = a\}$, 则当 $\xi < x < x_1$ 时有 $y'(x) = C - f(y) \leqslant 0$, 因此 $y(x_1) \leqslant y(\xi) = a$, 矛盾! 因此右行积分曲线总不会穿过直线 $y = a$, 进而 $y'(x) = C - f(y) \geqslant 0$, 即积分曲线上升, 因此右行积分曲线也总在 $y = y_0$ 上方. 综上可得此时极大右行区间为 $[x_0, +\infty)$. 当 $y_0 > b$ 时讨论完全类似.

   综上可得极大右行区间必为 $[x_0, +\infty)$.
3. 考虑函数 $f(y) = 2\,\mathrm{sgn}(y)\sqrt{|y|}$, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续且单调递增, 取 $C = 0, x_0 = 0, y_0 = 0$. 此时初值

问题即为

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}2\sqrt{-y}, & y\leqslant 0\\ -2\sqrt{y}, & y>0\end{cases}\quad y(0)=0.$$

我们求它的可能左行解. 若 $y\leqslant 0$, 求解 $y'(x)=2\sqrt{-y}, y(0)=0$ 可得 $y=-x^2$ 或 $y\equiv 0$, 这就已经得出了两个解. 看上去 $y=-x^2$ 也是右行解, 我们似乎导出了与上述的矛盾, 但事实上, 由于 $y\leqslant 0$ 时总有 $y'(x)\geqslant 0$, 因此 $-2x\geqslant 0\Rightarrow x\leqslant 0$, 因此 $y=-x^2$ 只能作为左行解而非右行解.

问题 5.8(20 丘赛) 给定 $x_0\in\mathbb{R}$, 考虑二阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\ddot{x}+x+x^3=0\\ x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=0\end{cases}$$

求证:

1. 初值问题的解存在且唯一, 并且最大存在区间为 $\mathbb{R}$.
2. 该解是周期的.

证明 解的存在唯一性显然 (化为方程组用 Picard 定理说明). 其次, 原方程两端乘以 $\dot{x}$ 可得

$$\ddot{x}\dot{x}+x\dot{x}+x^3\dot{x}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2+x^2+\frac{1}{2}x^4\right)=0.$$

结合初值可得

$$\dot{x}^2+x^2+\frac{1}{2}x^4=x_0^2+\frac{1}{2}x_0^4.$$

首先由上述可得 $|x(t)|$ 是有界的, 因此由解的延伸定理可得 $x(t)$ 的最大存在区间为 $\mathbb{R}$. 若 $x_0=0$, 则对应零解, 自然周期; 否则, 令 $y=\dot{x}$, 上式对应着方程组的轨线, 计算可得

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=x_0^2+\frac{1}{2}x_0^4-x^2-\frac{1}{2}x^4+(x+x^3)^2=x_0^2+\frac{1}{2}x_0^4+\frac{3}{2}x^4+x^6\geqslant x_0^2+\frac{1}{2}x_0^4>0.$$

因此轨线是正则闭曲线且有限长, 从而存在 $T>0$ 使得 $x(0)=x(T),\dot{x}(0)=\dot{x}(T)$. 此时 $x(t+T)$ 仍为原方程的解且 $x(t+T)$ 满足初值条件, 由解的唯一性可得 $x(t)=x(t+T)$, 因此解是周期的.

笔记 本题利用构造相平面上的闭轨来证明解的周期性, 这是非常重要的方法.

问题 5.9(22 丘赛) 设 $f(x,y)\in C^1(\mathbb{R}^2)$, 我们假设存在 $C>0$, 使得 $|f_y(x,y)|\leqslant C$. 考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y(x)).$$

1. 证明: 在任一初值条件下, 方程存在唯一解, 并且可以延拓到 $\mathbb{R}$ 上.
2. 设 $f(x+1,y)=f(x,y)$. 如果方程存在 $\mathbb{R}$ 上的有界解, 则必然也存在 $\mathbb{R}$ 上的周期解.

证明

1. 由 f 连续可微可得 f 是局部 Lipschitz 连续的, 进而在任一初值条件 $y(x_0)=y_0$ 下存在唯一解. 由 $|f_y(x,y)|\leqslant C$ 可得 f 关于 y 满足 L-条件, C 为一个 L-常数. 任取 $\alpha<x_0<\beta$, 则任取 $x\in(\alpha,\beta)$, 有
$$|f(x,y)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|f(x,y_0)|\leqslant C|y-y_0|+\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|f(x,y_0)|\leqslant C|y|+C'.$$
其中 $C'=\max_{[\alpha,\beta]}|f(x,y_0)|+C|y_0|$ 为正常数, 因此初值问题的解在 (α,β) 上存在. 由 α,β 的任意性可得解在 $\mathbb{R}$ 上存在.
2. 方程的解 $y(x)$ 是 1-周期解当且仅当存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $y(x_0+\omega)=y(x_0)$(check it! 仿照上题的方法). 设 $y(x)$ 是方程的有界解, 我们不妨设 $y(x+1)\neq y(x),\forall x\in\mathbb{R}$. 进一步, 不妨设 $y(x+1)>y(x)$.

由有界可定义函数

$$\bar{y}(x)=\lim_{n\to+\infty}y(x+n).$$

我们来验证 $\bar{y}(x)$ 即为方程的一个 1-周期解. 对给定的 $x_0\in\mathbb{R}$, 则 $y(x+n)=\varphi(x;x_0,y(x_0+n))$ 是方程的解, 从而由解对初值的连续依赖性可得 $\bar{y}(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi(x;x_0,y(x_0+n))=\varphi(x;x_0,y_0)$ 是方程的解 (check it!), 其中 $y_0=\lim_{n\to\infty}y(x_0+n)$. 并且由 $\bar{y}$ 的定义立得它是 1-周期的.

问题 5.10 已知微分方程 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$, 其中 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 为连续有界函数, $\Omega=[a,b]\times\mathbb{R}$ 为带状域.

1. 证明方程过 Ω 内任一点的积分曲线可以延伸到整个区间 $[a,b]$ 上.
2. 设 $A\subset\Omega$, 定义:

$$R(A)=\{(t,\varphi(t))\mid\varphi\text{ 是题设方程的解且积分曲线与 }A\text{ 有交},a\leqslant t\leqslant b\}.$$

证明: 若 A 是紧集, 则 $R(A)$ 也是紧集.

笔记 这个问题揭示了初值问题解构成区域的一些基本拓扑性质, 感兴趣的同学可以继续研究 $R(A)$ 以及切片 $S_\xi(A)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:(\xi,\boldsymbol{x})\in R(A)\}$ 的其他拓扑性质 (例如当 A 连通时, 切片是否连通?) 并利用得到的性质讨论初值问题解的特性. 这似乎是很不错的小论文题材, 但需要一定的拓扑与分析功底.

证明

1. 设积分曲线经过 (t_0,x_0), 则由 f 在 Ω 上有界可得存在 $M>0$ 使得

$$|x'(t)|=|f(t,x)|\leqslant M\Rightarrow|x(t)|\leqslant M|t-t_0|+|x_0|.$$

由解的延伸定理立得积分曲线可以延伸到整个区间 $[a,b]$ 上.

2. 只需证明 $R(A)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界闭集.

有界: 由 A 是紧集可得有界, 结合 1 中给出的估计立得 $R(A)$ 有界.

闭: 任取 $R(A)$ 中的 Cauchy 列 (t_k,x_k), 设它在 $\mathbb{R}^2$ 中收敛于 (t_0,x_0). 要证明 $(t_0,x_0)\in R(A)$, 只需构造原方程的一个解 $\varphi(t)$, 它的积分曲线经过 (t_0,x_0) 以及 A 中某点.

设 (t_k,x_k) 落在 $\varphi_k(t)$ 的积分曲线上, 且 A 中一点 (ξ_k,η_k) 也在该积分曲线上. 我们断言: 函数族 $\mathscr{F}=\{\varphi_k:k=1,2,\cdots\}$ 是一致有界且等度连续的. 一致有界已证, 等度连续是因为

$$|\varphi_k(t_1)-\varphi_k(t_2)|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|\varphi_k'(t)|\cdot|t_1-t_2|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|\cdot|t_1-t_2|.$$

而 $\sup_{[a,b]}|f(t)|$ 是与 $\mathscr{F},t_i$ 无关的有限常数, 立证. 由 Arzelà-Ascoli 定理可得 $\mathscr{F}$ 存在一致收敛子列 $\{\varphi_{k_i}:i=1,2,\cdots\}$, 设其一致极限为 φ, 进而 (ξ_{k_i},η_{k_i}) 也收敛于某点 (ξ_0,η_0). 由 A 是闭集可得 $(\xi_0,\eta_0)\in A$. 注意到

$$\varphi_{k_i}(t)=x_{k_i}+\int_{t_{k_i}}^t f(s,\varphi_{k_i}(s))ds=\eta_{k_i}+\int_{\xi_{k_i}}^t f(s,\varphi_{k_i}(s))ds.$$

由一致收敛, 上式令 $i\to+\infty$ 即得

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))ds=\eta_0+\int_{\xi_0}^t f(s,\varphi(s))ds.$$

所以 $\varphi(t)$ 即为我们所求的解. 这就说明 $R(A)$ 中任一 Cauchy 列的极限在 $R(A)$ 内, 从而是闭集.

问题 5.11(21mid, 节选) 设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 连续可微. 证明初值问题

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\quad\boldsymbol{x}(\xi)=\boldsymbol{\eta}$$

的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t;\xi,\boldsymbol{\eta})$ 满足恒等式

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(t;\xi,\boldsymbol{\eta})}{\partial\xi}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(t;\xi,\boldsymbol{\eta})}{\partial\eta_i}f_i(\xi,\boldsymbol{\eta})=\mathbf{0}.$$

证明 我们来构造变分方程. 题设初值问题等价于积分方程

$$\boldsymbol{\varphi}(t;\xi,\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\eta}+\int_{\xi}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}(s;\xi,\boldsymbol{\eta}))ds.$$

由此可得

$$\frac{\partial\varphi_j(t;\xi,\boldsymbol{\eta})}{\partial\xi}=\int_{\xi}^{t}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_j(s,\boldsymbol{\varphi}(s;\xi,\boldsymbol{\eta}))}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_k(s;\xi,\boldsymbol{\eta})}{\partial\xi}ds-f_j(\xi,\boldsymbol{\eta}).$$

$$\frac{\partial\varphi_j(t;\xi,\boldsymbol{\eta})}{\partial\eta_i}=\delta_{ij}+\int_{\xi}^{t}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_j(s,\boldsymbol{\varphi}(s;\xi,\boldsymbol{\eta}))}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_k(s;\xi,\boldsymbol{\eta})}{\partial\eta_i}ds.$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号. 因此我们有

$$\begin{aligned}\Phi_j(t;\xi,\boldsymbol{\eta})&\triangleq\frac{\partial\varphi_j(t;\xi,\eta)}{\partial\xi}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j(t;\xi,\boldsymbol{\eta})}{\partial\eta_i}f_i(\xi,\boldsymbol{\eta})\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\xi}^{t}\frac{\partial f_j(s,\boldsymbol{\varphi}(s;\xi,\boldsymbol{\eta}))}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\varphi_k(s;\xi,\boldsymbol{\eta})}{\partial\xi}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k(s;\xi,\boldsymbol{\eta})}{\partial\eta_i}f_i(\xi,\boldsymbol{\eta})\right)ds\\&=\int_{\xi}^{t}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_j(s,\boldsymbol{\varphi}(s;\xi,\boldsymbol{\eta}))}{\partial x_k}\Phi_k(t;\xi,\boldsymbol{\eta})ds.\end{aligned}$$

记 $\boldsymbol{\Phi}(t;\xi,\boldsymbol{\eta})=(\Phi_1(t;\xi,\boldsymbol{\eta}),\cdots,\Phi_n(t;\xi,\boldsymbol{\eta}))^T$, 则上述 n 个积分方程等价于如下初值问题

$$\boldsymbol{\Phi}'(t;\xi,\boldsymbol{\eta})=J(t;\xi,\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\Phi}(t;\xi,\boldsymbol{\eta}),\quad \boldsymbol{\Phi}(\xi)=\mathbf{0}.$$

其中 $J(t;\xi,\boldsymbol{\eta})=(\frac{\partial f_j(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_k})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ 为 $\boldsymbol{f}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 的 Jacobi 矩阵, 由 $\boldsymbol{f}$ 连续可微可得 $J(t;\xi,\boldsymbol{\eta})$ 关于 t 是 n 阶连续矩阵值函数. 而上述方程组的初值问题只有零解 (此前讲过的一道习题), 所以 $\Phi_1\equiv\cdots\equiv\Phi_n=0$, 即有

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(t;\xi,\boldsymbol{\eta})}{\partial\xi}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(t;\xi,\boldsymbol{\eta})}{\partial\eta_i}f_i(\xi,\boldsymbol{\eta})=\mathbf{0}.$$

问题 5.12 已知微分方程 $y'(x)=\lambda(1+\sin^2x+\sin^2y)+x$, 其中 λ 为参数. 证明: 存在参数 λ, 使得方程在初值条件 $y(0)=y(1)=0$ 下有唯一解.

证明 仿照 S-L 定理中的可数性证明即可. 首先由 Picard 定理可得方程 $y'(x)=\lambda(1+\sin^2x+\sin^2y)+x$ 在初值条件 $y(0)=0$ 下存在唯一解 $y(x;\lambda)$. 令 $\omega(\lambda)=y(1;\lambda)$, 我们只需证明 $\omega(\lambda)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在零点即可. 构造关于 λ 的变分方程可得

$$\frac{\partial y(x;\lambda)}{\partial\lambda}=\int_0^x\left(1+\sin^2s+\sin^2y(s;\lambda)+\lambda\sin2y(s;\lambda)\frac{\partial y(s;\lambda)}{\partial\lambda}\right)ds.$$

该方程等价于 $\frac{\partial y(x;\lambda)}{\partial\lambda}$ 关于 x 的一阶线性方程在 $\frac{\partial y(0;\lambda)}{\partial\lambda}=0$ 下的 Cauchy 问题, 求解可得

$$\frac{\partial y(x;\lambda)}{\partial\lambda}=\int_0^x(1+\sin^2s+\sin^2y(s;\lambda))e^{\int_s^x\lambda\sin2y(u;\lambda)du}ds.$$

由此可得 $\omega'(\lambda)=\frac{\partial y(1;\lambda)}{\partial\lambda}>0$, 因此 $\omega(\lambda)$ 严格递增. 另一方面, 当 $\lambda=0$ 时, 初值问题的解为 $y(x;0)=\frac{x^2}{2}$, 因此 $\omega(0)=y(1;0)=\frac{1}{2}$; 当 $\lambda=-1$ 时, 注意到 $y'(x;\lambda)=x-1-\sin^2x-\sin^2y\leqslant x-1$, 结合 $y(0;\lambda)=0$

积分可得 $y(x;\lambda) \leqslant \frac{x^2}{2} - x \Rightarrow \omega(-1) = y(1;\lambda) \leqslant -\frac{1}{2}$. 由零点定理可得 $\omega(\lambda)$ 在 $(-1,0)$ 内存在零点.

问题 5.13 设 $f(t,x,y)$ 在带状域 $[0,1]\times\mathbb{R}^2$ 上连续可微, $\varphi(t)$ 是边值问题

$$\ddot{x} = f(t,x,\dot{x}), \quad x(0) = a,\ x(1) = b$$

的解. 若在区域 G 上恒成立 $f_x(t,x,y) > 0$, 证明: 对充分靠近 b 的 β, 边值问题

$$\ddot{x} = f(t,x,\dot{x}), \quad x(0) = a,\ x(1) = \beta$$

有解.

证明 这一题在本质上和上一题差不多, 只不过讨论更为复杂一些. 设 $\dot{\varphi}(0) = \alpha_0$, 由 Picard 定理可得 $\ddot{x} = f(t,x,\dot{x})$ 在初值 $x(0) = a, \dot{x}(0) = \alpha_0$ 下有唯一解 $\varphi(t)$. 由解对初值的依赖性定理, 对充分靠近 α_0 的 α, 初值问题 $\ddot{x} = f(t,x,\dot{x}), x(0) = a, \dot{x}(0) = \alpha$ 在 $[0,1]$ 上有解 $\psi(t;\alpha)$. 设 $\omega(t) = \frac{\partial\psi(t;\alpha_0)}{\partial\alpha}$, 我们来求出 $\omega(t)$ 满足的初值问题. 由方程可得

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\psi(t;\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{d^2\psi(t;\alpha)}{dt^2} &= \frac{\partial f(t,\psi(t;\alpha),\dot{\psi}(t;\alpha))}{\partial\alpha} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t,\psi(t;\alpha),\dot{\psi}(t;\alpha))\frac{\partial\psi(t;\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}(t,\psi(t;\alpha),\dot{\psi}(t;\alpha))\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi(t;\alpha)}{\partial\alpha}.\end{aligned}$$

这就构造出了 $\frac{\partial\psi(t;\alpha)}{\partial\alpha}$ 所满足的二阶微分方程. 另一方面, 由初值可得

$$\frac{\partial\psi(0;\alpha)}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\psi(0;\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{d\psi(0;\alpha)}{dt} = 1.$$

因此 $\omega(t)$ 满足同样的初值问题

$$\ddot{\omega} = p(t)\dot{\omega} + q(t)\omega, \quad \omega(0) = 0,\ \dot{\omega}(0) = 1.$$

其中 $p(t) = f_y(t,\psi(t;\alpha_0),\dot{\psi}(t;\alpha_0)), q(t) = f_x(t,\psi(t;\alpha_0),\dot{\psi}(t;\alpha_0))$. 由题设可得 $q(t)$ 恒大于零. 下面我们证明: $\omega(t)$ 在 $(0,1)$ 上严格递增. 由上述初值问题可得

$$\dot{\omega}(t)e^{-\int_0^t p(s)ds} = 1 + \int_0^t q(s)\omega(s)e^{-\int_0^s p(u)du}ds.$$

假设 $\omega(t)$ 在 $(0,1)$ 上不总是严格递增的, 则考虑 $\xi \triangleq \inf\{0 < x < 1 : \dot{\omega}(x) = 0\}$. 由 $\dot{\omega}(0) = 1$ 及连续性可得 $\xi \in (0,1)$ 且 $\dot{\omega}(\xi) = 0$. 由定义可得在 $(0,\xi)$ 上恒有 $\dot{(x)} > 0$, 结合 $\omega(0)$ 可得 $\omega(t)$ 在 $(0,\xi)$ 上恒大于零, 所以

$$\dot{\omega}(\xi)e^{-\int_0^\xi p(s)ds} = 1 + \int_0^\xi q(s)\omega(s)e^{-\int_0^s p(u)du}ds > 0,$$

矛盾! 所以 $\omega(t)$ 严格递增, 进而 $\omega(1) = \frac{\partial\psi(1;\alpha_0)}{\partial\alpha} > \omega(0) = 0$. 由此可得函数 $g(\alpha,\beta) \triangleq \psi(1;\alpha) - \beta$ 在 (α_0, b) 处取值为零, 且关于 α 的偏导为正数. 由隐映射定理可得存在 b 的邻域, 使得 $\beta = \beta(\alpha)$ 且 $\psi(1;\alpha) = \beta(\alpha)$. 即此时边值问题 $\ddot{x} = f(t,x,\dot{x}), x(0) = a, x(1) = \beta$ 有解. Happy!

5.2 补充内容: 如何更精确地描述解的延伸?

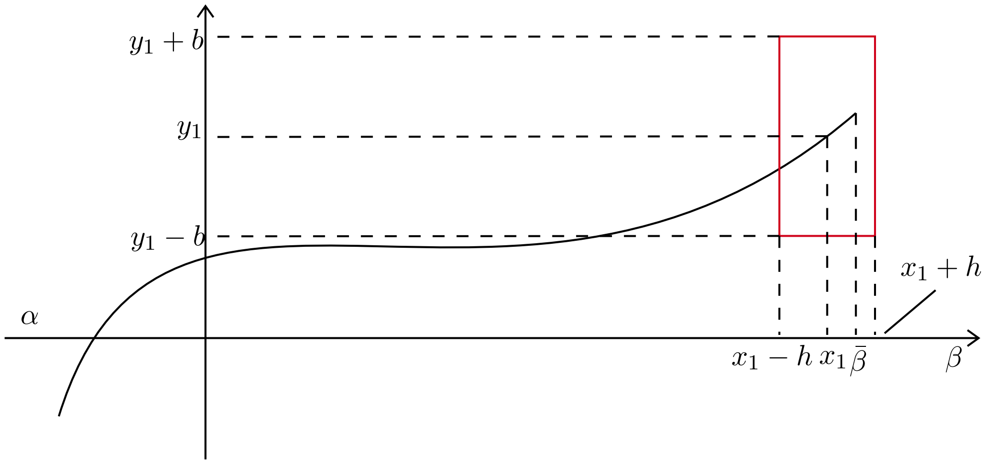
尽管我们在课上已证明了解的延伸定理, 对极大存在区间的性质有了一些初步的刻画, 但这种刻画还是过于粗糙. 例如, 对于 Riccati 方程, 我们仅仅知道它的任一解的极大存在区间有限, 却无法更精确地描述这个区间的端点到底在哪. 所以, 我们还需要发展现有的解的延伸理论, 这正是这一节的核心内容. 我们首先证明课上陈述的一个结论:

命题 5.1

考虑微分方程 $y'(x)=f(x,y)$, 其中 f 在条形区域 $S:\alpha<x<\beta,-\infty<y<+\infty$ 内连续 (这里 $-\infty\leqslant\alpha<\beta\leqslant+\infty$), 而且满足不等式

$$|f(x,y)|\leqslant A(x)|y|+B(x).$$

其中 $A(x),B(x)$ 为区间 (α,β) 上的非负连续函数, 则方程的任一解在 (α,β) 上都存在.



证明 任取方程一解 $y(x)$, 它满足初值 $y(x_0)=y_0$(其中 $\alpha<x_0<\beta$). 我们这里只证明它的右行区间为 $[x_0,\beta)$, 左行区间同理可证.

假设 $y(x)$ 的右行最大存在区间为 $[x_0,\bar\beta)$, 其中 $x_0<\bar\beta<\beta$. 如果我们能把存在范围再向右延长一点, 就导出了矛盾. 由 $A(x),B(x)$ 非负连续可设 $A(x),B(x)\leqslant C,\forall x_0\leqslant x\leqslant\beta-\varepsilon$, 这里 ε 是充分小的正数, $C>0$. 选取正数 $a<\min(\beta-\varepsilon-\bar\beta,\frac{1}{2C})$, 存在 $x_1<\bar\beta$ 使得 $\bar\beta<x_1+a$, 记 $y_1=y(x_1)$. 选取充分大的 b, 我们考虑闭矩形 $R:|x-x_1|\leqslant a,|y-y_1|\leqslant b$, 自然有 $R\subset S$. 此时 $y(x)$ 同样是初值条件 $y(x_1)=y_1$ 的解, 由 Peano 存在定理可得积分曲线在区间 $[x_1-h,x_1+h]$ 内存在, 这里

$$h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right),\quad M=\sup_{(x,y)\in R}|f(x,y)|.$$

如果我们能证明当 b 取到合适的值时成立 $h=a$, 则导出了矛盾. 由给定条件可得

$$|f(x,y)|\leqslant C(|y|+1)\leqslant C(b+|y_1|+1)\Rightarrow M\leqslant C(b+|y_1|+1).$$

因此当 $b\geqslant\frac{aC(|y_1|+1)}{1-aC}$ 时成立 $\frac{b}{M}\geqslant a$, 此时 $h=a$.

上述结论是一个很有用的判定定理, 我们在前面的题目中已经用过一遍了. 下面我们介绍 ODE 理论中的比较定理, 它为存在区间的精确估计提供了强有力的工具.

引理 5.1

设 $\varphi(x),\psi(x)$ 是区间 $I=(\xi,\xi+h]$ 上的可微函数, 设 $\varphi(x)<\psi(x)$ 在某个小区间 $(\xi,\xi+\varepsilon)$ 上成立. 则下述两结论必有一者成立:

1. $\varphi(x)<\psi(x)$ 对任意 $x\in I$ 成立.
2. 存在 $x_0\in I$ 使得 $\varphi(x)<\psi(x)$ 对任意 $x\in(\xi,x_0)$ 成立, 且 $\varphi(x_0)=\psi(x_0),\varphi'(x_0)\geqslant\psi'(x_0)$.

证明 若 1 不成立, 可令 $x_0=\inf\{\xi+\varepsilon<x\leqslant\xi+h:\varphi(x)=\psi(x)\}$, 由连续性可得 $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$. 任取

$0<\delta<\varepsilon$, 则 $\varphi(x_0-\delta)<\psi(x_0-\delta)$, 因此

$$\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x_0-\delta)}{\delta}\geqslant\frac{\psi(x_0)-\psi(x_0-\delta)}{\delta}.$$

令 $\delta\to 0^+$ 可得 $\varphi'(x_0)\geqslant\psi'(x_0)$.

为方便起见, 我们引入记号 $P\varphi\triangleq\varphi'-f(x,\varphi)$, 称为 φ 关于微分方程 $y'(x)=f(x,y)$ 的偏差 (defect). $P\varphi$ 的值越小, φ 就越接近方程的解. 容易看出 φ 是方程的解当且仅当 $P\varphi\equiv 0$.

定理 5.1 (比较定理)

设 $\varphi(x),\psi(x)$ 在区间 $I=(\xi,\xi+h]$ 上可微, 且满足

1. $\varphi<\psi$ 在小区间 $(\xi,\xi+\varepsilon)$ 上成立.
2. $P\varphi<P\psi$ 在 I 上成立.

则 $\varphi<\psi$ 在 I 上成立. ♡

证明 假设存在 $x_0\in I$ 使得 $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$, 则

$$\varphi'(x_0)=P\varphi(x_0)+f(x_0,\varphi(x_0))<P\psi(x_0)+f(x_0,\psi(x_0))=\psi'(x_0).$$

因此前条引理中的 2 无法成立, 进而 1 成立, 即 $\varphi(x)<\psi(x),\forall x\in I$.

我们可以完全类似地得到如下结论:

推论 5.1

设 $\varphi(x),\psi(x)$ 在区间 $I=[\xi-h,\xi)$ 上可微, 且满足

1. $\varphi(x)<\psi(x)$ 在小区间 $(\xi-\varepsilon,\xi)$ 上成立.
2. $P\varphi>P\psi$ 在 I 上成立.

则 $\varphi<\psi$ 在 I 上成立. ♡

到目前为止, 我们似乎证了一些无关紧要的结论, 甚至都没有和微分方程挂上钩. 但上述定理启发我们去研究初值问题的**上解与下解**. 定义如下:

定义 5.1 (上解, 下解)

设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的区域, 称函数 $u(t)$ 是初值问题

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)(t_0\leqslant t\leqslant\xi+h),\quad x(t_0)=x_0 \tag{5.1}$$

的上解 (upper solution, supersolution), 是指它在 $I=[\xi,\xi+h]$ 上可微且满足

$$u'(t)>f(t,u(t))\quad\text{in } I,\quad u(t_0)\geqslant x_0.$$

类似地, 称 $v(t)$ 是5.1的下解 (lower solution, subsolution), 是指它在 I 上可微且满足

$$v'(t)<f(t,v(t))\quad\text{in } I,\quad v(t_0)\leqslant x_0.$$

♣

根据比较定理, 我们立得

定理 5.2 (第一比较定理)

设 u,v 分别是5.1的上解和下解, $x(t)$ 是5.1的一个解, 则 $v(t)<x(t)<u(t),\forall t\in I$. ♡

证明 在 I 上总成立 $Pu=u'(t)-f(t,u(t))>0=Px$. 若 $u(t_0)=x_0$, 则 $u'(t_0)>f(t,x_0)=x'(t_0)$, 因此存在 $\varepsilon>0$ 使得 $u(t)>x(t)$ 在 $(\xi,\xi+\varepsilon)$ 上成立; 若 $u(t_0)>x_0$ 则上述显然. 由比较定理立得 $u(t)>x(t)$,

$\forall t \in I$. 类似可证明 $v(x) < x(t)$.

值得注意的是, 上述给出的上解和下解均是右行区间上的定义. 在左行区间上, 上解 $u(t)$ 应满足

$$u' < f(t, u), \quad u(t_0) \geqslant x_0.$$

下解 $v(t)$ 应满足

$$v' > f(t, v), \quad v(t_0) \leqslant x_0.$$

此时依然成立类似的结论.

笔记 这里我们采取的说法与丁书有所出入, 目的是为了让大家提前接触上解与下解这一概念, 此后在 PDE 部分还会与它们打照面. 但代价就是讲的有些晦涩, 感觉不好理解的同学可以参考丁书上比较定理一节.

到目前为止, 我们得出的似乎还是很平凡的结论. 但事实上, 我们已经可以对刚开始提出的问题给出答复了.

例 5.1 考虑 Riccati 方程的初值问题

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2, \quad x(0) = 1. \tag{5.2}$$

我们已知它的解的存在区间有限, 我们来研究其存在区间的右端点 β 的范围. 注意到初值问题 $\frac{dx}{dt} = x^2, x(0) = 1$ 给出了5.2的一个下解, 为 $v(t) = \frac{1}{1-t}$, 因此我们得到 $\beta < 1$. 由此可得 $\frac{dx}{dt} = x^2 + 1, x(0) = 1$ 给出了5.2的一个上解, 为 $u(t) = \tan(t + \frac{\pi}{4})$, 根据比较定理可得

$$\frac{1}{1-t} < x(t) < \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) (0 < t < \min\{\beta, \frac{\pi}{4}\}).$$

注意到当 $t \to \beta^-$ 时必然有 $x(t) \to +\infty$(延伸定理), 于是 $\beta \geqslant \frac{\pi}{4}$, 这就得到了 $\frac{\pi}{4} \leqslant \beta \leqslant 1$.

上述给出了一个更细化的估计. 那能否还能再精细一些呢? 事实上是可以的. 设 $u(t) = \frac{1}{1-\lambda t}(\lambda > 1)$, 要使 u 为上解, 则有

$$u'(t) > u^2 + t^2 \Rightarrow \frac{\lambda}{(1-\lambda t)^2} > \frac{1}{(1-\lambda t)^2} + t^2 \Rightarrow t^2(1-\lambda t)^2 < \lambda - 1.$$

由均值不等式可得

$$t^2(1-\lambda t)^2 \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda t + 1 - \lambda t}{2}\right)^4 = \frac{1}{16\lambda^2}(0 < t < \lambda^{-1}).$$

因此选取 λ 使得 $\lambda^2(\lambda - 1) > \frac{1}{16}$ 即可. 例如我们选取 $\lambda = \frac{17}{16}$, 则得到

$$\frac{1}{1-t} < x(t) < \frac{16}{16-17t}(0 < t < \min\{\beta, \frac{16}{17}\}).$$

所以我们得到 $\frac{16}{17} \leqslant \beta \leqslant 1$. 事实上, 我们还能做更精细的估计, 例如可以确定

$$0.9698106539304 < \beta < 0.9698106539313.$$

这就几乎确定了 β 的值.

作为第一比较定理的延伸, 我们下面讨论初值问题的**最大解与最小解**, 并介绍第二比较定理.

定义 5.2 (最大解, 最小解)

设 $f(x, y)$ 是区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的连续函数, $\overline{x}(t), \underline{x}(t)$ 是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in D \tag{5.3}$$

的两个延伸到区域边界的解, 满足: 对初值问题的任一解 $x(t)$, 都有 $\underline{x}(t) \leqslant x(t) \leqslant \overline{x}(t)$($t$ 属于三者

存在区间的交), 则称 $\overline{x}(t)$ 是5.3的最大解 (maximal solution), $\underline{x}(t)$ 是5.3的最小解 (minimal solution).

笔记 由定义立即可得: 初值问题5.3存在唯一解当且仅当最大解与最小解相同.

我们下面利用第一比较定理讨论5.3的最大解与最小解存在与否. 这里我们仅证明二者的局部存在性, 但它们也可以延伸到边界并依然保持最大最小性质. 全局性质的证明可以参考 GTM182(93-94), 书中给出了一些证明思路.

命题 5.2

设 f 在带状域 $S = I \times \mathbb{R}$ 上连续且有界, 其中 $I = [t_0, t_0 + h]$. 则初值问题5.3在 I 上有最大解和最小解.

证明 我们仅证明最大解的存在性, 最小解类似可得. 有一个直观的想法: 我们取初值问题的一列上解, 这些上解满足的初值问题越来越靠近5.3, 或许可以取这列上解的极限来获取最大解. 当然我们需要严谨地说明这件事情, 过程中需要借助 Arzelà-Ascoli 定理. 设 $u_n(t)$ 是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \frac{1}{n} \quad \text{in } I, \quad x(t_0) = x_0 + \frac{1}{n}$$

的一个解, 它在区间 I 上存在. 则 $u_n(t)$ 自然成为5.3的上解. 由于 f 有界, 故 $\{u_n(t)\}$ 一致有界. 另一方面, 有

$$|u_n(t_1) - u_n(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \left(f(s, u_n(s)) + \frac{1}{n} \right) ds \right| \leqslant \left(M + \frac{1}{n} \right) |t_1 - t_2|.$$

其中 M 是 $|f|$ 的上界. 因此 $\{u_n(t)\}$ 还是等度连续的. 由 Arzelà-Ascoli 定理可得 $\{u_n(t)\}$ 存在一致收敛子列 $\{u_n(t)\}$, 设其一致极限为 $u(t)$. 写作积分方程的形式

$$u_n'(t) = x_0 + \frac{1}{n} + \int_{t_0}^{t} \left(f(s, u_n'(s)) + \frac{1}{n} \right) ds.$$

令 $n \to \infty$, 由一致收敛性质可得

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) ds.$$

即 $u(t)$ 是5.3在 I 上的解. 另一方面, 任取5.3在 I 上的解 $x(t)$, 由第一比较定理可得 $x(t) < u_n'(t), \forall n, \forall t \in I$. 因此令 $n \to \infty$ 即得 $x(t) \leqslant u(t)$ in I. 所以 $u(t)$ 即为5.3的一个最大解.

从最大解与最小解出发, 我们得出下述第二比较定理:

定理 5.3 (第二比较定理)

设 $f(t,x), F(t,x)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 内连续且总满足 $f(t,x) \leqslant F(t,x)$. 设 $\varphi(t)$ 是初值问题 $x'(t) = f(t,x), x(t_0) = x_0$ 在 (a,b) 上的右行最小解与左行最大解, $\psi(t)$ 是初值问题 $x'(t) = F(t,x), x(t_0) = x_0$ 在 (a,b) 上的右行最大解和左行最小解, 则有

$$\varphi(t) \leqslant \psi(t)(t_0 \leqslant t < b), \quad \varphi(t) \geqslant \psi(t)(a < t \leqslant t_0).$$

证明 第一比较定理的直接推论.

第 6 章 第六次习题课 (by 陈禹汐)

6.1 作业讲解

作业 6.1 (206-8)

设 $f(t,x)$ 在整个平面上连续有界, 且 $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ 也是连续的. 试证微分方程 $x'(t)=f(t,x)$ 的每一解 $x=\varphi(t)$ 的最大存在区间是 $-\infty<t<+\infty$.

证明

1. 首先说明 $x'(t)=f(t,x)$ 的初值问题解存在唯一. 事实上, 对于包含初值点 (t_0,x_0) 的一个有限闭区域, 由于 $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ 连续, 可知 $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ 在该区域上有界, 进而满足 Lipschitz 条件. 从而由解的存在唯一性定理可得命题成立.
2. 下面证明每一解 $x=\varphi(t)$ 的最大存在区间为 $-\infty<t<+\infty$. 任取积分曲线上一点 (t_0,x_0), $\varphi(t)$ 可视作 $x'(t)=f(t,x)$ 在初值条件 $x_0=x(t_0)$ 下面的唯一解. 因为 $f(t,x)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有界, 不妨设界为 M, 考虑包含 (t_0,x_0) 的一列闭区域 $\{[t_0-n,t_0+n]\times[x_0-nM,x_0+nM]:n\in\mathbb{N}\}$. 对每一闭区域上利用解的存在唯一性定理可得: 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 初值问题的解在 $I_n=[t_0-n,t_0+n]$ 上存在, 由 n 的任意性可得初值问题解的最大存在区间为 $(-\infty,+\infty)$.

作业 6.2 (附加 5-1)

讨论以下微分方程解的最大存在区间:

1. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t^2+x^2}$.
2. $\dfrac{dx}{dt}=t^2x\sin x$.
3. $t^2x'=tx+x^2$.

解

1. 考虑等价问题
$$\begin{cases}\dfrac{dt}{dx}=t^2+x^2\\(x,t)\neq(0,0)\end{cases}\tag{6.1}$$
由于 $f(t,x)=t^2+x^2\in C^1(\mathbb{R}^2)$, 即在全平面上连续可微, 且 $f(t,x)$ 满足局部 Lipschitz 条件, 故 (6.1) 的任一初值问题的解存在唯一, 并且延伸至无穷远.
由于 Ricatti 方程 $\frac{dt}{dx}=t^2+x^2$ 的任一解的存在区间 (相对于 x) 有界, 而 (6.1) 的解又延伸至无穷远, 故在 t 方向上必趋于无穷远. 但由于 $\frac{dt}{dx}=t^2+x^2$ 存在唯一一条过 $(0,0)$ 的解, 而 (6.1) 有限制条件 $(t,x)\neq(0,0)$, 故其积分曲线要么从 t 无穷小延伸至原点, 要么从原点延伸至 t 无穷大. 综上可得解的最大存在区间为 $(-\infty,+\infty)$ 或 $(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$.
2. 利用一个控制引理 (见第五次习题课命题 5.1) 即可. 对 $f(t,x)=t^2x\sin x\in C^1(\mathbb{R}^2)$, 有 $|f(t,x)|=t^2|x||\sin x|\leqslant t^2|x|$, 对应引理中 $A(t)=t^2, B(t)=0$. 因此方程每一个解均以 $-\infty<t<+\infty$ 为最大存在区间.
3. 首先 $x\equiv0$ 是方程在 $(-\infty,+\infty)$ 上的解. 令 $x=tu$, 原方程化为
$$t\frac{du}{dt}+u=u+u^2\Rightarrow\frac{du}{u^2}=\frac{dt}{t}.$$

设初值条件为 (t_0, x_0), 求解可得

$$-\frac{t}{x} = \ln|t| - \frac{t_0}{x_0} - \ln|t_0| \Rightarrow x = \frac{-t}{\ln|t| - \ln|t_0| - \frac{t_0}{x_0}}(t_0 \neq 0, x_0 \neq 0).$$

设 t_1 满足 $\ln|t_1| = \ln|t_0| + \frac{t_0}{x_0}$, 则当 $t \to \pm t_1$ 时, $x \to \infty$. 又因为 $|t|$ 充分大时有 $|x| < |t|$. 对于

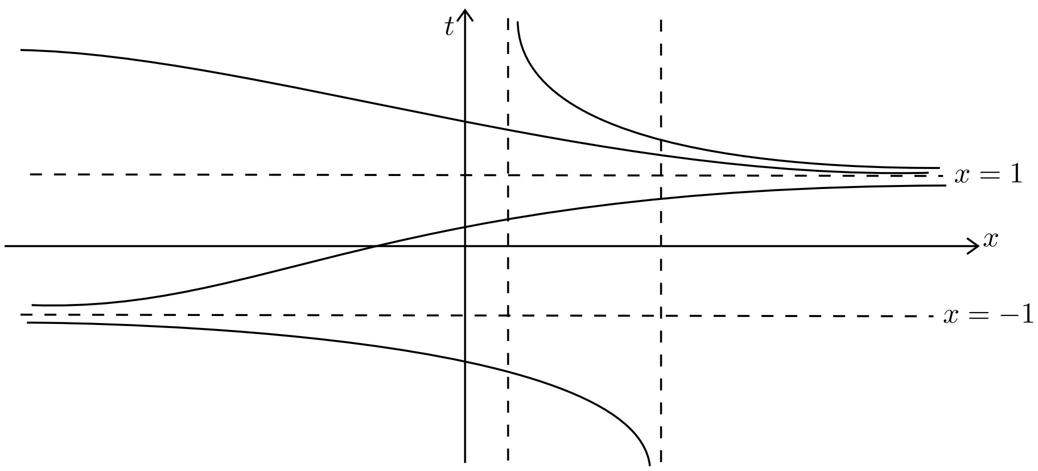
$$x = \frac{-t}{\ln|t| - \ln|t_1|}, \quad |t_1| = e^{\ln|t_0| + \frac{t_0}{x_0}} = |t_0| e^{\frac{t_0}{x_0}},$$

当 $\frac{t_0}{x_0} > 0$ 时, $|t_1| > |t_0|$; 当 $\frac{t_0}{x_0} < 0$ 时, $|t_1| < |t_0|$. 整理可得

- 当 t_0 与 x_0 同号时, 有 $-|t_1| < t_0 < |t_1|$, 此时解的最大存在区间为 $(-|t_1|, |t_1|)$.
- 当 $t_0 > 0, x_0 < 0$ 时, 有 $t_0 > |t_1|$. 此时解的最大存在区间为 $(|t_1|, +\infty)$.
- 当 $t_0 < 0, x_0 > 0$ 时, 有 $t_0 < -|t_1|$. 此时解的最大存在区间为 $(-\infty, -|t_1|)$.

作业 6.3 (附加 5-2)

指出方程 $\frac{dx}{dt} = (1-x^2)e^{tx^2}$ 的每一个解的最大存在区间及解在此区间两端点附近的性状.



解 显然 $x = \pm 1$ 是方程在 $(-\infty, +\infty)$ 上的解. 由 $|x| > 1$ 时 $(1-x^2)e^{tx^2} < 0$, 即 $\frac{dx}{dt} < 0$ 可得积分曲线在区域 $|x| > 1$ 内严格下降, 类似可得在 $|x| < 1$ 内严格上升.

1. $|x_0| < 1$ 时, 原方程过 (t_0, x_0) 的右行解 $x = \varphi(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上满足 $x_0 < x \leqslant 1$, 左行解满足 $-1 \leqslant x < x_0$. 故解的最大存在区间为 $-\infty < t < +\infty$.
2. $x_0 < -1$ 时, 原方程过 (t_0, x_0) 的左行解 $x = \varphi(t)$ 在 $-\infty < t \leqslant t_0$ 上满足 $x_0 \leqslant x \leqslant -1$(由反证易得), 故 $x = \varphi(t)$ 在 $(-\infty, t_0]$ 上存在. 下面证明右行解不能延伸至无穷远. 设右行解为 $x(t)$, 在 $t \geqslant 0$ 且 $t \geqslant t_0$ 时有

$$(1-x^2)e^{tx^2} \leqslant (1-x_0^2)e^{tx^2} \leqslant (1-x_0^2)tx^2.$$

考虑方程 $\frac{d\tilde{x}}{dt} = (1-x_0^2)t\tilde{x}^2, \tilde{x}(t_0) = x_0$, 解方程可得

$$\tilde{x}(t) = \frac{2}{(x_0^2-1)(t^2-t_0^2) + \frac{2}{x_0}}.$$

而 $\tilde{x}(t)$ 的解的最大存在区间为 $(-\infty, \sqrt{t_0^2 + 2/(x_0(1-x_0^2))})$, 在 $t \to \sqrt{t_0^2 + 2/(x_0(1-x_0^2))}$ 时 $\tilde{x}(t)$ 趋于负无穷. 由解的比较定理可得 $x(t) \leqslant \tilde{x}(t)$, 故 $x(t)$ 的右行最大存在区间有限.
3. $x_0 > 1$ 时, 类似可得右行解在 $[t_0, +\infty)$ 上存在. 下面考虑左行解的存在区间 J^-.

(1) $t_0 \leqslant 0$ 时, 由于 J^- 左开右闭, 固定一 $\beta < 0$ 在区间 J^- 中. 任取 $t \leqslant \beta$, 有

$$|(1-x^2)e^{tx^2}| \leqslant |e^{tx^2}| + \frac{1}{|t|}|tx^2e^{tx^2}| \leqslant 1 - \frac{1}{e\beta},$$

(说明: 当 $t \leqslant \beta < 0$ 时, 有 $|e^{tx^2}| \leqslant 1$, $\frac{1}{|t|} < -\frac{1}{\beta}$. 而函数 $g(u) = ue^u$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的值域为 $[-\frac{1}{e}, 0)$, 因此 $|tx^2e^{tx^2}| < \frac{1}{e}$). 由此可得 $|x(t)| \leqslant |x(\beta)| + (1 - \frac{1}{e\beta})|t-\beta|$, 因此解可延伸至负无穷.

(2) $t_0 > 0$ 时, 由 (1) 可得此情况下存在 (t_0, x_0) 使得初值问题的解向左延伸至 $-\infty$. 这是因为 (1) 中的积分曲线右行延伸至 $+\infty$, 这条积分曲线上存在 t 使得 $t > 0$ 且 $x(t) > 1$. 以此为初值的积分曲线唯一 (即为上述积分曲线), 可延伸至 $-\infty$. 但下述断言说明: 存在特殊的 $t_0 > 0, x_0 > 1$, 使得左行区间 J^- 有限.

Claim: 当 $t_0^3 \geqslant \frac{27\pi}{16(x_0^2-1)^2}$ 时, J^- 的左端点大于零.

考虑函数 $g(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\sqrt{\alpha}(x_0^2-1)}\frac{\sqrt{\pi}}{2} (\alpha > 0)$. 则有

$$g(\alpha) = \alpha + \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\alpha}(x_0^2-1)} + \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\alpha}(x_0^2-1)} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{\pi}{16\alpha(x_0^2-1)^2}\alpha} = 3\sqrt[3]{\frac{\pi}{16(x_0^2-1)^2}}.$$

等号成立当且仅当 $\alpha = (\frac{\sqrt{\pi}}{4(x_0^2-1)})^{\frac{2}{3}}$, 因此 $\min\limits_{\alpha>0} g(\alpha) = 3\sqrt[3]{\frac{\pi}{16(x_0^2-1)^2}}$. 由此可得存在 $\alpha > 0$, 使得

$$t_0 \geqslant \alpha + \frac{1}{\sqrt{\alpha}(x_0^2-1)}\frac{\sqrt{\pi}}{2} > \alpha.$$

假设 J^- 能延伸到 $\alpha > 0$, 则

$$\begin{aligned} t_0 - \alpha &= \int_\alpha^{t_0} dt = \int_\alpha^{t_0} \frac{x'(t)dt}{(1-x^2)e^{tx^2}} \leqslant \int_\alpha^{t_0} \frac{x'(t)dt}{(1-x^2)e^{\alpha x^2}} \\ &= \int_{x_0}^{x(\alpha)} \frac{dx}{(x^2-1)e^{\alpha x^2}} \leqslant \frac{1}{x_0^2-1}\int_{x_0}^{x(\alpha)} \frac{dx}{e^{\alpha x^2}} < \frac{1}{x_0^2-1}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx \\ &\xlongequal{y=\sqrt{\alpha}x} \frac{1}{\sqrt{\alpha}(x_0^2-1)}\int_0^\infty e^{-y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{\alpha}(x_0^2-1)}\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

这与断言中的假设矛盾! 故 J^- 此时不能延伸至 α.

作业 6.4 (222-1(2))

试求出方程 $\frac{dx}{dt} = 3t^2e^x$ 以 (t_0, x_0) 为初值的解, 并讨论解对初值的连续性.

解 求解方程: $e^{-x}dx = 3t^2dt$. 代入 (t_0, x_0) 可得 $e^{-x} = e^{-x_0} + t_0^3 - t^3$, 即 $x = -\ln(e^{-x_0} - t^3 + t_0^3)$. 原方程中 $f(t,x) = 3t^2e^x$, 结合解的形式可以看出解在任一初值处均关于初值连续.

作业 6.5 (222-3)

设 $x = \varphi_n(t)$ 是方程 $\frac{dx}{dt} = xe^{(t+x)^2}$ 的解, 适合条件 $\varphi_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$. 试证对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$ 和实数 A, B, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $\varphi_n(t)$ 在闭区间 $A \leqslant t \leqslant B$ 上存在, 且在此区间上 $|\varphi_n(t)| < \varepsilon$.

证明 设 $f(t,x) = xe^{(t+x)^2}$, 则 $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = (2x(t+x)+1)e^{(t+x)^2}$. 由此可得 $f(t,x)$ 满足局部 L-条件, 即满足初值问题解的存在唯一条件. 由此可得 $x \equiv 0$ 为满足初值 $(0,0)$ 的唯一解, 存在区间为 $(-\infty, +\infty)$. 同时该方程也满足解对初值连续依赖的条件. 故对于区间 $[A, B]$, 考虑更大的区间 $[-m, m]$, 其中 $m = \max\{|A|, |B|\}$, 则零解在 $[-m, m]$ 上存在, 进而由解对初值的连续依赖性定理可得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得

对于初值 $(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})$, 当 $|\frac{1}{n}-0|<\delta,|\frac{1}{n^2}-0|<\delta$ 时, 该初值的解 $\varphi_n(t)$ 在 $[-m,m]$ 上也存在, 且有 $|\varphi_n(t)|<\varepsilon$. 上述在子区间 $[A,B]$ 上自然也成立.

作业 6.6 (272-7)

讨论方程组 $\dot{x}=\alpha x+y,\dot{y}=-x+\alpha y$ 的零解的稳定性.

解 设初值为 $x(0)=x_0,y(0)=y_0$, 且 $x_0^2+y_0^2\neq 0$. 求解可得

$$x=e^{\alpha t}(x_0\cos t+y_0\sin t),\quad y=e^{\alpha t}(y_0\cos t-x_0\sin t).$$

由此可得 $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\alpha t}\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.

1. $\alpha<0$ 时, 任取 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $\sqrt{x_0^2+y_0^2}<\delta$ 时, 有 $\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$, 且
$$\lim_{t\to+\infty}\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\lim_{t\to+\infty}e^{\alpha t}=0.$$
此时零解渐近稳定.
2. $\alpha=0$ 时, 取 $\delta=\varepsilon$, 有 $\sqrt{x^2+y^2}\equiv\varepsilon$, 故零解稳定而不渐近稳定.
3. $\alpha>0$ 时, $\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{x^2+y^2}=+\infty$, 故零解不稳定.

作业 6.7 (272-8)

设 $g(t),f(t)$ 在区间 $0\leqslant t<+\infty$ 上是连续的, 试证关于微分方程 $\frac{dx}{dt}=g(t)x+f(t)$ 的任一解的稳定性有如下结论:

1. 当 $\int_0^\infty g(t)dt<+\infty$, 解是稳定的.
2. 当 $\int_0^\infty g(t)dt=-\infty$, 解是渐近稳定的.
3. 当 $\int_0^\infty g(t)dt=+\infty$, 解是不稳定的.

证明 设 $x=\varphi(t)$ 是原方程的任一解, $t\in[0,+\infty)$, 得 $x(0)=\varphi(0)$. 又原方程以 $x(0)=x_0$ 为初值的解为

$$x(t)=e^{\int_0^t g(s)ds}\left(x_0+\int_0^t f(s)e^{-\int_0^s g(u)du}ds\right).$$

因此对任意 x_0, 有

$$|x(t;0,x_0)-\varphi(t)|=\left|e^{\int_0^t g(s)ds}(x_0-\varphi(0))\right|=e^{\int_0^t g(s)ds}|x_0-\varphi(0)|.$$

1. 当 $\int_0^\infty g(t)dt<+\infty$, 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $M=\max_{t\geqslant0}e^{\int_0^t g(s)ds}$. 令 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$, 则 $|x_0-\varphi(0)|<\delta$ 时, 有
$$|x(t;0,x_0)-\varphi(t)|=e^{\int_0^t g(s)ds}|x_0-\varphi(0)|<M\delta<\varepsilon.$$
因此解是稳定的.
2. 当 $\int_0^\infty g(t)dt=-\infty$, 则有
$$\lim_{t\to+\infty}|x(t;0,x_0)-\varphi(t)|=e^{\int_0^\infty g(s)ds}|x_0-\varphi(0)|=0.$$
由 1 可得解是稳定的, 进而解渐近稳定.
3. 当 $\int_0^\infty g(t)dt=+\infty$, $e^{\int_0^t g(s)ds}$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 上无界. 由此可得解不稳定.

作业 6.8 (289-6)

讨论方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 3z - x(x+y-2z)^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3z - y(x-y+z)^2 \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y - z \end{cases}$$

零解的稳定性.

解 方程组即为

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x(x+y-2z)^2 \\ -y(x-y+z)^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

即为 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}(t, \boldsymbol{x})$. 验证可得 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ 是线性主部, 特征多项式为 $\det(\lambda I - A) = \lambda^3 + \lambda^2 + 7\lambda - 14$, 且 $\varphi(0) = -14 < 0$. 由三次函数性质可得 A 存在正特征值. 故原方程的零解不稳定.

作业 6.9 (295-5(3)(4))

讨论下列方程组的零解稳定性.

1. $\dfrac{dx}{dt} = \ln(1+x+y)$, $\dfrac{dy}{dt} = x - y - x^2$.
2. $\dfrac{dx}{dt} = e^x \sin y + \sin x + e^z - 1$, $\dfrac{dy}{dt} = \sin(x+y)$, $\dfrac{dz}{dt} = \tan(x+z)$.

解

1. 由 Taylor 展开可得方程组的线性主部为
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
计算可得 $\det(\lambda I - A) = (\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})$, 有正实根. 故原方程的零解不稳定.
2. 由 Taylor 展开可得方程组的线性主部为
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
计算可得 $\det(\lambda I - A) = (\lambda^2 - 2\lambda - 1)(\lambda - 1)$, 存在正的实特征值. 故零解不稳定.

6.2 补充习题

解的存在性 先回忆解的存在唯一性定理与解的延伸定理:

定理 6.1 (解的存在唯一性定理)

若 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在矩形区域 $D:\{(t,\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^{n+1}:|t-t_0|\leqslant a,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\leqslant b\}$ 内连续且对 $\boldsymbol{x}$ 满足 Lipschitz 条件, 则初值问题

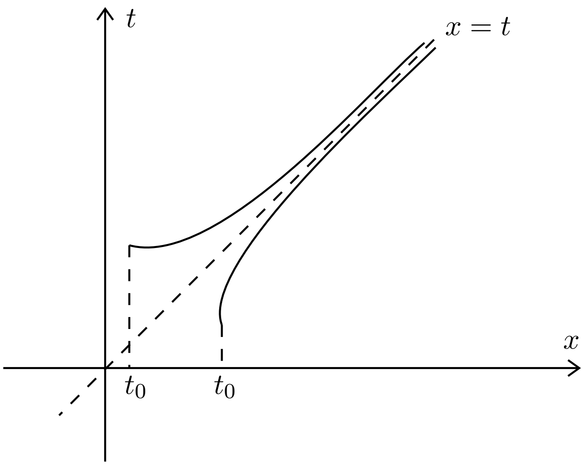
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

在区间 $I=[t_0-h,t_0+h]$ 上存在唯一解, 其中 $h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$, $M=\max_D|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})|$.

定理 6.2 (解的延伸定理)

设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在区域 D 上连续, Γ 为方程 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 过 D 内一点 $P_0=(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 的任意一条积分曲线, 则 Γ 必在 D 内可延伸到边界. 即对任意的包含 P_0 的有界闭子区域 $G\subset D$, Γ 必定延伸到 G 外.

问题 6.1 判断 $\frac{dx}{dt}=(t-x)e^{tx^2}$ 以 (t_0,x_0) 为初值的右行解的最大存在区间.



解 考虑 Nullcline $L:x=t$(即方向场上线素斜率为零的等斜线), 在 L 上方线素斜率为负, 积分曲线单调下降; L 下方线素斜率为正, 积分曲线单调上升.

1. 若 $t_0\geqslant x_0$, 则对区域 $G=[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}$, 应用解的延伸定理可得 $\varphi(t)$ 必延伸到 G 的边界. 但积分曲线单调上升, 且无法自 L 下方穿越到上方, 故必定向右延伸至 $[t_0,+\infty)$.
2. 若 $t_0<x_0$, 同理可得右行饱和区间仍为 $[t_0,+\infty)$.

下面这道习题与上题类似, 留给同学们自己练习.

问题 6.2 判断下列方程解的最大存在区间: $\frac{dx}{dt}=(t^2-x^2)f(t,x)$, 其中 $f\in C(\mathbb{R}^2)$ 且 $xf(t,x)>0$, $\forall x\neq 0$.

解的稳定性 Recall: 什么是稳定性?

定义 6.1

设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$, 它在 $[t_0,+\infty)$ 上存在.

1. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 对任意 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\varphi}(t_0)|<\delta$, 上述方程以 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 为初值的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上存在, 且对任意 $t\geqslant t_0$, $|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\varphi}(t)|<\varepsilon$, 则称 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 稳定; 反之称其不稳定.

2. 若 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 稳定且存在 $\delta_1 \in (0,\delta)$, 对任意 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\varphi}(t_0)| < \delta_1$, 有 $\lim\limits_{t\to+\infty} |\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\varphi}(t)| = 0$. 则称 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 渐近稳定.

我们常用判断解的稳定性的方法包括: (1) 线性近似方法; (2) Lyapunov 直接方法.

问题 6.3 设 $a \in \mathbb{R}$ 为常数, 讨论方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - 2y + xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}x + ay - 2x^2y \end{cases}$$

零解的稳定性.

解 首先线性近似可得

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \quad A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ \frac{1}{2} & a \end{pmatrix}.$$

计算可得 $\det(\lambda I - A) = (\lambda - a)^2 + 1$, 因此特征值为 $\lambda = a \pm i$. 当 $a > 0$ 是零解不稳定, $a < 0$ 时零解渐近稳定. 当 $a = 0$ 时, 线性近似失效, 考虑 Lyapunov 方法. 此时方程组为

$$\frac{dx}{dt} = -2y + xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}x - 2x^2y.$$

取 $V(x,y) = x^2 + 4y^2$, 则 V 正定且全导数

$$\dot{V}(x,y) = 2x(-2y + xy^2) + 8y(\frac{1}{2}x - 2x^2y) = -14x^2y^2 \leqslant 0.$$

因此 $a = 0$ 时零解稳定.

解对初值的连续依赖性与连续性 首先回顾相关定义:

定义 6.2

设方程 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 的在初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 下的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 在 $[a,b]$ 上存在. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon;t_0,\boldsymbol{x}_0)$, 使得对任意满足 $|t_0^* - t_0| < \delta|, |\boldsymbol{x}_0^* - \boldsymbol{x}_0| < \delta$ 的 $t_0^*, \boldsymbol{x}_0^*$, 以 $\boldsymbol{x}(t_0^*) = \boldsymbol{x}_0^*$ 为初值条件的解 $\boldsymbol{\varphi}(t;t_0^*,\boldsymbol{x}_0^*)$ 在 $[a,b]$ 上存在, 且关于 $t \in [a,b]$ 一致成立

$$|\boldsymbol{\varphi}(t;t_0^*,\boldsymbol{x}_0^*) - \boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon,$$

则称方程的解在 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 处对初值连续依赖.

笔记 强调: (1) 新的初值处解的存在性; (2) 新初值处解与原初值的解非常接近.

定理 6.3 (解对初值的连续依赖性定理)

设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在区域 D 内连续且对 $\boldsymbol{x}$ 满足局部 L-条件, 若 $(t_0,\boldsymbol{x}_0) \in D$ 时初值问题有解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 且 $t \in [a,b]$ 时 $(t,\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)) \in D$, 则初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_0^*) = \boldsymbol{x}_0^* \end{cases}$$

的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t;t_0^*,\boldsymbol{x}_0^*)$ 在点 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 连续依赖于初值 $(t_0^*,\boldsymbol{x}_0^*)$.

笔记 这一定理的证明非常典型, 建议大家仔细学习.

问题 6.4 试对固定的 t_0, 证明当 $\boldsymbol{f}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 满足局部 L 条件时, 初值问题的解 $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{x}_0)$ 关于 $(t,\boldsymbol{x}_0)$ 连续.

证明 由 L-条件和 Gronwall 不等式可得

$$\begin{aligned}
&|\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{x}_0^*)-\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{x}_0)|\\
\leqslant&|\boldsymbol{x}_0^*-\boldsymbol{x}_0|+\left|\int_{t_0}^{t}(\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}(s,\boldsymbol{x}_0^*))=\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{\varphi}(s;\boldsymbol{x}_0)))ds\right|\\
\leqslant&|\boldsymbol{x}_0^*-\boldsymbol{x}_0|+L\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{\varphi}(s;\boldsymbol{x}_0^*)-\boldsymbol{\varphi}(s;\boldsymbol{x}_0)|ds\\
\leqslant&|\boldsymbol{x}_0^*-\boldsymbol{x}_0|e^{L|t-t_0|}.
\end{aligned}$$

$\forall t_1,t_2\in I=[t_0-h,t_0+h]$, 成立

$$\begin{aligned}
&|\boldsymbol{\varphi}(t_1;\boldsymbol{x}_0^*)-\boldsymbol{\varphi}(t_2;\boldsymbol{x}_0)|\\
\leqslant&|\boldsymbol{\varphi}(t_1;\boldsymbol{x}_0^*)-\boldsymbol{\varphi}(t_2;\boldsymbol{x}_0^*)|+|\boldsymbol{\varphi}(t_2;\boldsymbol{x}_0^*)-\boldsymbol{\varphi}(t_2;\boldsymbol{x}_0)|\\
\leqslant&|\boldsymbol{\varphi}(t_1;\boldsymbol{x}_0^*)-\boldsymbol{\varphi}(t_2;\boldsymbol{x}_0^*)|+|\boldsymbol{x}_0^*-\boldsymbol{x}_0|e^{L|t_2-t_0|}\\
\leqslant&|\boldsymbol{\varphi}(t_1;\boldsymbol{x}_0^*)-\boldsymbol{\varphi}(t_2;\boldsymbol{x}_0^*)|+|\boldsymbol{x}_0^*-\boldsymbol{x}_0|e^{Lh}.
\end{aligned}$$

令 $t_1\to t_2,\boldsymbol{x}_0^*\to\boldsymbol{x}_0$ 可得 $|\boldsymbol{\varphi}(t_1;\boldsymbol{x}_0^*)-\boldsymbol{\varphi}(t_2;\boldsymbol{x}_0)|\to 0$.

问题 6.5 考虑初值问题 $x'=f(x),x(0)=x_0$, 其中 $f(x)$ 在实数轴上连续可微.

1. 求证: 初值问题的解 $\varphi(t;x_0)$ 存在唯一.
2. 在初值问题的存在区间 $[-h,h]$ 内**讨论** $\varphi(t,x_0)$ 关于 (t,x_0) 的连续性.
3. 设解 $\varphi(t;x_0)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在. 若给定 x_0 且对任意自然数 k 成立 $|\varphi(k;x_0)-x_0|<M$, 其中 $M>0$ 为常数. 证明: $\varphi(t;x_0)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

解 可参考黄助教的 19mid 参考解答.

第 7 章 第七次习题课 (by 黄天一)

7.1 习题讲解

作业 7.1 (289-9)

讨论方程 $\dddot{x} + \ddot{x} - 2x = 0$ 零解的稳定性.

解 题设方程等价于一阶方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = 2x - z \end{cases}$$

我们用两种方法来证明零解不稳定:

1. 系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 计算可得

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2), \quad \lambda = 1, -1 \pm i.$$

因此 A 存在正特征值, 零解不稳定.

2. 第二种方法需要用到一个判定定理, 我们会在稍后证明. 构造函数 $V(x, y, z) = xy + yz + zx$, 则在 $(0, 0, 0)$ 的任一邻域内, 取 $x = y = z \neq 0$ 则有 $V(x, y, z) = 3x^2 > 0$. 且全导数

$$\dot{V}(x, y, z) = (y + z)y + (x + z)z + (2x - z)(x + y) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = (x + y)^2 + x^2 + z^2$$

正定. 所以零解不稳定.

下面我们介绍两个课上未提及的判定定理, 它们大大减弱了不稳定的判定条件, 在实际应用中相当有用. 下面我们总考虑如下自治系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{7.1}$$

一个平衡点为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

定理 7.1

若存在连续可微函数 $V(\boldsymbol{x})$, 使得: (1) V 在相空间坐标原点的任一邻域内能取到正值; (2) V 的全导数 $\dot{V}$ 在原点某邻域 Ω 内正定. 则 (7.1) 的零解不稳定.

笔记 该定理将课上要求的 V 正定这一条件削弱为 V 在任一邻域内能取到正值.

证明 设 V 在闭球 $\overline{B(\boldsymbol{0}, r)}$ 内有正定的全导数. 任取 $\delta \in (0, r)$, 由已知可设 $\boldsymbol{a} \in B(\boldsymbol{0}, \delta)$ 使得 $V(\boldsymbol{a}) > 0$. 考虑以 $\boldsymbol{a}$ 为初值的解 $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t; t_0, \boldsymbol{a})$, 若能证明存在 $T > t_0$, 使得 $|\boldsymbol{\varphi}(T)| \geqslant r$, 则零解不稳定.

反证. 如若不然, 则 $\dot{V}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \geqslant 0$ 对任意 $t \geqslant t_0$ 都成立, 因此 $V(\boldsymbol{\varphi}(t)) \geqslant V(\boldsymbol{\varphi}(t_0)) = V(\boldsymbol{a}) > 0$. 由 $V(\boldsymbol{0}) = 0$ 以及连续性可得存在 $\sigma > 0$ 使得 $V(\boldsymbol{x}) < V(\boldsymbol{a}), \forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{0}, \sigma)$, 由此可得 $\sigma \leqslant |\boldsymbol{\varphi}(t)| < r$, $\forall t \geqslant t_0$. 令 $m = \min\limits_{\sigma \leqslant |\boldsymbol{x}| \leqslant r} \dot{V}(\boldsymbol{x})$, 由 V 正定可得 $m > 0$. 从而有

$$\dot{V}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \geqslant m \Rightarrow V(\boldsymbol{\varphi}(t)) \geqslant m(t - t_0) + V(\boldsymbol{a}), \quad \forall t \geqslant t_0.$$

当 $t \to +\infty$ 时, RHS 趋于正无穷, 矛盾! 所以零解不稳定.

定理 7.2

若存在连续可微函数 V 以及原点的某邻域 Ω, 使得全导数 $\dot{V} = \lambda V + W$, 其中 $\lambda > 0$, W 恒为零或恒非正或恒非负, 且在原点的任一邻域内存在一点 $\boldsymbol{a}$ 使得 $V(\boldsymbol{a})W(\boldsymbol{a}) > 0$, 则零解是不稳定的.

笔记 仿照金福临 P281 定理 4 证明即可.

作业 7.2 (289-10)

试用 Lyapunov 直接方法讨论具有阻尼的单摆运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + b\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

零解的稳定性, 这里 l 和 b 是正常数, g 是重力加速度.

解 题设方程等价于一阶方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \psi \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin\varphi - b\psi \end{cases}$$

构造函数

$$V(\varphi,\psi) = \frac{2g}{l}(1-\cos\varphi) + \frac{\psi^2}{2} + \frac{1}{2}(b\varphi+\psi)^2.$$

则 V 正定, 且全导数

$$\dot{V}(\varphi,\psi) = \left(\frac{2g}{l}\sin\varphi + b(b\varphi+\psi)\right)\psi + (\psi + (b\varphi+\psi))\left(-\frac{g}{l}\sin\varphi - b\psi\right) = -b\psi^2 - \frac{bg}{l}\varphi\sin\varphi$$

在原点附近负定, 所以零解渐近稳定.

作业 7.3 (289-11)

讨论方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + z - 1 + (x-1)[(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2] \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2z - 5 + y[(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2] \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 2y + z - 3 + (z-2)[(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2] \end{cases}$$

的解 $x=1, y=0, z=2$ 的稳定性.

解 作平移 $x \mapsto x-1, y \mapsto y, z \mapsto z-2$, 则系统化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + z + x(x^2+y^2+z^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2z + y(x^2+y^2+z^2) \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 2y + z + z(x^2+y^2+z^2) \end{cases}$$

研究其零解的稳定性即可. 我们依然给出两种方法:

1. 线性主部的系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, 计算可得

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-9\triangleq\varphi(\lambda).$$

注意到 $\varphi(2)=-3,\varphi(3)=21$, 故 φ 存在正实根 $\lambda\in(2,3)$, 因此零解不稳定.

2. 构造函数 $V(x,y,z)=z^2-x^2-y^2$, 则在原点任一邻域内取 $x=y=0,z\neq0$, 有 $V(x,y,z)=z^2>0$. 计算可得全导数

$$\dot{V}(x,y,z)=2(x^2+y^2+z^2)(1+z^2-x^2-y^2)$$

在原点附近正定, 因此系统的零解不稳定.

作业 7.4 (附加)

设 a 为实常数, 讨论以下系统零解的稳定性.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+ax^3\\ \dfrac{dy}{dt}=x+ay^3\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax-y-x^5\\ \dfrac{dy}{dt}=ay-z-y^5\\ \dfrac{dz}{dt}=az-x-z^5\end{cases}$$

解

1. 构造函数 $V(x,y)=x^2+y^2$, 则 V 正定且全导数为

$$\dot{V}(x,y)=2x(-y+ax^3)+2y(x+ay^3)=2a(x^4+y^4).$$

若 $a>0$, 则 $\dot{V}$ 正定, 零解不稳定; 若 $a<0$, 则 $\dot{V}$ 负定, 零解渐近稳定; 若 $a=0$, 则 $\dot{V}$ 恒为零, 零解稳定且不渐近稳定 (因为此时恒有 $V(x,y)=V(x_0,y_0)\Rightarrow x^2+y^2\equiv x_0^2+y_0^2$).

2. 系统线性主部的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}a & -1 & 0\\ 0 & a & -1\\ -1 & 0 & a\end{pmatrix}$$

计算可得 A 的特征值为 $a-1,a+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,a+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 若 $a>-\frac{1}{2}$, 则存在正实部的特征值, 零解不稳定; 若 $a<-\frac{1}{2}$, 则特征值实部均为负数, 零解渐近稳定. 若 $a=-\frac{1}{2}$, 线性近似失效. 构造 $V(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 则 V 正定且全导数

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y,z)&=2x\left(-\frac{x}{2}-y-x^5\right)+2y\left(-\frac{y}{2}-z-y^5\right)+2z\left(-\frac{z}{2}-x-z^5\right)\\&=-(x+y+z)^2-2(x^6+y^6+z^6)\end{aligned}$$

负定, 此时系统零解渐近稳定.

作业 7.5 (301-4)

求解方程 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

解 特征方程为 $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{-x}$, 一个首次积分为 $x^2+y^2=C$. 因此原方程通解为 $z=g(x^2+y^2)$, g 为任一可

微函数.

作业 7.6 (301-6)

求解方程 $xz\dfrac{\partial u}{\partial x}+yz\dfrac{\partial u}{\partial y}-(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

解 特征方程为

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=-\frac{dz}{x^2+y^2}.$$

求得两个独立的首次积分为 $\frac{x}{y}=C_1, x^2+y^2+z^2=C_2$. 因此原方程通解为 $u=g(\frac{x}{y},x^2+y^2+z^2)$.

作业 7.7 (302-11)

求解方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\left(xz^2-\dfrac{z}{x}\right)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

解 特征方程为

$$dx=zdy=\frac{xdz}{x^2z^2-z}.$$

求得两个独立的首次积分为 $x+\frac{1}{xz}=C_1, y-\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2z}=C_2$. 因此原方程的通解为 $u=g(x+\frac{1}{xz}.y-\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2z})$.

作业 7.8 (302-14)

求解方程 $\dfrac{x-y}{z-u}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{x-y}{z-u}\dfrac{\partial v}{\partial y}+(x-y+1)\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial v}{\partial u}=0.$

解 特征方程为

$$\frac{z-u}{x-y}dx=\frac{z-u}{x-y}dy=\frac{dz}{x-y+1}=du.$$

求得三个独立的首次积分为 $x-y=C_1,(x-y+1)u-z=C_2,(u-z)e^{-y}=C_3$, 因此原方程的通解为

$$v=g(x-y,(x-y+1)u-z,(u-z)e^{-y}).$$

最后我们来证明课上略过的等价性定理. 这里采用陈祖墀书的叙述. 这其实是 ODE 理论的一个简单应用. 下面我们总考虑一阶拟线性 PDE

$$\sum_{i=1}^{n}b_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=c(x,u). \tag{7.2}$$

这里 $x\in D$, D 为 $\mathbb{R}^n$ 中一区域. 那么它的特征方程为

$$\frac{dx_i}{dt}=b_i(x(t),z(t))(i=1,\cdots,n),\qquad \frac{dz}{dt}=c(x(t),z(t)).$$

定理 7.3 (等价性定理)

若特征曲线 γ 上某点 (x_0,z_0) 落在积分曲面 $z=u(x)$ 上, 则 γ 必定完全落在积分曲面上.

证明 设特征曲线为 $\gamma:t\mapsto(x(t),z(t))$. 定义 $y(t)=u(x(t))-z(t)$, 若能证明 $y(t)$ 在 t 的定义区间上恒

为零, 则特征曲线 γ 自然完全落在积分曲面上. 注意到

$$\frac{dy}{dt}=\frac{du(x(t))}{dt}-z'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}-z'(t)=\sum_{i=1}^{n}b_i(x(t),z(t))\frac{\partial u}{\partial x_i}(x(t))-c(x(t),z(t))$$

$$=\sum_{i=1}^{n}b_i(x(t),u(x(t))-y(t))\frac{\partial u}{\partial x_i}(x(t))-c(x(t),u(x(t))-y(t)).$$

由原 PDE 可得 $y\equiv 0$ 是上述方程的解, 结合初值 $y(t_0)=u(x_0)-z_0=0$ 以及解的唯一性可得 $y\equiv 0$.

问题 7.1(赵班 20mid) 讨论方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=(\varepsilon x+4y)(z+1)\\ \dot{y}=(-x+\varepsilon y)(z+1)\\ \dot{z}=-z^3\end{cases}$$

零解的稳定性, 其中 $\varepsilon\neq 0$.

解 当 $\varepsilon>0$ 时, 方程线性主部的系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}\varepsilon & 4 & 0\\ -1 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 其特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\varepsilon+2i,\varepsilon-2i$, 存在正实部的特征值, 故零解不稳定.

当 $\varepsilon<0$ 时, 考虑函数 $V(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2$, 则 V 正定, 且全导数

$$\dot{V}(x,y,z)=2x(\varepsilon x+4y)(z+1)+8y(-x+\varepsilon y)(z+1)-2z^4=2\varepsilon(x^2+4y^2)(z+1)-2z^4$$

在 $(0,0,0)$ 附近是负定的. 故此时零解渐近稳定.

问题 7.2(课上不讲)

1. 讨论 Lienard 方程 $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$ 零解的稳定性, 其中 $f(x),g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $xf(x)>0,xg(x)>0,\forall x\neq 0$.
2. 讨论方程 $\ddot{x}+p\dot{x}+q(x-x^3)=0$ 零解的稳定性. 其中 $p\in\mathbb{R},q>0$.

解

1. 在附加作业 2 中, 我们就用过 Lienard 变换来求解 Lienard 方程. 现在我们依然利用此变换讨论其稳定性. 令 $F(x)=\int_0^x f(s)ds, y=\dot{x}+F(x)$, 则 $xF(x)>0(x\neq 0)$ 且
$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=-g(x).$$
构造函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(s)ds$, 则 V 正定且
$$\dot{V}(x,y)=g(x)(y-F(x))-yg(x)=-F(x)g(x).$$
由题设可得全导数 $\dot{V}(x,y)$ 常负. 因此 Lienard 系统的零解稳定.
2. 很典型的题目, 考试容易考到. 首先化为一阶方程组
$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-qx-py+qx^3.$$
系统的线性主部为
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -q & -p\end{pmatrix}.$$
计算可得 $\det(\lambda I-A)=\lambda^2+p\lambda+q$, 特征值为 $\lambda=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, $\Delta=p^2-4q$.
(a) $p^2-4q<0$, 则特征值为共轭虚根, 实部为 $-\frac{p}{2}$. 若 $p<0$, 则零解不稳定; 若 $p>0$, 则零解渐近

稳定. 若 $p=0$, 此时原方程化为

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-qx+qx^3.$$

且有 $q>0$. 构造函数 $V(x,y)=\frac{q}{2}x^2-\frac{q}{4}x^4+\frac{1}{2}y^2$(通过构造首次积分可得), 则 V 在原点附近正定且

$$\dot{V}(x,y)=(qx-qx^3)y+y(-qx+qx^3)=0.$$

因此零解稳定, 且此时 $V(x,y)\equiv V(x_0,y_0)>0$, 故零解非渐近稳定.

(b) $p^2=4q$, 则特征值均为 $\lambda=-\frac{p}{2}$. 若 $p<0$, 则零解不稳定; 若 $p>0$, 则零解渐近稳定. 若 $p=0$, 则 $q=0$, 此时系统以 (x_0,y_0) 为初值的解为 $x(t)=y_0t+x_0, y(t)=y_0$, 故零解不稳定.

(c) $p^2-4q>0$, 则特征值均为实数. 若 $q<0$, 则特征值一正一负, 故零解不稳定. 若 $q>0$, 则特征值同号. 若 $p>0$, 特征值均为负, 零解稳定; 若 $p<0$, 特征值均为正, 零解不稳定. 若 $q=0$, 则系统为

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-py.$$

以 (x_0,y_0) 为初值的解为

$$x(t)=x_0+\frac{y_0}{p}(1-e^{-pt}),\quad y(t)=y_0e^{-pt}.$$

由此可得 $p<0$ 时零解不稳定, $p>0$ 时稳定而不渐近稳定.

问题 7.3(21 赵班 mid) 设 n 阶常数方阵 A 的所有特征值实部均为负, n 阶矩阵值函数 $B(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且满足

$$\int_0^{\infty}\|B(t)-A\|dt<+\infty.$$

证明: 方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=B(t)\boldsymbol{x}$ 的零解渐近稳定.

证明 将方程改写为 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}+(B(t)-A)\boldsymbol{x}$, 则在 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 下初值问题等价于

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{A(t-s)}(B(s)-A)\boldsymbol{x}(s)ds.$$

由于 A 的特征值实部均负, 故存在 $\alpha>0$ 和 $M>0$ 使得 $\|e^{At}\|\leqslant Me^{-\alpha t},\forall t\geqslant 0$. 令 $\boldsymbol{y}=e^{-At}\boldsymbol{x}$, 则

$$|\boldsymbol{y}(t)|\leqslant|\boldsymbol{x}_0|+\int_0^t\|B(s)-A\|\cdot|y(s)|ds.$$

由 Gronwall 不等式可得

$$|y(t)|\leqslant|x_0|e^{\int_0^t\|B(s)-A\|ds}\leqslant|x_0|e^{\int_0^{\infty}\|B(s)-A\|ds}\triangleq N.$$

因此 $|x(t)\leqslant\|e^{At}\|\cdot|y(t)|\leqslant MNe^{-\alpha t}\to 0(t\to+\infty)$, 即系统零解渐近稳定.

问题 7.4 设 u 是方程 $a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=-u$ 在 xy 平面的闭单位圆域 Ω 上的 C^1 解. 若在 $\partial\Omega$ 上成立 $a(x,y)x+b(x,y)y>0$, 试证明 $u\equiv 0$.

证明 考虑特征方程

$$\frac{dx}{dt}=a(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=b(x,y),\quad \frac{du}{dt}=-u.$$

在特征曲线上, 我们记 $z(t)=u(x(t),y(t))$. 在闭球 $\Omega=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上, 存在 u 的最值点 (x_0,y_0), 它自然也是所在特征曲线 $\gamma\cap\Omega$ 上的最值点. 设 $(x_0,y_0)=\gamma(t_0)$, 分情况讨论即可:

1. $(x_0,y_0)\in\mathring{\Omega}$ 是最大值点, 则 $\frac{d^2z}{dt^2}\big|_{t=t_0}\leqslant 0\Rightarrow z(t_0)\leqslant 0$. 因此 $\max_{\Omega}u=z(t_0)\leqslant 0$.

2. $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ 是最大值点. 由题设可得在给定特征曲线上
$$a(x,y)x + b(x,y)y = \dot{x}x + \dot{y}y = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2) > 0.$$
这说明在边界附近, 随着 t 的增大, x^2+y^2 严格递增. 即特征曲线的走向是从 Ω 内穿到 Ω 外. 假设 $\frac{dz}{dt}\big|_{t=t_0} < 0$, 则存在充分靠近 t_0 的 $t_1 < t_0$, 使得 $z(t_1) > z(t_0)$. 由前面的论述可得 $\gamma(t_1) \in \Omega$, 这与 (x_0, y_0) 是最大值点矛盾. 因此 $-z(t_0) = \frac{dz}{dt}\big|_{t=t_0} \geqslant 0 \Rightarrow \max_\Omega u = z(t_0) \leqslant 0$.

综上可得 $\max_\Omega u \leqslant 0$. 可以类似证明 $\min_\Omega u \geqslant 0$, 从而 $u \equiv 0$.

7.2 考前复习

这一部分我们不讲高雅知识, 专心应试. 由于老师给的总评标准十分银杏化 (期中期末取 max), 并且期中题目往往比较常规, 难度不算高, 所以在期中拿到好成绩是很关键的. 下面先介绍一下期中考试大致的题型分布, 然后结合具体题目帮大家回顾一些重点知识和技巧.

题型简介 期中考试满分 120 分, 共八大题. 考试范围包括 ODE 全部以及一阶 PDE 的求解, 计算题量多, 证明题难度高. 下面以去年的试卷为例:

1. 第一大题: 4 个选择题, 20 分 (Median: 15, Mean: 13.94, Max: 20).
2. 第二大题: 6 道解方程, 包括一阶方程和高阶常系数线性方程, 36 分 (Median: 30, Mean: 28.39, Max: 35).
3. 第三大题: 求解三阶非齐次 ODE 方程组初值问题, 12 分 (Median: 6, Mean: 5.94, Max: 12).
4. 第四大题: 三选二, 三小题分别是: (1) S-L 边值问题的计算; (2) 物理应用题, 考察解在无穷远处的性态 (最终速度); (3) 无穷震荡, 考察 Sturm 比较定理. 12 分 (Median: 9, Mean: 8.52, Max: 12).
5. 第五大题: 两问, 分别是求初值问题近似解和分析最大存在区间, 各 5 分 (5(1): Median: 3, Mean: 2.25, Max: 5; 5(2): Median: 3, Mean: 2.35, Max: 5).
6. 第六大题: 两问, 考察解对参数与初值的可微性定理, 各 5 分 (6(1): Median: 1, Mean: 1.01, Max: 5; 6(2): Median: 0, Mean: 0.99, Max: 5)(这题很惨烈).
7. 第七大题: 两问, 考察解的稳定性, 各 5 分 (7(1): Median: 3, Mean: 2.72, Max: 5; 7(2): Median: 4, Mean: 2.82, Max: 5).
8. 第八大题: 一阶拟线性 PDE 求解与相关证明, 两小问, 共 10 分 (Median: 0, Mean: 2, Max: 10)(这题也很惨烈).

这里给大家列出去年的考察内容与分数分布并不是保证今年与去年内容相同, 而是让大家对考试有所了解, 知道重点与难点在哪, 便于大家侧重性复习. 考试难度与具体分布待发卷即见分晓. 从上面列出的内容可以看出, 考试会尽量覆盖大家所学的全部内容, 所以复习时也应该尽量细致, 面面俱到. 下面我们进行具体回顾.

方程分类 涉及到 ODE 的常见分类, 往往出现在某道选择题中. 请大家自己在脑海中回顾下列方程的概念和基本性质: (非) 线性方程、(非) 齐次方程、恰当方程、Bernoulli(伯努利) 方程、Riccati(里卡蒂) 方程、Clairaut(克莱罗) 方程、Bessel(贝塞尔) 方程, $\cdots$ 去年选择题里即考察过 Clairaut 方程的奇解.

解空间的结构 即微分方程 $\mathcal{L}u = f$ 的解构成的空间, 设 $\mathcal{L}$ 是 n 阶线性微分算子. 若 $f \equiv 0$, 则解空间是 n 维线性空间; 若 $f \neq 0$, 则方程通解等于非齐次特解加上齐次通解, 故解空间是 n 维线性流形/仿射空间 (**不是** $n+1$ **维!**). 这条性质容易在选择题里考察.

方程求解 这一部分针对第二题的六个解方程.

1. 齐次方程, 例如 19mid: $(\sqrt{t^2 - x^2} + x)dt - tdx = 0$, 16mid: $(x + \sqrt{t^2 + x^2})dt - tdx = 0$. 带根号的齐次方程经常考, 应该学会借用符号函数 sgn 来简化讨论过程. 另外不要忘了特解!
2. 恰当方程与 (分组) 积分因子法: 需要掌握常见的全微分形式, 遇到形如 $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ 的方程且难以化齐次时都可以想办法往积分因子方向靠一靠. 例如 19mid: $(2t^3 + x)dt + (4t^2 x - t)dx = 0$. 难以观察出积分因子时应考虑分组积分因子法.
3. 一阶方程的变换法: 除常见变换外, 线性变换 $y = ax + bt + c$ 也是常用的, 例如求解形如 $x' = f(ax + bt + c)$ 的方程; 此外, 有些一阶方程需要先作变换再用上面提到的方法求解, 例如 16mid: $xdt + (t^2 + t + x^2)dx = 0$. 这类题目难度不小, 需要有敏锐的观察力. 这类题考察概率不高, 但也要做好心理准备, 大致清楚往哪个方向去着手.
4. 一阶隐式方程: 三种情况: $t = F(x,p), x = F(t,p), F(x,p) = 0$, 在群文件笔记中均有讨论, 应掌握每种情况下的求解方案. 一阶方程的通解仅含一个独立参数, 特解不含独立参数, 一定要按此检验自己得到的结果. 如果不符, 应代回方程确定参数之间的关系. 此外, 这时特解容易搞丢, 要细心些.
5. 高阶常系数方程求解: 对于齐次方程牢记利用特征根求线性无关解组的公式即可; 求非齐次方程特解时常用: (1) 待定系数法; (2) 运算子法.
   - 首先借助叠加原理简化原非齐次方程的求解, 分别求出几个方程 $\mathcal{L}u = f_1, \cdots, \mathcal{L}u = f_n$ 的特解, 再相加即可得 $\mathcal{L}u = f_1 + \cdots + f_n = f$ 的特解.
   - 若方程阶数较小 $(n = 2, 3)$, 待定系数法、运算子法皆宜. 应用前者时需要注意特征根为重根的特殊情况, 记忆清楚.
   - 若方程阶数更高, 待定系数法则过于繁琐. 此时推荐运算子法. 需要牢记几条性质:
   $$P(\mathcal{D})e^{at} = P(a)e^{at}, \quad P(\mathcal{D})(e^{at}x(t)) = e^{at}P(\mathcal{D}+a)x(t).$$
   $$\mathcal{P}(\mathcal{D}^2)\cos\omega t = P(-\omega^2)\cos\omega t, \quad P(\mathcal{D}^2)\sin\omega t = P(-\omega^2)\sin\omega t.$$
   有一些小技巧需要相关习题巩固, 例如 Taylor 展开、复数化, 等等.
6. 二阶变系数方程: 以齐次情况为例, 可先用幂级数法/广义幂级数法/暴力观察法求出一个特解 (如果利用上述方法能求出通解, 则已大功告成!), 然后借助 Liouville 公式求出另一个线性无关特解. 这里需要牢记何时能用幂级数法 (方程在 t_0 附近可化为首一且系数解析的方程), 何时能用广义幂级数法 (在正则奇点附近). 例如 19mid: $x'' - 2tx' + 4x = 0$, 20mid: $x'' + x\sin t = 0$. 当然还有一些能用特殊变换求解的变系数方程, 例如欧拉方程 $a_2 t^2 x'' + a_1 t x' + a_0 x = f(t)$.

常系数 ODE 方程组的求解 没什么好说的, 先按照课件上的算法求解基解方阵 $\Phi(t)$, 然后按照公式
$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$$
求解方程组在初值 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 下的解. 判分时我们会关注以下四点 (踩分点):

1. 求系数矩阵 A 的特征值.

2. 计算特征向量与基础解系.
3. 计算基解方阵及它的逆.
4. 按上述公式计算特解.

实际计算时, 基解矩阵计算量中等, 特解计算繁杂, 不好求得. 考试时间较为充裕, 大家好好算就是, 如果特解真的算不出来, 应及时弃掉, 先做其他题 (**但一定要能写到哪是哪!**).

另外, 有些方程组也可以逐项消元求解, 对于特定的方程组可以减少计算量.

Sturm-Liouville 边值问题 如果考试中出现, 大概率作为一小问考察简单 S-L 边值问题的计算与讨论, 难度不高 (甚至很低), 是应该稳稳拿到的分. 按照讨论参数范围、写出方程通解、代入边值条件三步走即可. 此外 Sturm-Liouville 定理 (常点、周期情形) 也值得记忆, 非负性这一结论可以简化我们的讨论过程. 大家可以参考 16mid 第八题.

Picard 定理相关 大致两个考察方向: (1) 具体计算; (2) 利用 Picard 序列/压缩映射证明解的存在唯一性. 考察前者时可能会让同学们写出 Picard 序列的前几项或者计算给定精度的近似解, 耐心算就是. 有两种考察方向:

1. 给定精度 ε, 要求计算存在唯一区间内误差小于 ε 的近似解. 此时要能手推/记住 Picard 序列与真实解的误差估计公式
$$|\varphi_k(t)-\varphi(t)|\leqslant\frac{ML^k}{(k+1)!}|t-t_0|^{k+1}.$$
其中 $M=\sup_R|f|, L$ 为 f 在 R 内的李氏常数 (类似附加作业 4-1).
2. 计算 $o((t-t_0)^n)$ 的近似解: 这句话的意思是让大家求出近似解 $\psi(t)$, 使得 $\psi(t)-\varphi(t)=o((t-t_0)^n)$. 即求出一个多项式近似解 $\psi(t)=a_0+a_1(t-t_0)+\cdots+a_n(t-t_0)^n$. 大致的求解思路是: 利用 Picard 序列反复迭代, 计算每项 $\varphi_k(t)$ 的 $o((t-t_0)^n)$ 近似表示. 若从某项开始这个近似表示不再变化, 则得到了待求的近似解.

后者考察与附加题 4-2 类似, 大家要能独立写出 Picard 定理的两种证法 (Picard 序列逐项逼近、压缩映射原理), 并且能把定理的证明过程依葫芦画瓢地应用在其他题目之中. 此外还有 f 连续可微 $\Rightarrow$ 局部 Lipschitz $\Rightarrow$ 解存在唯一这一机械化的论述过程, 不该不会.

解的延伸 很神秘的部分, 虽说可以很难, 但历次考试中出现的相关题目都中规中矩, 不会超过附加作业 5(除第二题 $t_0>0, x_0>1$ 情况) 的难度. 这是必考的重点, 往往选择题里会出现一个选项, 后面大题里还有一小问来专门考察. 这一部分没有非常固定的求解方案, 但大家可以按下面几步走 (以右行解为例):

- 先看看能不能通过 Gronwall 不等式/找 Nullclines/其他放缩等方式给出解的估计式 $x(t)\leqslant g(t)$. 若能, 则由延伸定理立得 $J^+=[t_0,+\infty)$.
- 如果上述过程遇到困难, 难以找到合适的估计式, 则可以尝试仿照 Riccati 那个例题, 通过反证推导存在区间有限. 此时往往需要进行合适的放缩, 大家要尽量放成容易积分的形式, 过程中不等号的方向要留心, 不要搞错.
- 当然, 上述过程的本质其实就是比较定理, 考试时完全可以应用比较定理来解题 (可以参考第五次习题课讲义).

- 除了上述本手以外, 还存在一些妙手 (例如习题课上讲 20 丘赛那一题时采用的构造闭轨的方法), 这就难以再清楚概括了, 需要各凭本事.

例如 20mid: $x' = (2t - x)(1 + x^2), x(0) = 0$.

解关于初值的连续依赖性与连续性

1. 利用 Gronwall 不等式证明解对初值的连续性, 这个放缩过程相当经典, 应该掌握. 例如 19mid: 讨论方程 $x' = f(x), x(0) = x_0$ 的解 $\varphi(t; x_0)$ 对 x_0 的连续性, 其中 f 连续可微.
2. 理解解对初值连续依赖性的内涵, 知道什么时候 "该用"(有限闭区间上, 微小扰动). 例如 22 丘赛 (见第五次习题课).

解关于初值的可微性 这一部分的题可以比较难. 但无论花样如何, 往往都是从构造变分方程入手, 所以能构造解关于初值/参数的变分方程, 并求解 $\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t; t_0, x_0), \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t; t_0, x_0), \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(t; \lambda)$ 是重中之重 (哪怕后面不会写, 也要把变分方程列出来并求解!). 这里列出变分方程的构造过程: 考虑微分方程的初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y; \lambda), \quad y(x_0) = y_0,$$

其中 f 关于 x, y, λ 连续可微, 设其解为 $\varphi(x; x_0, y_0, \lambda)$. 初值问题化为积分方程

$$\varphi(x; x_0, y_0, \lambda) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s; x_0, y_0, \lambda); \lambda) ds.$$

两边对 x_0, y_0, λ 求偏导可得

$$\frac{\partial \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)}{\partial x_0} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(s, \varphi(s; x_0, y_0, \lambda); \lambda)}{\partial y} \frac{\partial \varphi(s; x_0, y_0, \lambda)}{\partial x_0} ds - f(x_0, y_0; \lambda).$$

$$\frac{\partial \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)}{\partial y_0} = 1 + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(s, \varphi(s; x_0, y_0, \lambda); \lambda)}{\partial y} \frac{\partial \varphi(s; x_0, y_0, \lambda)}{\partial y_0} ds.$$

$$\frac{\partial \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)}{\partial \lambda} = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial f(s, \varphi(s; x_0, y_0, \lambda); \lambda)}{\partial y} \frac{\partial \varphi(s; x_0, y_0, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial f(s, \varphi(s; x_0, y_0, \lambda); \lambda)}{\partial \lambda} \right) ds.$$

由此可得初值

$$\left.\frac{\partial \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)}{\partial x_0}\right|_{x=x_0} = -f(x_0, y_0, \lambda), \quad \left.\frac{\partial \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)}{\partial y_0}\right|_{x=x_0} = 1, \quad \left.\frac{\partial \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)}{\partial \lambda}\right|_{x=x_0} = 0.$$

更进一步, 对面三个积分方程两边关于 x 求导, 可得三个一阶线性方程的初值问题, 即得到了关于初值和参数的变分方程.

解的稳定性 期中考试往往会给你一个含参的自治系统, 让你讨论它的零解的稳定性. 这样的题有比较固定的求解思路: (1) 先线性近似, 把能讨论出来的情况讨论出来; (2) 构造 Lyapunov 函数来求解 (1) 中无法求解的情况. 前者牢记线性近似的判定定理即可 (若存在有正实部的特征值, 则零解不稳定; 若特征值实部均为负, 则零解渐近稳定; 若存在零实部而不存在正实部, 则无法判断), 后者需要构造一个在**原点某个小邻域内**正定的函数 V, 它的全导数 $\dot{V}$ 若正定, 则解不稳定; 若恒非正, 则解稳定; 若负定, 则解渐近稳定. 我们在考试中考察的 Lyapunov 函数大都为二次型形式, 大家观察/待定系数凑就是.

一阶 PDE 考试往往考察一阶线性/拟线性 PDE 的求解, 并且可能考察拟线性 PDE 的相关证明 (例如整体解、爆破现象等).

1. 一阶线性 PDE 的求解: 按照特征线法给出的算法求解即可, 不再赘述.

2. 一阶拟线性 PDE 的求解: 考试一般会考察拟线性方程的初值问题, 推荐使用参数曲面法. 按照下述步骤来即可: (1) 写出初始曲面和初值 $\alpha(s), \theta(s)$; (2) 验证解确实局部存在唯一 (行列式非零); (3) 求解特征方程的初值问题得到 $x = x(s,t), u = u(s,t)$; (4) 反解出参数 $s = \varphi(x), t = \psi(x)$; (5) 得出初值问题的解 $u = u(\varphi(x), \psi(x))$. 例如 19mid 考察过 Burgers 方程的初值问题.
3. 一阶 (拟) 线性 PDE 部分的证明题往往难度较大, 在整张卷子上是数一数二的难度. 但如果真的考察这样的题目, 往往都可以从方程的特征线入手 (例如前面给的例题). 还是那句话: **能写到哪是哪! 空着题目是不可能混到分的 (严肃脸)!**

第 8 章 第 11 周作业答案 (by 黄天一)

作业 8.1 (309-7)

求解拟线性 PDE 的初值问题:

$$z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}-y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad l:x=1,z=\sqrt{y}.$$

解 初始曲面和初值为 $\alpha(s)=(1,s),\theta(s)=\sqrt{s}$. 计算可得

$$J=\begin{vmatrix}\sqrt{s}(1+\sqrt{s}) & 0\\ -s(s+\sqrt{s}) & 1\end{vmatrix}=\sqrt{s}(1+\sqrt{s}).$$

当 $s\neq 0$ 时, $J\neq 0$, 初值问题的解存在唯一. 此时特征方程的初值问题为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=z(x+z),\ \dfrac{dy}{dt}=-y(y+z),\ \dfrac{dz}{dt}=0\\ x(0)=1,\ y(0)=s,\ z(0)=\sqrt{s}\end{cases}$$

求解可得

$$x=(\sqrt{s}+1)e^{\sqrt{s}t}-\sqrt{s},\quad y=\frac{s}{(\sqrt{s}+1)e^{\sqrt{s}t}-\sqrt{s}},\quad z=\sqrt{s}.$$

由此化简可得

$$y=\frac{z^2}{x}\Rightarrow z=\pm\sqrt{xy}.$$

结合初值可得解为 $z=\sqrt{xy}$.

作业 8.2 (310-20)

求解拟线性 PDE:

$$xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+xy=0.$$

解 特征方程为

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=-\frac{dz}{xy}.$$

由此解得两个独立的首次积分为 $\frac{y}{x}=C_1,z^2+xy=C_2$, 因此通解族由 $g(\frac{y}{x},z^2+xy)=0$ 确定, g 为任一可微函数.

作业 8.3 (309-11)

求解拟线性 PDE 的初值问题:

$$z\frac{\partial z}{\partial x}+(z^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial y}+x=0,\quad l:y=x^2,z=2x.$$

解 初始曲面和初值分别为 $\alpha(s)=(s,s^2),\theta(s)=2s$. 计算可得

$$J=\begin{vmatrix}2s & 1\\ 3s^2 & 2s\end{vmatrix}=s^2.$$

当 $s\neq 0$ 时, $J\neq 0$, 初值问题的解局部存在唯一. 此时特征方程的初值问题为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=z,\ \dfrac{dy}{dt}=z^2-x^2,\ \dfrac{dz}{dt}=-x\\ x(0)=s,\ y(0)=s^2,\ z(0)=2s\end{cases}$$

求解可得

$$x=s\cos t+2s\sin t,\quad y=\frac{3s^2}{2}\sin 2t+2s^2\cos 2t-s^2,\quad z=2s\cos t-s\sin t.$$

现在要将上述参数曲面化为 $z=f(x,y)$ 的形式, 我们来演示这一过程. 由上述可得

$$x^2+z^2=5s^2,\quad z^2-x^2=3s^2\cos 2t-4s^2\sin 2t\Rightarrow\frac{z^2-x^2}{z^2+x^2}=\frac{3}{5}\cos 2t-\frac{4}{5}\sin 2t.$$

由 y 的表达式可得

$$\frac{2y}{z^2+x^2}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}\sin 2t+\frac{4}{5}\cos 2t.$$

由上述可得

$$\left(\frac{2y}{z^2+x^2}+\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{z^2-x^2}{z^2+x^2}\right)^2=1\Rightarrow(5y+z^2+x^2)^2=25x^2z^2.$$

结合初值可得 $5y+z^2+x^2=5xz$, 求解可得

$$z=\frac{5x\pm\sqrt{21x^2-20y}}{2}.$$

再结合初值可得初值问题的解为

$$z=\frac{5x-\sqrt{21x^2-20y}}{2}.$$

作业 8.4 (309-12)

求解拟线性 PDE 的初值问题:

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0,\quad l:x-y=0,x-yz=1.$$

解 初值曲面和初值为 $\alpha(s)=(s,s),\theta(s)=\frac{s-1}{s}$. 计算可得

$$J=\begin{vmatrix}s^2 & 1\\ s-1 & 1\end{vmatrix}=s^2-s+1>0.$$

因此初值问题的解总存在唯一. 此时特征方程的初值问题为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y^2,\ \dfrac{dy}{dt}=yz,\ \dfrac{dz}{dt}=-z^2\\ x(0)=y(0)=s,\ z(0)=\dfrac{s-1}{s}\end{cases}$$

由此求解可得

$$x=\frac{(s-1)^2}{3}t^3+s(s-1)t^2+s^2t+s,\quad y=(s-1)t+s,\quad z=\frac{s-1}{(s-1)t+s}.$$

由此化简可得初值问题的解由 $y^3(z^3-1)+3xy+1=0$ 确定.

作业 8.5 (附加)

求解拟线性 PDE 的初值问题:

$$\begin{cases} (\rho - y - Nu)\dfrac{\partial u}{\partial x} = cNn\dfrac{\partial u}{\partial y} + c, \quad y < \rho \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

其中 ρ, c, N, n 为常数.

解 初始曲面为 $\alpha(s) = (0, s)(s < \rho)$, 初值为 $\theta(s) = 0$. 计算可得

$$J = \begin{vmatrix} \rho - s & 0 \\ -cNn & 1 \end{vmatrix} = \rho - s \neq 0,$$

因此初值问题的解总是存在唯一的. 此时特征方程的初值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \rho - y - Nu, \ \dfrac{dy}{dt} = -cNn, \ \dfrac{du}{dt} = c \\ x(0) = 0, \ y(0) = s, \ u(0) = 0 \end{cases}$$

求解可得

$$x = (\rho - s)t + \frac{cN(n-1)}{2}t^2, \quad y = -cNnt + s, \quad u = ct.$$

由上述可得

$$N(n+1)u^2 + (2\rho - 2y)u + 2cx = 0.$$

求解可得

$$u = \frac{\rho - y \pm \sqrt{(\rho - y)^2 - 2cN(n+1)x}}{N(n+1)}.$$

结合初值条件可得唯一解

$$u = \frac{\rho - y - \sqrt{(\rho - y)^2 - 2cN(n+1)x}}{N(n+1)}.$$

作业 8.6 (319-4)

求曲面族 $z = -\frac{a}{2}x + 2ay - a^2$ 的包络.

解 曲面族方程两边对 a 求偏导可得

$$0 = -\frac{x}{2} + 2y - 2a.$$

联立曲面方程可求得包络面为

$$z = \left(\frac{x}{4} - y\right)^2.$$

作业 8.7 (319-7)

求方程 $yz_x - xz_y = 0$ 的全积分、通积分、奇积分.

解 用分离变量法求解全积分: 设 $z = f(x) + g(y)$ 是方程的解, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x), \ \frac{\partial z}{\partial y} = g'(y) \Rightarrow yf'(x) - xg'(y) = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{x} = \frac{g'(y)}{y} \triangleq 2a.$$

其中 a 是待定常数. 由此求解可得 $f(x) = ax^2+\lambda, g(x) = ax^2+\mu$. 故 $z = f(x)+g(y) = a(x^2+y^2)+b, b \triangleq \lambda + \mu$. 所以 $z = a(x^2 + y^2) + b$ 是方程的一个全积分.

设 $b=\omega(a)$, 则全积分对应着单参数曲面族 $z=a(x^2+y^2)+\omega(a)$. 对 a 求偏导可得

$$0=x^2+y^2+\omega'(a).$$

$\omega'(a)$ 也是关于 a 的任一函数, 故 $a=g(x^2+y^2)$, 其中 g 是任一可微函数. 代回曲面族方程得到

$$z=g(x^2+y^2)(x^2+y^2)+\omega(g(x^2+y^2))\triangleq\varphi(x^2+y^2).$$

因此方程的通积分为 $z=\varphi(x^2+y^2)$.

全积分本身对应着双参数曲面族 $z=a(x^2+y^2)+b$. 分别对 a,b 求偏导可得

$$0=x^2+y^2,\quad 1=0.$$

这显然不能成立. 所以原方程不存在奇积分.

作业 8.8 (附加)

说明 Burgers 方程的 Cauchy 问题

$$u_t+uu_x=0(x,t\in\mathbb{R}),\quad u|_{t=0}=x^2$$

在何处有唯一解并给出此唯一解.

解 初始曲面为 $\alpha(s)=(0,s)$, 初值为 $\theta(s)=s^2$. 计算可得

$$J=\begin{vmatrix}1 & 0\\ s^2 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

因此 Burgers 方程在平面上任一点附近都存在唯一解. 特征方程的初值问题是

$$\begin{cases}\dfrac{dt}{dy}=1,\ \dfrac{dx}{dy}=u,\ \dfrac{du}{dy}=0\\ t(0)=0,\ x(0)=s,\ u(0)=s^2\end{cases}$$

求解可得 $t=y,x=s^2y+s,u=s^2$. 反解得 $y=t,s=x-ut$, 因此

$$u=(x-ut)^2\Rightarrow t^2u^2-(2xt+1)u+x^2=0.$$

当 $t\neq 0$ 时, 求解可得

$$u(x,t)=\frac{2xt+1\pm\sqrt{4xt+1}}{8t^2}(t\neq 0),\quad u(x,0)=x^2.$$

为了保证解在 $t=0$ 附近是 C^1 的, 我们得到

$$u(x,t)=\frac{2xt-(\sqrt{4xt+1}-1)}{8t^2}(t\neq 0),\quad u(x,0)=x^2.$$

作业 8.9 (附加)

求解 Burgers 方程的 Cauchy 问题

$$u_t+uu_x=0(x\in\mathbb{R},t>0),\quad u|_{t=0}=e^{-x^2}.$$

并给出爆破时间.

解 初始曲面为 $\alpha(s)=(0,s)$, 初值为 $\theta(s)=e^{-s^2}$. 计算可得

$$J=\begin{vmatrix}1 & 0\\ e^{-s^2} & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

因此 Burgers 方程在平面上任一点附近都存在唯一解. 特征方程的初值问题是

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dy} = 1, \ \dfrac{dx}{dy} = u, \ \dfrac{du}{dy} = 0 \\ t(0) = 0, \ x(0) = s, \ u(0) = e^{-s^2} \end{cases}$$

求解可得 $t = y, x = e^{-s^2}y + s, u = e^{-s^2}$. 反解可得 $y = t, s = x - ut$, 因此初值问题的解由 $u = e^{-(x-ut)^2}$ 确定.

下面我们讨论解的爆破时间, 不妨讨论更一般的初值问题

$$u_t + a(u)u_x = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x).$$

它的解由 $u = \varphi(x - a(u)t)$ 确定. 设 $\alpha = x - a(u)t$, 则有 $u = \varphi(\alpha)$, 进而 $x = \alpha + a(\varphi(\alpha))t$. 由此可得

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 1 + a'(\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha)t \Rightarrow u_x = \varphi'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\varphi'(\alpha)}{1 + a'(\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha)t}.$$

于是问题转化为讨论何时分母 $1 + a'(\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha)t$ 为零. 设 t_b 为最早的爆破时间, 它对应的 α_0 应使得 $a'(\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha)$ 取得最小值, 且

$$t_b = -\frac{1}{a'(\varphi(\alpha_0))\varphi'(\alpha_0)}.$$

对于原问题, 有 $a(u) = u, \varphi(\alpha) = e^{-\alpha^2}$, 所以 $a'(\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha) = -2\alpha e^{-\alpha^2} \triangleq f(\alpha)$, 则 $f'(\alpha) = -2e^{-\alpha^2}(1 - 2\alpha^2)$, 由此可得当 $\alpha = \alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(\alpha)$ 取得最小值, 爆破时间为

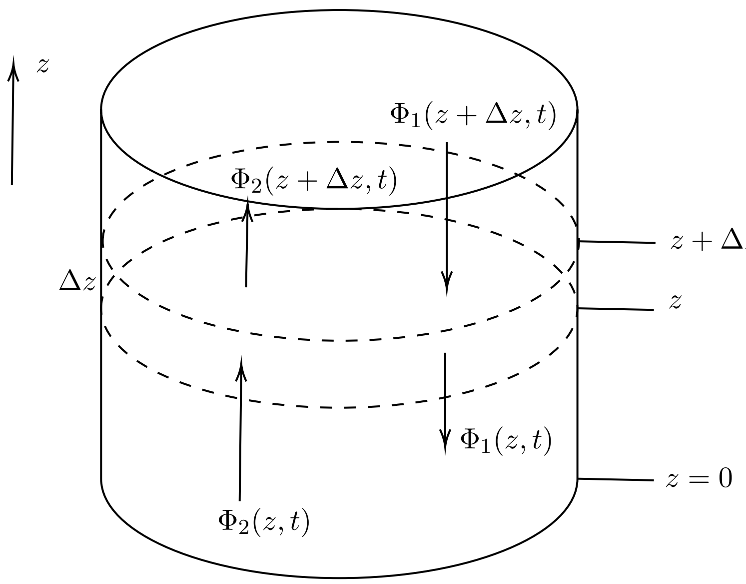
$$t_b = \frac{1}{2\alpha_0 e^{-\alpha_0^2}} = \sqrt{\frac{e}{2}}.$$

顺便可以求得此时

$$x_b = \alpha_0 + e^{-\alpha_0^2}t_b = \sqrt{2}.$$

作业 8.10 (19-4)

Suppose that some particles which are suspended in a liquid medium would be pulled down at the constant velocity $V > 0$ by gravity in the absence of diffusion. Taking acount of the diffusion, find the equation for the concentration of particles. Assume homogeneity in the horizontal directions x and y. Let the z axis point upwards. ♡



解 本题需要使用 Fick 第一定律: 扩散通量 (单位时间内通过垂直于扩散方向单位截面的扩散物质质量) 与截面处的浓度梯度成正比. 粒子的质量通量由两个因素引起, 一是重力, 二是扩散. 设在截面 z, 时间 t 处重力引起的质量通量为 $\Phi_1(z,t)$, 扩散引起的质量通量为 $\Phi_2(z,t)$, 粒子浓度为 $u(z,t)$. 由已知可得

$$\Phi_1 = Vu, \quad \Phi_2 = -k\frac{\partial u}{\partial z},$$

其中 $k>0$ 为比例系数. 以下记截面面积为 A. 由上述可得

$$\frac{dm}{dt} = (\Phi_2(z+\Delta z,t) - \Phi_1(z,t)) - (\Phi_1(z+\Delta z,t) - \Phi_1(z,t)) \cdot A.$$

设 Δz 段的溶液体积为 V', 则 $V' = A\Delta z$, 进而 $\frac{m}{A} = \frac{m}{V'}\Delta z = u\Delta z$. 上式化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\Phi_2(z+\Delta z,t) - \Phi_1(z,t)}{\Delta z} - \frac{\Phi_1(z+\Delta z,t) - \Phi_1(z,t)}{\Delta z}.$$

令 $\Delta z \to 0$, 则上式化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + V\frac{\partial u}{\partial z}.$$

这就是粒子浓度满足的方程.

作业 8.11 (24-4)

A rod occupying the interval $0 \leqslant x \leqslant l$ is subject to the heat source $f(x) = 0$ for $0 < x < \frac{l}{2}$, and $f(x) = H$ for $\frac{l}{2} < x < l$ where $H > 0$. The rod has physical constants $c = \rho = \kappa = 1$, and its ends are kept at zero temperature.

1. Find the steady-state temperature of the rod.
2. Which point is the hottest, and what is the temperature there?

解 设杆的温度函数为 $u(x,t)$, 则它满足带源的热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x).$$

当系统趋于稳态时, 杆的温度仅与位置变量 x 有关, 此时方程化为

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \dfrac{l}{2} \\ -H, & \dfrac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

由此可得

$$u(x) = \begin{cases} Ax + B, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2} \\ -\dfrac{Hx^2}{2} + Cx + D, & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

杆的两端始终保持零温度, 且由于杆的温度均匀分布, 故

$$u\left(\frac{l}{2} - 0\right) = u\left(\frac{l}{2} + 0\right), \quad u'\left(\frac{l}{2} - 0\right) = u'\left(\frac{l}{2} + 0\right).$$

综上可得

$$B = 0, \quad -\frac{Hl^2}{2} + Cl + D = 0; \quad \frac{Al}{2} + B = -\frac{Hl^2}{8} + \frac{Cl}{2} + D, \quad A = -\frac{Hl}{2} + C.$$

求解可得

$$A = \frac{Hl}{8}, \quad B = 0, \quad C = \frac{5Hl}{8}, \quad D = -\frac{Hl^2}{8}.$$

因此杆在稳态下的温度分布为

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{Hl}{8}x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2} \\ -\dfrac{Hx^2}{2} + \dfrac{5Hl}{8}x - \dfrac{Hl^2}{8}, & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

在杆的左半段, 最高温度在 $x = \frac{l}{2}$ 处取得, 为 $\frac{Hl^2}{16}$; 在杆的右半段, 最高温度在 $x = \frac{5l}{8}$ 处取得, 为 $\frac{9Hl^2}{128}$. 比较可得杆在 $x = \frac{5l}{8}$ 处最烧, 温度为 $\frac{9Hl^2}{128}$.

作业 8.12 (27-4)

Consider the Neumann problem

$$\Delta u = f(x, y, z) \quad \text{in } D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial D.$$

1. What can we surely add to any solution to get another solution? So we don't have uniqueness.
2. Use the divergence theorem and the PDE to show that

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = 0$$

   is a necessary condition for the Neumann problem to have a solution.
3. Can you give a physical interpretation of part 1 and 2 for either heat flow of diffusion?

♡

解

1. 若 $u(x, y, z)$ 是边值问题的一个解, 则任取常数 C, $u(x, y, z) + C$ 仍然满足边值问题, 所以解不唯一.
2. 若边值问题存在解 $u(x, y, z)$, 由散度定理[1]可得

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dxdydz &= \iiint_D \Delta u dxdydz = \iiint_D \operatorname{div}(\nabla u) dxdydz \\ &= \iint_{\partial D} \nabla u \cdot n dS = \iint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0. \end{aligned}$$

3. 以热传导为例, Part 1 实际上说明区域 D 的温度可以是任意的 (添加任意温度仍为解). Part 2 从物理角度上来看, 是因为边值条件保证了该热力系统与外界不存在热量交换, 要使系统的温度稳定分布, 热源 f 为整个系统贡献的热量须为零 (亦即在 D 上的积分为零). 也可以类似从扩散的角度说明.

[1]散度定理: 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, 边界是 C^1 的, 则任取 $u \in C^1(\overline{U}; \mathbb{R}^n)$, 成立

$$\int_U \operatorname{div} u dx = \int_{\partial U} u \cdot n dS.$$

这里 n 表示边界 ∂U 的单位外法向.

第 9 章 2019 秋微分方程 (I) 期中参考解答 (宁班)(By 黄天一)

问题 9.1(15 分) 题目暂缺, 5 个选择题.

问题 9.2(35 分) 求解下列方程:

1. $\frac{dx}{dt} = \cos^2(x-t)$.
2. $(\sqrt{t^2-x^2}+x)dt + tdx = 0$.
3. $(2t^3+x)dt + (4t^2x - t)dx = 0$.
4. $x' + e^{x'} - \frac{x}{2} = 0$.
5. $x'' + 3x' - 40x = 2 + (t+1)e^{5t}$.
6. $x'' - 2tx' + 4x = 0$.

解

1. 作变换 $y = x - t$, 则 $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - 1 = -\sin^2 y$.

   (a) 若 $\sin y = 0$, 对应着原方程特解 $x = k\pi + t(k \in \mathbb{Z})$.

   (b) $\sin y \neq 0$, 则
   $$-\frac{dy}{\sin y} = dt \Rightarrow \cot y = t + C.$$
   故原方程通积分为 $\cot(x-t) - t = C$.

2. 首先 $t = 0$ 满足方程, 但此时即有 $x = 0$, 舍之. 若 $t \neq 0$, 作变换 $x = ut$, 则有
   $$(|t|\sqrt{1-u^2} + ut)dt - t(udt + tdu) = 0 \Rightarrow \sqrt{1-u^2}dt = |t|du.$$
   (a) $u = \pm 1$ 是其特解, 对应原方程特解 $x = \pm t$.

   (b) $u \neq \pm 1$ 时, 整理可得
   $$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dt}{|t|} \Rightarrow \arcsin u = \operatorname{sgn}(t)\ln|t| + C.$$
   故方程的通积分为 $\arcsin\frac{x}{t} - \operatorname{sgn}(t)\ln|t| = C$.

3. 首先 $t = 0$ 是一特解. $t \neq 0$ 时, 将方程写作
   $$t^2(2tdt + 4xdx) + (xdt - tdx) = 0.$$
   可以看出 $\mu = \frac{1}{t^2}$ 是一个积分因子, 我们有
   $$(2tdt + 4xdx) + \frac{xdt - tdx}{t^2} = d\left(t^2 + 2x^2 - \frac{x}{t}\right) = 0.$$
   故方程通积分为 $t^2 + 2x^2 - \frac{x}{t} = C$.

4. 令 $p = x'$, 则方程化为 $x = 2(p + e^p)$. 两边关于 t 求导可得
   $$p = 2p' + 2p'e^p.$$
   (a) $p = 0$, 代回方程可得特解 $x = 2$.

   (b) $p \neq 0$, 则有
   $$dt = \frac{2(1+e^p)}{p}dp.$$
   故方程的通解由下述参数方程确定:
   $$t = \int \frac{2(1+e^p)}{p}dp(+C), \quad x = 2p + 2e^p.$$

5. 齐次方程的通解为 $x=C_1e^{5t}+C_2e^{-8t}$, 非齐次方程的一个特解为

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= \frac{1}{\mathcal{D}^2+3\mathcal{D}-40}(2+(t+1)e^{5t}) = -\frac{1}{20}\left(1+\frac{\mathcal{D}^2+3\mathcal{D}}{40}+\cdots\right)1+\frac{1}{(\mathcal{D}-8)(\mathcal{D}-5)}((t+1)e^{5t}) \\
&= -\frac{1}{20}+e^{5t}\frac{1}{(\mathcal{D}+13)\mathcal{D}}(t+1) = -\frac{1}{20}+e^{5t}\cdot\frac{1}{13}\left(1-\frac{\mathcal{D}}{13}+\frac{\mathcal{D}^2}{169}-\cdots\right)\left(\frac{t^2}{2}+t\right) \\
&= -\frac{1}{20}+e^{5t}\left(\frac{t^2}{26}+\frac{12}{169}t-\frac{12}{13\times 169}\right).
\end{aligned}$$

约去其中出现的齐次解项, 得到原方程通解

$$x=C_1e^{5t}+C_2e^{-8t}+e^{5t}\left(\frac{t^2}{26}+\frac{12}{169}t\right)-\frac{1}{20}.$$

6. 解法一: 幂级数解法. 设 $x=\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^n$, 则

$$x'=\sum_{n=1}^{\infty}nC_nt^{n-1},\quad x''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nt^{n-2}.$$

代回原式可得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nt^{n-2}-2\sum_{n=1}^{\infty}nC_nt^n+4\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^n=0.$$

整理可得 $(n+2)(n+1)C_{n+2}=2(n-2)C_n$. 求解可得

$$C_{2n}=0(n\geqslant 2),\quad C_2=-2C_0.$$
$$C_{2n+1}=\frac{(2n-3)!!}{n!(2n+1)!!}C_1(n\geqslant 1).$$

故方程的解为

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^n=C_0\left(1-2t^2\right)+C_1\left(t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{n!(2n+1)!!}t^{2n+1}\right).$$

解法二: 观察特解再用 Liouville 公式. 观察可得一个特解为 $\varphi_1(t)=t^2-\frac{1}{2}$. 根据 Liouville 公式可得通解

$$x=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)\left(C_1+C_2\int\frac{1}{(t^2-\frac{1}{2})^2}e^{\int 2tdt}dt\right)=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)\left(C_1+C_2\int\frac{e^{t^2}}{(t^2-\frac{1}{2})^2}dt\right).$$

问题 9.3(10 分) 已知带阻尼的振动方程 $x''+2\beta\omega_0x'+\omega_0^2x=q\sin\omega t$, 其中 ω 为驱动力频率, ω_0 为固有频率, β 为阻尼系数, q 为输入能量. 求出上述物理量满足何条件时振幅最大, 并求出该最大值.

解 将方程复数化可得

$$x''+2\beta\omega_0x'+\omega_0^2x=qe^{i\omega t}.$$

考虑形如 $x(t)=Ae^{i\omega t}$ 的特解. 计算可得

$$A=\frac{q}{\omega_0^2-\omega^2+2\beta\omega\omega_0 i}.$$

化简可得

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{q(\cos\omega t+i\sin\omega t)}{\omega_0^2-\omega^2+2\beta\omega\omega_0 i} \\
&= \frac{q}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\omega_0^2}[((\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t+2\beta\omega\omega_0\sin\omega t) \\
&\qquad +i((\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t-2\beta\omega\omega_0\cos\omega t)].
\end{aligned}$$

因此原方程的一个实解为

$$x(t)=\frac{q((\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t-2\beta\omega\omega_0\cos\omega t)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\omega_0^2}.$$

计算可得振幅为

$$A=\left[q^2\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega_0^2\omega^2}{((\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega_0^2\omega^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{q}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\omega_0^2\omega^2}}.$$

故 $\omega=\sqrt{1-2\beta^2}\omega_0$ 时振幅达到最大值

$$A=\frac{q}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}\omega_0^2}.$$

问题 9.4(10 分) 求解下列常微分方程组的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+e^t\sin 2t\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y-2z\\ \dfrac{dz}{dt}=3x+2y+z\\ x(0)=y(0)=0,\ z(0)=-1\end{cases}$$

解 首先

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{pmatrix},\quad \det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+5)\Rightarrow\lambda_1=1,\ \lambda_2=1+2i,\ \lambda_3=1-2i.$$

$\lambda_1=1$ 对应特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-3,2)^T$, $\lambda_2=1+2i$ 对应特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,i,1)^T$. 由于 λ_2,λ_3 共轭, 且

$$e^{(1+2i)t}\boldsymbol{\alpha}_2=e^t(\cos 2t+i\sin 2t)\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}0\\-\sin 2t\\\cos 2t\end{pmatrix}+ie^t\begin{pmatrix}0\\\cos 2t\\\sin 2t\end{pmatrix}.$$

因此实基解矩阵为

$$\Phi(t)=e^t\begin{pmatrix}2&0&0\\-3&-\sin 2t&\cos 2t\\2&\cos 2t&\sin 2t\end{pmatrix}.$$

求逆可得

$$\Phi^{-1}(s)=e^{-s}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{3}{2}\sin 2s-\cos 2s&-\sin 2s&\cos 2s\\\frac{3}{2}\cos 2s-\sin 2s&\cos 2s&\sin 2s\end{pmatrix}.$$

初值向量为 $\boldsymbol{x}_0=(0,0,-1)^T$, 因此方程组的解为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \Phi(t)\Phi(0)^{-1}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}\boldsymbol{f}(s)ds\\
&= \Phi(t)\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ \frac{3}{2} & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+\int_0^t \Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix}e^s\sin 2s\\ 0\\ 0\end{pmatrix}ds\right]\\
&= \Phi(t)\left[\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sin 2s\\ \frac{3}{4}\cos 4s-\frac{1}{2}\sin 4s-\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\sin 4s+\frac{1}{2}\cos 4s-\frac{1}{2}\end{pmatrix}ds\right]\\
&= \Phi(t)\left[\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{4}\\ \frac{3}{16}\sin 4t+\frac{1}{8}\cos 4t-\frac{3}{4}t-\frac{1}{8}\\ -\frac{3}{16}\cos 4t+\frac{1}{8}\sin 4t-\frac{t}{2}+\frac{3}{16}\end{pmatrix}\right]\\
&= e^t\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4}t\sin 2t-\frac{t}{2}\cos 2t+\frac{3}{4}\cos 2t+\frac{5}{4}\sin 2t-\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4}t\cos 2t-\frac{t}{2}\sin 2t-\frac{3}{2}\cos 2t+\frac{3}{8}\sin 2t+\frac{1}{2}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

问题 9.5(20 分)

1. 已知微分方程 $x'=t^2f(x)$, 其中 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 且 $xf(x)<0(\forall x\neq 0)$. 求证: 任一满足 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x(t)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上存在.
2. 设 $I=[a,b]$, $f\in C(I)$ 且 $K\in C(I\times I)$. 求证: 积分方程
$$x(t)=f(t)+\int_a^t K(t,s)x(s)ds$$
在 I 上存在唯一连续解.

证明

1. 由 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 可得初值问题的解局部唯一. 由条件可得 $f(0)=0$, $f(x)<0(x>0)$, $f(x)>0(x<0)$.
(a) 若初值为 $x(t_0)=0$, 则初值问题的解为零解, 结论成立.
(b) 若 $x(t_0)=x_0>0$, 由解的唯一性可得积分曲线与直线 $x=0$ 无交, 结合 $x'(t)=t^2f(x)<0(x>0)$ 可得积分曲线在 $t\geqslant t_0$ 时递减且始终位于 $x=0$ 上方, 所以右行极大区间为 $[t_0,+\infty)$. $x_0<0$ 时类似讨论.
2. 设 $\max_{I\times I}|K|=M$, 在函数空间 $C(I)$ 上, 赋予范数 $\|x\|=\max_{t\in I}e^{-M(t-a)}|x(t)|$, 则 $C(I)$ 成为 Banach 空间. 构造算子
$$\mathcal{T}:C(I)\to C(I),\quad (\mathcal{T}x)(t)=f(t)+\int_a^t K(t,s)x(s)ds.$$

则任取 $x_1, x_2 \in C(I)$, 有

$$\begin{aligned}
e^{-M(t-a)}|(\mathcal{T}x_1)(t)-(\mathcal{T}x_2)(t)| &\leqslant e^{-M(t-a)}\int_a^t |K(t,s)||x_1(s)-x_2(s)|ds \\
&\leqslant e^{-M(t-a)}\int_a^t Me^{M(s-a)}\cdot e^{-M(s-a)}|x_1(s)-x_2(s)|ds \\
&\leqslant \|x_1-x_2\|e^{-M(t-a)}e^{-M(s-a)}\Big|_a^t \\
&\leqslant (1-e^{-M(b-a)})\|x_1-x_2\|.
\end{aligned}$$

进而我们有 $\|\mathcal{T}x_1-\mathcal{T}x_2\| \leqslant \theta\|x_1-x_2\|$, 其中 $\theta = 1-e^{-M(b-a)} \in (0,1)$. 所以 $\mathcal{T}$ 是压缩映射, 由压缩映射原理可得 $\mathcal{T}$ 在 $C(I)$ 中存在唯一的不动点, 进而积分方程在 I 上有唯一解.

问题 9.6(10 分) 考虑初值问题 $x' = f(x), x(0) = x_0$, 其中 $f(x)$ 在实数轴上连续可微.

1. **讨论** $\varphi(t, x_0)$ 在存在唯一区间内关于 (t, x_0) 的连续性.
2. 设解 $\varphi(t; x_0)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在. 若给定 x_0 且对任意自然数 k 成立 $|\varphi(k; x_0) - x_0| < M$, 其中 $M > 0$ 为常数. 证明: $\varphi(t; x_0)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界.

证明

1. 由 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微可得 f 满足局部 Lipschitz 条件, 故初值问题的解存在唯一, 设其存在唯一区间为 $[-h, h]$. 注意到初值问题等价于积分方程
$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds.$$
设 f 在 $[-h, h]$ 上的 Lipschitz 常数为 L. 对任意固定的 $t \in [-h, h]$, 有
$$\begin{aligned}
|\varphi(t;x_0^*)-\varphi(t;x_0)| &\leqslant |x_0^*-x_0| + \left|\int_0^t |f(\varphi(s;x_0))-f(\varphi(s;x_0^*))|ds\right| \\
&\leqslant |x_0^*-x_0| + L\left|\int_0^t |\varphi(s;x_0)-\varphi(s;x_0^*)|ds\right|.
\end{aligned}$$
由 Gronwall 不等式可得
$$|\varphi(t;x_0^*)-\varphi(t;x_0)| \leqslant |x_0^*-x_0|e^{L|t|} \leqslant |x_0^*-x_0|e^{Lh}.$$
进而任取 $t_1, t_2 \in [-h, h]$, 有
$$\begin{aligned}
|\varphi(t_1;x_0^*)-\varphi(t_2;x_0)| &\leqslant |\varphi(t_1;x_0^*)-\varphi(t_1;x_0)| + |\varphi(t_1;x_0)-\varphi(t_2;x_0)| \\
&\leqslant |x_0^*-x_0|e^{Lh} + |\varphi(t_1;x_0)-\varphi(t_2;x_0)| \to 0((t_1,x_0^*)\to(t_2,x_0)).
\end{aligned}$$
所以 $\varphi(t; x_0)$ 关于 (t, x_0) 连续.
2. 这里我们只证明存在上界, 下界类似. 假设 $\varphi(t; x_0)$ 在 $[0, +\infty)$ 上无上界, 则存在正整数 k 使得 $\varphi(t; x_0)$ 在 $[k, k+1]$ 上的最大值为 $M_k > M + |x_0|$. 设 $t_1 = \inf\{k < t < k+1 : \varphi(t; x_0) = M_k\}$. 任取 $M + |x_0| \leqslant x \leqslant M_k$, 定义
$$\xi_x = \inf\{k < t < t_1 : \varphi(t;x_0) = x\}, \quad \eta_x = \sup\{t_1 < t < k+1 : \varphi(t;x_0) = x\}.$$
上述是良定的, 因为 $\varphi(k; x_0), \varphi(k+1; x_0) < M + |x_0|$. 我们断言: $\varphi'(\xi_x; x_0) \geqslant 0$. 若不然, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\varphi'(t; x_0)$ 在 $(\xi_x - \varepsilon, \xi_x)$ 上恒成立, 进而 $\varphi(\xi_x - \varepsilon) > \varphi(\xi_x) = x$. 由连续函数的介值定理可得存在 $\xi \in (k, \xi_x - \varepsilon)$, 使得 $\varphi(\xi; x_0) = x$, 但 $k < \xi < \xi_x < t_1$, 矛盾! 类似亦可得 $\varphi'(\eta_x; x_0) \leqslant 0$. 所以 $f(x) = \varphi'(\xi_x; x_0) = \varphi'(\eta_x; x_0) \Rightarrow f(x) = 0$. 但这不可能! 因为我们可选取 $\eta < t_1$, 满足: (1) $\varphi(\eta; x_0) < \varphi(t_1; x_0) = M_k$; (2) $M + |x_0| < \varphi(t; x_0) < M_k, \forall t \in [\eta, t_1)$. 由中值定理可得存在

$t_2 \in (\eta, t_1)$, 使得

$$\varphi'(t_2; x_0) = \frac{\varphi(t_1; x_0) - \varphi(\eta; x_0)}{t_1 - \eta} > 0.$$

但此时即有 $f(\varphi(t_2; x_0)) = \varphi'(t_2; x_0) > 0$ 且 $M + |x_0| < \varphi(t_2; x_0) < M_k$, 矛盾!

问题 9.7(10 分) 讨论常微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = ax - 2y + xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{2} + ay - 2x^2 y$$

零解的稳定性.

解 自治系统的线性主部为

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ \frac{1}{2} & a \end{pmatrix}.$$

计算可得 $\det(\lambda I - A) = (\lambda - a)^2 + 1$, 因此特征值为 $\lambda = a \pm i$.

1. 若 $a > 0$, 则零解不稳定.
2. 若 $a < 0$, 则零解渐近稳定.
3. 若 $a = 0$, 则方程组化为

$$\dot{x} = -2y + xy^2, \quad \dot{y} = \frac{1}{2}x - 2x^2 y.$$

构造函数 $V(x, y) = x^2 + 4y^2$, 则 V 正定且全导数

$$\dot{V}(x, y) = 2x(-2y + xy^2) + 8y(\frac{x}{2} - 2x^2 y) = -14x^2y^2$$

常负. 故零解稳定.

问题 9.8(10 分) 已知一阶 PDE 的初值问题

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \end{cases}$$

1. 求初值问题的解.
2. 暂缺.

解 初始曲面为 $\alpha(s) = (0, s)$, 初值为 $\theta(s) = \varphi(s)$. 计算 Jacobi 行列式可得

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a(\varphi(s)) & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

故解总是局部唯一的. 考虑初值问题的特征方程

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dy} = 1,\ \dfrac{dx}{dy} = a(u),\ \dfrac{du}{dy} = 0 \\ t(0) = 0,\ x(0) = s,\ u(0) = \varphi(s) \end{cases}$$

由此求解可得 $t = y, x = a(u)y + s, u = \varphi(s)$. 从前两式可反解得 $y = t, s = x - a(u)t$, 故初值问题的解 $u(x, t)$ 由 $u = \varphi(x - a(u)t)$ 确定.

第 10 章 2021 秋微分方程 (I) 期中参考解答 (赵班)(By 黄天一)

原卷要求从第 1 题至第 6 题中任选 5 题作答.

问题 10.1(15 分) 求方程 $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$ 的通解.

解 作变换 $y=ux$, 则

$$(u^2-u)dx+xdu=0\Rightarrow\frac{dx}{x}+\frac{du}{u^2-u}=0.$$

积分整理可得

$$x\frac{u-1}{u}=C\Rightarrow y=\frac{x^2}{x-C}.$$

问题 10.2(15 分) 求方程 $y^2(1+(\frac{dy}{dx})^2)=1$ 的通解.

解 令 $p=\dot{y}=\tan\theta(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$, 则

$$y^2=\frac{1}{1+p^2}=\cos^2\theta\Rightarrow y=\pm\cos\theta.$$

因此有

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{\mp\sin\theta d\theta}{\tan\theta}=\mp\cos\theta\Rightarrow x=C\mp\sin\theta.$$

故通积分为 $(x-C)^2+y^2=1$.

问题 10.3(15 分) 求线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-y-z\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y-2z\\ \dfrac{dz}{dt}=2z-x+y\end{cases}$$

解 系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$, 因此 $\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)^3$, 故 $\lambda=1$ 为 A 的三特征值. 计算可得

$$A-I=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-2&-2\\-1&1&1\end{pmatrix},\quad (A-I)^2=(A-I)^3=O.$$

因此 $(A-I)^3\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{r}_{1,0}=(1,0,0)^T,\boldsymbol{r}_{2,0}=(0,1,0)^T,\boldsymbol{r}_{3,0}=(0,0,1)^T$, 而且

$$\boldsymbol{r}_{1,1}=(A-I)\boldsymbol{r}_{1,0}=(1,2,-1)^T,\quad \boldsymbol{r}_{1,2}=\mathbf{0}.$$

$$\boldsymbol{r}_{2,1}=\boldsymbol{r}_{3,1}=(-1,-2,1)^T,\quad \boldsymbol{r}_{2,2}=\boldsymbol{r}_{3,2}=\mathbf{0}.$$

因此有

$$\boldsymbol{R}_1=(1+t,2t,-t)^T,\quad \boldsymbol{R}_2=(-t,1-2t,t)^T,\quad \boldsymbol{R}_3=(-t,-2t,1+t).$$

由此可得基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{R}_3\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}1+t & -t & -t\\ 2t & 1-2t & -2t\\ -t & t & 1+t\end{pmatrix}.$$

因此方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\Phi(t)\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}e^t((C_1-C_2-C_3)t+C_1)\\ e^t(2(C_1-C_2-C_3)t+C_2)\\ e^t(2(-C_1+C_2+C_3)t+C_3)\end{pmatrix}.$$

问题 10.4(15 分) 求微分方程 $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$ 的通解.

解 这是 Euler 方程. 作变换 $t=\ln x$, 则

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=x\frac{dy}{dx},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)=x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}.$$

代回方程可得

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2y=te^t.$$

1. 齐次方程 $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2y=0$ 的通解为 $y=e^t(C_1\cos t+C_2\sin t)$.
2. 非齐次方程的一个特解为

$$\frac{1}{\mathcal{D}^2-2\mathcal{D}+2}(te^t)=e^t\frac{1}{\mathcal{D}^2+1}t=e^t(1-\mathcal{D}^2+\mathcal{D}^4-\cdots)t=te^t.$$

综上可得方程通解为

$$y=e^t(C_1\cos t+C_2\sin t)+te^t=x(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x+\ln x).$$

问题 10.5(15 分) 考虑线性方程 $y''+\alpha(t)y=0$, 其中 $\alpha(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 设 $\phi_1(t),\phi_2(t)$ 是两个线性无关的解, 且

$$\lim_{t\to+\infty}(|\phi_1(t)|+|\phi_1'(t)|)=0,$$

证明:

$$\lim_{t\to+\infty}(|\phi_2(t)|+|\phi_2'(t)|)=+\infty.$$

证明 令 $z=\dot{y}$, 则原线性方程化为一阶方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\alpha(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix}\triangleq A(t)\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix}.$$

由 $\phi_1(t),\phi_2(t)$ 线性无关了的 $(\phi_1(t),\phi_1'(t))^T,(\phi_2(t),\phi_2'(t))^T$ 是方程组的线性无关解. 由 Liouville 公式可得

$$W(t)=\phi_1(t)\phi_2'(t)-\phi_1'(t)\phi_2(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \mathrm{tr}(A(s))ds}=W(t_0)\triangleq C\neq 0.$$

由此可得

$$(|\phi_1(t)|+|\phi_1'(t)|)(|\phi_2(t)|+|\phi_2'(t)|)\geqslant|W(t)|=|C|>0.$$

结合 $|\phi_1(t)|+|\phi_1'(t)|\to 0$ 可得 $|\phi_2(t)|+|\phi_2'(t)|\to+\infty(t\to+\infty)$.

问题 10.6(15 分) 用 (广义) 幂级数方法求解方程

$$2xy''+(1-2x)y'-y=0.$$

解 设方程的广义幂级数解为 $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^{k+\rho}$, 则有

$$y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+\rho)x^{k+\rho-1},\quad y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho-2}.$$

代入方程可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+\rho)(2k+2\rho-1)x^{k+\rho-1}-\sum_{k=0}^{\infty}C_k(2k+2\rho+1)x^{k+\rho}=0.$$

即有

$$C_0\rho(2\rho-1)x^{\rho-1}+\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2\rho+1)(C_{k+1}(k+\rho+1)-C_k)x^{k+\rho}=0.$$

不妨设 $C_0=1$. 考虑两种情况:

1. $\rho=0$, 则 $C_{k+1}(k+1)=C_k(k\geqslant 0)$. 因此 $C_k=\frac{1}{k!}$, 故一个解为 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$.
2. $\rho=\frac{1}{2}$, 则 $C_{k+1}(k+\frac{3}{2})-C_k=0(k\geqslant 0)$. 因此 $C_k=\frac{2^k}{(2k+1)!!}$, 故一个解为 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k+1)!!}x^{k+\frac{1}{2}}$.

综上可得方程通解为

$$y(x)=C_1e^x+C_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k+1)!!}x^{k+\frac{1}{2}}.$$

问题 10.7(15 分) **(本题不在考试范围内)** 考虑自治系统

$$\dot{x}=y-2x^2,\quad \dot{y}=x-1.$$

1. 画出系统在平衡点附近的相图 (要有计算过程).
2. 作出 Nullcline 图, 并画出该系统在整个相平面上的相图 (在全平面相图中用虚线画出 Nullcline).

解

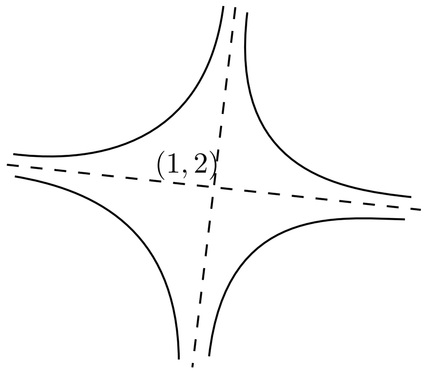
1. 计算可得方程的平衡点为 $x=1,y=2$. 作平移 $\xi=x-1,\eta=y-2$, 则有

$$\dot{\xi}=-4\xi+\eta-2\xi^2,\quad \dot{\eta}=\xi.$$

考虑线性主部 $\dot{\xi}=-4\xi+\eta,\dot{\eta}=\xi$, 系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-4&1\\1&0\end{pmatrix}$, 故 $p=-\mathrm{tr}(A)=4,q=\det A=-1$. 故 $x=1,y=2$ 是原系统的鞍点. 注意到 $\xi=0$ 不是特殊方向. 设 $\eta=k\xi$ 是特殊方向, 则

$$k=\left.\frac{d\eta}{d\xi}\right|_{\eta=k\xi}=\left.\frac{\xi}{\eta-4\xi}\right|_{\eta=k\xi}=\frac{1}{k-4}.$$

由此可得 $k^2-4k=1$, 求解可得 $k=2\pm\sqrt{5}$. 因此平衡点附近的相图大致为



2. 计算可得 x-Nullcline 为抛物线 $y = 2x^2$, y-Nullcline 为直线 $x = 1$. 全平面相图参考群文件.

问题 10.8(15 分) 分析系统

$$\dot{x} = -y - x^3, \quad \dot{y} = x - y^3$$

的零解的稳定性.

解 构造函数 $V(x, y) = x^2 + y^2$, 则 V 正定且全导数

$$\dot{V}(x, y) = -2xy - 2x^4 + 2xy - 2y^4 = -2(x^4 + y^4)$$

负定, 因此系统零解渐近稳定.

问题 10.9(15 分) 设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $0 \leqslant x \leqslant a, |y| < b$ 上连续, 且当 $y_1 \leqslant y_2$ 时, $f(x, y_1) \leqslant f(x, y_2)$. 对于所有的 x, $f(x, 0) \geqslant 0$. 通过构造 Picard 序列证明: 初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = 0$$

在区间 $0 \leqslant x \leqslant h$ 上存在解, 其中

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_R |f(x, y)|.$$

(注意: 直接用 Peano 定理不给分!)

证明 构造 Picard 序列如下:

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_k(x) = \int_0^x f(s, \varphi_{k-1}(s))ds (k \geqslant 1).$$

当 $x \in [0, h]$ 时, 我们有:

1. $\varphi_0(x) = 0$.
2. 若 $|\varphi_k(x)| \leqslant b$, 则

$$|\varphi_{k+1}(x)| \leqslant \int_0^x |f(s, \varphi_k(s))|ds \leqslant \int_0^x \max_R |f|ds \leqslant Mh \leqslant b.$$

由归纳法即得 $|\varphi_k(x)| \leqslant b, \forall x \in [0, h], \forall k$. 另一方面, 有

1. $\varphi_1(x) = \int_0^x f(s, 0)ds \geqslant 0 = \varphi_0(x)$.
2. 若 $\varphi_k(x) \geqslant \varphi_{k-1}(x)$, 则

$$\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) = \int_0^x (f(s, \varphi_k(s)) - f(s, \varphi_{k-1}(s)))ds \geqslant 0.$$

由归纳法即得 $\varphi_0(x) \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \cdots, \forall x \in [0, h]$. 由上述可得在 $[0, h]$ 上, φ_k 逐点收敛于某个函数 φ, 且 $\varphi_0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \cdots \leqslant \varphi$.

另一方面, 在 $[0, h]$ 上, 我们已证明了 $\{\varphi_k\}$ 一致有界, 又由

$$|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| = \left|\int_0^x f(s, \varphi_{k-1}(s))ds - \int_0^y f(s, \varphi_{k-1}(s))ds\right| \leqslant \left|\int_y^x |f(s, \varphi_{k-1}(s))|ds\right| \leqslant M|x - y|.$$

因此 $\{\varphi_k\}$ 等度连续. 由 Arzelà-Ascoli 定理可得 $\{\varphi_k\}$ 存在一致收敛子列 $\{\varphi_{k_n}\}$, 一致极限即为 φ. 由此可得 $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 对任意 $n\geqslant N, x\in[0,h]$, 有

$$\varphi(x)=\varphi_{k_n}(x)=|\varphi_{k_n}(x)-\varphi(x)|<\varepsilon.$$

故对任意 $k\geqslant k_N$, 有

$$|\varphi_k(x)-\varphi(x)|=\varphi(x)-\varphi_k(x)\leqslant\varphi(x)-\varphi_{k_N}(x)<\varepsilon.$$

即说明了 φ_k 在 $[0,h]$ 上一致收敛于 φ. 因此

$$\varphi(x)=\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\lim_{k\to\infty}\int_0^x f(s,\varphi_k(s))ds=\int_0^x f(s,\varphi(s))ds.$$

所以 $\varphi(x)$ 是初值问题的一个解.

问题 10.10(15 分) 证明: 存在 $\lambda=\lambda_0$ 使得下面的方程

$$\frac{dy}{dx}=\lambda(1+\sin^2x+\sin^2y)+x,\quad y(0)=y(1)=0$$

至少存在一个解.

证明 首先由 Picard 定理可得方程 $y'(x)=\lambda(1+\sin^2x+\sin^2y)+x$ 在初值条件 $y(0)=0$ 下存在唯一解 $y(x;\lambda)$. 令 $\omega(\lambda)=y(1;\lambda)$, 我们只需证明 $\omega(\lambda)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在零点即可. 构造关于 λ 的变分方程可得

$$\frac{\partial y(x;\lambda)}{\partial\lambda}=\int_0^x\left(1+\sin^2s+\sin^2y(s;\lambda)+\lambda\sin 2y(s;\lambda)\frac{\partial y(s;\lambda)}{\partial\lambda}\right)ds.$$

该方程等价于 $\frac{\partial y(x;\lambda)}{\partial\lambda}$ 关于 x 的一阶线性方程在 $\frac{\partial y(0;\lambda)}{\partial\lambda}=0$ 下的 Cauchy 问题, 求解可得

$$\frac{\partial y(x;\lambda)}{\partial\lambda}=\int_0^x(1+\sin^2s+\sin^2y(s;\lambda))e^{\int_s^x\lambda\sin 2y(u;\lambda)du}ds.$$

由此可得 $\omega'(\lambda)=\frac{\partial y(1;\lambda)}{\partial\lambda}>0$, 因此 $\omega(\lambda)$ 严格递增. 另一方面, 当 $\lambda=0$ 时, 初值问题的解为 $y(x;0)=\frac{x^2}{2}$, 因此 $\omega(0)=y(1;0)=\frac12$; 当 $\lambda=-1$ 时, 注意到 $y'(x;\lambda)=x-1-\sin^2x-\sin^2y\leqslant x-1$, 结合 $y(0;\lambda)=0$ 积分可得 $y(x;\lambda)\leqslant\frac{x^2}{2}-x\Rightarrow\omega(-1)=y(1;\lambda)\leqslant-\frac12$. 由零点定理可得 $\omega(\lambda)$ 在 $(-1,0)$ 内存在零点.

问题 10.11(15 分) 设 n 阶常数方阵 A 的所有特征值实部均为负, n 阶矩阵值函数 $B(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且满足

$$\int_0^\infty\|B(t)-A\|dt<+\infty.$$

证明: 方程组 $\dot{x}=B(t)x$ 的零解渐近稳定.

(提示: 把方程改写为 $\dot{x}=Ax+(B(t)-A)x$.)

证明 将方程改写为 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}+(B(t)-A)\boldsymbol{x}$, 则在 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 下初值问题等价于

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{A(t-s)}(B(s)-A)\boldsymbol{x}(s)ds.$$

由于 A 的特征值实部均负, 故存在 $\alpha>0$ 和 $M>0$ 使得 $\|e^{At}\|\leqslant Me^{-\alpha t},\forall t\geqslant0$. 令 $\boldsymbol{y}=e^{-At}\boldsymbol{x}$, 则

$$|\boldsymbol{y}(t)|\leqslant|\boldsymbol{x}_0|+\int_0^t\|B(s)-A\|\cdot|y(s)|ds.$$

由 Gronwall 不等式可得

$$|y(t)|\leqslant|x_0|e^{\int_0^t\|B(s)-A\|ds}\leqslant|x_0|e^{\int_0^\infty\|B(s)-A\|ds}\triangleq N.$$

因此 $|x(t)\leqslant\|e^{At}\|\cdot|y(t)|\leqslant MNe^{-\alpha t}\to0(t\to+\infty)$, 即系统零解渐近稳定.

第 11 章 2022 秋微分方程引论期中试题与参考解答

一、(选择题, 本题共 20 分, 每小题 5 分)

1. 常微分方程 $(2t^3-3xt^2-x^3)dt-(t^3+tx^2-2x^3)dx=0$ 是 (　　).

   (A) 线性方程;　　(C) 齐次方程;

   (B) 分离方程;　　(D) 恰当方程.

2. 对方程 $2txx'=x'^3+4x^2$, 以下说法正确一项是 (　　)

   (A) 任何初值问题的解唯一;　　(C) 不可能存在有界解.

   (B) 其通解是抛物线族;　　(D) 任一解的最大存在区间有界.

3. 方程 $x'+t^2x'+tx=e^t$ 的所有解构成一个 (　　)

   (A) 1 维线性空间;　　(C) 2 维线性流形;

   (B) 2 维线性空间;　　(D) 3 维线性空间.

4. 方程 $x'=(t-x)e^{tx^2}$ 过原点的解 (　　)

   (A) 不唯一.　　(C) 有界.

   (B) 在 $t>0$ 时有可能与 $x=t$ 相交.　　(D) 在 $[0,+\infty)$ 上存在.

(1) (C).　　(2) (B).　　(3) (C).　　(4) (D).

二、(本题 12 分) 求解线性微分方程组的初值问题.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=-y+e^t\\ \dfrac{dz}{dt}=x-4z\\ x(0)=y(0)=z(0)=0\end{cases}$$

(解法一: 逐项消元) 首先求解可得

$$\frac{dy}{dt}=-y+e^t,\quad y(0)=0\Rightarrow y(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.\quad \cdots\cdots(4')$$

代入第一个方程可得

$$\frac{dx}{dt}=-x+\frac{e^t-e^{-t}}{2},\quad x(0)=0\Rightarrow x(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{4}-\frac{te^{-t}}{2}\quad \cdots\cdots(8').$$

代入第三个方程可得

$$\frac{dz}{dt}=-4z+\frac{e^t-e^{-t}}{4}-\frac{te^{-t}}{2}\Rightarrow z(t)=\frac{e^t}{20}-\frac{e^{-t}}{36}-\frac{te^{-t}}{6}-\frac{e^{-4t}}{45}.\quad \cdots\cdots(12')$$

求解完毕.

(解法二: 常系数方程组算法) 计算可得

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\1&0&-4\end{pmatrix},\quad \det(A-\lambda I)=(\lambda+1)^2(\lambda+4).$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$(重数为 2), $\lambda_2=-4$(重数为 1). $\quad\cdots\cdots(3')$

1. 计算可得 $(A+I)^2r=0$ 的基础解系为 $r_{1,0}^{(1)}=(1,3,0)^T$, $r_{2,0}^{(1)}=(0,-9,1)^T$. 因此

$$r_{1,1}^{(1)}=(I+A)r_{1,0}^{(1)}=(3,0,1)^T,\quad r_{2,1}^{(1)}=(A+I)r_{2,0}^{(1)}=(-9,0,-3)^T.$$

因此可得

$$R_1=r_{1,0}^{(1)}+tr_{1,1}^{(1)}=(1+3t,3,t),\quad R_2=r_{2,0}^{(1)}+tr_{2,1}^{(1)}=(-9t,-9,1-3t).$$

2. 计算可得 $\lambda_2=-4$ 的一个特征向量为 $R_3=(0,0,1)^T$.

综上可得齐次方程的基解矩阵为

$$\Phi(t)=(e^{-t}R_1,e^{-t}R_2,e^{-4t}R_3)=\begin{pmatrix}(1+3t)e^{-t}&-9te^{-t}&0\\3e^{-t}&-9e^{-t}&0\\te^{-t}&(1-3t)e^{-t}&e^{-4t}\end{pmatrix}.\quad\cdots\cdots(7')$$

计算可得

$$\Phi(t)^{-1}=\begin{pmatrix}e^t&-te^t&0\\\frac{e^t}{3}&-\frac{3t+1}{9}e^t&0\\-\frac{e^{4t}}{3}&\frac{e^{4t}}{9}&e^{5t}\end{pmatrix}.\quad\cdots\cdots(9')$$

结合零初值与非齐次项 $f(t)=(0,e^t,0)^T$ 可得初值问题的解为

$$\begin{aligned}(x(t),y(t),z(t))^T&=\Phi(t)\int_0^t\Phi(s)^{-1}f(s)ds\\&=\begin{pmatrix}(1+3t)e^{-t}&-9te^{-t}&0\\3e^{-t}&-9e^{-t}&0\\te^{-t}&(1-3t)e^{-t}&e^{-4t}\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}-se^{2s}\\-\frac{3s+1}{9}e^{2s}\\\frac{e^{5s}}{9}\end{pmatrix}ds\\&=\begin{pmatrix}(1+3t)e^{-t}&-9te^{-t}&0\\3e^{-t}&-9e^{-t}&0\\te^{-t}&(1-3t)e^{-t}&e^{-4t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{e^{2t}}{4}(1-2t)-\frac14\\\frac{e^{2t}}{36}(1-6t)-\frac{1}{36}\\\frac{e^{5t}}{45}-\frac{1}{45}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{e^t-e^{-t}}{4}-\frac{te^{-t}}{2}\\\frac{e^t-e^{-t}}{2}\\\frac{e^t}{20}-\frac{e^{-t}}{36}-\frac{te^{-t}}{6}-\frac{e^{-4t}}{45}\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots(12')\end{aligned}$$

注: 求出了非齐次问题的通解, 但是没代入初值, 得 10 分.

三、求方程的所有实值解.

(1) (共 6 分) $x'=(x+t)^2$.

作变换 $u=x+t$, 则有

$$\frac{du}{dt}=\frac{dx}{dt}+1=u^2+1\quad\cdots\cdots(2')$$

由此整理积分可得

$$\frac{du}{u^2+1}=dt \Rightarrow \arctan u = t+C \Rightarrow x=\tan(t+C)-t. \quad \cdots\cdots(6')$$

(2) (共 6 分) $t^2x'=tx+x^2$.

作变换 $x=ut$, 则 $x'=u't+u$. 代入可得

$$t^2(u't+u)=ut^2+u^2t^2 \Rightarrow tu'=u^2. \quad \cdots\cdots(2')$$

首先 $u=0$ 是一特解, 对应着原方程特解 $x=0(3')$. 若 $u\neq 0$, 则有

$$\frac{du}{u^2}=\frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{1}{u}=C-\ln|t|.$$

因此原方程通解为 $x=\frac{t}{C-\ln|t|}$ $\quad \cdots\cdots(6')$.

(3) (共 6 分) $(e^t+x-1)dt-(\cos x-t)dx=0$.

注意到

$$\frac{\partial}{\partial t}(t-\cos x)=\frac{\partial}{\partial x}(e^t+x-1)=1.$$

因此原方程是恰当方程 $(2')$. 设其对应的一个通积分为 $\Phi(x,t)=C$, 则

$$\Phi(x,t)=\int_0^t(e^s+x-1)ds+\phi(x)=e^t-1+(x-1)t+\phi(x).$$

$$\Phi(x,t)=\int_0^x(t-\cos u)du+\psi(t)=tx-\sin x+\psi(t).$$

比较上述两式可得

$$\phi(x)=-\sin x, \quad \psi(t)=e^t-t-1, \quad \Phi(x,t)=e^t-t-1+xt-\sin x.$$

因此方程的通积分为 $e^t-t+xt-\sin x=C$. $\quad \cdots\cdots(6')$

或者直接用课上讲的定理给出的通积分公式来计算:

$$\Phi(x,t)=\int_0^t(e^s+x-1)ds+\int_0^x(-\cos u)du=e^t-1+(x-1)t-\sin x.$$

(4) (共 6 分) $x^3dt+2t(t-x^2)dx=0$.

首先 $t=0$ 是方程一特解 $(1')$, 下面总假设 $t\neq 0$. 作变换 $y=x^2$, 则由原方程可得

$$x^4dt+t(t-x^2)(2xdx)=0 \Rightarrow y^2dt+t(t-y)dy=0. \quad \cdots\cdots(3')$$

再作变换 $y=ut$, 则方程化为

$$u^2t^2dt+t^2(1-u)(udt+tdu)=0 \Rightarrow udt+t(1-u)du=0. \quad \cdots\cdots(4')$$

$u=0$ 是一特解, 对应原方程特解 $x=0$. 若 $u\neq 0$, 则整理可得

$$\frac{u-1}{u}du=\frac{dt}{t} \Rightarrow ut=Ce^u.$$

代回可得通积分 $x^2=Ce^{\frac{x^2}{t}}$, 特解 $x=0$ 包含在内. $\quad \cdots\cdots(6')$

(5) (共 6 分) $x''-8x'+7x=(2t-1)e^t+\sin t$.

首先齐次方程的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=7$, 其通解为 $x(t)=C_1e^t+C_2e^{7t}(2')$. 由叠加原理, 只需分别求得方程

$$x''-8x'+7x=(2t-1)e^t(\mathrm{i}), \quad x''-8x'+7x=\sin t(\mathrm{ii})$$

的特解并相加即得原方程特解.

设 (i) 的一个特解为 $x_1(t) = t(At + B)e^t$, 则有

$$x_1'(t) = (At^2 + (B + 2A)t + B)e^t, \quad x_1''(t) = (At^2 + (B + 4A)t + 2B + 2A)e^t.$$

代入方程 (i) 可得

$$(-12At + 2A - 6B)e^t = (2t - 1)e^t \Rightarrow A = -\frac{1}{6},\ B = \frac{1}{9}.$$

即方程 (i) 的一个特解为 $x_1(t) = (-\frac{t^2}{6} + \frac{t}{9})e^t$. $\cdots\cdots(4')$

设 (ii) 的一个特解为 $x_2(t) = C\cos t + D\sin t$, 则

$$x_2'(t) = -C\sin t + D\cos t, \quad x_2''(t) = -C\cos t - D\sin t.$$

代入方程 (ii) 可得

$$(6C - 8D)\cos t + (8C + 6D)\sin t = \sin t \Rightarrow C = \frac{2}{25},\ D = \frac{3}{50}.$$

即方程 (ii) 的一个特解为 $x_2(t) = \frac{2}{25}\cos t + \frac{3}{50}\sin t$.

综上可得原方程通解为

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{7t} + e^t\left(-\frac{t^2}{6} + \frac{t}{9}\right) + \frac{2}{25}\cos t + \frac{3}{50}\sin t. \quad \cdots\cdots(6')$$

(6) (共 6 分) $2t^2x'' - tx' + (t + 1)x = 0$.

$t = 0$ 是方程的正则奇点, 可以运用广义幂级数法. 设广义幂级数解为 $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{k+\rho}$, 则有

$$x'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(k + \rho)t^{k+\rho-1}, \quad x''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(k + \rho)(k + \rho - 1)t^{k+\rho-2}.$$

代回方程整理可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k((k + \rho)(2k + 2\rho - 3) + 1)t^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{k+\rho+1} = 0.$$

比对系数可得

$$C_0(2\rho^2 - 3\rho + 1) = 0, \quad C_k((k + \rho)(2k + 2\rho - 3) + 1) + C_{k-1} = 0(k \geqslant 1). \quad \cdots\cdots(2')$$

为求得非平凡级数解, 令 $2\rho^2 - 3\rho + 1 = 0$, 并不妨设 $C_0 = 1$. 此时:

(a) $\rho = \frac{1}{2}$, 此时有

$$C_k(2k^2 - k) + C_{k-1} = 0 \Rightarrow C_k = \frac{(-1)^k}{k!(2k - 1)!!}.$$

此时求得一个特解

$$x_1(t) = \sqrt{t} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k - 1)!!}t^k. \quad \cdots\cdots(4')$$

(b) $\rho = 1$, 此时有

$$C_k(2k^2 + k) + C_{k-1} = 0 \Rightarrow C_k = \frac{(-1)^k}{k!(2k + 1)!!}.$$

此时求得一个特解

$$x_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k + 1)!!}t^{k+1}.$$

上述求得的两个特解是线性无关的, 因此原齐次方程的通解为

$$x(t) = C_1\sqrt{t} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k - 1)!!}t^k + C_2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k + 1)!!}t^{k+1}. \quad \cdots\cdots(6')$$

四、(本题共 12 分, 每小题 6 分)

1. 求特征值问题 $\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0(a<x<b); y'(a)=0, y(b)+y'(b)=0$ 的特征值和特征函数.
2. 设质量为 m 的火车在牵引力 F 作用下从静止开始沿直线轨道运行, 其受到的阻力为 $a+bv(t)^2$, 其中 $v(t)$ 为时刻 t 的火车速度, m,F,a,b 均为正的常数. 求 $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$.

(1) (共 6 分) 此时 S-L 边值问题满足常点条件, 故特征值必然非负. $\cdots\cdots(2')$

(a) $\lambda=0$: 则方程通解为 $y=Ax+B$, 代入边值条件可得 $A=0, Ab+B+A=0 \Rightarrow A=B=0$, 即此时边值问题只有零解, 故 0 不是特征值. $\cdots\cdots(3')$

(b) $\lambda>0$: 记 $\omega=\sqrt{\lambda}>0$, 则方程通解为 $y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$. 代入边值条件可得

$$\begin{cases} -\omega A\sin\omega a+\omega B\cos\omega a=0, \\ (\cos\omega b-\omega\sin\omega b)A+(\omega\cos\omega b+\sin\omega b)B=0 \end{cases}$$

要使上述方程组存在非零解 A,B, 须有

$$\Delta=\begin{vmatrix} -\omega\sin\omega a & \omega\cos\omega a \\ \cos\omega b-\omega\sin\omega b & \omega\cos\omega b+\sin\omega b \end{vmatrix}=0.$$

由此可得 ω 满足方程 $\omega=\cot(\omega(b-a))$. 注意到方程 $\mu=(b-a)\cot\mu$ 有可数个正零点 $\mu_1,\mu_2,\cdots$, 故 $\omega_n=\frac{\mu_n}{b-a}$. 此时求解可得 $B=A\tan\frac{a\mu_n}{b-a}$, 因此边值问题的特征值和特征函数为

$$\lambda_n=\frac{\mu_n^2}{(b-a)^2}, \quad y_n(x)=\cos\left(\mu_n\frac{x-a}{b-a}\right). \quad \cdots\cdots(6')$$

(2) (共 6 分) 由物理原理可得

$$m\dot{v}=F-(a+bv^2), \quad v(0)=0.$$

由已知可得 $F>a$, 否则阻力在初始时刻就大于牵引力, 不可能使火车由静止开始运动. $\cdots\cdots(2')$

(解法一: 利用 Nullcline 研究解的性态) 求解可得方程的一个 Nullcline 为 $L: v=\sqrt{\frac{F-a}{b}} \triangleq v_0$(即使得 $\dot{v}=0$ 的等斜线), 则 $v=v_0$ 自然成为方程的特解. 由 $f(v)=F-(a+bv^2)$ 关于 $v\in\mathbb{R}$ 连续可微可得满足局部 Lipschitz 条件, 故方程的不同积分曲线必不相交. 在直线 L 下方, 积分曲线严格上升, 且不能与 L 相交, 进而无法穿过 L. 从而 $v(t)$ 单调递增且有上界 v_0, 故极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) \triangleq v_1\in(0,v_0]$$(4')$. 由方程可得

$$\frac{m\dot{v}}{F-(a+bv^2)}=1 \Rightarrow t=\int_0^t \frac{m\dot{v}(s)}{F-(a+bv(s)^2)}ds=\int_0^{v(t)}\frac{mdv}{F-(a+bv^2)}.$$

当 $t\to+\infty$ 时, 上式左端趋于 $+\infty$, 若 $v_1<v_0$, 则右端始终有界, 矛盾! 所以 $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)=v_0=\sqrt{\frac{F-a}{b}}$. $\cdots\cdots(6')$

(解法二: 硬算) 方程整理积分可得

$$\frac{mdv}{(F-a)-bv^2}=dt \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{F-a}}\ln\frac{\sqrt{F-a}+\sqrt{b}v}{\sqrt{F-a}-\sqrt{b}v}=\frac{bt}{m}+C.$$

结合 $v(0)=0$ 整理可得

$$v(t)=\sqrt{\frac{F-a}{b}}\frac{e^{\frac{2\sqrt{b(F-a)}}{m}t}-1}{e^{\frac{2\sqrt{b(F-a)}}{m}t}+1}(5') \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} v(t)=\sqrt{\frac{F-a}{b}}.(6')$$

五、(本题 10 分, 每小题 5 分)

1. 求初值问题 $x'=2t\cos t-x^2, x(0)=0$ 的精确到 $o(t^8)$ 的近似解并讨论解的存在区间.
2. 证明: 对 $x''-2tx'-e^tx=0$ 的任一非零解 $x(t)$, 函数 $e^{-t^2}x(t)x'(t)$ 单调递增.

(1) (共 5 分) 构造方程的 Picard 序列可得

$$\varphi_0(t)=0,\quad \varphi_k(t)=\int_0^t (2s\cos s-\varphi_{k-1}(s)^2)ds. \quad \cdots\cdots(1')$$

由此可得

$$\varphi_1(t)=\int_0^t 2s\cos s ds=\int_0^t \left(2s-s^3+\frac{s^5}{12}-\frac{s^7}{360}+o(s^7)\right)ds$$
$$=t^2-\frac{t^4}{4}+\frac{t^6}{72}-\frac{t^8}{2880}+o(t^8).$$

$$\varphi_2(t)=\int_0^t (2s\cos s-\varphi_1(s)^2)ds$$
$$=\int_0^t \left[\left(2s-s^3+\frac{s^5}{12}-\frac{s^7}{360}+o(s^7)\right)-\left(s^4-\frac{s^6}{2}+o(s^7)\right)\right]ds$$
$$=t^2-\frac{t^4}{4}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^6}{72}+\frac{t^7}{14}-\frac{t^8}{2880}+o(t^8)$$

$$\varphi_3(t)=\int_0^t (2s\cos s-\varphi_2(s)^2)ds$$
$$=\int_0^t \left[\left(2s-s^3+\frac{s^5}{12}-\frac{s^7}{360}+o(s^7)\right)-\left(s^4-\frac{s^6}{2}-\frac{2s^7}{5}+o(s^7)\right)\right]ds$$
$$=t^2-\frac{t^4}{4}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^6}{72}+\frac{t^7}{14}+\frac{143}{2880}t^8+o(t^8)$$

$$\varphi_4(t)=\int_0^t (2s\cos s-\varphi_3(s)^2)ds$$
$$=\int_0^t \left[\left(2s-s^3+\frac{s^5}{12}-\frac{s^7}{360}+o(s^7)\right)-\left(s^4-\frac{s^6}{2}-\frac{2s^7}{5}+o(s^7)\right)\right]ds$$
$$=t^2-\frac{t^4}{4}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^6}{72}+\frac{t^7}{14}+\frac{143}{2880}t^8+o(t^8),\cdots$$

综上, 我们得到了初值问题的 $o(t^8)$ 近似解为

$$x(t)=t^2-\frac{t^4}{4}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^6}{72}+\frac{t^7}{14}+\frac{143}{2880}t^8. \quad \cdots\cdots(3')$$

设初值问题解的最大存在区间为 $J=(\alpha,\beta)(-\infty\leqslant\alpha<0<\beta\leqslant\infty)$. 作变换 $u=e^{\int_0^t x(s)ds}$, 则 u 恒大于零且 $x=\frac{u'}{u}$. 代回方程可得 u 满足初值问题

$$u''-2t\cos t\cdot u=0,\quad u(0)=1,\ u'(0)=0.$$

$u(t)$ 的最大存在区间与 $x(t)$ 相同. 假设 $\alpha<-\frac{7\pi}{3},\beta>\frac{10\pi}{3}$. 则:

(a) 在区间 $[-\frac{7\pi}{3},-\frac{5\pi}{3}]$ 内, 恒成立 $-2t\cos t>-2\times(-\frac{5\pi}{3})\times\frac{1}{2}=\frac{5\pi}{3}>4$. 又因为该区间长度为 $\frac{2\pi}{3}>\frac{\pi}{\sqrt{4}}$, 由 Sturm 比较定理可得 $u(t)$ 在该区间内存在零点, 这与 u 恒大于零矛盾! 所以 $-\frac{7\pi}{3}\leqslant\alpha<0$. $\cdots\cdots(4')$

(b) 在区间 $[\frac{8\pi}{3},\frac{10\pi}{3}]$ 内, 恒成立 $-2t\cos t>-2\times\frac{8\pi}{3}\times(-\frac{1}{2})=\frac{8\pi}{3}>8$. 又因为该区间长度为 $\frac{2\pi}{3}>\frac{\pi}{\sqrt{8}}$, 由 Sturm 比较定理可得 $u(t)$ 在该区间内存在零点, 这与 u 恒大于零矛盾! 所以 $0<\beta\leqslant\frac{10\pi}{3}$. $\cdots\cdots(5')$

注: (i) 近似解的具体求解占 2 分, 如果准确求出了前面两次迭代的结果 (算出 $\varphi_2(t)$ 的近似式) 可以给 1 分; (ii) 最大存在区间的左行解和右行解各占一分, 只要正确证明出有界即可得分.

(2) (共 5 分) 方程两端同乘 $e^{-t^2}x(t)$ 可得

$$e^{-t^2}x(t)x''(t)-2te^{-t^2}x(t)x'(t)-e^{t-t^2}x(t)^2=0. \quad \cdots\cdots(2')$$

因此有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{-t^2}x(t)x'(t)) &= e^{-t^2}x(t)x''(t)-2te^{-t^2}x(t)x'(t)+e^{-t^2}x'(t)^2\\ &= e^{t-t^2}x(t)^2+e^{-t^2}x'(t)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

所以 $e^{-t^2}x(t)x'(t)$ 单调递增. $\cdots\cdots(5')$

注: 本题实际可以证明严格递增: 假设存在 t_0 使得 $x(t_0)=x'(t_0)=0$, 由初值问题的存在唯一性可得原方程在该初值下只有零解, 这与 x 非零矛盾! 所以最后的不等式实际上是严格大于. **但是**不加说明直接写严格大于会扣一分.

六、(本题 10 分, 每小题 5 分)

1. 设 $x(t;t_0,x_0)$ 是初值问题 $tx'-t\sin\frac{x}{t}-x=0, x(t_0;t_0,x_0)=x_0$ 的解, 讨论解对初值 (t_0,x_0) 的连续性, 并求出 $\frac{\partial x(t;t_0,x_0)}{\partial t_0}\big|_{t=t_0}, \frac{\partial x(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}\big|_{t=t_0}$.
2. 证明: 方程 $x'=-x+f(t,x)$ 的任一解 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$, 其中 $|f(t,x)|\leqslant a(t)|x|, (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty}a(t)dt<+\infty$.

(1) (共 5 分) 初值问题在定义区域 $D=\{(x,t):t\neq 0\}$ 上可化为显式形式:

$$x'=\sin\frac{x}{t}+\frac{x}{t}, \quad x(t_0)=x_0.$$

记 $f(t,x)=\sin\frac{x}{t}+\frac{x}{t}$, 则上述初值问题等价于积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds.$$

注意到 $f\in C^1(D)$, 由此可得 f 在区域 D 上满足局部 Lipschitz 条件. $\cdots\cdots(1')$

任取 $(t_0,x_0)\in D$, 取定 D 中的闭矩形 $R:|t-t_0|\leqslant a, |x-x_0|\leqslant b$, 设 L 为 f 在 R 上的一个 Lipschitz 常数, M 为 $|f|$ 在 R 上的上界. 任意取定解 $x(t;t_0,x_0)$ 的存在唯一区间 $[t_0-h,t_0+h]$ 内一点 t, 任取 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M+1}e^{-Lh}$, 则任取 $(t_0^*,x_0^*)\in D$ 满足 $|t_0^*-t_0|,|x_0^*-x_0|<\delta$, 有

$$\begin{aligned}&|x(t;t_0^*,x_0^*)-x(t;t_0,x_0)|\\ \leqslant\ & |x_0^*-x_0|+\left|\int_{t_0^*}^{t_0}|f(s,x(s;t_0^*,x_0^*))|ds\right|+\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,x(s;t_0^*,x_0^*))-f(s,x(s;t_0,x_0))|ds\right|\\ \leqslant\ & |x_0^*-x_0|+M|t_0^*-t_0|+L\left|\int_{t_0}^{t}|x(s;t_0^*,x_0^*)-x(s;t_0,x_0)|ds\right|\\ \leqslant\ & (M+1)\delta+L\left|\int_{t_0}^{t}|x(s;t_0^*,x_0^*)-x(s;t_0,x_0)|ds\right|.\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可得

$$|x(t;t_0^*,x_0^*)-x(t;t_0,x_0)|\leqslant(M+1)\delta\cdot e^{L|t-t_0|}\leqslant\varepsilon e^{-Lh}\cdot e^{Lh}=\varepsilon.$$

因此初值问题的解 $x(t;t_0,x_0)$ 关于初值 (t_0,x_0) 连续. $\cdots\cdots(3')$

由 $f\in C^1(D)$ 及解对初值的可微性定理可得 $x(t;t_0,x_0)$ 关于 (t_0,x_0) 连续可微, 结合积分方程可构造如下变分方程:

$$\frac{\partial x(t;t_0,x_0)}{\partial t_0}=\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s))\frac{\partial x(s;t_0,x_0)}{\partial t_0}ds-f(t_0,x_0).$$

$$\frac{\partial x(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}=1+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s))\frac{\partial x(s;t_0,x_0)}{\partial x_0}ds.$$

因此有

$$\left.\frac{\partial x(t;t_0,x_0)}{\partial t_0}\right|_{t=t_0}=-f(t_0,x_0)=-\sin\frac{x_0}{t_0}-\frac{x_0}{t_0},\quad \cdots\cdots(4')$$

$$\left.\frac{\partial x(t;t_0,x_0)}{\partial x_0}\right|_{t=t_0}=1.\quad \cdots\cdots(5')$$

注: (i) 本题直接套用解对初值的连续性定理扣一分; (ii) 未明确写出变分方程扣一分; (iii) 也可以直接求解来讨论, 视过程的正确性给分.

(2) (共 5 分) 任取方程在某初值 (t_0,x_0) 下的解 $x(t)$, 令 $y(t)=x(t)e^t$, 则 $y(t)$ 满足初值问题

$$y'=f(t,ye^{-t})e^t,\quad y(t_0)=y_0:=x_0e^{t_0}.\quad \cdots\cdots(1')$$

这等价于积分方程

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y(s)e^{-s})e^sds.$$

任取 $t\geqslant t_0$, 有

$$|y(t)|\leqslant|y_0|+\int_{t_0}^{t}|f(s,y(s)e^{-s})|e^sds\leqslant|y_0|+\int_{t_0}^{t}a(s)|y(s)|ds.$$

由 Gronwall 不等式可得

$$|y(t)|\leqslant|y_0|e^{\int_{t_0}^{t}a(s)ds}\leqslant|y_0|e^{\int_{-\infty}^{+\infty}a(t)dt}\triangleq M<+\infty\quad \cdots\cdots(4').$$

因此 $|x(t)|=|y(t)|e^{-t}\leqslant Me^{-t},\forall t\geqslant t_0$, 从而 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$. $\cdots\cdots(5')$

七、(本题 10 分) 设常数 $a\in\mathbb{R}$, 讨论以下非线性系统零解的稳定性:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+4y-xy^2\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-4x+ay+\dfrac{1}{2}x^2y\end{cases}$$

将方程线性化可得

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a&4\\-4&a\end{pmatrix}\quad \cdots\cdots(1').$$

计算可得 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-a)^2+16$, 故 A 的特征值为 $\lambda=a\pm4i$. $\cdots\cdots(2')$

1. $a>0$: 则零解不稳定. $\cdots\cdots(4')$
2. $a<0$: 则零解渐近稳定. $\cdots\cdots(6')$
3. $a=0$: 此时线性近似失效. 构造函数 $V(x,y)=x^2+y^2$, 则 V 正定 $(7')$ 且全导数

$$\dot V(x,y)=2x(4y-xy^2)+2y(-4x+\frac{1}{2}x^2y)=-x^2y^2\leqslant0\quad \cdots\cdots(9')$$

所以此时零解稳定. $\cdots\cdots(10')$

注: 全导数那一行两分, 计算正确得一分, 能判定为常负给一分.

八、(本题共 10 分, 每小题 5 分)

已知一元函数 a 和 φ 连续可微, 考察如下一阶偏微分方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

1. 找出该问题的隐式解 $u(x,t)$.
2. 若 $a(u) = 1$ 或 $a(u) = 4u$, 分别讨论在 O_{xt} 上半平面整体解存在的充要条件.

(1) (共 5 分) 初始曲面为 $\alpha(s) = (0, s)$, 初值为 $\theta(s) = \varphi(s)$. 计算 Jacobi 行列式可得

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a(\varphi(s)) & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

故解总是局部唯一的 $(2')$. 考虑初值问题的特征方程

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dy} = 1, \ \dfrac{dx}{dy} = a(u), \ \dfrac{du}{dy} = 0 \\ t(0) = 0, \ x(0) = s, \ u(0) = \varphi(s) \end{cases}$$

由此求解可得 $t = y, x = a(u)y + s, u = \varphi(s)$. $\quad \cdots\cdots (4')$

从前两式可反解得 $y = t, s = x - a(u)t$, 故初值问题的隐式解 $u(x,t)$ 由 $u = \varphi(x - a(u)t)$ 确定. $\cdots\cdots (5')$

(2) (共 5 分) 若 $a(u) = 1$, 则初值问题的解即为 $u = \varphi(x - t)$, 它自然成为整体解. 故对任意 C^1 函数 φ 整体解都存在. $\quad \cdots\cdots (1')$

若 $a(u) = 4u$, 则初值问题的解由 $u = \varphi(x - 4ut)$ 确定. 我们断言: 此时整体解存在当且仅当 $\varphi'(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

设上半平面的整体解存在. 若存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $\varphi'(\alpha) < 0$, 则存在 $\alpha_1 < \alpha_2$, 使得 $\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2)$. 令 $\alpha = x - 4ut$, 则由隐式解可得 $x = \alpha + 4t\varphi(\alpha)$. 考虑两条特征线 $L_1 : x = \alpha_1 + 4\varphi(\alpha_1)t, L_2 : x = \alpha_2 + 4\varphi(\alpha_2)t$, 则二者存在交点, 交点处的 t 值为

$$T = \frac{1}{4}\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\varphi(\alpha_1) - \varphi(\alpha_2)} > 0.$$

注意到 $u(x,t)$ 在两条特征线上的取值分别为 $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2)$, 二者不相等, 从而 $u(x,t)$ 在它们的交点处取值不唯一, 矛盾! $\quad \cdots\cdots (3')$

反之, 我们来构造上半平面的整体解. 任取 $t \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R}$, 考虑函数 $x(t,\alpha) = \alpha + 4t\varphi(\alpha)$, 则

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 1 + 4t\varphi'(\alpha) \geqslant 1.$$

由此可得 $x(t,\alpha)$ 关于 $\alpha \in \mathbb{R}$ 严格递增, 且值域为 $\mathbb{R}$. 故对任意固定的 $t > 0$, 可反解出 $\alpha = \alpha(t,x)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}$, 由隐映射定理可得 $\alpha(t,x)$ 也是 C^1 函数. 对 $x = \alpha + 4t\varphi(\alpha)$ 两边求偏导可得

$$1 = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 4t\frac{\partial \alpha}{\partial x}\varphi'(\alpha) \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{1 + 4t\varphi'(\alpha)}.$$

$$0 = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + 4\varphi(\alpha) + 4t\frac{\partial \alpha}{\partial t}\varphi'(\alpha) \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{4\varphi(\alpha)}{1 + 4t\varphi'(\alpha)}.$$

令

$$u(x,t) = \frac{\alpha(t,x) - x}{4t}(t > 0), \quad u(x,0) = \varphi(x).$$

则 $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R})$, 且当 $t > 0$ 时, 有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{x - \alpha(t,x)}{4t^2} + \frac{1}{4t}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{(x - \alpha)(1 + 4t\varphi'(\alpha)) - 4t\varphi(\alpha)}{4t^2(1 + 4t\varphi'(\alpha))} = \frac{\varphi'(\alpha)(x - \alpha)}{t(1 + 4t\varphi'(\alpha))}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4t}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - 1\right) = -\frac{\varphi'(\alpha)}{1 + 4t\varphi'(\alpha)}.$$

因此 $u_t + 4uu_x = 0(t > 0, x \in \mathbb{R})$. 故 $u(t,x)$ 即为初值问题在上半平面的 C^1 整体解. $\cdots\cdots(5')$

第 12 章 第八次习题课 (by 黄天一)

12.1 习题讲解

作业 12.1 (31-2)

讨论何时方程 $(1+x)u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0$ 为椭圆型、双曲型、抛物型，在 xy 平面上画出示意图.

解 判别式为 $\Delta=(xy)^2-(1+x)(-y^2)=(x^2+x+1)y^2$. 当 $y=0$ 时，$\Delta=0$, 方程为抛物型; 当 $y\neq 0$ 时,$\Delta<0$, 方程为双曲型. 示意图自行脑补.

作业 12.2 (31-4)

试问 $u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}=0$ 是何种类型的 PDE? 直接带入验证对于任意函数 f,g, $u(x,y)=f(2x+y)+xg(2x+y)$ 是方程的解.

解 $\Delta=(-2)^2-4=0$, 故方程为抛物型. 这里我们更进一步，来验证 $u(x,y)=f(2x+y)+xg(2x+y)$ 是其通解.

特征方程为 $(dy)^2+4dxdy+4(dx)^2=0$, 求解可得 $\frac{dy}{dx}=-2\Rightarrow 2x+y=C$. 令 $\xi=2x+y,\eta=x$, 则上述确定了可逆的线性变换，计算可得

$$u_x=2u_\xi+u_\eta \quad u_y=u_\xi$$
$$u_{xx}=4u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \quad u_{xy}=2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta} \quad u_{yy}=u_{\xi\xi}$$

代回方程可得 $u_{\xi\xi}=0$. 所以 $u=f(\xi)+\eta g(\xi)=f(x+2y)+xg(y+2x)$.

作业 12.3 (31-5)

利用变换 $u=ve^{\alpha x+\beta y}$ 和 $y'=\gamma y$ 将椭圆型方程 $u_{xx}+3u_{yy}-2u_x+24u_y+5u=0$ 化为标准形式 $v_{xx}+v_{yy}+cv=0$.

解 这是很经典的手法, 值得记忆. 计算可得

$$u_x=e^{\alpha x+\beta y}(v_x+\alpha v) \quad u_y=e^{\alpha x+\beta y}(v_y+\beta v).$$
$$u_{xx}=e^{\alpha x+\beta y}(v_{xx}+2\alpha v_x+\alpha^2 v) \quad u_{yy}=e^{\alpha x+\beta y}(v_{yy}+2\beta v_y+\beta^2 v)$$

代回方程可得

$$e^{\alpha x+\beta y}(v_{xx}+3v_{yy}+(2\alpha-2)v_x+(6\beta+24)v_y+(\alpha^2+3\beta^2-2\alpha+24\beta+5)v)=0$$

令 $2\alpha-2=6\beta+24=0$, 即 $\alpha=1,\beta=-4$, 则方程化为 $v_{xx}+3v_{yy}-44v=0$. 取 $y'=\frac{1}{\sqrt{3}}y$, 则 $v_{yy}=\frac{1}{3}v_{y'y'}$. 因此方程化为标准形式 $v_{xx}+v_{y'y'}-44v=0$.

作业 12.4 (31-6)

考虑方程 $3u_y+u_{xy}=0$.

1. 指出它的类型.

2. 求出方程通解.
3. 在附加条件 $u(x,0)=e^{-3x}$ 和 $u_y(x,0)=0$ 下, 方程的解是否存在唯一?

解

1. 双曲型.
2. 令 $v=u_y$, 则 $v_x+3v=0$. 求解该 ODE 可得 $v=f(y)e^{3x}$. 因此 $u=F(y)e^{-3x}+G(x)$.
3. 将初值带入可得 $F(0)e^{-3x}+G(x)=e^{-3x}, F'(0)e^{-3x}=0$. 取 $G(x)=0, F(y)=1$ 即可得方程的一个解 $u=e^{-3x}$. 但解不唯一, 例如可以取 $F(y)=y^2+1, G(x)=0$, 则得到另一解 $u(x,y)=(y^2+1)e^{-3x}$.

作业 12.5 (38-2)

求解方程 $u_{tt}=c^2u_{xx}, u(x,0)=\ln(1+x^2), u_t(x,0)=4+x$.

解 带入 d'Alembert 公式可得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}(\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds\\&=\frac{1}{2}\ln\left[(1+(x+ct)^2)(1+(x-ct)^2)\right]+(4+x)t.\end{aligned}$$

作业 12.6 (38-8)

称三维波动方程形如 $u(x,t)$ 的解为球面波, 其中 r 表示质点到原点的距离. 此时波动方程化为

$$u_{tt}=c^2\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right)\text{(球面波方程)}\ .$$

1. 试作变换 $v=ru$ 将方程化为 $v_{tt}=c^2v_{rr}$.
2. 利用上述求出 v, 并由此求出球面波函数 u.
3. 在初值条件 $u(r,0)=\phi(r), u_t(r,0)=\psi(r)$ 下求解 u. 其中 $\phi(r)$ 和 $\psi(r)$ 均为关于 r 的偶函数.

解

1. 在变换 $v=ru$ 下, 有
$$u_t=\frac{v_t}{r},\quad u_{tt}=\frac{v_{tt}}{r}.$$
$$u_r=\frac{v_rr-v}{r^2},\quad u_{rr}=\frac{r^2v_{rr}-2rv_r+2v}{r^3}.$$
将上述代入球面波方程可得 $u_{tt}=c^2v_{rr}$.
2. 上述波动方程的行波解为 $v(r,t)=f(r-ct)+g(r+ct)$. 因此球面波为 $u=\frac{1}{r}\left[f(r-ct)+g(r+ct)\right]$.
3. 此时 $v(r,0)=r\phi(r), v_t(r,0)=r\psi(r)$. 由 d'Alembert 公式可得
$$v(r,t)=\frac{1}{2}\left[(r+ct)\phi(r+ct)+(r-ct)\phi(r-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct}s\psi(s)ds$$
所以球面波为
$$u(r,t)=\frac{1}{2r}\left[(r+ct)\phi(r+ct)+(r-ct)\phi(r-ct)\right]+\frac{1}{2cr}\int_{r-ct}^{r+ct}s\psi(s)ds$$

作业 12.7 (38-9)

求解初值问题 $u_{xx}-3u_{xt}-4u_{tt}=0, u(x,0)=x^2, u_t(x,0)=e^x$

解 考虑双曲型算子 $L\triangleq \partial_x^2-3\partial_x\partial_t-4\partial_t^2=(\partial_x-4\partial_t)(\partial_x+\partial_t)$. 令 $v=u_x+u_t$, 则原初值问题化为两个传输方程

$$\begin{cases} v_x-4v_t=0 \\ v(x,0)=2x+e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x+u_t=v \\ u(x,0)=x^2 \end{cases}$$

求解第一个传输方程可得

$$v(x,t)=2x+\frac{t}{2}+e^{x+\frac{t}{4}}$$

将 v 代入第二个传输方程，求解可得

$$u(x,t)=x^2+\frac{t^2}{4}+\frac{4}{5}e^{x+\frac{t}{4}}-\frac{4}{5}e^{x-t}$$

作业 12.8 (41-5)

利用能量守恒律证明波动方程在齐次初值下只有零解.

解 考虑波动方程 $u_{tt}=c^2u_{xx}(x,t\in\mathbb{R}), u(x,0)=0, u_t(x,0)=0$. 定义能量函数

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(u_t^2+c^2u_x^2)dx$$

计算可得

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}&=\int_{\mathbb{R}}(u_tu_{tt}+c^2u_xu_{tx})dx=c^2\int_{\mathbb{R}}u_tu_{xx}d+c^2\int_{\mathbb{R}}u_xu_{tx}dx\\&=c^2u_tu_x\Big|_{-\infty}^{+\infty}-c^2\int_{\mathbb{R}}u_xu_{xt}dx+c^2\int_{\mathbb{R}}u_xu_{xt}dx=0\end{aligned}$$

因此 E 为常数, 进而 $E(t)\equiv E(0)=0$, 故恒有 $u_t\equiv u_x\equiv 0\Rightarrow u$ 为常数, 又因为初值为零，故 $u\equiv 0$.

作业 12.9 (41-5)

证明带阻尼的波动方程 $u_{tt}-c^2u_{xx}+ru_t=0(r>0)$ 的能量衰减.

解 定义带阻尼的波动方程的能量为

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(u_t^2+c^2u_x^2)dx$$

则类似上题可得

$$\frac{dE}{dt}=\int_{\mathbb{R}}(c^2u_tu_{xx}-ru_t^2+c^2u_xu_{tx})dx=-r\int_{\mathbb{R}}u_t^2dx\le 0.$$

所以能量衰减.

下面我们来证明课上提到过的更弱条件下热方程解的唯一性. 实际只需证明如下定理:

定理 12.1 (可能不讲，留给同学们自行阅读)

设 $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ 是如下初值问题

$$u_t - \Delta u = 0(x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T), \qquad u(x,0) = \varphi(x)(x \in \mathbb{R}^n)$$

的解. 若 u 满足如下增长条件: $u(x,t) \leqslant Ae^{a|x|^2}(x \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant t \leqslant T)$, 其中 $A, a > 0$, 则

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} \varphi.$$

证明 首先考虑 $T < \frac{1}{4a}$ 的情况. 选取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{4a} - T$, 任取 $y \in \mathbb{R}^n$ 和 $\eta > 0$, 构造函数

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\eta}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right\} (x \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

计算可得 $v_t - \Delta v = 0$(check it!). 取 $U = B(y,r), U_T = B(y,r) \times (0,T)$, 则由最值原理可得 $\max_{\overline{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v$. 现在我们计算 RHS 即可. 首先

$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{\eta}{(T+\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}\right\} \leqslant u(x,0) = \varphi(x).$$

另一方面, 任取 $x \in \partial U, 0 \leqslant t \leqslant T$, 有

$$\begin{aligned} v(x,t) &= u(x,t) - \frac{\eta}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right\} \\ &\leqslant Ae^{a(|y|+r)^2} - \frac{\eta}{(T+\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}\right\} \\ &= Ae^{a(|y|+r)^2} - \eta(4(a+\xi))^{\frac{n}{2}} e^{(a+\xi)r^2}. \end{aligned}$$

其中 $\xi = a - \frac{1}{4(T+\varepsilon)} > 0$. 当 r 充分大时, 上式小于等于 $\sup_{\mathbb{R}^n} \varphi$. 综上可得 r 充分大时 v 在抛物边界 Γ_T 上的最大值不超过 $\sup_{\mathbb{R}^n} \varphi$, 从而

$$v(y,t) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} \varphi \Rightarrow u(x,t) - \frac{\eta}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} \varphi.$$

令 $\eta \downarrow 0$, 则 $u(y,t) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} \varphi, \forall t \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant t \leqslant T$.

若 $T > \frac{1}{4a}$, 在区间 $[0, \frac{1}{8a}], [\frac{1}{8a}, \frac{1}{4a}], \cdots$ 上反复应用上述证明过程即可.

笔记 由上述定理即可说明热方程 $u_t - \Delta u = f, u(x,0) = \varphi(x)$ 满足增长条件 $u(x,t) \leqslant Ae^{a|x|^2}$ 解的唯一性: 设 u_1, u_2 均为初值问题的解, 则 $u_1 - u_2$ 和 $u_2 - u_1$ 均满足齐次热方程的齐次初值问题, 从而 $\sup(u_2 - u_1), \sup(u_1 - u_2) \leqslant 0$, 因此 $u_1 \equiv u_2$.

12.2 补充内容

12.2.1 $\mathbb{R}^n$ 上的积分

本节采用如下记号: (i) U 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的有界开集, ∂U 表示 U 的边界, 默认 ∂U 至少是 C^1 的. (ii) $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ 表示边界 ∂U 上的单位外法向, 它是关于 $x \in \partial U$ 的 C^1 函数. (iii) 记 u 在 ν 上的方向导数为 $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$. (iv) $dx = dx_1 \cdots dx_n$.

这一节的核心目的是把低维情况下的一些经典微积分公式推广到一般的 $\mathbb{R}^n$ 空间, 并介绍一些常用的结论.

定理 12.2 (Gauss-Green 公式)

设 $u \in C^1(\overline{U})$, 则有

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial U} u\nu^i dS.$$

可以参考Linear Functional Analysis: An Application-Oriented Introduction的 270 页定理 A8.8 给出的证明. 这其实是一般流形上的 Stokes 公式 $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ 的一个特例.

推论 12.1 (散度定理)

设 $u \in C^1(\overline{U}; \mathbb{R}^n)$, 则有

$$\int_U \nabla \cdot u dx = \int_{\partial U} u \cdot \nu dS.$$

证明 这是 Gauss-Green 公式的直接推论:

$$\int_U \nabla \cdot u dx = \sum_{i=1}^n \int_U \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx = \int_{\partial U} \sum_{i=1}^n u_i \nu^i dS = \int_{\partial U} u \cdot \nu dS.$$

笔记 这其实是数学分析中的 Newton-Leibniz 公式、Green 公式和 Gauss 公式的自然推广.

推论 12.2 (分部积分公式)

设 $u, v \in C^1(\overline{U})$, 则

$$\int_U u_{x_i} v dx = \int_{\partial U} uv\nu^i dS - \int_U uv_{x_i} dx.$$

证明 由 Gauss-Green 公式可得

$$\int_U u_{x_i} v dx + \int_U uv_{x_i} dx = \int_U \frac{\partial}{\partial x_i}(uv) dx = \int_{\partial U} uv\nu^i dS.$$

笔记 不必多说, 这是一维定积分的分部积分公式的推广.

利用分部积分公式, 我们可以立刻得到本课程经常要用的 Green 公式. 下面给出几种形式:

定理 12.3 (Green 公式)

设 $u, v \in C^2(\overline{U})$, 则

$$\int_U \Delta u dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

$$\int_U \nabla v \cdot \nabla u dx = \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS - \int_U u \Delta v dx.$$

$$\int_U (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial U} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

证明 由分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\int_U \nabla u\cdot\nabla v dx &= \sum_{i=1}^n \int_U u_{x_i}v_{x_i}dx\\ &= \sum_{i=1}^n\left(\int_{\partial U} uv_{x_i}\nu^i dS - \int_U uv_{x_ix_i}dx\right)\\ &= \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \nu}dS - \int_U u\Delta v dx.\end{aligned}$$

第一式和第三式是第二式的直接推论.

作为 Green 公式的一个应用,我们来证明高维波动方程的初边值问题经典解的唯一性.

命题 12.1

考虑如下初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u = f(x,t), & x\in U, t>0\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\overline{U}\\ u|_{\partial U} = g(x,t), & x\in\partial U, t\geqslant 0 \quad \text{(D)}\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial U} = g(x,t), & x\in\partial U, t\geqslant 0 \quad \text{(N)}\\ \left.\left(\sigma(x)u+\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right)\right|_{\partial U} = g(x,t), & x\in\partial D, t\geqslant 0 \quad \text{(R)}\end{cases}$$

其中 $\sigma(x)\geqslant 0$. 则初边值问题在任一边界下至多有一个经典解.

证明 只需证明对应的齐次方程在齐次初边值条件下只有零解. 设 w 满足该初边值问题, 在三种边界下我们需要取不同的能量函数.

1. 在 Dirichlet 边界 (D) 和 Neumann 边界下, 定义
$$E(t)=\frac{1}{2}\int_U (w_t^2+c^2|\nabla w|^2)dx.$$
由 Green 公式可得
$$\frac{dE}{dt} = \int_U (w_tw_{tt}+c^2\nabla w\cdot\nabla(w_t))dx = \int_U w_t(w_{tt}-c^2\Delta w)dx + c^2\int_{\partial U} w_t\frac{\partial w}{\partial \nu}dS = 0.$$
结合齐次初值可得 $0\leqslant E(t)\leqslant E(0)=0\Rightarrow E(t)=0$. 从而 $w_t\equiv\nabla w\equiv 0\Rightarrow w$ 恒为常数. 结合零初边值可得 w 为零.
2. 在 Robin 边界 (R) 下, 需要对能量函数作修正. 定义如下:
$$E(t)=\frac{1}{2}\int_U (w_t^2+c^2|\nabla w|^2)dx + \frac{c^2}{2}\int_{\partial U}\sigma(x)w^2 dS.$$
由 Green 公式可得
$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \int_U w_tw_{tt}dx + c^2\int_U \nabla w\cdot\nabla(w_t)dx + c^2\int_{\partial U}\sigma(x)ww_t dS\\ &= \int_U w_t(w_{tt}-c^2\Delta w)dx + c^2\int_{\partial U} w_t\left(\sigma(x)w+\frac{\partial w}{\partial\nu}\right)dS = 0.\end{aligned}$$
结合齐次初值可得 $0\leqslant E(t)\leqslant E(0)=0\Rightarrow E(t)\equiv 0$. 从而 $w_t\equiv 0, \nabla w\equiv 0\Rightarrow w$ 恒为常数, 结合零处边值即可得 w 恒为零.

笔记 现在同学们可以自己试试证明有界区域上高维热方程初边值问题经典解的存在唯一性.

最后我们再介绍一个常用的积分变换公式.

定理 12.4

1. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续, 则对任意 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 有
$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx=\int_0^\infty\left(\int_{\partial B(x_0,r)} f dS\right)dr.$$
2. 若 f 连续, 则对任意 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 和 $r>0$, 有
$$\frac{d}{dr}\left(\int_{B(x_0,r)} f dx\right)=\int_{\partial B(x_0,r)} f dS.$$

证明 以下均不妨设 $x_0=0$. 考虑映射 $\varphi:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to(0,+\infty)\times\mathbb{S}^{n-1}$, 定义为 $\varphi(x)=(|x|,\frac{x}{|x|})\triangleq(r,\omega)$, 这里 $\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ 为单位球面. 则容易验证 φ 是微分同胚. 利用重积分换元公式可得
$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx=\int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f dx=\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\omega)dS(\omega)\right)r^{n-1}dr=\int_0^\infty\left(\int_{\partial B(0,r)} f(y)dS(y)\right)dr.$$
实际上, 类比上述过程, 积分区域可由全空间改为 $B(0,R),\forall R>0$. 此时 r 的积分区间为 $0\leqslant r\leqslant R$. 所以
$$\int_{B(0,r)} f dx=\int_0^r\left(\int_{\partial B(0,\rho)} f dS\right)d\rho\Rightarrow\frac{d}{dr}\left(\int_{B(0,r)} f dx\right)=\int_{\partial B(0,r)} f dS.$$

例 12.1 设 $\rho>0$, 试讨论 $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\geqslant 1\}$ 上的广义积分 $\int_\Omega\frac{dx}{|x|^\rho}$ 的敛散性.

解 利用上述变换公式可得
$$\int_\Omega\frac{dx}{|x|^\rho}=\int_1^\infty\frac{1}{r^\rho}\left(\int_{\partial B(0,r)} dS\right)dr=n\omega_n\int_1^\infty\frac{dr}{r^{\rho-n+1}},$$
其中 ω_n 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体积, 进而 $n\omega_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的表面积. 由上述可得 $\rho>n$ 时积分收敛, 当 $\rho\leqslant n$ 时积分发散.

12.2.2 Fourier 变换方法

本节我们的目标是证明高维 Fourier 变换的相关性质, 计算一些具体的变换, 并利用 Fourier 变换求解一些 PDE.

定义 12.1 (Fourier 变换及其逆变换)

设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续且绝对可积, 定义其 Fourier 变换为
$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx.$$
类似地还可以定义 $f(x)$ 的 Fourier 逆变换
$$\check{f}(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$
有时我们也分别记 f 的 Fourier 变换和 Fourier 逆变换为 $F[f]$ 和 $F^{-1}[f]$.

在研究 Fourier 变换的相关性质前, 我们先计算两个具体的例子.

笔记 容易验证 Fourier 变换 F 是线性算子, 即 $F[\alpha f+\beta g]=\alpha F[f]+\beta F[g]$.

例 12.2 求函数 $f(\xi)=e^{-k|\xi|^2t}$ 的 Fourier 逆变换, 其中 $\xi\in\mathbb{R}^n, t>0$.

解 直接计算可得

$$\check{f}(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-k|\xi|^2t}e^{i\xi\cdot x}d\xi=\frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}}e^{-k\xi_i^2t+i\xi_ix_i}d\xi_i.$$

其中

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-k\xi^2t+i\xi x_i}d\xi=2\int_0^\infty e^{-k\xi^2t}\cos(\xi x_i)d\xi\triangleq I_t(x_i).$$

下面我们来求出 $I_t(x_i)$. 注意到

$$I_t(0)=2\int_0^\infty e^{-k\xi^2t}d\xi=\sqrt{\frac{\pi}{kt}}.$$

另一方面, 计算可得

$$\begin{aligned}\frac{dI_t}{dx_i}&=-2\int_0^\infty\xi e^{-k\xi^2t}\sin(\xi x_i)d\xi=\frac{1}{kt}\int_0^\infty\sin(\xi x_i)\frac{d}{dt}(e^{-k\xi^2t})dt\\&=-\frac{x_i}{kt}\int_0^\infty e^{-k\xi^2t}\cos(\xi x_i)d\xi=-\frac{x_i}{2kt}I_t.\end{aligned}$$

上述给出了 I_t 关于 x_i 的初值问题, 求解可得

$$I_t(x_i)=\sqrt{\frac{\pi}{kt}}e^{-\frac{x_i^2}{4kt}}.$$

代回可得

$$\check{f}(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{i=1}^nI_t(x_i)=\frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}.$$

例 12.3 求函数 $f(x)=e^{-\varepsilon|x|^2}$ 的 Fourier 变换, 其中 $x\in\mathbb{R}^n,\varepsilon>0$.

解 计算可得

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\varepsilon|x|^2}e^{-x\cdot\xi}dx=\prod_{k=1}^n2\int_0^\infty e^{-\varepsilon x_k^2}\cos(x_k\xi_k)dx_k=\prod_{k=1}^n\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-\frac{\xi_k^2}{4\varepsilon}}=\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|\xi|^2}{4\varepsilon}}.$$

下面我们介绍 Fourier 变换的相关性质. 引入记号

$$D^\alpha\triangleq\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}},\quad\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\quad|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n.$$

定理 12.5

下面我们假设 f,g 是连续的绝对可积函数.

1. 设 f 有各阶绝对可积的连续偏导数, 则 $\widehat{D^\alpha f}(\xi)=(i\xi)^\alpha\hat{f}(\xi)$, 其中 $x^\alpha\triangleq x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$.
2. $\widehat{f*g}(\xi)=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.
3. 若 $x^\alpha f$ 绝对可积, 则 $F[x^\alpha f]=i^{|\alpha|}D^\alpha F[f]$.
4. (Parseval 等式) 若 f 是平方可积的, 则

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\|\check{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

5. 若 f 平方可积, 则 $f=\check{\hat{f}}$.

证明

1. 利用分部积分公式可得

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}(D^\alpha f)(x)e^{ix\cdot\xi}dx=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)D^\alpha(e^{-ix\cdot\xi})dx$$
$$=(i\xi)^\alpha\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx=(i\xi)^\alpha\hat{f}(\xi).$$

2. 计算可得

$$\widehat{f*g}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy\right)e^{-ix\cdot\xi}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx\right)g(y)dy$$
$$\xlongequal{z=x-y}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(z)e^{-iz\cdot\xi}dz\right)g(y)e^{-iy\cdot\xi}dy=\int_{\mathbb{R}^n}f(z)e^{-iz\cdot\xi}dz\int_{\mathbb{R}^n}g(y)e^{-iy\cdot\xi}dy$$
$$=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

3. 计算可得

$$i^{|\alpha|}D^\alpha F[f]=i^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)D^\alpha(e^{-ix\cdot\xi})dx=\int_{\mathbb{R}^n}x^\alpha f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx=F[x^\alpha f].$$

4. 我们首先证明: 对任意连续且绝对可积函数 u,v, 总成立

$$\int_{\mathbb{R}^n}u\hat{v}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}vdx.$$

注意到 $\hat{u},\hat{v}$ 均为有界函数, 故上述两个积分都是收敛的. 计算可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}u\hat{v}d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}u(\xi)\left(\int_{\mathbb{R}^n}v(x)e^{-ix\cdot\xi}dx\right)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}v(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi\right)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}vdx.$$

即证. 注意到我们已求过了 $e^{-\varepsilon|x|^2}$ 的 Fourier 变换, 为 $(\frac{\pi}{\varepsilon})^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|\xi|^2}{4\varepsilon}}$, 因此成立恒等式

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}(x)e^{-\varepsilon|x|^2}dx=\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}u(x)e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}dx.$$

准备工作完活, 回到原命题的证明. 定义函数 $g(x)=f(-x)$, 则

$$\hat{g}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(-x)e^{-ix\cdot\xi}dx=\overline{\int_{\mathbb{R}^n}f(-x)e^{ix\cdot\xi}dx}=\overline{\hat{f}(\xi)}.$$

令 $h=f*g$, 则 $\hat{h}=\hat{f}\hat{g}=|\hat{f}|^2$, 因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(x)|^2dx&=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\hat{h}(x)e^{-\varepsilon|x|^2}dx\\&=(2\pi)^n\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}h(x)e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}dx\\&\triangleq(2\pi)^n\lim_{\varepsilon\downarrow 0}I_\varepsilon.\end{aligned}$$

注意到 $\{\frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}:\varepsilon>0\}$ 是一族单位近似[1], 由 h 连续且绝对可积可得 $M=\|h\|_{L^\infty}<+\infty$. 由连续可得任取 $\eta>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|h(x)-h(0)|<\eta,\forall x\in B(0,\delta)$. 因此

$$\begin{aligned}|I_\varepsilon-h(0)|&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}|h(x)-h(0)|e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}dx\\&\leqslant\eta\int_{|x|<\delta}\frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}dx+M\int_{|x|\geqslant\delta}\frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}dx\\&\leqslant\eta+M\int_{|x|\geqslant\delta}\frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}dx.\end{aligned}$$

[1]称 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数族 $\{\varphi_\varepsilon(x):\varepsilon>0\}$ 是一个单位近似, 是指它满足: (i) $\varphi_\varepsilon(x)$ 非负; (ii) $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon dx=1$; (iii) $\forall\delta>0$, $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|\geqslant\delta}\varphi_\varepsilon(x)dx=0$. 请各位自行验证这一函数族确实是单位近似.

由上述即可得

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2=(2\pi)^n\lim_{\varepsilon\downarrow 0}I_\varepsilon=(2\pi)^n h(0)=(2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(-x)dx=(2\pi)^n\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

第二个等式可以类似证明.

5. 首先证明一引理:

$$\int_{\mathbb{R}^n}u\bar{v}dx=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}\bar{\hat{v}}d\xi.$$

应用 Parseval 等式证明之: 对任意 $\alpha\in\mathbb{C}$, 我们有

$$\|u+\alpha v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2=\frac{1}{(2\pi)^n}\|\hat{u}+\widehat{\alpha v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

即有

$$\int_{\mathbb{R}^n}(|u|^2+\bar{u}(\alpha v)+u(\bar{\alpha}\bar{v})+|\alpha v|^2)dx=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(|\hat{u}|^2+\bar{\hat{u}}(\widehat{\alpha v})+\hat{u}(\bar{\alpha}\bar{\hat{v}})+|\widehat{\alpha v}|^2)d\xi.$$

再用一次 Parseval 等式可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\bar{u}(\alpha v)+u(\bar{\alpha}\bar{v})dx=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(\bar{\hat{u}}(\alpha\hat{v})+\hat{u}(\bar{\alpha}\bar{\hat{v}}))d\xi.$$

分别取 $\alpha=1,i$, 则有

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\bar{u}v+u\bar{v})dx=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(\bar{\hat{u}}\hat{v}+\hat{u}\bar{\hat{v}})d\xi.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\bar{u}v-u\bar{v})dx=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(\bar{\hat{u}}\hat{v}-\hat{u}\bar{\hat{v}})d\xi.$$

两式相减即得结论. 另一方面, 类似 4 中过程可以证明:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\check{u}vdx=\int_{\mathbb{R}^n}u\check{v}dx.$$

并且不难验证 $\bar{\check{u}}=\frac{1}{(2\pi)^n}\bar{\hat{u}}$(check it!). 综上所述, 记 $g=\check{\hat{f}}-f$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}|g|^2dx+\int_{\mathbb{R}^n}f\bar{g}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\check{\hat{f}}\bar{g}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}\check{\bar{g}}dx=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}\bar{\hat{g}}dx=\int_{\mathbb{R}^n}f\bar{g}dx.$$

即有 $\int_{\mathbb{R}^n}|g|^2dx=0$, 因此 $g=0\Rightarrow f=\check{\hat{f}}$.

现在我们尝试把 Fourier 变换应用到 PDE 求解里去, 大体上分两步走:

1. 对待求解函数关于空间变量 $x\in\mathbb{R}^n$ 作 Fourier 变换, 得到关于时间变量 t 的一阶 ODE(也有可能是关于 t 和 ξ 的一阶 PDE) 的初值问题.
2. 将 1 中所求得的结果通过 Fourier 逆变换再变回去, 就得到了我们想要的解.

其中 (ii) 中逆变换的求解往往为困难之处.

问题 12.1 利用 Fourier 变换求解 n 维热方程的初值问题:

$$u_t=k\Delta u(x\in\mathbb{R}^n,t>0),\quad u(x,0)=\varphi(x).$$

解 对空间变量 x 作 Fourier 变换, 则

$$\frac{d\hat{u}}{dt}+k|\xi|^2\hat{u}=0,\quad \hat{u}(\xi,0)=\hat{\varphi}(\xi).$$

求解该 ODE 可得

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{\varphi}(\xi)e^{-k|\xi|^2t}.$$

现在我们求 Fourier 逆变换. 注意到我们已求得了 $e^{-k|\xi|^2 t}$ 的 Fourier 逆变换, 为

$$K(x,t)=\frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}.$$

我们称 $K(x,t)$ 为 n 维热核[2]. 所以

$$u(x,t)=F^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)\hat{K}(\xi,t)]=(\varphi*K)(x,t)=\frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)dy.$$

既然谈到了 n 维热核, 我们来做一些有关的计算, 并介绍一些简单的性质.

问题 12.2(19final) 设 $u(x,t)$ 满足 $u_t=9\Delta u(x\in\mathbb{R}^n,t>0)$, $u(x,0)=e^{-9|x|^2}$. 则 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(0,t)=($ $)$.

解 借助 n 维热核可得

$$\begin{aligned}u(0,t)&=\int_{\mathbb{R}^n}K(-y,t)\varphi(y)dy=\frac{1}{(36\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|y|^2}{36t}-9|y|^2}dy\\&=\frac{1}{(36\pi t)^{\frac{n}{2}}}\prod_{k=1}^n\int_{\mathbb{R}}e^{-(\frac{1}{36t}+9)|y_k|^2}dy_k=\frac{1}{(36\pi t)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{1}{36t}+9\right)^{-\frac{n}{2}}\prod_{k=1}^n\int_{\mathbb{R}}e^{-|z_k|^2}dz_k\\&=\left(\frac{1}{1+324t}\right)^{\frac{n}{2}}\to0(t\to+\infty).\end{aligned}$$

问题 12.3(算子半群性质) 设 $K(x,t)$ 为 n 维热核, 定义连续且绝对可积空间上的算子

$$L_x^t[\varphi]=\int_{\mathbb{R}^n}K(x-y,t)\varphi(y)dy,\quad t>0.$$

则对任意 $t,s>0$, 成立 $L_x^tL_x^s=L_x^{t+s}$.

证明 任取连续且绝对可积函数 φ, 则

$$\begin{aligned}L_x^tL_x^s[\varphi]&=L_x^t\left[\int_{\mathbb{R}^n}K(x-y,s)\varphi(y)dy\right]\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}K(z-y,s)\varphi(y)dy\right)K(x-z,t)dz\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}K(x-z-y,s)\varphi(y)dy\right)K(z,t)dz\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}K(x-z-y,s)K(z,t)dz\right)\varphi(y)dy.\end{aligned}$$

现在我们来计算上式括号中的积分.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}K(x-z-y,s)K(z,t)dz&=\frac{1}{(4k\pi s)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{(4k\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left\{-\frac{|x-z-y|^2}{4ks}-\frac{|z|^2}{4kt}\right\}dz\\&=\frac{1}{(4k\pi)^n}\frac{1}{(st)^{\frac{n}{2}}}\prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{-\frac{(x_i-y_i-z_i)^2}{4ks}-\frac{z_i^2}{4kt}\right\}dz_i\\&=\frac{1}{(4k\pi)^n}\frac{1}{(st)^{\frac{n}{2}}}\prod_{i=1}^n e^{-\frac{(x_i-y_i)^2}{4k(s+t)}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{-\frac{t+s}{4kst}\left(z_i+\frac{t(x_i-y_i)}{s+t}\right)^2\right\}dz_i\\&=\frac{1}{(4k\pi)^n}\frac{1}{(st)^{\frac{n}{2}}}\prod_{i=1}^n\exp\left\{-\frac{(x_i-y_i)^2}{4k(s+t)}\right\}\cdot\sqrt{\frac{4kst}{t+s}\pi}\\&=\frac{1}{(4k\pi(t+s))^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4k(t+s)}\right\}=K(x-y,t+s).\end{aligned}$$

[2]学过概率论的同学可以发现一个小彩蛋, 这恰好是 n 元正态分布的联合密度函数.

代回原式即可得

$$L_x^t L_x^s[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} K(s-y, t+s)\varphi(y)dy = L_x^{t+s}[\varphi].$$

因此 $L_x^t L_x^s = L_x^{t+s}$.

笔记 (1) 不难验证对任意连续且绝对可积函数 φ 和 $x \in \mathbb{R}^n$, 都成立 $\lim\limits_{t\downarrow 0} \|L_x^t[\varphi] - \varphi\|_\infty = 0$. 所以该算子族实际构成强连续算子半群 ($C_0$-半群). 算子半群是算子理论的重要组成部分, 高等泛函分析或微分方程 II 会有所涉及.

(2) 本题旨在演示具体积分的计算方法, 大家可以思考如何借助 Fourier 变换更简便地证明这一性质.

问题 12.4(19final) 设 $k > 0$ 与 c 均为常数, 求解下列热方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u + cu + f(x,t), & x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

解 这里我们用 Fourier 变换求解, 本题还可以利用齐次化原理求解, 留作练习. 对 u 关于空间变量 x 作 Fourier 变换, 则

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + (k|\xi|^2 - c)\hat{u} = \hat{f}(\xi,t), \quad \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi).$$

求解该一阶线性方程可得

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-(k|\xi|^2-c)t}\hat{\varphi}(\xi) + \int_0^t \hat{f}(\xi,s)e^{-(k|\xi|^2-c)(t-s)}ds.$$

下面分别求 RHS 中两项的 Fourier 逆变换.

$$F^{-1}[e^{-(k|\xi|^2-c)t}\hat{\varphi}(\xi)] = e^{ct}F^{-1}[\hat{K}(\xi,t)\hat{\varphi}(\xi)] = \frac{e^{ct}}{(4\pi kt)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)dy.$$

$$\begin{aligned} F^{-1}\left[\int_0^t \hat{f}(\xi,s)e^{-(k|\xi|^2-c)(t-s)}ds\right] &= \int_0^t e^{c(t-s)}F^{-1}[\hat{K}(\xi,t-s)\hat{f}(\xi,s)]ds \\ &= \int_0^t \frac{e^{c(t-s)}}{(4\pi k(t-s))^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-s)}}f(y,s)dyds. \end{aligned}$$

所以原初值问题的解为

$$u(x,t) = \frac{e^{ct}}{(4\pi kt)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)dy + \int_0^t \frac{e^{c(t-s)}}{(4\pi k(t-s))^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-s)}}f(y,s)dyds.$$

问题 12.5 利用 Fourier 变换求解初值问题

$$u_t - u_{xx} + xu = 0 (x \in \mathbb{R}, t > 0), \quad u(x,0) = \varphi(x).$$

解 对空间变量 x 作 Fourier 变换, 则

$$\hat{u}_t + \xi^2 u + iu_\xi = 0.$$

这是 $\hat{u}$ 关于 t,ξ 的一阶 PDE. 求解可得

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi - it)e^{-\xi^2 t + i\xi t^2 + \frac{t^3}{3}}.$$

现在我们来求解 $f(\xi) = e^{-\xi^2 t + i\xi t^2 + \frac{t^3}{3}}$ 的 Fourier 逆变换. 计算可得

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 t + i\xi t^2 + \frac{t^3}{3}}e^{i\xi x}d\xi = \frac{e^{\frac{t^3}{3}}}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi^2 t}\cos((t^2+x)\xi)d\xi = \frac{e^{\frac{t^3}{3}}}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(t^2+x)^2}{4t}}.$$

此外, 也有

$$F^{-1}[\hat{\varphi}(\xi - it)] = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi - it)e^{ix\xi}d\xi = \frac{e^{-xt}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi - it)e^{ix(\xi - it)}d\xi = e^{-xt}\varphi(x).$$

这里我们提前用到了复分析中的结论[3]. 所以有

$$u(x,t) = F^{-1}[\hat{\varphi}(\xi - it)e^{-\xi^2 t + i\xi t^2 + \frac{t^3}{3}}] = \frac{e^{\frac{t^3}{3}}}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\exp\left\{-yt - \frac{(t^2 + x - y)^2}{4t}\right\}dy.$$

问题 12.6(较难, 不要求掌握) 证明波动方程的能量均分原理: 考虑初值问题

$$u_{tt} - c^2\Delta u = 0(x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \quad u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x).$$

其中 $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 证明:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 dx.$$

证明 我们要借助 Fourier 变换来证明这一定理, 这里过程的核心就是应用 Fourier 变换的 Parseval 等式. 对 u 关于空间变量 x 作 Fourier 变换, 则有

$$\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} + c^2|\xi|^2\hat{u} = 0, \quad \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi),\ \hat{u}_t(\xi,0) = \hat{\psi}(\xi).$$

由此求解可得

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi)\cos(c|\xi|t) + \frac{\hat{\psi}(\xi)}{c|\xi|}\sin(c|\xi|t).$$

定义能量函数

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx + \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 dx.$$

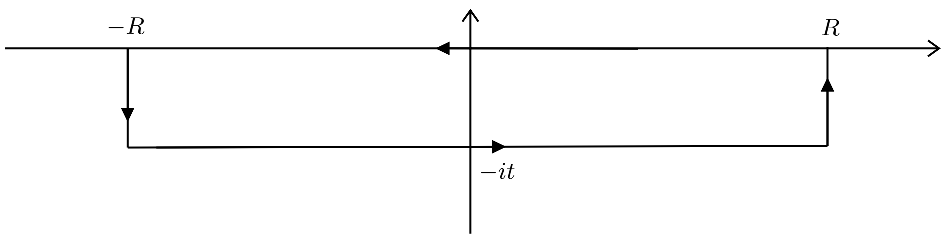
可以验证 $E(t)$ 恒为常数 (check it!). 所以我们只需证明:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} c^2|\nabla u|^2 dx = E(0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(\psi^2 + c^2|\nabla\varphi|^2)dx.$$

注意到 $F[\partial_{x_i}u] = i\xi_i\hat{u}$, 因此

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\xi_i^2|\hat{u}|^2 d\xi.$$

[3]我们来简单解释一下最后一个等式. 对于 $R > 0$, 考虑复平面上如下所示的围道:



考虑全纯函数 $f(z) = \hat{\varphi}(z)e^{ixz}$. 由 Fourier 变换的性质可得当 $|z| \to \infty$ 时 $|\hat{\varphi}(z)| \to 0$(即为 Riemann-Lebesgue 引理). 所以任取 $\varepsilon > 0$, 当 R 充分大时, 对任意 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $|z| \geqslant R$, 都有 $|\hat{\varphi}(z)| < \varepsilon$. 注意到全纯函数在围道上的积分为零, 所以

$$\left|\int_{-R}^{R}\hat{\varphi}(\xi - it)e^{ix(\xi - it)}d\xi - \int_{-R}^{R}\hat{\varphi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi\right| \leqslant 2t\varepsilon.$$

令 $R \to +\infty, \varepsilon \to 0$, 则可得

$$\int_{\mathbb{R}}\hat{\varphi}(\xi - it)e^{ix(\xi - it)}d\xi = \int_{\mathbb{R}}\hat{\varphi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
c^2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx &= \frac{c^2}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2|\hat{u}|^2d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(c^2|\xi|^2|\hat{\varphi}|^2\cos^2(c|\xi|t)+|\hat{\psi}|^2\sin^2(c|\xi|t))d\xi+ \\
&\quad \frac{c}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|\cos(c|\xi|t)\sin(c|\xi|t)(\hat{\varphi}\bar{\hat{\psi}}+\hat{\psi}\bar{\hat{\varphi}})d\xi \\
&\triangleq \frac{1}{(2\pi)^n}I_1+\frac{c}{(2\pi)^n}I_2.
\end{aligned}$$

现在我们对上面两个积分式分别估计. 对任意紧支光滑函数 f, 有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\cos(c|\xi|t)\sin(c|\xi|t)f(\xi)d\xi &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\sin(2c|\xi|t)f(\xi)d\xi = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\sin(2crt)\left(\int_{\partial B(0,r)}fdS\right)dr \\
&= -\frac{1}{4ct}\int_0^{\infty}\frac{d}{dr}(\cos(2crt))\left(\int_{\partial B(0,r)}fdS\right)dr \\
&= \frac{1}{4ct}\int_0^{\infty}\cos(2crt)\frac{d}{dr}\left(\int_{\partial B(0,r)}fdS\right)dr = O\left(\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$

注意到 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑可积函数 $g\triangleq|\xi|(\hat{\varphi}\bar{\hat{\psi}}+\hat{\psi}\bar{\hat{\varphi}})$ 可由一列光滑紧支函数 g_n 在 L^1 范数下逼近 (详细构造见证明后的笔记部分). 而

$$\left|I_2-\int_{\mathbb{R}^n}\cos(c|\xi|t)\sin(c|\xi|t)g_n(\xi)d\xi\right|\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|g(\xi)-g_n(\xi)|d\xi\to 0(n\to\infty).$$

综上可得 $I_2=O(\frac{1}{t})$. 下面我们估计另一个积分. 注意到

$$\cos^2(c|\xi|t)=\frac{1+\cos(2c|\xi|t)}{2},\quad \sin^2(c|\xi|t)=\frac{1-\cos(2c|\xi|t)}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(c^2|\xi|^2|\hat{\varphi}|^2+|\hat{\psi}|^2)d\xi+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(c^2|\xi|^2|\hat{\varphi}|^2\cos(2c|\xi|t)-|\hat{\psi}|^2\cos(2c|\xi|t))d\xi \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(c^2|\xi|^2|\hat{\varphi}|^2+|\hat{\psi}|^2)d\xi+O\left(\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$

再类似前文应用一次 Parseval 不等式, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi|^2dx=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2|\hat{\varphi}|^2d\xi,\quad \int_{\mathbb{R}^n}\psi^2dx=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{\psi}|^2d\xi.$$

综上, 我们终于得到

$$c^2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(c^2|\nabla\varphi|^2+\psi^2)dx+O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Happy!

笔记 这里我给一个构造光滑紧支逼近的方法: 设 f 是光滑可积函数, 考虑光滑函数 ϕ_n, 满足: (1) $0\leqslant\phi_n\leqslant 1$; (2) ϕ_n 在 $B(0,n)$ 上取值恒为 1; (3) ϕ_n 在 $B(0,n+1)$ 以外取值恒为零. 取 $f_n=f\phi_n$, 不难证明 f_n 即为满足要求的紧支光滑函数列. 现在唯一的问题就是: 如何构造 ϕ_n?

考虑 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$h(t)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{t}}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

则 $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. 对于 $0<a<b<+\infty$, 构造函数

$$\phi(x)=\frac{h(b^2-|x|^2)}{h(|x|^2-a^2)+h(b^2-|x|^2)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

则 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且 $0 \leqslant \phi \leqslant 1$. 当 $|x| \leqslant a$ 时, $\phi(x)=1$; 当 $|x| \geqslant b$ 时, $\phi(x)=0$. 取 $a=n, b=n+1$ 即可得 ϕ_n. 我们将这样的光滑紧支函数 ϕ 称为截断函数, 在微分流形中还有大用处. 到 (高等) 实分析中大家会学到: 任一可积函数都可以被紧支光滑函数在 L^1 范数下逼近; 换言之, L^1 范数下 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

12.2.3 热方程的最值原理

课上我们已借助辅助函数证明了热方程的解满足的最值原理. 现在我们从另一角度证明这一结论, 并给出它的一些推广和练习. 本节采用如下记号: 设 $Q_T=\{(x,t): x \in U, 0<t \leqslant T\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, 其中 U 为有界开集. 记它的两个底面和侧面 $\Gamma_T \triangleq \overline{Q}_T \setminus Q_T$, 称为 Q_T 的抛物边界.

若 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ 且 $u_t-k\Delta u \leqslant 0$ 恒成立, 则称 u 是热方程 $u_t-k\Delta u=0$ 的下解. 若不等号方向则对应热方程的上解.

定理 12.6 (下解的弱最大值原理)

设 u 是热方程 $u_t-k\Delta u=0$ 的下解, 则

$$\max_{\overline{Q}_T} u=\max_{\Gamma_T} u.$$

证明 首先我们证明: 若在 Q_T 内恒成立 $u_t-k\Delta u<0$, 则结论成立. 设 u 在 $\overline{Q}_T$ 上的最大值点为 (x_0,t_0). 假设 $(x_0,t_0) \in Q_T$, 则 u 关于 x 的 Hessian 矩阵 D^2u 半负定, 且 $u_t \geqslant 0$(类比课上的过程). 此时 $\Delta u=\operatorname{tr}(D^2u) \leqslant 0$, 从而 (x_0,t_0) 处 $u_t-k\Delta u \geqslant 0$, 矛盾!

若在 Q_T 内仅成立 $u_t-k\Delta u \leqslant 0$, 则任取 $\varepsilon>0$, 令 $v=u-\varepsilon t$, 则在 Q_T 内恒成立

$$v_t-k\Delta v=u_t-k\Delta u-\varepsilon<0.$$

此时 $\max_{\overline{Q}_T} v=\max_{\Gamma_T} v$. 因此

$$\max_{\overline{Q}_T} u-\varepsilon T \leqslant \max_{\overline{Q}_T} v=\max_{\Gamma_T} v \leqslant \max_{\Gamma_T} u \leqslant \max_{\overline{Q}_T} u.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 即可得 $\max_{\overline{Q}_T} u=\max_{\Gamma_T} u$.

注意到任取一上解 v, $-v$ 是热方程的下解, 故上解满足与上述相反的最小值原理. 因此我们得到:

推论 12.3 (热方程的最值原理)

设 u 是热方程 $u_t-k\Delta u=0$ 的经典解, 则

$$\max_{\overline{Q}_T}|u|=\max_{\Gamma_T}|u|.$$

证明 因为 u 既是上解又是下解, 故结论成立.

问题 12.7(19final) 令 $c \leqslant 0$ 为常数, 考虑如下热方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+cu, \quad 0<x<1, t>0 \\ u|_{t=0}=x \\ u|_{x=0}=0, \ u|_{x=1}=1 \end{cases}$$

证明: $0 \leqslant u(x,t) \leqslant 1$ 对所有 $x \in [0,1], t \geqslant 0$ 均成立.

证明 任取 $T > 0$, 我们只需证明: 对所有 $x \in [0,1], 0 \leqslant t \leqslant T$, 均成立 $0 \leqslant u(x,t) \leqslant 1$. 实则只需证明 u 在 $\overline{Q}_T$ 上的最值必在抛物边界上取到.

假设 $\max_{\overline{Q}_T} u > \max_{\Gamma_T} u$, 则当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, $v \triangleq u - \varepsilon t$ 同样满足 $\max_{\overline{Q}_T} v > \max_{\Gamma_T} v$. 设 v 在 $\overline{Q}_T$ 上的最大值点为 $(x_0,t_0) \in Q_T$, 则 $v_{xx}(x_0,t_0) \leqslant 0$ 且 $v_t(x_0,t_0) \geqslant 0$. 注意到 v 满足

$$v_t = u_t - \varepsilon = u_{xx} + cu - \varepsilon = v_{xx} + cv + \varepsilon(ct-1).$$

结合 v 的最大值大于 1 可得

$$0 \leqslant v_t(x_0,t_0) = v_{xx}(x_0,t_0) + cv(x_0,t_0) + \varepsilon(ct_0 - 1) \leqslant \varepsilon(ct_0-1) < 0.$$

矛盾! 因此 $\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$. 类似可以证明 $\min_{\overline{Q}_T} = \min_{\Gamma_T} u$, 留作练习.

笔记 本题也可以构造辅助函数 $v = u \pm \varepsilon x^2$ 来证明, 也留给同学们自己练习.

问题 12.8(19final) 设区域 $D \subset \mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ 有界, 证明:

$$\begin{cases} \Delta u + u^2(1-u) = 0 & \text{in } D \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

的任一解 $u(x)$ 满足 $0 \leqslant u(x) \leqslant 1, x \in D$.

证明 设 $x_1, x_2 \in \overline{D}$ 分别是 u 在 $\overline{D}$ 上的最小值、最大值点.

假设 $u(x_1) < 0$, 由边值条件可得 $x_1 \in D$. 此时 Hessian 矩阵 D^2u 半正定, 因此 $\Delta u(x_1) = \mathrm{tr}(D^2u(x_1)) \geqslant 0$. 但是 $\Delta u(x_1) = u(x_1)^2(u(x_1)-1) < 0$, 矛盾!

假设 $u(x_2) > 1$, 由边值条件可得 $x_2 \in D$. 此时 Hessian 矩阵 D^2u 半负定, 因此 $\Delta u(x_2) = \mathrm{tr}(D^2u(x_2)) \leqslant 0$. 但是 $\Delta u(x_2) = u(x_2)^2(u(x_2)-1) > 0$, 矛盾!

综上可得 $0 \leqslant u(x) \leqslant 1$ 对任意 $x \in \overline{D}$ 都成立.

问题 12.9 考虑一般的线性热方程 $Lu = f(x,t)$, 其中抛物型算子 L 定义为

$$L \triangleq \partial_t - a^2\partial_x^2 + b(x,t)\partial_x + c(x,t).$$

设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ 满足 $Lu \leqslant 0$.

1. 若 $c(x,t) \geqslant 0$, 记 $u^+(x,t) = \max\{(u(x,t),0\}$ 为 u 的正部, 则
$$\max_{\overline{Q}_T} u \leqslant \max_{\Gamma_T} u^+.$$
2. 若 $c(x,t) \geqslant -c_0$, 其中 $c_0 > 0$ 为常数. 若 $\max_{\Gamma_T} u(x,t) \leqslant 0$, 则 $\max_{\overline{Q}_T} u(x,t) \leqslant 0$.

证明

1. 假设 $\max_{\overline{Q}_T} u > \max_{\Gamma_T} u^+$, 则对充分小的 $\varepsilon > 0$, 令 $v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$, 同样有 $\max_{\overline{Q}_T} v > \max_{\Gamma_T} v^+ \geqslant \max_{\Gamma_T} v$. 设 v 在 $\overline{Q}_T$ 上的最大值点为 (x_0,t_0), 则 $(x_0,t_0) \notin \Gamma_T$, 因此 $v_x(x_0,t_0) = 0, v_{xx}(x_0,t_0) \leqslant 0, v_t(x_0,t_0) \geqslant 0$. 但计算可得
$$u_t = v_t + \varepsilon, \quad u_x = v_x, \quad u_{xx} = v_{xx}.$$
因此
$$\begin{aligned} Lu(x_0,t_0) &= v_t(x_0,t_0) + \varepsilon - a^2v_{xx}(x_0,t_0) + b(x_0,t_0)v_x(x_0,t_0) + c(x_0,t_0)(v(x_),t_0) + \varepsilon t_0) \\ &\geqslant \varepsilon + c(x_0,t_0)\varepsilon t_0 > 0. \end{aligned}$$
矛盾! 所以 $\max_{\overline{Q}_T} u \leqslant \max_{\Gamma_T} u^+$.

2. 设 $u = we^{-c_0 t}$, 则

$$0 \geqslant Lu = (w_t - a^2 w_{xx} + b(x,t)w_x + (c(x,t) + c_0)w)e^{c_0 t}.$$

注意到 $c(x,t)+c_0 \geqslant 0$, 由 1 可得 $\max_{\overline{Q}_T} w \leqslant \max_{\Gamma_T} w^+$. 若 $\max_{\Gamma_T} u(x,t) \leqslant 0$, 则 $\max_{\Gamma_T} w^+(x,t) = 0 \Rightarrow \max_{\overline{Q}_T} w(x,t) \leqslant 0$. 因此 $\max_{\overline{Q}_T} u(x,t) \leqslant 0$.

第 13 章 第九次习题课 (by 陈禹汐)

作业 13.1 (46-4)

考虑热方程的初边值问题:

$$u_t = u_{xx}(0 < x < 1, 0 < t < \infty), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 4x(1-x).$$

1. 证明: 对任意 $0 < x < 1$ 和 $t > 0$, $0 < u(x,t) < 1$.
2. 证明: 对任意 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 和 $t \geqslant 0$, $u(x,t) = u(1-x,t)$.
3. 利用能量法证明函数 $\int_0^1 u^2 dx$ 关于 t 严格递减.

证明

1. 由强最大值原理可得 $u(x,t)$ 的最值只能在抛物边界上取得. 在抛物边界上 $u(x,t)_{\max} = 1, u(x,t)_{\min} = 0$, 故有 $0 < u(x,t) < 1, \forall t > 0, 0 < x < 1$, 得证.
2. 由于 $u(x,t)$ 满足 $u_t = u_{xx}$, 则对于 $u(1-x,t)$, 应有
$$\frac{\partial}{\partial t} u(1-x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(1-x,t).$$
对于初边值条件:
$$u(1-x,t)|_{x=0} = u(1,t) = 0, \quad u(1-x,t)|_{x=1} = u(0,t) = 0,$$
$$u(1-x,t)|_{t=0} = u(1-x,0) = 4(1-x)x.$$
因此 $u(1-x,t)$ 也满足原初边值问题, 所以 $u(x,t) = u(1-x,t), \forall t \geqslant 0, 0 \leqslant x \leqslant 1$.
3. 假设 $E(t) = \int_0^1 u^2 dx$, 则
$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx = \int_0^1 2uu_t dx = \int_0^1 2uu_{xx} dx = 2uu_x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 u_x^2 dx = -2\int_0^1 u_x^2 dx \leqslant 0.$$
下证明上述不等式的等号不可能成立: 假设 $\exists t_0$, 使得 $\int_0^1 u_x^2(x,t_0)dx = 0$ 则 $u_x(x,t_0) = 0, \forall x \in [0,1]$, 从而 $u(x,t_0) = u(0,t_0) = 0$, 这与 1 相矛盾! 故 $\frac{dE}{dt} < 0$, 即 $\int_0^1 u^2 dx$ 是关于 t 的严格递减函数.

作业 13.2 (46-7)

1. 若 $u_t - ku_{xx} = f, v_t - kv_{xx} = g$, 其中 $f \leqslant g$ 且在 $x = 0, x = l, t = 0$ 时有 $u \leqslant v$. 证明: 对任意 $0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t < \infty, u \leqslant v$.
2. 已知对任意 $0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 < t < \infty$, 有 $v_t - v_{xx} \geqslant \sin x$, 且 $v(0,t) \geqslant 0, v(\pi,t) \geqslant 0$ 以及 $v(x,0) \geqslant \sin x$, 利用 1 中结论证明 $v(x,t) \geqslant (1-e^{-t})\sin x$.

证明

1. 设 $w = v - u$, 则 w 满足 $w_t - kw_{xx} = g - f \geqslant 0$, $w(x,0) \geqslant 0$, $w(0,t) \geqslant 0$, $w(l,t) \geqslant 0$. 记 $Q = (0,l) \times (0,\infty), \Gamma$ 为抛物边界, 由热方程上解的最小值原理可得
$$\min_{\overline{Q}} w = \min_{\Gamma} w \geqslant 0.$$
所以 $w \geqslant 0, \forall x \in [0,l], t \geqslant 0$, 所以 $u \leqslant v$.

2. 记 $u=(1-e^{-t})\sin x$, 则

$$u_t-u_{xx}=e^{-t}\sin x+(1-e^{-t})\sin x=\sin x,\quad u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad u(x,0)=\sin x.$$

由 1 中结论可得 $v\geqslant u=(1-e^{-t})\sin x$.

作业 13.3 (46-8)

考虑区间 $x\in(0,l)$ 上满足 Robin 边界条件 $u_x(0,t)-a_0u(0,t)=0, u_x(l,t)+a_lu(l,t)=0$ 的热方程. 若 $a_0>0, a_l>0$, 用能量法证明该边界下能量 $\int_0^l u^2dx$ 衰减.

证明 计算可得

$$\frac{d}{dt}\int_0^l u^2dx=\int_0^l 2uu_tdx=2k\int_0^l uu_{xx}dx=2kuu_x\big|_0^1-2k\int_0^l u_x^2dx$$
$$=2k\left(-a_lu^2(l,t)-a_0u^2(0,t)-\int_0^l u_x^2dx\right)\leqslant 0.$$

因此能量 $\int_0^l u^2dx$ 衰减.

作业 13.4 (52-8)

证明对任意固定的 $\delta>0$, 当 $t\to 0$ 时有 $\max\limits_{|x|\geqslant\delta}S(x,t)\to 0$.

证明 对任意 $t>0$, 有

$$\sup_{|x|\geqslant\delta}S(x,t)=\sup_{|x|\geqslant\delta}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{\delta^2}{4kt}}.$$

由此可得

$$\lim_{t\to0^+}\sup_{|x|\geqslant\delta}S(x,t)=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{\delta^2}{4kt}}=0.$$

作业 13.5 (53-9,10)

1. 按照下面的方法求解初值条件 $u(x,0)=x^2$ 下的热方程 $u_t=ku_{xx}$: 首先证明 u_{xxx} 满足热方程的齐次初值问题 (由唯一性可得 u_{xxx} 必为零), 然后积分三次可得 $u(x,t)=A(t)x^2+B(t)x+C(t)$, 求出 A,B,C 即可.
2. 试用热方程初值问题解的一般公式求解 1, 并作变换 $p=\frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$ 来化简积分.
3. 试结合热方程初值问题解的唯一性求积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}p^2e^{-p^2}dp$ 的值.

解

1. 由 $u(x,0)=x^2$ 可得 $u_x(x,0)=2x, u_{xx}(x,0)=2, u_{xxx}(x,0)=0$. 由 $u_t=ku_{xx}$ 可得 $(u_{xxx})_t=k(u_{xxx})_{xx}$, 即 u_{xxx} 满足初值条件 $u_{xxx}(x,0)=\phi(x)\equiv 0$ 的热方程, 由唯一性可得 $u_{xxx}=0$, 对此三次积分可得 $u(x,t)=A(t)x^2+B(t)x+C(t)$. 代回原初值问题可得

$$x^2A'(t)+xB'(t)+C'(t)=2kA(t),\quad A(0)x^2+B(0)x+C(0)=x^2.$$

由此可得

$$A'(t)=B'(t)=0,\ C'(t)=2kA(t);\quad A(0)=1,\ B(0)=C(0)=0.$$

由此可得 $A(t)\equiv 1, B(t)\equiv 0, C(t)=2kt$. 因此 $u(x,t)=x^2+2kt$.

2. 代入公式可得

$$u(x,t)=(S*\varphi)(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\int_{\mathbb{R}}y^2e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}dy.$$

令 $p=\frac{x-y}{\sqrt{4kt}}$, 即有 $y=x-p\sqrt{4kt}$, $dy=\sqrt{4kt}dp$, 代入可得

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}(x-p\sqrt{4kt})^2e^{-p^2}dp.$$

3. 继续 2 中计算可得

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}(x^2-2xp\sqrt{4kt}+4ktp^2)e^{-p^2}dp=x^2+\frac{4kt}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}p^2e^{-p^2}dp.$$

结合 1 中结果可得 $\int_{\mathbb{R}}p^2e^{-p^2}dp=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

作业 13.6 (53-14)

设 $\phi(x)$ 为连续函数, 满足增长条件 $|\phi(x)|\leqslant Ce^{ax^2}$. 试证明热方程在初值条件 $u(x,0)=\phi(x)$ 下的解在 $0<t<\frac{1}{4ak}$ 收敛, 但对更大的 t 则未必.

证明 首先考虑临界情形: 当 $t=\frac{1}{4ak}$ 时, 若 $\phi(x)=Ce^{ax^2}(C>0)$, 则

$$\begin{aligned}\left|u\left(x,\frac{1}{4ak}\right)\right|&=\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-a(x-y)^2}\phi(y)dy=C\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-ax^2+2axy}dy\\&=\frac{C}{2x}\sqrt{\frac{1}{\pi a}}e^{-ax^2}e^{2ay}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=+\infty.\end{aligned}$$

此时积分发散. 当 $t<\frac{1}{4ak}$ 时, 积分中仍含有因子 e^{-ay^2}, 故积分收敛.

作业 13.7 (53-15)

试用能量法证明如下 Neumann 边界下热方程的初值问题解的唯一性:

$$u_t-ku_{xx}=f(x,t)(0<x<l,t>0),\quad u(x,0)=\phi(x),\quad u_x(0,t)=g(t),\ u_x(l,t)=h(t).$$

证明 设 u,v 为题述 Neumann 边界热方程的两个解, 令 $w=u-v$. 则 w 满足

$$\begin{cases}w_t-kw_{xx}=0,\quad 0<x<l,t>0\\ w(x,0)=0\end{cases}$$

考虑能量函数 $E(t)=\int_0^l w^2(x,t)dx$, 则

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}&=2\int_0^l ww_tdx=2k\int_0^l ww_{xx}dx\\&=2k\left(ww_x\big|_0^l-\int_0^l w_x^2dx\right)=-2k\int_0^l w_x^2dx\leqslant 0.\end{aligned}$$

所以 $E(t)$ 关于 t 递减, 进而 $0\leqslant E(t)\leqslant E(0)=0\Rightarrow E(t)\equiv 0\Rightarrow w\equiv 0\Rightarrow u=v$, 所以原问题存在唯一解.

作业 13.8 (54-17)

求解带耗散的热方程:

$$u_t-ku_{xx}+bt^2u=0(x\in\mathbb{R}),\quad u(x,0)=\phi(x),$$

其中 $b>0$ 为常数. (Hint. ODE $w_t+bt^2w=0$ 的解为 $Ce^{-\frac{bt^3}{3}}$, 故可作变换 $u=e^{-\frac{bt^3}{3}}v$, 然后推导

v 满足的方程)

解 作变换 $u(x,t)=e^{-\frac{bt^3}{3}}v(x,t)$, 则有

$$u_t=-bt^2e^{-\frac{bt^3}{3}}v+e^{-\frac{bt^3}{3}}v_t=-bt^2u+e^{-\frac{bt^3}{3}}v_t,\quad u_{xx}=e^{-\frac{bt^3}{3}}v_{xx}.$$

于是原初值问题可化为

$$\begin{cases}v_t-kv_{xx}=0\\ v(x,0)=\phi(x)\end{cases}$$

由此求解可得

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\phi(y)dy\Rightarrow u(x,t)=\frac{e^{-\frac{bt^3}{3}}}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\phi(y)dy.$$

作业 13.9 (61-5)

1. 试用 61-4(请自行阅读) 的方法求解 Robin 边值问题:

$$u_t=ku_{xx}(0<x<\infty,0<t<\infty),\quad u(x,0)=x,\quad u_x(0,t)-hu(0,t)=0.$$

其中 h 为常数.

2. 运用上述方法求解一般初值 $\phi(x)$ 下的解.

解

1. 仿照 61-4 所述方法. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ g(x), & x<0\end{cases}$ 使得 $f'(x)-hf(x)$ 为奇函数, 由此可解出

$$g(x)=x+\frac{2}{h}-\frac{2}{h}e^{hx}.$$

考虑 v 关于 $x\in\mathbb{R}$ 的方程, 使其在 $x>0$ 上与 u 满足相同的初值问题. 则有

$$\begin{cases}v_t=kv_{xx}\\ v(x,0)=f(x)\\ v_x(0,t)-hv(0,t)=0\end{cases}\qquad\begin{cases}(v_x)_t=k(v_x)_{xx}\\ v_x(x,0)=f'(x)\end{cases}$$

记 $w=v_x-hv$, 则 w 满足

$$\begin{cases}w_t=kw_{xx}\\ w(x,0)=f'(x)-hf(x)\end{cases}$$

由此求解可得

$$\begin{aligned}w(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}(f'(y)-hf(y))dy\\&=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}f'(y)dy-\frac{h}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}f(y)dy.\end{aligned}$$

结合 v_x 所满足的初值问题可得

$$v_x=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}f'(y)dy\Rightarrow v=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}f(y)dy.$$

2. 对一般的初值 $\phi(x)$, 设 $f(x)=\begin{cases}\phi(x), & x>0\\ g(x), & x<0\end{cases}$ 使得 $f'(x)-hf(x)$ 为奇函数, 则

$$g'(x)-hg(x)=-\phi'(-x)+h\phi(-x).$$

求解该一阶线性方程, 则有

$$g(x)=e^{hx}\left(C+\int_0^x(-\phi'(-s)+h\phi(-s))e^{-hs}ds\right)\triangleq e^{hx}(C+I).$$

计算积分 I 可得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^x(-\phi'(-s)+h\phi(-s))e^{-hs}ds=\int_0^{-x}(\phi'(s)-h\phi(s))e^{hs}ds\\&=\int_0^x e^{hs}d\phi(s)-h\int_0^{-x}e^{hs}\phi(s)ds=\phi(-x)e^{-hx}-\phi(0)-2h\int_0^{-x}e^{hs}\phi(s)ds.\end{aligned}$$

综上可得

$$g(x)=Ce^{hx}+\phi(-x)-e^{hx}\left(\phi(0)+2h\int_0^{-x}e^{hs}\phi(s)ds\right).$$

由 $g(0)=0$ 可得 $C=0$, 从而确定了 $g(x)$, 进而确定了 $f(x)$ 使得 $f'(x)-hf(x)$ 为奇函数.

考虑 v 关于 $x\in\mathbb{R}$ 的方程, 使其在 $x>0$ 上与 u 满足相同的初值问题. 则有

$$\begin{cases}v_t=kv_{xx}\\ v(x,0)=f(x)\\ v_x(0,t)-hv(0,t)=0\end{cases}\qquad\begin{cases}(v_x)_t=k(v_x)_{xx}\\ v_x(x,0)=f'(x)\end{cases}$$

记 $w=v_x-hv$, 则 w 满足

$$\begin{cases}w_t=kw_{xx}\\ w(x,0)=f'(x)-hf(x)\end{cases}$$

由此求解可得

$$\begin{aligned}w(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}(f'(y)-hf(y))dy\\&=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}f'(y)dy-\frac{h}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}f(y)dy.\end{aligned}$$

结合 v_x 所满足的初值问题可得

$$v_x=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}f'(y)dy\Rightarrow v=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}f(y)dy.$$

作业 13.10 (66-5)

利用反射方法求解半直线问题

$$u_{tt}=4u_{xx}(0<x<\infty),\quad u(0,t)=0,\quad u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=0.$$

并找出解的奇点.

解 设 U 为 u 在 $x\in\mathbb{R}$ 上的奇延拓. $\phi(x)\equiv 1$ 的奇延拓为 $\Phi(x)=\operatorname{sgn}x$, $\psi(x)$ 的奇延拓为零. 由 d'Alembert 公式可得 $U(x,t)=\frac{1}{2}(\Phi(x+2t)+\Phi(x-2t))$. 故可得

$$u(x,t)=U(x,t)|_{x\geqslant 0}=\begin{cases}1, & x>2t\\ 0, & x<2t\end{cases}$$

直线 $x=2t$ 上点均为解的奇点.

作业 13.11 (66-6)

求解半直线问题

$$u_{tt}=c^2u_{xx}(0<x<\infty,0\leqslant t<\infty),\quad u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=V,\quad u_t(0,t)+au_x(0,t)=0.$$

其中 V,a,v 均为正常数, 且 $a>c$.

解 令 $v=u_t(x,t)+au_x(x,t)$, 由于 $u_{tt}=c^2u_{xx}$, 故可得

$$v_{tt}-c^2u_{xx}=(u_{tt})_t+a(u_{tt})_t-c^2[(u_{xx})_t+a(u_{xx})_x]=(u_{tt}-c^2u_{xx})_t+a(u_{tt}-c^2u_{xx})_x=0.$$

由此可得 v 满足

$$\begin{cases}v_{tt}=c^2v_{xx}, & x>0,t>0\\ v(x,0)=V, & v_t(x,0)=0\\ v(0,t)=0\end{cases}$$

利用与上一题相似的奇延拓方法, 可求得

$$v(x,t)=\begin{cases}V, & x>ct\\ 0, & 0<x<ct\end{cases}\Rightarrow u_t+au_x=\begin{cases}V, & x>ct\\ 0, & 0<x<ct\end{cases}$$

这是分段的一阶 PDE, 求解可得

$$u(x,t)=\begin{cases}f(x-at)+Vt, & x>ct\\ g(x-at), & 0<x<ct\end{cases}$$

结合 u 的初值可得 $f=0$. 由于解是连续的, 故直线 $x=ct$ 两侧的取值相同, 则有 $g(ct-at)=Vt\Rightarrow g(s)=\frac{V}{c-a}s$. 综上可得

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{V}{c-a}(x-at), & 0<x<ct\\ Vt, & x\geqslant ct\end{cases}$$

作业 13.12 (71-3)

求解非齐次 Neumann 边界下的半直线热方程:

$$w_t-kw_{xx}=0(0<x<\infty,0<t<\infty),\quad w_x(0,t)=h(t),\ w(x,0)=\phi(x).$$

解 令 $u=w-xh(t)$, 则 u 满足如下齐次 Neumann 边界下的半直线热方程:

$$u_t-ku_{xx}=-xh'(t)(0<x<\infty,0<t<\infty),\quad u_x(0,t)=0,\ u(x,0)=\phi(x)-xh(0).$$

记 $f(x,t)=-xh'(t),\varphi(x)=\phi(x)-xh(0)$. 对 u,f,φ 分别作偶延拓得函数 U,F,Φ, 则可得直线热方程

$$U_t-kU_{xx}=F(x,t)(x\in\mathbb{R},0<t<\infty),\quad U(x,0)=\Phi(x).$$

考虑齐次初值问题

$$z_t-kz_{xx}=0(x\in\mathbb{R},t>\tau>0),\quad z(x,\tau)=F(x,\tau).$$

其解为

$$z(x,t;\tau)=\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-\tau)}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-\tau)}}F(y,\tau)dy.$$

由齐次化原理与叠加原理可得

$$U(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\Phi(y)dy+\int_0^t z(x,t;\tau)d\tau$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\Phi(y)dy+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-\tau)}}F(y,\tau)dyd\tau.$$

所以有

$$u(x,t)=U(x,t)\big|_{x\geqslant 0}=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_0^\infty(e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}+e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}})(\phi(y)-yh(0))dy-$$
$$\int_0^t\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-\tau)}}(e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+y)^2}{4k(t-\tau)}})yh'(\tau)dyd\tau$$

由 $w(x,t)=u(x,t)+xh'(t)$ 即可得原初边值问题的解.

作业 13.13 (79-5)

设 $f(x,t)$ 为一函数, 令 $u(x,t)=\frac{1}{2c}\iint_\triangle f$, 其中 $\triangle$ 为波动方程的决定区域. 直接代入验证:

$$u_{tt}=c^2u_{xx}+f,\quad u(x,0)=u_t(x,0)=0.$$

证明 将二重积分化为

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}f(y,s)dyds.$$

计算可得

$$u_t=\frac{1}{2c}\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}f(y,s)dy\right)ds$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^t(f(x+c(t-s),s)+f(x-c(t-s),s))ds$$
$$u_{tt}=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}(f(x+c(t-s),s)+f(x-c(t-s),s))ds+f(x,t)$$
$$=\frac{c}{2}\int_0^t(f_x(x+c(t-s),s)-f_x(x-c(t-s),s))ds+f(x,t)$$
$$u_x=\frac{1}{2c}\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}f(y,s)dy\right)ds$$
$$=\frac{1}{2c}\int_0^t(f(x+c(t-s),s)-f(x-c(t-s),s))ds$$
$$u_{xx}=\frac{1}{2c}\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}(f(x+c(t-s),s)-f(x-c(t-s),s))ds$$
$$=\frac{1}{2c}\int_0^t(f_x(x+c(t-s),s)-f_x(x-c(t-s),s))ds.$$

由上述即可得 $u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t)$, 且 $u(x,0)=u_t(x,0)=0$.

作业 13.14 (80-14)

在 Neumann 边值条件 $u_x(0,t)=k(t)$ 下, 求解半直线 $x\in(0,\infty)$ 上波动方程的齐次初值问题.

解 令 $v=u-xk(t)$, 则 v 满足初边值问题

$$v_{tt}=c^2v_{xx}-xk''(t)(x>0),\quad v_x(0,t)=0,\quad v(x,0)=-xk(0),\ v_t(x,0)=-xk'(0).$$

记 $f(x,t)=-xk''(t),\phi(x)=-xk(0),\lambda(x)=-xk'(0)$, 对 v,f,ϕ,λ 作偶延拓得到 V,F,Φ,Λ, 则可得直线上的初边值问题

$$V_{tt}=c^2V_{xx}+F(x,t)(x\in\mathbb{R},t>0),\quad V(x,0)=\Phi(x),\ V_t(x,0)=\Lambda(x).$$

考虑齐次初值问题

$$z_{tt}=c^2z_{xx}(x\in\mathbb{R},t>\tau>0),\quad z(x,\tau)=0,\ z_t(x,\tau)=F(x,\tau).$$

其解为

$$z(x,t;\tau)=\frac{1}{2c}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}F(y,\tau)dy.$$

由叠加原理和齐次化原理可得

$$V(x,t)=\frac{1}{2}(\Phi(x-ct)+\Phi(x+ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\Lambda(y)dy+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}F(y,\tau)dyd\tau.$$

由此即可得当 $0\leqslant t\leqslant\frac{x}{c}$ 时, 有

$$v(x,t)=-xk(0)-\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}yk'(0)dy-\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}yk''(\tau)dyd\tau-xk(t).$$

因此此时 $u(x,t)=v(x,t)+xk(t)=0$.

当 $t>\frac{x}{c}$ 时, 有

$$\begin{aligned}v(x,t)&=-ctk(0)-\frac{1}{c}\int_0^{ct-x}yk'(0)dy-\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}yk'(0)dy-\frac{1}{2c}\int_{t-\frac{x}{c}}^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}yk''(\tau)dyd\tau\\&\quad-\frac{1}{2c}\int_0^{t-\frac{x}{c}}\int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)}yk''(\tau)dyd\tau-\frac{1}{c}\int_0^{t-\frac{x}{c}}\int_0^{c(t-\tau)-x}yk''(\tau)dyd\tau\\&=-xk(t)-c\int_0^{t-\frac{x}{c}}k(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

因此此时

$$u(x,t)=v(x,t)+xk(t)=-c\int_0^{t-\frac{x}{c}}k(\tau)d\tau.$$

作业 13.15 (附加 6-1)

证明: 初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=c^2u_{xx}+f(x,t), & x\in\mathbb{R},t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

的解 $u(x,t)$ 在有限时间内在 L^∞-模意义下是稳定的.

♡

证明 求解可得初值问题的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)dy+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(y,\tau)dyd\tau.$$

取定 $T>0$, 令 $D=\mathbb{R}\times[0,T]$, 记 $\mathbb{R}$ 上的最大模范数为 $\|\cdot\|_1$, D 上的最大模范数为 $\|\cdot\|_2$. 则任取 $\varepsilon>0$, 对任意 φ,ψ,f 满足

$$\|\varphi\|_1\leqslant\frac{\varepsilon}{6},\quad\|\psi\|_1\leqslant\frac{\varepsilon}{3T},\quad\|f\|_2\leqslant\frac{2\varepsilon}{3T^2},$$

成立

$$\|u\|_2\leqslant\|\varphi\|_1+t\|\psi\|_1+\|f\|_2\int_0^t(t-\tau)d\tau\leqslant\|\varphi\|_1+T\|\psi\|_1+\frac{T^2}{2}\|f\|_2\leqslant\varepsilon.$$

作业 13.16 (附加 6-2)

设 $\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续有界且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=B$, 证明:

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

的解 $u(x,t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(x,t)=\frac{A+B}{2}$.

证明 热方程初值问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\varphi(y)dy \xlongequal{p=\frac{y-x}{\sqrt{4kt}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-p^2}\varphi(x+\sqrt{4kt}p)dp \\ &=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-p^2}\varphi(x+\sqrt{4kt}p)dp+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-p^2}(x-\sqrt{4kt}p)dp \\ &\triangleq\frac{I_1(x,t)+I_2(x,t)}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

一方面, 我们有

$$\lim_{t\to+\infty}I_1(x,t)=\int_0^{+\infty}e^{-p^2}\lim_{t\to+\infty}\varphi(x+\sqrt{4kt}p)dp=\frac{\sqrt{\pi}}{2}A.$$

另一方面, 有

$$\lim_{t\to+\infty}I_2(x,t)=\int_0^{+\infty}e^{-p^2}\lim_{t\to+\infty}\varphi(x-\sqrt{4kt}p)dp=\frac{\sqrt{\pi}}{2}B.$$

代回即可得 $\lim\limits_{t\to+\infty}=\frac{A+B}{2}$.

作业 13.17 (附加)

证明: 当 $\varphi(x),\psi(x)\in C^4[0,l]$ 时, 且满足相容条件

$$\varphi(0)=\psi(0)=\varphi(l)=\psi(l)=0,\quad \varphi''(0)=\varphi''(l)=0$$

时, 一维波动方程的初边值问题用分离变量法求得的形式解即为其经典解.

证明 一维齐次波动方程的初边值问题

$$u_t=c^2u_{xx}(0<x<l,t>0),\quad u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\quad u|_{x=0}=u|_{x=l}=0.$$

用分离变量法求得它的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\frac{cn\pi}{l}t+D_n\sin\frac{cn\pi}{l}t\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

其中

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds,\quad D_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^l\psi(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds.$$

现在我们来用反射方法求初边值问题的经典解. 注意到初值满足相容条件 $\varphi(0)=\psi(0)=0,\varphi(l)=\psi(l)=0$. 于是可以作奇延拓与周期延拓得到 $2l$ 周期函数 $\Phi(x),\Psi(x)$, 它们在 $[-l,l]$ 上的定义为

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant l\\ -\varphi(-x), & -l\leqslant x<0\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & 0\leqslant x\leqslant l\\ -\psi(-x), & -l\leqslant x<0\end{cases}$$

由此可得原初边值问题的经典解为

$$v(x,t)=\frac{1}{2}(\Phi(x+ct)+\Phi(x-ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\Psi(s)ds,\quad 0\leqslant x\leqslant l.$$

将周期函数 Φ,Ψ 展开为 Fourier 级数可得

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{C}_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad \Psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{D}_n\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

其中

$$\tilde{C}_n=\frac{2}{l}\int_0^l\Phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=C_n.$$

$$\tilde{D}_n=\frac{2}{l}\int_0^l\Psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{cn\pi}{l}D_n.$$

计算可得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\frac{cn\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{cn\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{C}_n\left[\sin\frac{n\pi}{l}(x+ct)+\sin\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi}\tilde{D}_n\left[\cos\frac{n\pi}{l}(x-ct)-\cos\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right]\\&=\frac{1}{2}(\Phi(x+ct)+\Phi(x-ct))+\frac{1}{2c}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{D}_n\int_{x-ct}^{x+ct}\sin\frac{n\pi}{l}sds\\&=\frac{1}{2}(\Phi(x+ct)+\Phi(x-ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{D}_n\sin\frac{n\pi}{l}sds(*)\\&=\frac{1}{2}(\Phi(x+ct)+\Phi(x-ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\Psi(s)ds=v(x,t).\end{aligned}$$

其中 $(*)$ 成立是因为 Fourier 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{D}_n\sin\frac{n\pi}{l}s$ 一致收敛.

笔记 也可以仿照陈祖墀相关章节证明各阶偏导对应的级数一致收敛来证明级数解是经典解.

作业 13.18 (89-3)

量子力学中, 在具有无限深势阱 ($(0,l)$ 外势能为无穷) 的直线上, 粒子的波函数在 $(0,l)$ 上满足带齐次 Dirichlet 边界的 Schrödinger 方程 $u_t=iu_{xx}(0<x<l)$. 用分离变量法求解该初边值问题.

解 初边值问题即为

$$u_t=iu_{xx}(0<x<l,t>0),\quad u(x,0)=\varphi(x),\quad u(0,t)=u(l,t)=0.$$

设驻波解为 $T(t)X(x)$, 代入方程可得

$$T'(t)X(x)=iT(t)X''(x)\Rightarrow\frac{T'(t)}{iT(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}\triangleq-\lambda.$$

其中 λ 为常数. 由此可得 S-L 边值问题

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(0)=X(l)=0.$$

特征值为 $\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2$, 特征函数为 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x(n\geqslant 1)$. 代回分离方程可得

$$T_n'(t)+i\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2T_n(t)=0\Rightarrow T_n(t)=C_ne^{-i(\frac{n\pi}{l})^2t}.$$

因此级数解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-i(\frac{n\pi}{l})^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

要使级数解满足初值条件, 则有

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x)\Rightarrow C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds.$$

综上可得初边值问题的解为

$$u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds\right)e^{-i(\frac{n\pi}{l})^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

作业 13.19 (89-4)

考虑有阻尼介质中的波动方程

$$u_{tt}=c^2u_{xx}-ru_t(0<x<l),\quad u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u(x,0)=\phi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x).$$

其中 $0<r<\frac{2\pi c}{l}$ 为常数. 求解该问题的级数解.

解 设驻波解为 $T(t)X(x)$, 代入方程可得

$$(T''(t)+rT'(t))X(x)=c^2T(t)X''(x)\Rightarrow\frac{T''(t)+rT'(t)}{c^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}\triangleq-\lambda.$$

其中 λ 为常数. 由此可得 S-L 边值问题

$$X(x)''+\lambda X(x)=0,\quad X(0)=X(l)=0.$$

特征值为 $\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2$, 特征函数为 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x(n\geqslant1)$. 代回分离方程可得

$$T_n''(t)+rT_n'(t)+\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2T_n(t)=0\Rightarrow T_n(t)=e^{-\frac{r}{2}t}(C_n\cos\alpha_nt+D_n\sin\alpha_nt).$$

其中 $\alpha_n=\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{2cn\pi}{l})^2-r^2}$. 因此级数解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{r}{2}t}(C_n\cos\alpha_nt+D_n\sin\alpha_nt)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

代入初值条件可得

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x\Rightarrow C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi}{l}sds.$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_nD_n-\frac{r}{2}C_n\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\Rightarrow D_n=\frac{1}{\alpha_nl}\int_0^l(r\varphi(s)+2\psi(s))\sin\frac{n\pi}{l}sds.$$

将 C_n,D_n,α_n 代回级数解即可得初边值问题的解.

作业 13.20 (89-6)

对边值问题 $tu_t=u_{xx}+2u,u(0,t)=u(\pi,t)=0$ 应用分离变量方法, 并由此证明: 在初值条件 $u(x,0)=0$ 下初边值问题存在无穷多个解.

解 设驻波解为 $T(t)X(x)$, 代入方程可得

$$(tT'(t)-2T(t))X(x)=T(t)X''(x)\Rightarrow\frac{tT'(t)-2T(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}\triangleq-\lambda.$$

求解 $X(x)$ 满足的 S-L 边值问题可得 $\lambda_n = n^2, X_n(x) = \sin(nx)(n \geqslant 1)$. 代回分离方程可得

$$tT_n'(t) + (n^2 - 2)T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = \frac{C_n}{t^{n^2-2}}.$$

因此级数解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{t^{n^2-2}} \sin(nx).$$

由于 $t=0$ 时解取有限数, 因此 $C_2 = C_3 = \cdots = 0$, 由此可得 $u(x,t) = Ct\sin(nx)$, 自然满足初值条件 $u(x,0) = 0$. 故初边值问题的解有无穷多个.

作业 13.21 (92-2)

考虑方程 $u_{tt} = c^2 u_{xx}(0 < x < l)$, 满足混合边界条件 $u_x(0,t) = 0, u(l,t) = 0$.

1. 证明特征函数为 $\cos[(n+\frac{1}{2})\pi x/l]$.
2. 求出初边值问题的级数解.

解 设驻波解为 $T(t)X(x)$, 代入方程可得

$$T''(t)X(x) = c^2T(t)X''(x) \Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \triangleq -\lambda.$$

由此可得 S-L 边值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0,\ X(l) = 0.$$

由 S-L 定理可得特征值 $\lambda \geqslant 0$. 若 $\lambda = 0$, 方程通解为 $X(x) = A + Bx$. 代入边值可得 $A = B = 0$, 舍去; 若 $\lambda > 0$, 记 $\omega = \sqrt{\lambda} > 0$, 则方程通解为 $X(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, 代入边值可得

$$\omega B = 0, \quad A\cos\omega l + B\sin\omega l = 0 \Rightarrow B = 0, \quad \omega = \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}(n \geqslant 0).$$

所以特征值为 $\lambda_n = (n+\frac{1}{2})^2\pi^2/l^2$, 特征函数为 $X_n(x) = \cos[(n+\frac{1}{2})\pi x/l]$. 代回分离方程可得

$$T_n''(t) + \left[\frac{c(n+\frac{1}{2})\pi}{l}\right]^2 T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = A_n\cos\left(\frac{c(2n+1)\pi}{2l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{c(2n+1)\pi}{2l}t\right).$$

因此级数解为

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{c(2n+1)\pi}{2l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{c(2n+1)\pi}{2l}t\right)\right]\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right).$$

代入初值可得

$$A_n = \frac{\langle\varphi, X_n\rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}s\right)ds.$$

$$B_n = \frac{2l}{c(2n+1)\pi}\frac{\langle\psi, X_n\rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{4}{c(2n+1)\pi}\int_0^l \psi(s)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}s\right)ds.$$

作业 13.22 (100-6)

在 Robin 问题中取 $a_0 = a_l = a$, 证明:

1. 若 $a \geqslant 0$, 则不存在负特征值; 若 $-\frac{2}{l} < a < 0$, 则恰存在一个负特征值; 若 $a < -\frac{2}{l}$, 则恰存在两个负特征值.
2. 零是特征值当且仅当 $a = 0$ 或 $-\frac{2}{l}$.

证明

1. 若 $a \geqslant 0$, 则边值问题满足 S-L 定理中的常点条件, 故特征值必然非负.
   若 $a < 0$, 设 $\lambda = -\omega^2(\omega > 0)$ 是负特征值, 则通解为 $X(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$. 代入边值可得
$$(a-\omega)A + (a+\omega)B = 0, \quad (\omega + a)e^{\omega l}A + (a-\omega)e^{-\omega l}B = 0.$$
   要使上述方程存在非零解 (A, B), 则有
$$\Delta = \begin{vmatrix} a-\omega & a+\omega \\ (a+\omega)e^{\omega l} & (a-\omega)e^{-\omega l} \end{vmatrix} = (a-\omega)^2 e^{-\omega l} - (a+\omega)^2 e^{\omega l} = 0.$$
   整理可得
$$(a+\omega)e^{\omega l} = \omega - a \quad \text{or} \quad (a+\omega)e^{\omega l} = a - \omega.$$
   对于前者, 令 $f(t) = (a+t)e^{lt} - t + a$, 则
$$f'(t) = e^{lt}(lt + la + 1) - 1, \quad f''(t) = le^{lt}(lt + la + 2).$$
   由此可得 $f'(t)$ 在 $t > 0$ 上递增, 或先递减再递增. 注意到 t 充分大时 $f'(t)$ 为正, 且 $f'(0) = la < 0$. 因此存在 $t_0 > 0$, 使得 $f(t)$ 在 $(0, t_0)$ 上递减, 则 $(t_0, +\infty)$ 上递增. 又因为 $f(0) = 2a < 0$, 且 t 充分大时 f 为正, 故 $f(t)$ 在 $t > 0$ 上有且仅有一个零点, 即对应一个负特征值.
   对于后者, 令 $g(t) = (a+t)e^{lt} + t - a$, 则
$$g'(t) = e^{lt}(lt + la + 1) + 1, \quad g''(t) = le^{lt}(lt + la + 2).$$
   分两种情况讨论: 若 $-\frac{2}{l} < a < 0$, 则
$$g'(0) = la + 2 > 0, \quad g''(t) > g''(0) = l(la + 2).$$
   这说明 $g'(t)$ 在 $t > 0$ 上递增, 从而 $g'(t)$ 恒大于零, 进而 $g(t)$ 在 $t > 0$ 时严格递增. 而 $g(0) = 0$, 故此时 $g(t)$ 在 $t > 0$ 时不存在零点. 所以 $-\frac{2}{l} < a < 0$ 时仅有一个负特征值.
   若 $a < -\frac{2}{l}$, 则 $g'(0) < 0$, 且 $g'(t)$ 在 $0 < t < -a - \frac{2}{l}$ 上递减, 在 $t > -a - \frac{2}{l}$ 上递增. 又因为 t 充分大时 $g'(t)$ 为正, 故存在 $t_1 > 0$ 使得 $g(t)$ 在 $0 < t < t_1$ 内递减, 在 $t > t_1$ 上递增. 而 $g(t)$ 在 t 充分大时为正, 故 $g(t)$ 在 $t > 0$ 上存在唯一零点, 即对应一个负特征值. 容易验证此时的特征值与前面确定的特征值不相同, 故 $a < -\frac{2}{l}$ 时边值问题有两个负特征值.
2. 边值问题存在零特征值等价于存在非零的 $X(x) = A + Bx$ 满足边界条件. 代入可得
$$B - aA = B + a(A + Bl) = 0.$$
   对于 $a = 0, -\frac{2}{l}$, 验证可得分别对应非零特征函数 $X(x) = 1$ 和 $X(x) = l - 2x$. 若 $a \neq 0, -\frac{2}{l}$, 则
$$\Delta = \begin{vmatrix} -a & 1 \\ a & al + 1 \end{vmatrix} = -a(al + 2) \neq 0.$$
   此时必有 $A = B = 0$, 边值问题存在零特征值.

作业 13.23 (102-14)

设 $\lambda > 1$, 求解边值问题 $x^2u'' + 3xu' + \lambda u = 0(1 < x < e), u(1) = u(e) = 0$.

解 令 $t = \ln x$, 则
$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = x\frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dx}{dt}\frac{du}{dx} + x\frac{dx}{dt}\frac{d^2u}{dx^2} = x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx}.$$
因此
$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} + \lambda u = 0.$$

求解可得

$$u=e^{-t}(A\cos(\sqrt{\lambda-1}t)+B\sin(\sqrt{\lambda-1}t))=\frac{A\cos(\sqrt{\lambda-1}\ln x)+B\sin(\sqrt{\lambda-1}\ln x)}{x}.$$

代入边值可得

$$A=0,\quad \frac{B\sin(\sqrt{\lambda-1})}{e}=0\Rightarrow A=0,\quad \lambda_n=1+n^2\pi^2(n\geqslant 1).$$

所以特征值为 $\lambda_n=1+n^2\pi^2$, 特征函数为 $X_n(x)=\sin(n\pi\ln x)/x(n\geqslant 1)$.

问题 13.1(19final) 设 $k>0$ 与 c 均为常数, 求解下列热方程的初值问题

$$\begin{cases}u_t=k\Delta u+cu+f(x,t), & x\in\mathbb{R}^3,\ t>0\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

解 这里我们利用齐次化原理求解. 首先考虑齐次方程

$$\begin{cases}v_t=k\Delta v+cv, & x\in\mathbb{R}^3,\ t>0\\ v(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}^3\end{cases}$$

作变换 $\bar{v}=ve^{-ct}$, 则有 $\bar{v}_t=(v_t-cv)e^{-ct}, \Delta\bar{v}=\Delta v\cdot e^{-ct}$, 因此

$$\bar{v}_t=k\Delta\bar{v},\quad \bar{v}(x,0)=\varphi(x).$$

由此可得

$$v(x,t)=\bar{v}(x,t)e^{ct}=\frac{e^{ct}}{(4k\pi t)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)dy.$$

然后考虑齐次边界下的非齐次方程

$$\begin{cases}w_t=k\Delta w+cw+f(x,t), & x\in\mathbb{R}^3,t>0\\ w(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}^3\end{cases}$$

考虑初值问题

$$z_t=k\Delta z+cz(t>\tau>0),\quad z(x,\tau)=f(x,\tau).$$

类似前者可求得

$$z(x,t;\tau)=\frac{e^{c(t-\tau)}}{(4k\pi(t-\tau))^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-\tau)}}\varphi(y)dy.$$

由齐次化原理即可得

$$w(x,t)=\int_0^t z(x,t;\tau)d\tau=\int_0^t\frac{e^{c(t-\tau)}}{(4k\pi(t-\tau))^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-\tau)}}\varphi(y)dyd\tau.$$

由叠加原理可得原方程的解为

$$u(x,t)=\frac{e^{ct}}{(4k\pi t)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)dy+\int_0^t\frac{e^{c(t-\tau)}}{(4k\pi(t-\tau))^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-\tau)}}\varphi(y)dyd\tau.$$

问题 13.2 求解初边值问题

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+\sin\dfrac{x}{2}, & 0<x<\pi,t>0\\ u(x,0)=\sin\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ u(0,t)=0,\ u_x(\pi,t)=0, & t\geqslant 0\end{cases}$$

解 这是一个混合边值问题, 可以考虑使用 Fourier 展开法来解决这样的边值问题. 考虑对应齐次方程

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ v(x,0) = \sin\dfrac{x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ v(0,t) = 0,\ v_x(\pi,t) = 0, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

令 $v(x,t) = X(x)T(t)$, 则根据方程可得

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \triangleq -\lambda.$$

故 $X(x)$ 满足 $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ 且 $X(0) = X'(\pi) = 0$. 由 S-L 定理可得 $\lambda \geqslant 0$, 求解可得特征值 $\lambda_n = (\frac{2n+1}{2})^2$, 特征函数 $X_n(x) = \sin\frac{2n+1}{2}x$. 由此可设级数解

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)\sin\frac{2n+1}{2}x.$$

则有

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'(t)\sin\frac{2n+1}{2}x, \quad u_{xx} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 g_n(t)\sin\frac{2n+1}{2}x.$$

$$u_t - u_{xx} = \sin\frac{x}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[g_n'(t) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 g_n(t)\right]\sin\frac{2n+1}{2}x = \sin\frac{x}{2}.$$

比对系数可得

$$g_0'(t) + \frac{1}{4}g_0(t) = 1, \quad g_n'(t) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 g_n(t) = 0 (n \geqslant 1).$$

又由于 $u(x,0) = \sin\frac{x}{2}$, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(0)\sin\frac{2n+1}{2}x = \sin\frac{x}{2} \Rightarrow g_0(0) = 1, g_1(0) = g_2(0) = \cdots = 0.$$

由此解得

$$g_0(t) = 4 - 3e^{-\frac{t}{4}}, \quad g_1(t) = g_2(t) = \cdots = 0.$$

故解得

$$u(x,t) = (4 - 3e^{-\frac{t}{4}})\sin\frac{x}{2}.$$

问题 13.3 求解初边值问题

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = At, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

解 首先作变换 $v = u - \frac{At}{l}$ 来将边界齐次化, 得到的 v 满足

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx} - \dfrac{Ax}{l}, & 0 < x < l, t > 0 \\ v(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l \\ v(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

同样对 v 满足的齐次初边值方程利用分离变量法:

$$v(x,t) = T(t)X(x) \Rightarrow \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \triangleq -\lambda.$$

则有 $X''(x)+\lambda X(x)=0$, $X(0)=X(l)=0$. 由 S-L 定理讨论可得特征值 $\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2$, 特征函数 $X_n=\sin\frac{n\pi x}{l}$. 将 $f(x)=-\frac{Ax}{l}$ 以 $\{X_n(x)\}_1^\infty$ 展开, 即 $f(x)=\sum_{n=1}^\infty f_n\sin\frac{n\pi x}{l}$, 其中

$$f_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(s)\sin\frac{n\pi s}{l}ds=\frac{2A}{n\pi}(-1)^n.$$

令 $v=\sum_{n=1}^\infty g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$, 由于 $v_t-v_{xx}=f(x)$, 得到

$$\sum_{n=1}^\infty\left[g_n'(t)+kg_n(t)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^\infty\frac{2A}{n\pi}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

对比系数可得

$$g_n'(t)+kg_n(t)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2=\frac{2A}{n\pi}(-1)^n.$$

结合 v 的初值条件可得 $g_n(0)=0$, 则可解得

$$g_n(t)=\frac{2Al^2(-1)^n}{kn^3\pi^3}(1-e^{-k(\frac{n\pi}{l})^2t}).$$

$$\begin{aligned}u&=v+\frac{At}{l}x=\sum_{n=1}^\infty g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}+\frac{At}{l}x\\&=\frac{At}{l}x+\sum_{n=1}^\infty\frac{2Al^2(-1)^n}{kn^3\pi^3}(1-e^{-k(\frac{n\pi}{l})^2t})\sin\frac{n\pi x}{l}.\end{aligned}$$

第 14 章 第十次习题课 (by 黄天一)

14.1 习题讲解

作业 14.1 (附加 7-1)

令常数 $a>0$，用 Fourier 展开法求解以下定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0<x<l, t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

解 定解问题对应的 S-L 边值问题为

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

特征值为 $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$，特征函数为 $X_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{l}x)(n \geqslant 1)$. 作 Fourier 展开，设

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\frac{n\pi}{l}x), \quad f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(t)\sin(\frac{n\pi}{l}x), \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

其中

$$\tilde{f}_n(t) = \frac{\langle f, X_n\rangle}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx, \quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

代回可得

$$T_n'(t) + (\frac{an\pi}{l})^2 T_n(t) = \tilde{f}_n(t), T_n(0) = A_n.$$

由此求解可得

$$T_n(t) = A_n e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t} + \int_0^t \tilde{f}_n(s) e^{-(\frac{an\pi}{l})^2(t-s)} ds$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t} + \int_0^t \tilde{f}_n(s)e^{-(\frac{an\pi}{l})^2(t-s)}ds)\sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

作业 14.2 (附加 7-2)

找出所有 $\omega \in \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases} u|_{tt} = 4u_{xx} + \sin(\pi x)\sin(\omega t), \quad 0<x<1, t>0 \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

的解 $u(x,t)$ 在 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上有界.

解 利用齐次化原理求解. 设函数 $z(x,t;\tau)$ 满足

$$\begin{cases} z_{tt} = 4z_{xx}, 0 < x < 1, t > \tau \\ u|_{t=\tau} = 0, u_t|_{t=\tau} = \sin(\pi x)\sin(\omega\tau) \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

考虑上述初边值问题的分离解 $T(t-\tau)X(x)$, 则 $\frac{T''(t-\tau)}{4T(t-\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} := -\lambda$. 求解 X 关于 x 的边值问题可得特征值、特征函数为 $\lambda_n = n^2\pi^2, X_n(x) = \sin(n\pi x)$. 代回得

$$T''(t-\tau) + (2n\pi)^2 T_n(t-\tau) = 0 \Rightarrow T_n(t-\tau) = A_n\cos(2n\pi(t-\tau)) + B_n\sin(2n\pi(t-\tau)).$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(n\pi x) = 0, \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi B_n\sin(n\pi x) = \sin(\pi x)\sin(\omega\tau).$$

作 Fourier 展开可得

$$A_n = 0, B_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin(\omega\tau)\sin(\pi x)\sin(n\pi x)dx = \begin{cases} \dfrac{\sin(\omega\tau)}{2\pi}, n = 1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases}$$

由此可得

$$z(x,t;\tau) = \frac{\sin(\omega\tau)}{2\pi}\sin(2\pi(t-\tau))\sin(\pi x).$$

积分可得

$$u(x,t) = \int_0^t z(x,t;\tau)d\tau = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{2\pi}\cdot\dfrac{2\pi\sin(\omega t) - \omega\sin(2\pi t)}{4\pi^2 - \omega^2}, \omega \neq \pm 2\pi \\ \dfrac{\sin(\pi x)}{4\pi}\cdot\dfrac{\sin(2\pi t) - 2\pi t\cos(2\pi t)}{2\pi}, \omega = 2\pi \\ \dfrac{\sin(\pi x)}{4\pi}\cdot\dfrac{2\pi t\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)}{2\pi}, \omega = -2\pi \end{cases}$$

由此可得当 $\omega \neq \pm 2\pi$ 时, $|u(x,t)|$ 有上界 $\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi+|\omega|}{|4\pi^2-\omega^2|}$; 当 $\omega = \pm 2\pi$ 时, $u(x,t)$ 无界.

作业 14.3 (附加 7-3)

求解以下一维波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u|_{tt} = u_{xx} - 2u_x + e^x\sin(\pi x), 0 < x < 1, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

♡

解 齐次问题在齐次边界下对应的 S-L 边值问题为

$$\begin{cases} X''(x) - 2X'(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

求解得特征值、特征函数为

$$\lambda_n = 1 + n^2\pi^2, X_n(x) = e^x\sin(n\pi x).$$

以$X_n : n = 1, 2, ...$ 为正交基作 Fourier 展开可得

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) e^x \sin(n\pi x).$$

代入可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n''(t) + (1 + n^2\pi^2) T_n(t)) e^x \sin(n\pi x) = e^x \sin(n\pi x).$$

结合边界条件可得

$$T_n''(t) + (1 + n^2\pi^2) T_n(t) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases} T_n(0) = T_n'(0) = 0.$$

解得

$$T_1(t) = \frac{1 - \cos\sqrt{1+\pi^2}t}{1+\pi^2}, T_n(t) = 0 (n \geq 2).$$

因此题设问题的解为

$$u(x,t) = \frac{1 - \cos\sqrt{1+\pi^2}t}{1+\pi^2} e^x \sin(\pi x)$$

作业 14.4 (附加 7-4)

求解以下一维热方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u|_{t=0} = x \\ u|_{x=0} = t, u|_{x=1} = 1 - t \end{cases}$$

解 先将边界齐次化处理, 令

$$v(x,t) = u(x,t) - (1 - 2t)x - t.$$

则 v 满足初值问题

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + \sin(\pi x) + 2x - 1, \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ v|_{t=0} = 0 \\ v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

考虑 ODE 的边值问题

$$\begin{cases} F''(x) + \sin(\pi x) + 2x - 1 = 0 \\ F(0) = F(1) = 0 \end{cases}$$

由此求解可得

$$F(x) = -\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}.$$

令 $w = v - F(x)$, 则 w 满足初边值问题

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} \\ w|_{t=0} = -F(x) \\ w|_{x=0} = w|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

设分离解为 $T(t)X(x)$, 代入方程可得

$$T'(t)X(x)=T(t)X''(x)\Rightarrow\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}\triangleq-\lambda$$

由此可得 S-L 边值问题 $X''(x)+\lambda X(x)=0,\ X(0)=X(l)=0$. 特征值为 $\lambda_n=(n\pi)^2$, 特征函数为 $X_n(x)=\sin(n\pi x)(n\geq1)$. 将级数解 $\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$ 代回分离方程, 结合初值可得

$$T_n'(t)+(n\pi)^2T_n(t)=0,T_n(0)=-F_n.$$

其中

$$\begin{aligned}F_n&=\frac{\langle F,X_n\rangle}{\|X_n\|^2}=2\int_0^1(-\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6})\sin(n\pi x)dx\\&=\begin{cases}-\dfrac{1}{\pi^2}, & n=1\\ \dfrac{1}{2k^3\pi^3}, & n=2k\\ 0, & n=2k+1(k\geq1)\end{cases}\end{aligned}$$

求解可得 $T_n(t)=-F_ne^{-(n\pi)^2t}$. 因此

$$\begin{aligned}u(x,t)&=w(x,t)+F(x)+(1-2t)x+t\\&=(1-2t)x+t-\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}(1-e^{-\pi^2t})+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^3\pi^3}e^{-(2k\pi)^2t}\sin(2k\pi x).\end{aligned}$$

作业 14.5 (160-9)

考虑一个内径为 1、外径为 2, 温度均匀分布的厚球壳. 它的内边界温度恒为 100℃, 外边界上成立 $\frac{\partial u}{\partial r}=-\gamma<0$, 其中 γ 为常数.

1. 求出温度函数 (提示: 球壳温度只与半径有关).
2. 确定温度的最大值和最小值.
3. 试确定常数 γ 使得外边界温度恒为 20℃.

解 温度函数 u 满足边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3u=0, & 1<|x|<2\\ u|_{|x|=1}=100, & \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{|x|=2}=-\gamma\end{cases}$$

1. 由于 u 仅与半径有关, 故 $u(x)=v(r),r=|x|$. 计算可得
$$0=\Delta_3u=\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{x_i}{r}v'(r))=\sum_{i=1}^3\left(\frac{r^2-x_i^2}{r^3}v'(r)+\frac{x_i^2}{r^2}v''(r)\right)=v''(r)+\frac{2}{r}v'(r).$$
由边界条件可得 $v(1)=100,v'(2)=-\gamma$, 求解上述 ODE 的初值问题可得
$$u(x)=v(r)=\frac{4\gamma}{r}+100-4\gamma=\frac{4\gamma}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}+100-4\gamma.$$
2. 由 1 可得温度关于 r 严格递减. 所以
$$u_{\max}=v(1)=100,\quad u_{\min}=v(2)=100-2\gamma.$$
3. 由 2 可得 $100-2\gamma=20\Rightarrow\gamma=40$.

作业 14.6 (165-3)

求解正方形 $D = 0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ 内的调和函数，满足边界条件

$$u_y|_{y=0,\pi} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \cos^2 y.$$

解 设驻波解为 $X(x)Y(y)$，代入调和方程可得

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \triangleq \lambda.$$

由此可得 S-L 边值问题

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, Y'(0) = Y'(\pi) = 0.$$

特征值为 $\lambda_n = n^2$，特征函数为 $Y_n(y) = \cos(ny)(n \geq 0)$. 代回分离方程可得

$$X_n''(x) - n^2 X_n(x) = 0 \Rightarrow X_0(x) = A_0 + B_0 x, X_n(x) = A_n \cosh(nx) + B_n \sinh(nx)(n \geqslant 1).$$

因此调和方程的级数解为

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = A_0 + B_0 x + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cosh(nx) + B_n \sinh(nx)) \cos(ny).$$

代入关于 x 的边值可得

$$u(0,y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(ny) = 0 \Rightarrow A_n = 0(n \geqslant 0).$$

$$u(\pi,y) = B_0 \pi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(n\pi)\cos(ny) = \cos^2 y = \frac{1+\cos 2y}{2}.$$

由上述可得

$$A_n = 0(n \geq 0); \quad B_0 = \frac{1}{2\pi}, B_2 = \frac{1}{2\sinh(2\pi)}, \quad B_1 = B_3 = B_4 = \cdots = 0.$$

所以原边值问题的解为

$$u(x,y) = \frac{x}{2\pi} + \frac{\sinh(2x)\cosh(2y)}{2\sinh(2\pi)}.$$

作业 14.7 (172.4)

利用极坐标证明 Poisson 核 $P(r,\theta)$ 是 D 上的调和函数.

证明 $\mathbb{R}^2$ 中的 Poisson 核在极坐标下的表达式为

$$P(r,\theta) = \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos\theta + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) \triangleq 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} P_n(r,\theta).$$

计算可得

$$\begin{aligned}
\Delta P_n &= \frac{\partial^2 P_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P_n}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{n(n-1)}{a^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}\cos n\theta + \frac{n}{ar}(\frac{r}{a})^{n-1}\cos n\theta - \frac{n^2}{r^2}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n\theta \\
&= \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n\theta \left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \frac{n}{r^2} - \frac{n^2}{r^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

由此即可得 $\Delta P = 0$.

作业 14.8 (176-11，附加)

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, 证明: 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} D \\ \left(u + \sigma \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right) |_{\partial D} = g \end{cases}$$

至多有一个解, 其中 $\sigma(x) \geq 0$.

证明 设 u_1, u_2 均为边值问题的解, 令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 满足边值问题

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } D \\ \left(w + \sigma \dfrac{\partial w}{\partial \nu}\right) \Big|_{\partial D} = g \end{cases}$$

构造能量 $E = \int_D |\nabla w|^2 + \int_{\partial D} \sigma \cdot (\frac{\partial w}{\partial \nu})^2 dS \geq 0$, 由 Green 公式可得

$$E = \int_{\partial D} \frac{\partial w}{\partial \nu} \left(w + \sigma \frac{\partial w}{\partial \nu}\right) dS - \int_D w \Delta w dx = 0.$$

所以 $\nabla w \equiv 0 \Rightarrow w$ 为常数, 结合边值条件可得 w 恒为零, 因此 $u_1 \equiv u_2$.

作业 14.9 (177-13)

求解扇环上的边值问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u|_{\theta=\alpha,\beta} = 0, u|_{r=a} = g(\theta), u|_{r=b} = h(\theta) \end{cases}$$

解 我们在极坐标下考虑上述边值问题. 此时化为

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r + \dfrac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & \alpha < \theta < \beta, a < r < b \\ u(r, \alpha) = u(r, \beta) = 0 \\ u(\alpha, \theta) = g(\theta), \quad u(\beta, \theta) = h(\theta) \end{cases}$$

设分离解为 $R(r)\Theta(\theta)$, 代回方程可得

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r} R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r)\Theta''(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} \triangleq \lambda.$$

由此可得 $\Theta(\theta)$ 满足 S-L 边值问题

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \quad \Theta(\alpha) = \Theta(\beta) = 0.$$

求解可得特征值为 $\lambda_n = (\frac{n\pi}{\beta-\alpha})^2$, 特征函数为 $\Theta_n(\theta) = \sin(n\pi\frac{\theta-\alpha}{\theta-\beta})(n \geqslant 1)$. 代回分离方程可得

$$r^2 R_n''(r) + rR_n'(r) - \left(\frac{n\pi}{\beta - \alpha}\right)^2 R_n(r) = 0 \Rightarrow R_n(r) = A_n r^{\frac{n\pi}{\beta-\alpha}} + B_n r^{-\frac{n\pi}{\beta-\alpha}}$$

因此级数解为

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\Theta_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{\frac{n\pi}{\beta-\alpha}} + B_n r^{-\frac{n\pi}{\beta-\alpha}}) \sin\left(n\pi \frac{\theta - \alpha}{\theta - \beta}\right).$$

代入关于 r 的边值条件, 结合 Fourier 展开可得

$$A_n a^{\frac{n\pi}{\beta-\alpha}} + B_n a^{-\frac{n\pi}{\beta-\alpha}} = \frac{\langle g, \Theta_n \rangle}{\|\Theta_n\|^2} = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta g(\theta)\sin\left(n\pi\frac{\theta-\alpha}{\theta-\beta}\right)d\theta \triangleq C_n$$

$$A_n b^{\frac{n\pi}{\beta-\alpha}} + B_n b^{-\frac{n\pi}{\beta-\alpha}} = \frac{\langle h, \Theta_n \rangle}{\|\Theta_n\|^2} = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta h(\theta)\sin\left(n\pi\frac{\theta-\alpha}{\theta-\beta}\right)d\theta \triangleq D_n.$$

由此求解可得

$$A_n = \frac{C_n a^{\frac{n\pi}{\beta-\alpha}} - D_n b^{\frac{n\pi}{\beta-\alpha}}}{a^{\frac{2n\pi}{\beta-\alpha}} - b^{\frac{2n\pi}{\beta-\alpha}}}, \quad B_n = \frac{D_n b^{-\frac{n\pi}{\beta-\alpha}} - C_n a^{-\frac{n\pi}{\beta-\alpha}}}{b^{-\frac{2n\pi}{\beta-\alpha}} - a^{-\frac{2n\pi}{\beta-\alpha}}}.$$

问题 14.1 设 $\{u_k\}$ 是开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 的调和函数列，且 u_k 内闭一致收敛于 $u(x)$，则 $u(x)$ 是 U 内的调和函数.

证明 只需证明 $u(x)$ 在 U 内满足平均值公式. 任取 $x \in U$ 以及 $r > 0$ 使得 $B(x,r) \subset U$, 由题设可得 u_k 在 $\partial B(x,r)$ 内一致收敛于 u. 因此

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} u(y)dy = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} u_k(y)dy = u(x).$$

问题 14.2 求解 $\mathbb{R}^n$ 上的 Bessel 位势方程 $-\Delta u + u = f$, 其中 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

解 对 u 关于空间变量 x 作 Fourier 变换, 可得

$$(1+|\xi|^2)\hat{u} = \hat{f}(\xi) \Rightarrow \hat{u} = \frac{\hat{f}(\xi)}{1+|\xi|^2}.$$

现在只需求 $g(\xi) = \frac{1}{1+|\xi|^2}$ 的 Fourier 变换. 计算可得

$$\begin{aligned}
\check{g}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{ix\cdot\xi}}{1+|\xi|^2}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^\infty e^{-(1+|\xi|^2)t}dt\right)e^{ix\cdot\xi}d\xi \\
&= \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2 t}e^{ix\cdot\xi}d\xi\right)dt = \int_0^\infty e^{-t}F^{-1}[e^{-|\xi|^2 t}]dt \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}dt.
\end{aligned}$$

所以

$$u(x) = F^{-1}[\hat{f}(\xi)g(\xi)] = (f * \check{g})(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}f(y)dydt.$$

问题 14.3 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, 称 $v \in C^2(\overline{U})$ 是次调和函数, 是指在 U 内恒成立 $\Delta v \geqslant 0$.

1. 证明: 对次调和函数 v，成立
$$v(x) \leqslant \frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B(x,r)} v(y)dy, \quad \forall B(x,r) \subset U.$$
2. 证明次调和函数的最大值原理，并在 U 连通时证明强最大值原理.

证明 任取 $x \in U$, 对任意 $r > 0$ 使得 $B(x,r) \subset U$, 定义函数

$$\varphi(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} v(y)dS(y) \xlongequal{z=\frac{y-x}{r}} \frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B(0,1)} v(x+rz)dS(z).$$

于是可得

$$\begin{aligned}\varphi'(r) &= \frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B(0,1)} \nabla v(x+rz)\cdot z dS(z)\\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} \nabla v(y)\cdot z dS(y)\\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{B(x,r)} \Delta v(y) dy \geqslant 0.\end{aligned}$$

因此 $\varphi(r)$ 关于 r 递增, 所以

$$v(x) = \lim_{r\to 0^+}\varphi(r) \leqslant \varphi(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} v(y)dS(y).$$

所以我们得到

$$\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B(x,r)} v(y)dy = \frac{1}{\omega_n r^n}\int_0^r \left(\int_{\partial B(x,\rho)} v(y)dS(y)\right) d\rho \geqslant \frac{1}{r^n}\int_0^r n\rho^{n-1}v(x)d\rho = v(x).$$

最大值原理证明: 假设 $\max\limits_{\overline{U}} v > \max\limits_{\partial U} v$, 考虑函数 $u = v+\varepsilon|x|^2$, 则当 $\varepsilon>0$ 充分小时也成立 $\max\limits_{\overline{U}} u > \max\limits_{\partial U} u$. 设 $x_0\in U$ 是 u 的最大值点, 则 Hessian 矩阵 $D^2u(x_0)$ 半负定, 进而 $\Delta u(x_0) = \mathrm{tr}(D^2u(x_0)) \leqslant 0$. 但 $\Delta u = \Delta v + 2\varepsilon > 0$, 矛盾! 所以最大值原理成立.

强最大值原理证明: 设此时 U 连通. 假设 $x_0\in U$ 是 v 的最大值点, 考虑集合 $A = \{x\in U : v(x) = v(x_0)\}$, 自然有 $A\neq\varnothing$. 由于 U 连通, 若我们能证明 A 又开又闭, 则 $A = U$, 进而 v 恒为常数. A 显然是闭集, 任取 $x\in A$, 设 $r>0$ 使得 $B(x,r)\subset U$. 假设 $y\in B(x,r)$ 使得 $v(y)<v(x_0)$, 则

$$v(x_0) = v(x) \leqslant \frac{1}{\omega_n r_n}\int_{B(x,r)} v(y)dy < \int_{B(x,r)} v(x_0)dy = v(x_0).$$

矛盾!

问题 14.4 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集, $u\in C^\infty(\overline{U})$. 若 U 满足

$$\Delta u = f(x\in U),\quad u|_{\partial U} = g.$$

证明: 存在 $C = C(U,n)>0$, 使得

$$\max_{\overline{U}}|u| \leq C(\max_{\overline{U}}|f| + \max_{\partial U}|g|).$$

证明 很直观的想法是: 如何凑成可以使用最值原理的形式. 设 $M = \max\limits_{\overline{U}}|f|$, 令 $v = u + \frac{M}{2n}|x|^2$, 则 $\Delta v = \Delta u + M \geq 0$, 即 v 是次调和的. 记 $R = \max\limits_{\overline{U}}|x|$, 则在边界 ∂U 上有

$$v \leqslant |u| + \frac{M}{2n}R^2 \leqslant \max_{\partial U}|g| + \frac{M}{2n}R^2.$$

取 $C = \max\{1, \frac{R^2}{n}\} = C(U,n)$, 则由最值原理可得

$$\max_{\overline{U}} u \leqslant \max_{\overline{U}}|v| + \frac{M}{2n}R^2 \leqslant \max_{\partial U}|g| + \frac{R^2}{n}\max_{\overline{U}}|f| \leqslant C(\max_{\overline{U}}|f| + \max_{\partial U}|g|).$$

最小值方向同理可证.

问题 14.5(次调和函数的 Hadamard 三圆定理) 设 $0<r<R<\infty, U = \{x\in\mathbb{R}^2 : r<|x|<R\}$. 设 $u\in C(\overline{U})$ 在 U 上次调和, 记 $M(\rho) = \max\limits_{|x|=\rho} u(x)(r\leqslant\rho\leqslant R)$. 证明: $M(\rho)$ 在 $[r,R]$ 上是 $\log\rho$ 的凸函数, 即

$$M(\rho) \leqslant \frac{\log R - \log\rho}{\log R - \log r}M(r) + \frac{\log\rho - \log r}{\log R - \log r}M(R).$$

证明 考虑函数 $\varphi(\rho)=\alpha+\beta\log\rho(r\leqslant\rho\leqslant R)$, 我们选取 $\varphi(r)=M(r),\varphi(R)=M(R)$, 此时

$$\alpha=\frac{M(r)\log R-M(R)\log r}{\log R-\log r},\beta=\frac{M(r)-M(R)}{\log R-\log r}.$$

此时有

$$\varphi(\rho)=M(\rho)\leqslant\frac{\log R-\log\rho}{\log R-\log r}M(r)+\frac{\log\rho-\log r}{\log R-\log r}M(R).$$

考虑函数 $v(x)=u(x)-\varphi(|x|)$. 下面记 $\rho=|x|$, 计算可得

$$\Delta(\varphi(\rho))=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{\rho}\varphi'(\rho)\right)=\sum_{i=1}^{2}\left[\left(\frac{\rho-\frac{x_i^2}{\rho}}{\rho^2}\right)\varphi'(\rho)+\frac{x_i^2}{\rho^2}\varphi''(\rho)\right]=\varphi''(\rho)+\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}=0$$

因此 $\Delta v=\Delta u\geqslant 0$. 即 v 在 U 上次调和. 注意到在边界 $|x|=r$ 和 $|x|=R$ 上, 成立 $v(x)\leqslant 0$, 由最大值原理可得 $v(x)\leqslant 0$ 恒成立, 于是

$$u(x)\leqslant\varphi(\rho)(\forall|x|=\rho)\Rightarrow M(\rho)\leqslant\frac{\log R-\log\rho}{\log R-\log r}M(r)+\frac{\log\rho-\log r}{\log R-\log r}M(R).$$

问题 14.6 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集. 考虑椭圆型微分算子

$$L\triangleq\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

其中 $A(x)=(a_{ij}(x))_{n\times n}$ 是 $\overline{U}$ 上的一阶连续可微对称正定矩阵函数. 证明: 若 $u\in C^2(U)\cap C(\overline{U})$ 满足 $Lu\geqslant 0$(即 u 是二阶椭圆方程 $Lu=0$ 的上解), 则 $\max\limits_{\overline{U}}u=\max\limits_{\partial U}u$.

证明 假设 $u(x_0)=\max\limits_{\overline{U}}u>\max\limits_{\partial U}u$, 其中 $x_0\in U$. 先改写算子 L 的形式. 设 $P=P(x)\in C^1(\overline{U};\mathbb{R}^{n\times n})$ 为正交矩阵函数, 使得 $PAP^T=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 其中 $\lambda_i=\lambda_i(x)>0$ 是 $A(x)$ 的特征值. 令 $y=x_0+(x-x_0)P$, 则 $x=x_0+(y-x_0)P^T$. 记 $P=(p_{kl})$, 则有

$$\begin{aligned}Lu(x)&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\\&=\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ij}p_{ki}p_{lj}\frac{\partial^2u}{\partial y_k\partial y_l}+\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial u}{\partial y_j}\\&=\sum_{k,l=1}^{n}(PAP^T)_{kl}\frac{\partial^2u}{\partial y_k\partial y_l}+\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial u}{\partial y_j}\\&=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial^2u}{\partial y_k^2}+\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial u}{\partial y_j}.\end{aligned}$$

其中 b_j 为连续函数. 由上述可得我们只需证明待证结论对算子

$$L\triangleq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial}{\partial x_j}$$

成立. 其中 $\lambda_i,b_j\in C(\overline{U})$, 且 λ_i 恒正.

假设 $\max\limits_{\overline{U}}u>\max\limits_{\partial U}u$, 考虑函数 $v=u+\varepsilon e^{Mx_1}$. 计算可得

$$Lv=Lu+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\varepsilon e^{Mx_1})+\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon e^{Mx_1})=Lu+\varepsilon M(M\lambda_1(x)+b_1(x))e^{Mx_1}.$$

由题设可得存在常数 $\lambda_0,b_0>0$ 使得 $\lambda_1(x)\geqslant\lambda_0,|b_1(x)|\leqslant b_0(\forall x\in\overline{U})$, 选取 $M=\frac{b_0}{\lambda_0}>0$, 则存在充分小的 $\varepsilon>0$, 使得 $\max\limits_{\overline{U}}v>\max\limits_{\partial U}v$. 设 $x^0=(x1_1^0,\cdots,x_n^0)\in U$ 是 v 的最大值点, 则 $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x^0)=0,\frac{\partial^2v}{\partial x_i^2}(x^0)\leqslant$

$0, \forall i$. 故

$$0 \geqslant Lv(x^0) = Lu(x^0) + \varepsilon M(M\lambda_1(x^0) + b_1(x^0))e^{Mx_1^0} \geqslant \varepsilon M(M\lambda_0 + b_0)e^{Mx_1^0} > 0.$$

矛盾! 所以 $\max\limits_{\overline{U}} u = \max\limits_{\partial U} u$.

14.2 补充内容

14.2.1 全空间内 Poisson 问题的解

本节我们考虑全空间 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ 内的 Poisson 方程

$$\Delta u = f. \tag{14.1}$$

其中 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. 回忆课上证明过 Laplace 算子 Δ 的旋转不变性, 这启发我们先去研究调和方程 $\Delta u = 0$ 的径向解 $u(x) = v(r)(x \neq 0)$, 其中 $r = |x|$. 计算可得

$$0 = \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}v'(r)\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{r^2 - x_i^2}{r^3}v'(r) + \frac{x_i^2}{r^2}v''(r)\right) = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r).$$

令 $w(r) = v'(r)$, 则 $w'(r) + \frac{n-1}{r}w(r) = 0$. 求解可得 $w(r) = Cr^{1-n}$. 由此可得

$$v(r) = \begin{cases} a + b\ln r, & n = 2 \\ c + \dfrac{d}{r^{n-2}}, & n \geqslant 3 \end{cases}$$

上式中选取合适的常数, 我们定义调和方程的**基本解**为:

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & n = 2 \\ -\dfrac{1}{n(n-2)\omega_n}\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geqslant 3 \end{cases} (x \neq 0)$$

笔记 也可以用 Fourier 变换求解 $\Delta u = \delta(x)$ 来获得上述基本解. 这里我们演示 $n \geqslant 3$ 的情形: 对 u 关于 x 作 Fourier 变换可得

$$|\xi|^2 \hat{u}(\xi) = -1 \Rightarrow \hat{u}(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}.$$

作 Fourier 逆变换可得

$$\begin{aligned} u(x) &= F^{-1}\left[-\frac{1}{|\xi|^2}\right] = -\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^2}d\xi = -\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^\infty e^{-|\xi|^2 t}dt\right)e^{ix\cdot\xi}d\xi \\ &= -\int_0^\infty\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|\xi|^2 t}e^{ix\cdot\xi}d\xi\right)dt = -\int_0^\infty\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}dt \\ &\xlongequal{p=\frac{|x|^2}{4t}} -\int_0^\infty\frac{|x|^2}{4p^2}\left(\frac{p}{\pi|x|^2}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-p}dp = -\frac{1}{4\pi^{\frac{n}{2}}|x|^{n-2}}\int_0^\infty p^{\frac{n}{2}-2}e^{-p}dp \\ &= -\frac{1}{4\pi^{\frac{n}{2}}|x|^{n-2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)(n \geqslant 3). \end{aligned}$$

回忆单位球的体积为

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}.$$

所以

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi^{\frac{n}{2}}|x|^{n-2}} \cdot \frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{n(n-2)\omega_n} = -\frac{1}{n(n-2)\omega_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}.$$

借助 Fourier 变换, 我们可以得到 (14.1) 的形式解为

$$u(x) = (V * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} V(x-y)f(y)dy.$$

下面我们就来证明它确实为经典解.

定理 14.1 (Poisson 方程的经典解)

定义函数 $u = V * f$, 则

1. $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.
2. u 满足 Poisson 方程 (14.1).

证明 对任意 $i = 1, \cdots, n$ 和 $h \neq 0$, 有

$$\begin{aligned}\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} &= \int_{\mathbb{R}^n} V(y)\frac{f(x-y+he_i)-f(x-y)}{h}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} V(x-y)\frac{f(y+he_i)-f(y)}{h}dy\end{aligned}$$

在有界集合 $\operatorname{supp} f$ 上, 有

$$\frac{f(y+he_i)-f(y)}{h} \rightrightarrows f_{x_i}(y), \quad \text{as } h \to 0.$$

因此可得

$$u_{x_i} = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} V(x-y)f_{x_i}(y)dy = (V * f_{x_i})(x).$$

类似也可证明 u 具有任意二阶偏导, 所以 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. 下面我们证明 u 满足 Poisson 方程 (14.1). 任取 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned}\Delta u &= \int_{\mathbb{R}^n} V(y)\Delta_x f(x-y)dy \\ &= \int_{B(0,\varepsilon)} V(y)\Delta_x f(x-y)dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} V(y)\Delta_x f(x-y)dy \\ &\triangleq I_1 + I_2.\end{aligned}$$

分别估计上述积分.

- 由 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ 可得 Δf 有界, 设其界为 $M > 0$, 则 $|I_1| \leqslant M\int_{B(0,\varepsilon)}|V(y)|dy$. 计算可得当 $\varepsilon < 1$ 时,

$$\int_{B(0,\varepsilon)}|V(y)|dy = -\frac{1}{2\pi}\int_{B(0,\varepsilon)}\ln|y|dy = -\int_0^\varepsilon r\ln r dr \leqslant -\varepsilon(r\ln r - r)\Big|_0^\varepsilon = \varepsilon^2\ln\varepsilon (n=2).$$

$$\int_{B(0,\varepsilon)}|V(y)|dy = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\int_{B(0,\varepsilon)}\frac{1}{|y|^{n-2}}dy = \frac{1}{n-2}\int_0^\varepsilon r dr = \frac{\varepsilon^2}{2(n-2)}(n \geqslant 3).$$

  由上述可得 $\varepsilon \to 0^+$ 时,$I_1 \to 0$.

- 由 Green 公式可得

$$I_2 = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} V(y)\frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y)dS(y) - \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)}\nabla V(y)\cdot\nabla_x f(x-y)dy \triangleq J_1 - J_2$$

  依然分别估计这两个积分. 对于 J_1, 设 $|\nabla f|$ 的界为 $N > 0$, 则 $J_1 \leqslant N\int_{\partial B(0,\varepsilon)}|V(y)|dS(y)$. 计算可得当 $\varepsilon < 1$ 时,

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)}|V(y)|dS(y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\ln|y|dS(y) = -\varepsilon\ln\varepsilon (n=2).$$

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)}|V(y)|dS(y)=\frac{1}{n(n-2)\omega_n}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\frac{1}{|y|^{n-2}}dS(y)=\frac{\varepsilon}{n-2}(n\geqslant 3).$$

由上述可得 $\varepsilon\to 0^+$ 时, $J_1\to 0$. 对于 J_2, 我们再用一次 Green 公式:

$$\begin{aligned}J_2&=\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\frac{\partial V}{\partial \nu}(y)f(x-y)dS(y)-\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)}\Delta V(y)f(x-y)dy\\&=\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\frac{\partial V}{\partial \nu}(y)f(x-y)dS(y).\end{aligned}$$

现在估计 $\frac{\partial V}{\partial \nu}=\nabla V\cdot\nu$ 即可. 球面 $\partial B(0,\varepsilon)$ 上, $\nu=-\frac{y}{\varepsilon}$, 因此计算可得

$$\frac{\partial V}{\partial y_i}=\frac{1}{n\omega_n}\frac{y_i}{|y|^n}\Rightarrow\nabla V=\frac{1}{n\omega_n}\frac{y}{|y|^n}\Rightarrow\left.\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_{y\in\partial B(0,\varepsilon)}=-\frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}.$$

由此可得

$$J_2=-\frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}f(x-y)dS(y)=-\frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(x,\varepsilon)}f(y)dS(y)\to -f(x)(\varepsilon\to 0^+).$$

综上可得 $\Delta u=f$, 即证.

14.2.2 调和函数在球域内的 Poisson 公式及其应用

本节我们考虑 $n(n\geqslant 3)$ 球域内的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x\in B(0,R)\\ u|_{\partial B(0,R)}=\varphi(x)\end{cases}\tag{14.2}$$

我们首先推导球域的 Green 函数. 下面记 $x^*=(\frac{R}{|x|})^2x$ 为 $x\in B(0,R)$ 关于球面的对称点. 当 $n=3$ 时, 我们已用物理方法推导过 Green 函数为

$$G(x,y)=-\frac{1}{4\pi|y-x|}+\frac{R}{4\pi|x||y-x^*|}=V(x-y)-V(\frac{|x|}{R}(y-x^*)).$$

由此可作如下断言:

命题 14.1 (Green 函数)

一般 $n(n\geqslant 3)$ 维球域内的 Dirichlet 问题的 Green 函数为

$$G(x,y)=V(x-y)-V(\frac{|x|}{R}(y-x^*)).$$

证明 只需证明 $H(x,y)\triangleq -V(\frac{|x|}{R}(y-x^*))$ 是修正函数. 由于 x^* 落在球外, 故 $\Delta H_y(x,y)=0,\forall y\in B(0,R)$. 当 $y\in\partial B(0,R)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{|x|}{R}(y-x^*)\right|&=\frac{|x|^2}{R^2}(|y|^2-2y\cdot x^*+|x^*|^2)=\frac{|x|^2}{R^2}(R^2-2y\cdot\frac{R^2}{|x|^2}x+\frac{R^4}{|x|^2})\\&=|x|^2-2y\cdot x+R^2=|x-y|^2.\end{aligned}$$

所以此时 $H(x,y)=-V(x-y)$. 即证.

现在可以借助一般 Poisson 公式求出 Dirichlet 问题 14.2 的形式解. 计算可得

$$\frac{\partial V(x-y)}{\partial y_i}=\frac{1}{n\omega_n}\frac{y_i-x_i}{|x-y|^n}.$$

因此

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}=\frac{1}{n\omega n}\frac{y_i-x_i}{|x-y|^n}-\frac{1}{n\omega_n}\frac{|x|}{R}\frac{\frac{|x|}{R}y_i-\frac{R}{|x|}x_i}{\frac{|x|^n}{R^n}|y-x^*|^n}$$
$$=\frac{1}{n\omega_n}\frac{y_i-x_i}{|x-y|^n}-\frac{1}{n\omega_n}\frac{|x|^2R^{n-2}y_i-R^nx_i}{|x|^n|y-x^*|^n}.$$

当 $y\in\partial B(0,R)$ 时, 计算可得

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}=\sum_{i=1}^n\frac{y_i}{R}\frac{\partial G}{\partial y_i}=\frac{1}{n\omega_nR}\frac{R^2-x\cdot y}{|x-y|^n}-\frac{1}{n\omega_nR}\frac{|x|^2-x\cdot y}{\frac{|x|}{R}|(y-x^*)|^n}=\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_nR}\frac{1}{|x-y|^n}.$$

我们往往称上式为球域 $B(0,R)$ 的 **Poisson 核**, 记作 $P(x,y)$. 从而 (14.2) 的解为

$$u(x)=\int_{\partial B(0,R)}\varphi(y)P(x,y)dS(y)=\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_nR}\int_{\partial B(0,R)}\frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}dS(y). \tag{14.3}$$

下面我们严格证明 (14.3) 给出了问题 (14.2) 的解.

定理 14.2

设 $\varphi\in C(\partial B(0,R))$，按 (14.3) 定义函数 u. 则

1. $u\in C^\infty(B(0,R))$.
2. $\Delta u=0$ in $B(0,R)$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in B(0,R)}}u(x)=\varphi(x_0),\forall x_0\in\partial B(0,R)$.

证明

1. 对任意 $x\in B(0,R),y\in\partial B(0,R)$, Poisson 核 $P(x,y)$ 关于 x 有任意阶导数，由此即得 $u\in C^\infty(B(0,R))$, 并且归纳可得
$$D^\alpha u=\int_{\partial B(0,R)}\varphi(y)D_x^\alpha P(x,y)dS(y).$$
2. 不难验证 $P(x,y)$ 关于 x 调和 (check it!)，从而
$$\Delta u=\int_{\partial B(0,R)}\varphi(y)\Delta_xP(x,y)dS(y)=0.$$
3. 首先我们证明：$\int_{\partial B(0,R)}P(x,y)dS(y)=1$. 设 $x=rz$, 其中 $r\geqslant 0,z\in\partial B(0,R)$. 注意到
$$|rz-y|^2=r^2|z|^2-2rz\cdot y+|y|^2=r^2|y|^2-2ry\cdot z+|z|^2=|ry-z|^2.$$
由此即可得 $P(x,y)=P(rz,y)=P(ry,z)$. 由平均值公式可得
$$\int_{\partial B(0,R)}P(x,y)dS(y)=\int_{\partial B(0,R)}P(ry,z)dS(y)=n\omega_nR^{n-1}P(0,z)=1.$$
任取 $\varepsilon>0$, 由 $\varphi\in C(\partial B(0,R))$ 可得 φ 一致连续, 从而存在 $r=r(\varepsilon)>0$, 对任意 $y\in\partial B(0,R)\cap$

$B(x_0,r)$. 有 $|\varphi(y)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$. 设 $M=\max\limits_{\partial B(0,R)}|\varphi|<+\infty$, 当 $|x-x_0|<r/2$ 时，有

$$\begin{aligned}|u(x)-\varphi(x_0)| &= \left|\int_{\partial B(0,R)}(\varphi(y)-\varphi(x_0))P(x,y)dS(y)\right| \\ &\leqslant \int_{\partial B(0,R)\cup B(x_0,r)} P(x,y)|\varphi(y)-\varphi(x_0)|dS(y)+ \\ &\quad \int_{\partial B(0,R)\setminus B(x_0,r)} P(x,y)|\varphi(y)-\varphi(x_0)|dS(y) \\ &< \varepsilon+2M\cdot\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial B(0,R)\setminus B(x_0,r)}\frac{dS(y)}{|x-y|^n} \\ &\leqslant \varepsilon+2M\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R}\cdot\frac{1}{(r/2)^n}\cdot n\omega_n R^{n-1} \\ &= \varepsilon+\frac{2^{n+1}MR^{n-2}(R^2-|x|^2)}{r^n}.\end{aligned}$$

当 $|x-x_0|$ 充分小时，可得 $|u(x)-\varphi(x_0)|<2\varepsilon$. 从而 $u(x)\to\varphi(x_0)(x\to x_0, x\in B(0,R))$.

笔记 留一个与之相仿的问题给同学们自行完成：构造 $\mathbb{R}^n$ 上半平面 $\mathbb{R}^n_+$ 上调和方程 Dirichlet 问题的形式解，并严格证明该解确实是经典解.

作为本节的结尾, 我们给出 Poisson 积分公式的两个应用.

定理 14.3 (奇点可去定理)

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为开集, u 在 $U\setminus\{x_0\}$ 上调和, 且在奇点 x_0 处成立

$$\lim_{x\to x_0}|x-x_0|^{n-2}u(x)=0,\quad n>2.$$

则可以重新定义 u 在 x_0 处的值, 使得 u 在 U 上调和.

证明 不妨设 $x_0=0$, 取定 $B(0,R)\subset U$. 则可以按照 Poisson 积分公式定义 $B(0,R)$ 上的调和函数

$$v(x)=\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial B(0,R)}\frac{u(y)}{|x-y|^n}dS(y).$$

我们只需证明: 对任意 $x\in B(0,R)\setminus\{0\}$, 有 $u(x)=v(x)$. 进而将 $u(0)$ 的值改为 $v(0)$ 即可.

任取 $\varepsilon>0$, 考虑函数 $w(x)=\varepsilon(|x|^{2-n}-R^{2-n})$. 由 $|x|^{n-2}u(x)\to 0$ 可得存在充分小的 $\delta>0$, 在 $\partial B(0,\delta)$ 上有 $|u-v|<w$. 注意到 $w(x)$ 在 $B(0,R)\setminus B(0,\delta)$ 内调和, 且 $w(x)=0$ on $\partial B(0,R)$. 所以

$$\Delta(u-v-w)=0\quad \text{in } B(0,R)\setminus\overline{B(0,\delta)},$$

$$(u-v-w)|_{\partial B(0,R)}=0,\quad (u-v-w)|_{\partial B(0,\delta)}<0.$$

由最大值原理可得 $u-v\leqslant w$ in $B(0,R)\setminus B(0,\delta)$. 类似也可得 $v-u\leqslant w$ in $B(0,R)\setminus B(0,\delta)$. 所以有 $|u-v|\leqslant w$. 令 $\delta\to 0^+$, 即可得 $|u-v|\leqslant w$ in $B(0,R)\setminus\{0\}$. 再令 $\varepsilon\downarrow 0$ 即可得 $u=v$ in $B(0,R)\setminus\{0\}$.

定理 14.4 (Schwarz 反射定理)

设 $U_+\subset\mathbb{R}^n$ 为半球 $\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<R, x_n>0\}$. 设 $u\in C^2(U_+)\cap C(\overline{U}_+)$ 在 U^+ 内调和, 且在 $\partial U_+\cap\{x_n=0\}$ 上取值为零. 定义 $B(0,R)$ 上的函数

$$v(x)=\begin{cases}u(x_1,\cdots,x_n), & x_n\geqslant 0\\ -u(x_1,\cdots,x_{n-1},-x_n), & x_n<0\end{cases}$$

则 $v \in C^2(B(0,R))$ 且在 $B(0,R)$ 内调和.

证明 容易看出 $v \in C(\overline{B(0,R)})$. 由 Poisson 积分公式可得

$$w(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial B(0,R)} \frac{v(y)}{|x-y|^n} dS(y)$$

在 $B(0,R)$ 内调和且在边界 $\partial B(0,R)$ 上满足 $w = v$. 由 v 的定义可得在底面 $\partial U_+ \cap \{x_n = 0\}$ 上有 $w = 0$, 在半球面上有 $w = v = u$. 从而 $w|_{\partial U_+} = u|_{\partial U_+}$. 由最大值原理可得 $w = u$ in $\overline{U}_+$. 于是 v 可改写为

$$v(x) = \begin{cases} w(x_1, \cdots, x_n), & x_n \geqslant 0 - w(x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n), & x_n < 0 \end{cases}$$

和初始条件的区别在于: w 在半球底面上是二阶连续可微的. 由该式可得, 要证 $v \in C^2(B(0,R))$, 只需证明在半球底面处偏导 $v_{x_k x_n}(k = 1, \cdots, n)$ 是连续的. 这是因为

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x_n \to 0^+ \\ x_n \in B(0,R)}} v_{x_k x_n}(x_1, \cdots, x_n) &= w_{x_k x_n}(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) \\
&= \left.\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_n}\right|_{x_n = 0} (-w(x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n)) \\
&= \lim_{\substack{x_n \to 0^- \\ x_n \in B(0,R)}} v_{x_k x_n}(x_1, \cdots, x_n)(k \neq n).
\end{aligned}$$

另一方面, 注意到在底面上有 $w = 0$, 所以 $w_{x_k x_k} = 0(k \neq n)$, 进而结合 w 调和可得 $w_{x_n x_n} = 0$, 由此可得 $w_{x_n x_n}$ 在底面处也连续. 在包含底面的上半球内, $v = w$, 进而调和; 若 $x_n < 0$, 则

$$v_{x_k x_k}(x_1, \cdots, x_n) = -w_{x_k x_k}(x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n) \Rightarrow \Delta v = 0.$$

所以 v 在 $B(0,R)$ 内调和.

14.2.3 Harnack 不等式

设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集. 以下我们采用记号 $V \subset\subset U$, 表示 $V \subset \overline{V} \subset U$ 且 $\overline{V}$ 是紧集.

定理 14.5 (Harnack 不等式)

设 $V \subset\subset U$ 连通, 则存在常数 $C = C(n, V, U)$, 对 U 上的任一非负调和函数 u, 成立

$$\sup_V u \leqslant C \inf_V u.$$

笔记 (1) 这个不等式说明非负调和函数的变化总是 "温和" 的: 它具有较小的 "贫富" 差距. (2) Harnack 不等式也可以写作: $u(x) \leqslant Cu(y), \forall x, y \in V$.

证明 令 $r = \frac{1}{2}d(V, \partial U)$(若 $U = \mathbb{R}^n$, 取 $r = 1$ 即可), 任取 $x, y \in U$ 使得 $|x - y| < r$, 有

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n (2r)^n}\int_{B(x,2r)} u(z)dz \geqslant \frac{1}{2^n}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B(y,r)} u(z)dz = \frac{1}{2^n}u(y).$$

由于 V 预紧且连通, 故存在有限个开球 $B(\xi_k, \frac{r}{2})(1 \leqslant k \leqslant N)$ 成为 V 的开覆盖, 且存在 $\eta_k \in B(\xi_k, \frac{r}{2}) \cap B(\xi_{k+1}, \frac{r}{2})$. 任取 $x, y \in V$, 不妨设 $x \in B(\xi_k, \frac{r}{2}), y \in B(\xi_{k+s}, \frac{r}{2})(1 \leqslant s \leqslant N - k)$, 则

$$u(x) \geqslant \frac{1}{2^n}u(\eta_k) \geqslant \frac{1}{2^{2n}}u(\eta_{k+1}) \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{2^{(s+2)n}}u(y) \geqslant \frac{1}{2^{n(N+1)}}u(y).$$

推论 14.1

设 u_n 是 U 内的单调递增调和函数列, 且存在 $x \in U$ 使得 $\{u_n(x)\}$ 有界, 则 u_n 在 U 上内闭一致收敛于一个调和函数. ♡

证明 任取 $V \subset\subset U$, 考虑更大的 $W \subset\subset U$, 使得 $x \in W$ 且 $V \subset W$. 任取 $m > n$, 则 $u_m - u_n$ 是 U 上的非负调和函数. 应用 Harnack 不等式可得存在 $C = C(n, W, U) > 0$, 使得

$$\sup_V (u_m - u_n) \leqslant \sup_W (u_m - u_n) \leqslant V \inf_W (u_m - u_n) \leqslant C(u_m(x) - u_n(x)).$$

由 $\{u_n(x)\}$ 有界且递增即可得 $\{u_n\}$ 在 U 上内闭一致收敛, 由问题 14.1 可得极限为调和函数.

下面我们给一个 Harnack 不等式的显式形式.

命题 14.2

设 $r > 0$, $u \in C(\overline{B(0,r)})$ 是 $B(0,r)$ 上的正调和函数. 则

$$r^{n-2}\frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}}u(0) \leqslant u(x) \leqslant r^{n-2}\frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}}u(0).$$

♠

证明 由 Poisson 积分公式可得

$$u(x) = \frac{r^2-|x|^2}{n\omega_n r}\int_{\partial B(0,r)} \frac{u(y)}{|x-y|^n} dS(y).$$

一方面有

$$u(x) \leqslant \frac{r^2-|x|^2}{r}\frac{1}{(r-|x|)^n}\frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B(0,r)} u(y)dS(y) = r^{n-2}\frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}}u(0).$$

另一方面有

$$u(x) \geqslant \frac{r^2-|x|^2}{r}\frac{1}{(r+|x|)^n}\frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B(0,r)} u(y)dS(y) = r^{n-2}\frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}}u(0).$$

问题 14.7(博资考试题) 令 $B(0,r)$ 是 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 3)$ 中以原点为中心, 半径为 $r > 0$ 的球. 设非线性方程 $-\Delta u + f(u,x) = 0$ 在 $B(0,2r)$ 内有非负解 $u(x)$, 其中函数 $f \leqslant 0$ 连续. 证明: 若 u 在 $B(0,r)$ 内不恒为零, 则在闭球 $\overline{B(0,r)}$ 内恒成立 $u > 0$.

证明 由题设可得 $\Delta u \leqslant 0$, 则可以证明

$$u(x) \geqslant \frac{1}{\omega_n \rho^n}\int_{B(x,\rho)} u(y)dy, \quad \forall B(x,\rho) \subset B(0,2r).$$

(类似此前次调和函数平均值公式的证明过程即可). 于是 u 也同样满足 Harnack 不等式 (check it!). 由 u 在 $B(0,r)$ 内不恒为零可得

$$0 < \sup_{\overline{B(0,r)}} u \leqslant C \inf_{\overline{B(0,r)}} u \Rightarrow \inf_{\overline{B(0,r)}} u > 0.$$

所以在 $B(0,r)$ 内恒成立 $u > 0$.

14.2.4 Hopf 最大值原理

从物理的角度看, 当热力系统 U 的温度稳定 (即 $u_t = 0$) 时, 温度分布满足调和方程 $\Delta u = 0$. 根据最值原理可得, u 在边界 ∂U 上取最大最小值. 在最小值点处, 热量经由此处从 U 内流到 U 外, 即有 $\frac{\partial u}{\partial \nu} \leqslant 0$; 最大值点处, 热量经由此处从 U 外流到 U 内, 即有 $\frac{\partial u}{\partial \nu} \geqslant 0$. 这在数学上即为重要的 Hopf 最值原理. 本节我们来讨论次调和函数的 Hopf 最大值原理.

引理 14.1 (Hopf 引理)

设 $u \in C(\overline{B(0,R)})$ 在 $B(0,R)$ 内次调和, 且 $x_0 \in \partial B(0,R)$ 满足 $u(x) < u(x_0), \forall x \in B(0,R)$. 则成立严格的不等号

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

笔记 由定理条件可得 $u(x_0) > u(x), \forall x \in B(0,R)$; $u(x_0) \geqslant u(x), \forall x \in \partial B(0,R)$. 所以 u 在 x_0 处取得最大值, 进而 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geqslant 0$. 但定理的结论是严格的大于号, 这便是不平凡之处.

证明 考虑函数 $f(x) = e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha R^2}$, 其中 $\alpha > 0$ 为待定常数. 计算可得

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(-2\alpha x_i e^{-\alpha|x|^2}) = -2\alpha \sum_{i=1}^{n}(e^{-\alpha|x|^2} - 2\alpha x_i^2 e^{-\alpha|x|^2}) = e^{-\alpha|x|^2}(4\alpha^2|x|^2 - 2\alpha n).$$

当 α 充分大时, 对任意 $|x| \geqslant \frac{R}{2}$, $\Delta f > 0$. 任取 $\varepsilon > 0$, 考虑函数 $v(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon f(x)$, 则

$$\Delta v \geqslant 0 \quad \text{in } U \triangleq B(0,R) \setminus \overline{B\left(0, \frac{R}{2}\right)}.$$

在 $\partial B(0,R)$ 上, 有 $v \leqslant 0$ 且 $v(x_0) = 0$. 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 在边界 $\partial B(0, \frac{R}{2})$ 上恒有 $v < 0$. 由弱最大值原理可得 w 在 x_0 处取得最大值, 从而 $\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) \geqslant 0$, 以及

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geqslant -\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) = 2\alpha R \varepsilon e^{-\alpha R^2} > 0.$$

下面我们尝试把上述结论从球域推广到更一般的区域 $U \subset \mathbb{R}^n$. 实际上, 我们需要对区域作一定的要求, 亦即如下内部球条件.

定义 14.1 (内部球条件)

设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 称 U 在 $x_0 \in \partial U$ 处满足内部球条件 (inner sphere condition, ISC), 是指存在球 $B \subset U$, 使得 $x_0 \in \overline{B} \cap \partial U$. 若 U 在 ∂U 处任一点都满足内部球条件, 则称 U 满足内部球条件.

上述内部球条件是一个相当抽象的几何定义, 下面我们让大家对该定义有一个更直观的的感受, 即讨论具有 $C^i(i=1,2)$ 边界的区域是否满足内部球条件.

命题 14.3

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 具有 C^2 边界, 则 U 满足内部球条件.

证明 任取 $y \in \partial U$, 不妨设 $y = 0$(可以平移坐标系). 由 ∂U 是 C^2 边界可得: 存在 $\rho > 0$ 和 C^2 函数 γ 满足 $\gamma(0) = 0, \nabla\gamma(0) = \vec{0}$, 使得

$$U \cap B_\rho(0) = \{x \in B_\rho(0) : x_n > \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1})\}.$$

记 $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$, 由 Taylor 展开可以证明 $|\gamma(x')| \leqslant M|x'|^2$, 其中 $M > 0$ 为常数. 对某个 $0 < r < \frac{\rho}{2}$. 令 $x_0 = (0, \cdots, 0, r)$, 假设 $x \in B(x_0, r) \setminus U$, 则有

$$|x'|^2 + (x_n - r)^2 < r^2 \Rightarrow |x'|^2 + x_n^2 - 2rx_n < 0.$$

从而有

$$x_n < \gamma(x') \leqslant M|x'|^2 < M(2rx_n - x_n^2) \leqslant 2Mrx_n.$$

只要选取 $r < \frac{1}{2M}$, 必有 $B(x_0, r) \subset U$. 同时自然有 $0 \in \partial B(x_0, r) \cap \partial U$.

笔记 仅具有 C^1 边界的区域未必满足内部球条件. 可以考虑反例: $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y>|x|^{\frac{3}{2}}\}$, 它在 $(0,0)$ 处不满足内部球条件.

定理 14.6 (Hopf 最大值原理)

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为开集, $u\in C(\overline{U})$ 在 U 内次调和. 若

1. U 在 x_0 处满足内部球条件.
2. 对任意 $x\in U$, 成立 $u(x)<u(x_0)$.

则只要 u 在 x_0 处沿 ν 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ 存在, 必成立 $\frac{\partial u}{\partial \nu}>0$.

证明 考虑球 $B(x_1,r)\subset U$, 使得 $x_0\in\overline{B(x_1,r)}\cap\partial U$. 则 $u\in C(\overline{B(x_1,r)})$ 在 $B(x_1,r)$ 内次调和, 且 $u(x)<u(x_0), \forall x\in B(x_1,r)$. 由 Hopf 引理可得 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)>0$.

下面我们利用 Hopf 最大值原理给出一些经典命题的新证明.

问题 14.8 试用 Hopf 引理证明次调和函数的强最大值原理.

证明 设 U 为有界连通开集, $u\in C(\overline{U})\cap C^2(U)$ 为 U 内的次调和函数. 设 u 在 $x_0\in U$ 处取得最大值, 考虑集合 $A=\{x\in U: u(x)<u(x_0)\}$. 假设 u 不恒为常数, 则 A 为非空开集. 任取 $x\in A$, 考虑 $R=\sup\{r>0: B(x,r)\subset A\}$, 不难证明 $B=B(x,R)\subset A$, 且 ∂B 与 $U\setminus A$ 有交 (check it!). 选取 $y\in\partial B\cap(U\setminus A)$, 则 $u(y)=M$, 从而 $\forall z\in B, u(z)<u(y)=M$. 由 Hopf 引理可得 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)>0$. 但是 u 在内点 y 处取得最大值 M, 故 $\nabla u(y)=0$, 矛盾!

问题 14.9 证明: 若连通区域 $U\subset\mathbb{R}^n$ 满足内部球条件, 则 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=f, & x\in U\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}=g, & x\in\partial U\end{cases}$$

的解在相差一个常数的意义下唯一.

证明 设 u_1,u_2 均为边值问题的解, 令 $w=u_1-u_2$, 则

$$\begin{cases}\Delta w=0, & x\in U\\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu}=0, & x\in\partial U\end{cases}$$

假设 w 不是常数, 则由强最大值原理可得存在 $x_0\in\partial U$, 使得 $w(x)<w(x_0), \forall x\in U$. 由 Hopf 最大值原理可得 $\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0)>0$, 矛盾!

14.2.5 调和函数的光滑性

本节我们来证明调和函数的一个重要性质: 光滑性, 并借此机会展示磨光的手法. 首先我们来介绍一个相当重要的工具: **磨光核** (mollifier). 以下我们采用记号 $U_\varepsilon=\{x\in U: d(x,\partial U)>\varepsilon\}$.

定义 14.2 (磨光核)

考虑函数 $\eta\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 定义为

$$\eta(x)=\begin{cases}C\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right), & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

其中常数 $C>0$ 使得 $\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x)dx=1$. 定义磨光核 $\{\eta_\varepsilon:\varepsilon>0\}$ 为 $\eta_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$.

笔记 (1) 注意到磨光核实际只与径向 $r=|x|$ 有关, 有时我也记 η 为一元函数 $\eta(r)(r\geqslant 0)$. (2) 磨光核中 $\eta_\varepsilon\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\varepsilon(x)dx=1,\quad \operatorname{supp}(\eta_\varepsilon)\subset B(0,\varepsilon).$$

不难验证 $\{\eta_\varepsilon\}$ 是一个单位近似.

借助磨光核, 我们定义连续函数[1] $f\in C(U)$ 的磨光 (mollification) 为

$$f^\varepsilon=\eta_\varepsilon*f=\int_U\eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy.$$

命题 14.4

设 $f\in C(U)$, f^ε 为其磨光, 则

1. $f^\varepsilon\in C^\infty(U_\varepsilon)$.
2. f^ε 在 U 上内闭一致收敛于 f[a]

[a] 即对任意 $V\subset\subset U$, f^ε 在 V 上一致收敛于 f.

证明

1. 对任一 $i=1,\cdots,n$, 选取 $h\ll 1$ 使得 $x+he_i\in U_\varepsilon$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{f^\varepsilon(x+he_i)-f^\varepsilon(x)}{h}&=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_U\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]f(y)dy\\&=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_V\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]f(y)dy.\end{aligned}$$

其中 V 为 U 的某个有界开子集. 在有界集合 V 上, 有

$$\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]\rightrightarrows\frac{1}{\varepsilon}\eta_{x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right).$$

因此令 $h\to 0$, 可得

$$f^\varepsilon_{x_i}(x)=\int_U\eta_{\varepsilon,x_i}(x-y)f(y)dy.$$

结合 η 的光滑性, 可类似归纳证明 f^ε 的各阶导数均存在, 并且

$$D^\alpha f^\varepsilon(x)=\int_U D^\alpha\eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy.$$

2. 任取 $V\subset\subset U$, 则 f 在 V 上一致连续. 所以成立一致极限

$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|dy=0.$$

进而可得

$$|f^\varepsilon(x)-f(x)|\leqslant\int_{B(x,\varepsilon)}\eta_\varepsilon(x-y)|f(y)-f(x)|dy\leqslant\frac{C}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)}|f(y)-f(x)|dy.$$

由此即证.

笔记 正如名字所说, 借助磨光我们构造了连续函数 f 的一个光滑函数逼近, 并且该逼近是内闭一致收敛的.

现在我们用磨光核证明调和函数的光滑性.

[1] 囿于同学们的知识所限, 我们总对连续函数磨光. 实际可以对任意局部可积函数磨光.

定理 14.7 (调和函数的光滑性)

若 u 在 U 内调和, 则 $u \in C^\infty(U)$.

证明 考虑 u 的磨光 $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$. 则任取 $x \in U_\varepsilon$, 有

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)u(y)dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\int_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y)\right)dr = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)n\omega_n r^{n-1}\cdot u(x)dr \\ &= u(x)\int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\int_{\partial B(x,r)} dS\right)dr = u(x)\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)dy = u(x). \end{aligned}$$

所以 $u \equiv u^\varepsilon$ in U_ε. 由 ε 的任意性即可得 $u \in C^\infty(U)$.

14.2.6 调和函数的梯度估计及其应用

本节介绍 PDE 里的一个重要手法: 梯度估计. 这里我们演示调和函数的估计手法, 并借此证明极其优美的 Liouville 定理, 以及调和函数的解析性.

引理 14.2 (一阶梯度估计)

设 $u \in C(\overline{B(x_0,R)})$ 在 $B(x_0,R)$ 内调和.

1. 对任意 $i = 1,\cdots,n$, 成立
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{n}{R}\max_{B(x_0,R)}|u|.$$
2. 若 u 非负, 则成立
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{n}{R}u(x_0).$$

证明

1. 容易验证对任意 i, u_{x_i} 在 $B(x_0,R)$ 内调和. 因此
$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x_0)| &= \left|\frac{1}{\omega_n R^n}\int_{B(x_0,R)}\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)dy\right| = \frac{1}{\omega_n R^n}\left|\int_{\partial B(x_0,R)} u\nu^i dS\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\omega_n R^n}\int_{\partial B(x_0,R)}\max_{B(x_0,R)}|u|dS = \frac{n}{R}\max_{B(x_0,R)}|u|. \end{aligned}$$
2. 此时可得
$$|u_{x_i}(x_0)| = \frac{1}{\omega_n R^n}\left|\int_{\partial B(x_0,R)} u\nu^i dS\right| \leqslant \frac{1}{\omega_n R^n}\int_{\partial B(x_0,R)} udS = \frac{n}{R}u(x_0).$$

定理 14.8 (Liouville 定理)

$\mathbb{R}^n$ 上的有上 (下) 界调和函数必为常数.

证明 只证明有上界情况. 设 u 在 $\mathbb{R}^n$ 上调和且 $u(x) \leqslant M$, 令 $v(x) = M - u(x)$, 则 v 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负调和函数. 任取 $x \in \mathbb{R}^n$, 以及 $R > 0$, 由一阶梯度估计可得

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant \frac{n}{R}v(x), \quad i = 1,\cdots,n.$$

令 $R\to+\infty$ 即可得 $v_{x_i}(x)=0$, 由 i 和 x 的任意性即可得 v 为常数, 进而 u 为常数.

笔记 同学们还可以用此前给出的显式 Harnack 不等式来证明该定理. 此后复分析课程会讲授全纯函数版本的 Liouville 定理.

推论 14.2

若 $f\in C_c^2(\mathbb{R}^n)(n\geqslant 3)$, 则方程 $\Delta u=f(x)(x\in\mathbb{R}^n)$ 的任何有界解都具有形式
$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}V(x-y)f(y)dy+C.$$

证明 当 $n\geqslant 3$ 时, $V(x-y)=-\frac{1}{n(n-2)\omega_n}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}$, 故有 $\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x-y)=0$. 结合 $f\in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ 可得
$$\lim_{|x|\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}V(x-y)f(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{|x|\to\infty}V(x-y)f(y)dy=0.$$
因此给出的解确实是 Poisson 方程的有界解. 假设 u,v 均为方程的有界解, 则 $u-v$ 是全空间上的有界调和函数, 由 Liouville 定理可得 $u-v$ 为常数, 即证.

稍稍跑一会题. 刚才我们已证明了调和函数的 Liouville 定理, 若将调和削弱为次调和, 是否还能有类似的结论? 事实上, 在 $\mathbb{R}^2$ 上, 我们有

命题 14.5

$\mathbb{R}^2$ 上的有上界次调和函数必为常数.

证明 设 u 在 $\mathbb{R}^2$ 上次调和且有上界 A. 任取 $x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, 再任取 $0<r<|x|<R<\infty$, 由次调和函数的 Hadamard 三圆定理可得
$$u(x)\leqslant\frac{\log R-\log|x|}{\log R-\log r}M(r)+\frac{\log|x|-\log r}{\log R-\log r}M(R).$$
其中 $M(a)\triangleq\max_{|y|=a}u(y)\leqslant A,\forall a>0$. 于是上式可令 $R\to+\infty$, 有 $u(x)\leqslant M(r)$. 再令 $r\downarrow 0$, 则有 $u(x)\leqslant u(0)$, 即 $u(0)=\max\limits_{x\in\mathbb{R}^2}u(x)$. 任取 $\rho>0$, 则 $u(0)=\max\limits_{x\in B(0,\rho)}u(x)$, 由次调和函数的强最大值原理可得 u 在 $B(0,\rho)$ 内恒为常数. 由 ρ 的任意性即可得 u 在 $\mathbb{R}^2$ 上为常数.

此外, 若调和函数在 $L^p(p\geqslant 1)$ 模的意义下有界, 是否也有类似的成立? 答案是肯定的:

命题 14.6

设 u 在 $\mathbb{R}^n$ 上调和, 且 $u\in L^p(\mathbb{R}^n)(p\geqslant 1)$, 即
$$\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^pdx<+\infty.$$
则 u 恒为零.

证明 任取 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 和 $R>0$. 若 $p=1$, 则
$$|u(x_0)|\leqslant\frac{1}{\omega_nR^n}\int_{B(x_0,R)}|u(x)|dx\leqslant\frac{1}{\omega_nR^n}\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$
令 $R\to+\infty$ 即可得 $u(x_0)=0$. 若 $p>1$, 设 $q>1$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 由 Hölder 不等式可得
$$|u(x_0)|\leqslant\frac{1}{\omega_nR^n}\int_{B(x_0,R)}|u(x)|dx\leqslant\frac{1}{\omega_nR^n}\left(\int_{B(x_0,R)}|u(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot(\omega_nR^n)^{\frac{1}{q}}=\frac{\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{(\omega_nR^n)^{\frac{1}{p}}}.$$
令 $R\to+\infty$ 即可得 $u(x_0)=0$.

笔记 这里介绍一下 Hölder 不等式, 在实分析中同学们还会学到: 设 $U \subset \mathbb{R}^n$, 若 $p,q>1$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则 $\|fg\|_{L^1(U)} \leqslant \|f\|_{L^p(U)}\|g\|_{L^q(U)}$, 即

$$\int_U |f(x)g(x)|dx \leqslant \left(\int_U |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_U |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

若 $p=q=2$, 这即为熟悉的 Cauchy-Schwarz 不等式. 若 U 的体积 $\mathrm{Vol}(U)$ 有限, 取 $g=1$ 可得

$$\int_U |f(x)|dx \leqslant \left(\int_U |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \mathrm{Vol}(U)^{\frac{1}{q}}.$$

现在回到本节的正题. 我们来进一步考虑一般阶数的梯度估计.

定理 14.9 (调和函数的梯度估计)

设 $u \in C(\overline{B(x_0,R)})$ 在 $B(x_0,R)$ 内调和, 则对任意多重指标 α, 成立

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{n^k e^{k-1} k!}{R^k} \max_{B(x_0,R)} |u|.$$

其中 $k=|\alpha|$.

证明 我们已证明了 $k=1$ 时的估计, 只需用归纳法即可. 若估计对任意 k 阶指标成立, 则任取 $k+1$ 阶指标 α. 设 $D^\alpha = \partial_{x_i} D^\beta$, 其中 β 为 k 阶指标, 则任取 $0<r<R$, 由一阶梯度估计和归纳假设可得

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \frac{n}{r} \max_{B(x_0,r)} |D^\beta u| \leqslant \frac{n^{k+1}e^{k-1}k!}{r(R-r)^k} \max_{B(x_0,R)} |u|.$$

取 $r=\frac{R}{k+1}$, 则有

$$|D^\alpha u(x_0)| \leqslant \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \frac{n^{k+1}e^{k-1}(k+1)!}{R^{k+1}} \max_{B(x_0,R)} |u| \leqslant \frac{n^{k+1}e^{k}(k+1)!}{R^{k+1}} \max_{B(x_0,R)} |u|.$$

归纳成立!

定理 14.10 (调和函数的解析性)

设 u 在开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上调和, 则 $u \in C^\omega(U)$.

证明 任取 $x_0 \in U$, 设 $r=\frac{1}{2}d(x_0,\partial U)>0$. 任取 $h \in \mathbb{R}^n$ 满足 $|h|<r$, 考虑带余项的 Taylor 展开:

$$u(x_0+h) = \sum_{0\leqslant k<N} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} h^\alpha + R_N(h).$$

其中 $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}$. 其中余项为

$$R_N(h) = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha,$$

$\theta \in (0,1)$ 为常数. 只需证明 $h \ll 1$ 且 $N \to \infty$ 时 $R_N(h) \to 0$ 即可. 注意到

$$n^N = (1+\cdots+1)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} \Rightarrow \alpha! \geqslant \frac{N!}{n^N}.$$

由梯度估计可得

$$|R_N(h)| \leqslant n^N \cdot \frac{n^N}{N!} \cdot \frac{n^N e^{N-1} N!}{r^N} \max_{B(x,r)} |u| \cdot |h|^N \leqslant \left(\frac{|h| n^3 e}{r}\right)^N \max_{B(x,r)} |u|.$$

于是当 $|h| < \frac{r}{en^3}$ 时, 有 $R_N(h) \to 0 (N \to +\infty)$, 证毕.

第 15 章 第十一次习题课 (by 黄天一)

15.1 习题讲解

作业 15.1 (184-3)

证明 Poisson 方程在 Robin 边界下 $\frac{\partial u}{\partial \nu}+a(x)u(x)=h(x)$ 下解的唯一性, 其中 $a(x)>0$.

证明 只需证明调和方程在齐次边界 $\frac{\partial u}{\partial \nu}+a(x)u(x)=0$ 下只有零解. 考虑能量

$$E=\int_D |\nabla u|^2 dx \geqslant 0.$$

由 Green 公式可得

$$E=\int_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial \nu}dS-\int_D u\Delta u dx=-\int_{\partial D} a(x)u(x)^2 dS \leqslant 0.$$

因此 $E=0 \Rightarrow \nabla u \equiv 0 \Rightarrow u$ 为常数. 结合边值可得 u 恒为零.

作业 15.2 (184-5)

证明 Neumann 边界下的 Dirichlet 原理: 取遍 D 上所有 $C^2(D)\cap C(\overline{D})$ 函数的能量泛函

$$E[w]=\frac{1}{2}\int_D |\nabla w|^2 dx-\int_{\partial D} hwdS$$

在 $w=u$ 处取得最小值, 其中 u 是边值问题

$$-\Delta u=0 \quad \text{in } D, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}=h(x) \quad \text{on } \partial D$$

的解. 这里我们要求 h 在 ∂D 上的积分为零.

证明 任取 $w\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$, 设 $v=w-u$, 则

$$\begin{aligned}
E[w]-E[u] &= \frac{1}{2}\int_D |\nabla u+\nabla v|^2 dx-\int_D |\nabla u|^2 dx-\int_{\partial D} hvdS \\
&= \frac{1}{2}\int_D |\nabla v|^2 dx+\int_D \nabla u\cdot\nabla v dx-\int_{\partial D} hvdS \\
&= \frac{1}{2}\int_D |\nabla v|^2 dx-\int_D v\Delta u dx+\int_{\partial D} v\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}-h\right)dS \\
&= \frac{1}{2}\int_D |\nabla v|^2 dx \geqslant 0.
\end{aligned}$$

另一方面, 若 w 也是 Neumann 问题的解, 由能量法可证明 v 恒为常数, 所以 $E[w]=E[u]$. 综上可得 $\min_w E[w]=E[u]$.

作业 15.3 (187-2)

设 $\phi\in C_c^2(\mathbb{R}^3)$, 证明

$$\phi(0)=-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x|}\Delta\phi(x)\frac{dx}{4\pi}.$$

证明 三维的基本解为 $V(x-y)=-\frac{1}{4\pi|x-y|}$. 选取充分大的球 $B(0,R)$ 使得 $\operatorname{supp}\phi\subset B(0,R)$, 则

$\partial B(0,R)$ 上恒有 $\phi\equiv 0, \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\equiv 0$. 在 $B(0,R)$ 上应用基本积分公式可得

$$\phi(0)=\int_{B(0,R)}V(x)\Delta\phi(x)dx=-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x|}\Delta\phi(x)\frac{dx}{4\pi}.$$

作业 15.4 (附加)

在三维单位球上, 是否存在正的调和函数 u 使得 $u(0,0,0)=1, u(0,0,\frac{1}{2})=10$?

证明 不存在. 由三维球内的 Poisson 公式可得

$$u(x)=\frac{1-|x|^2}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)}\frac{u(y)}{|x-y|^3}dS(y).$$

因此

$$u\left(0,0,\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{3}{16\pi}\times 8\int_{\partial B(0,1)}u(y)dS(y)=6u(0)=6.$$

这与 $u(0,0,\frac{1}{2})=10$ 矛盾.

作业 15.5 (190-1)

证明 Green 函数唯一.

证明 对任意固定的 x, 设 G_1,G_2 均为 D 上的 Green 函数, 令 $G=G_1-G_2$, 则

$$\Delta_y G(x,y)=0\quad\text{in } D,\qquad G(x,y)=0\quad\text{on }\partial D.$$

由最大值原理可得 $\max_{\overline{D}}|G|\leqslant\max_{\partial D}|G|=0$, 所以 G 恒为零, 进而 $G_1\equiv G_2$.

作业 15.6 (190-3)

证明 $\mathbb{R}^3$ 上半平面 Dirichlet 问题的解

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{z_0}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{h(x,y)}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy$$

满足边界条件, 即 $z_0\to 0$ 时 $u(x_0,y_0,z_0)\to h(x_0,y_0)$. 这里我们假设 h 有界且连续.

证明 在平面 $z=0$ 上, 作极坐标变换 $x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta$, 则

$$\frac{z_0}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{z_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{rdrd\theta}{(r^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}}=1.$$

任取 $\varepsilon>0$, 由 h 连续可设 $\delta>0$ 使得对任意 (x,y) 满足 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, 有 $|h(x,y)-h(x_0,y_0)|<\varepsilon$. 因此

$$\begin{aligned}|u(x_0,y_0,z_0)-h(x_0,y_0)|&\leqslant\frac{|z_0|}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{|h(x,y)-h(x_0,y_0)|}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy\\&=\frac{|z_0|}{2\pi}\left(\iint_{B_\delta(x_0,y_0)}+\iint_{\mathbb{R}^2\setminus B_\delta(x_0,y_0)}\right)\frac{|h(x,y)-h(x_0,y_0)|}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy\\&\leqslant\varepsilon+\frac{|z_0|\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}}{\pi}\int_\delta^\infty\frac{2\pi r}{(r^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}}dr\\&=\varepsilon+\frac{2\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}}{\pi(\delta^2+z_0^2)}|z_0|.\end{aligned}$$

选取 $|z_0|\leqslant\frac{\varepsilon\pi\delta^2}{2\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}}$, 则有 $|u(x_0,y_0,z_0)-h(x_0,y_0)|\leqslant 2\varepsilon$. 因此 $u(x_0,y_0,z_0)\to h(x_0,y_0)$.

作业 15.7 (197-9)

求斜半空间 $\{(x,y,z): ax+by+cz>0\}$ 的 Green 函数.

解 任取斜半空间内两点 $P_1=(x_1,y_1,z_1), P_2=(x_2,y_2,z_2)$. 设 P_1 关于平面 $ax+by+cz=0$ 的对称点为 $P_1^*=(x_1^*,y_1^*,z_1^*)$, 由解析几何知识可得

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^*-x_1}{a}=\dfrac{y_1^*-y_1}{b}=\dfrac{z_1^*-z_1}{c} \\ a\dfrac{x_1^*+x_1}{2}+b\dfrac{y_1^*+y_1}{2}+c\dfrac{z_1^*+z_1}{2}=0 \end{cases}$$

由此求解可得

$$\begin{cases} x_1^*=x_1-\dfrac{2a(ax_1+by_1+cz_1)}{a^2+b^2+c^2} \\ y_1^*=y_1-\dfrac{2b(ax_1+by_1+cz_1)}{a^2+b^2+c^2} \\ z_1^*=z_1-\dfrac{2c(ax_1+by_1+cz_1)}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

设 P_1 处的电荷为 $-\varepsilon$, Dirichlet 边界下对称点 P_1^* 处的虚设电荷为 $+\varepsilon$. 因此 Green 函数 $G(P_1,P_2)$, 即 P_2 处的电势为

$$G(P_1,P_2)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x_1^*-x_2)^2+(y_1^*-y_2)^2+(z_1^*-z_2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}\right).$$

作业 15.8 (197-14)

求八分之一球

$$D=\{x^2+y^2+z^2<a^2, x>0, y>0, z>0\}$$

的 Green 函数.

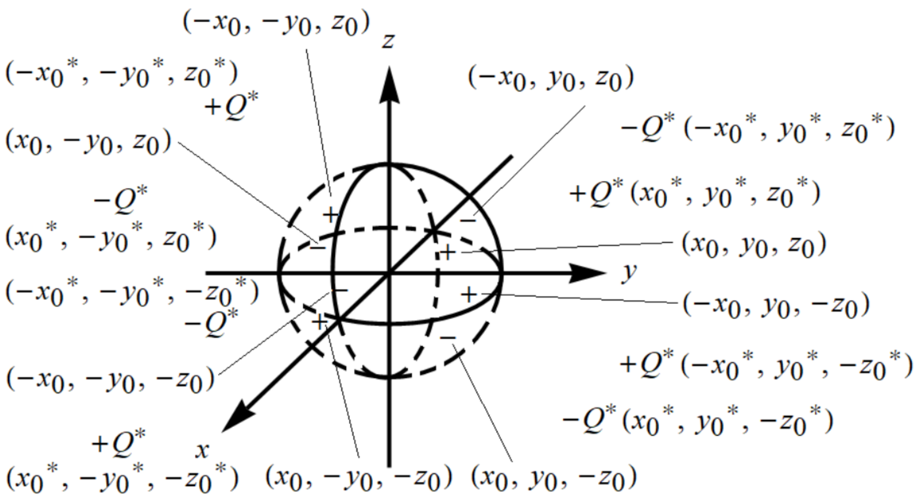


图 15.1: 八分之一球的电荷镜像

解 我们已推导过 Dirichlet 边界下 P 处的电荷 ε 关于球面 $B(0,a)$ 的对称虚设电荷为 $+\frac{\varepsilon a}{r}$, 其中 $r=|\overrightarrow{OP}|$. 任取 $P_1=(x_1,y_1,z_1), P_2=(x_2,y_2,z_2)\in D$, 则 P_1 关于三个坐标平面存在七个对称点 (详细示意图见下一题), 这八个点关于球面还有八个对称点. 下面我们记 $r=|\overrightarrow{OP_1}|$, (x,y,z) 关于球面的对称点为

$(x^*,y^*,z^*)=\frac{R^2}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z)$, Green 函数 $G(P_1,P_2)$, 即 P_2 处的电势为

$$
\begin{aligned}
G(P_1,P_2)=\frac{1}{4\pi}\Bigg(&\frac{a}{r\sqrt{(x_1^*-x_2)^2+(y_1^*-y_2)^2+(z_1^*-z_2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}\\
&-\frac{a}{r\sqrt{(x_1^*+x_2)^2+(y_1^*-y_2)^2+(z_1^*-z_2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}\\
&+\frac{a}{r\sqrt{(x_1^*+x_2)^2+(y_1^*+y_2)^2+(z_1^*-z_2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}\\
&-\frac{a}{r\sqrt{(x_1^*+x_2)^2+(y_1^*+y_2)^2+(z_1^*+z_2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2}}\\
&+\frac{a}{r\sqrt{(x_1^*+x_2)^2+(y_1^*-y_2)^2+(z_1^*+z_2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1+z_2)^2}}\\
&-\frac{a}{r\sqrt{(x_1^*-x_2)^2+(y_1^*+y_2)^2+(z_1^*-z_2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}\\
&+\frac{a}{r\sqrt{(x_1^*-x_2)^2+(y_1^*+y_2)^2+(z_1^*+z_2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2}}\\
&-\frac{a}{r\sqrt{(x_1^*-x_2)^2+(y_1^*-y_2)^2+(z_1^*+z_2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1+z_2)^2}}\Bigg).
\end{aligned}
$$

作业 15.9 (197-18)

1. 求第一卦限 $\mathscr{O}=\{(x,y,z):x>0,y>0,z>0\}$ 的 Green 函数.
2. 用 1 中结论求解 Dirichlet 问题

$$
\begin{cases}
u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0, & \text{in } \mathscr{O}\\
u(0,y,z)=0,u(x,0,z)=0,u(x,y,0)=h(x,y), & x>0,y>0,z>0
\end{cases}
$$

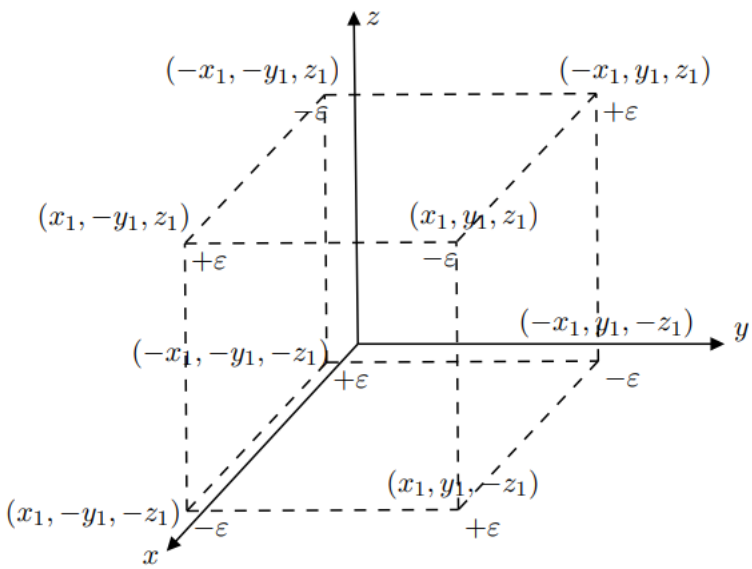


图 15.2: 第一卦限的电荷镜像

解

1. 如图所示, 任取第一卦限 $\mathscr{O}$ 内两点 $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2=(x_2,y_2,z_2)$, 则 P_1 处的电荷 ε 共存在

七个像电荷，由此求得 Green 函数 $G(P_1,P_2)$，即 P_2 处的电势为

$$
\begin{aligned}
G(P_1,P_2)=\frac{1}{4\pi}\Bigg(&\frac{1}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}\\
&+\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1+z_2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1+z_2)^2}}\\
&+\frac{1}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2}}\\
&+\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}\Bigg).
\end{aligned}
$$

2. 边界 $z=0$ 上每点处的单位外法向量均为 $\nu=(0,0,-1)$，根据 Poisson 公式可得

$$
u(x,y,z)=-\iint_{\mathbb{R}^2} h(x_0,y_0)\frac{\partial G}{\partial z_0}(x,y,z,x_0,y_0,0)dx_0dy_0.
$$

计算可得

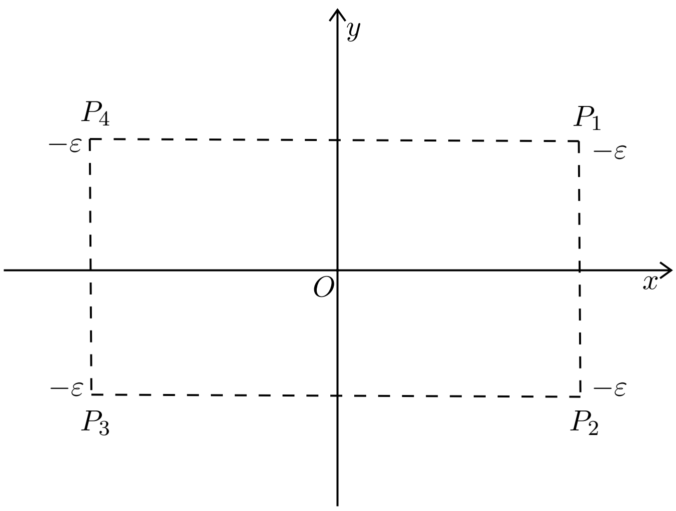
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial z_0}=\frac{z-z_0}{4\pi}\Bigg(&\frac{1}{((x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&-\frac{1}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{((x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&-\frac{1}{((x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{((x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&+\frac{1}{((x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{((x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg).
\end{aligned}
$$

取 $z_0=0$，代回即可得 $u(x,y,z)$ 的表达式为

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} h(x_0,y_0)\Bigg(&\frac{1}{((x+x_0)^2+(y+y_0)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&-\frac{1}{((x+x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{((x-x_0)^2+(y+y_0)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg)dx_0dy_0.
\end{aligned}
$$

作业 15.10 (198-23)

求解四分之一平面 $\{x>0,y>0\}$ 上的 Neumann 问题。



解 在 Neumann 边界下，边界上任一点处沿法向的电场强度为零. 所以此时虚设电荷的符号与原电荷相同. 如图所示，任取四分之一平面内两点 $P_0=(x_0,y_0), P_1=(x_1,y_1)$, 则 Green 函数 $G(P_0,P_1)$, 即 P_0 处的电势为

$$G(P_0,P_1)=\frac{1}{4\pi}[\ln((x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2)+\ln((x_0-x_1)^2+(y_0+y_1)^2)+ \\ \ln((x_0+x_1)^2+(y_0+y_1)^2)+\ln((x_0+x_1)^2+(y_0-y_1)^2)].$$

回忆 Neumann 边值问题

$$\Delta u=f(x)(x\in D),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial D}=\varphi(x)$$

的解为

$$u(x)=\int_D G(x,y)f(y)dy-\int_{\partial D}\varphi(y)G(x,y)dS+C.$$

在题设边界下，设边值为 $u(0,y)=g(y), u(x,0)=h(x)$, 因此边值问题的解为

$$C+\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x_0,y_0)[\ln((x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2)+\ln((x_0-x_1)^2+(y_0+y_1)^2)+ \\ \ln((x_0+x_1)^2+(y_0+y_1)^2)+\ln((x_0+x_1)^2+(y_0-y_1)^2)]dx_0dy_0 \\ -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty g(y_0)[\ln(x^2+(y-y_0)^2+\ln(x^2+(y+y_0)^2]dy_0 \\ +\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty h(x_0)[\ln((x-x_0)^2+y^2)+\ln((x+x_0)^2+y^2)]dx_0.$$

作业 15.11 (234-6)

1. 证明有界区域 D 内三维波动方程在 Dirichlet 和 Neumann 边界下的能量守恒律.
2. Robin 边界下如何呢?

证明 考虑 D 内的三维波动方程 $u_{tt}=c^2\Delta u$.

1. 在 (D) 和 (N) 边界下，均定义能量为

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_D(u_t^2+c^2|\nabla u|^2)dx.$$

求导可得

$$\frac{dE}{dt}=\int_D(u_tu_{tt}+c^2\nabla u\cdot\nabla(u_t))dx=\int_D u_t(u_{tt}-c^2\Delta u)dx+c^2\int_{\partial D}u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}dS=0.$$

所以 E 守恒.

2. 在 (R) 边界 $\frac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma(x)u=0$ 下，若 σ 非负，则可以调整能量函数为

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_D(u_t^2+c^2|\nabla u|^2)dx+\frac{c^2}{2}\int_{\partial D}\sigma(x)u^2dS.$$

此时求导可得

$$\frac{dE}{dt}=\int_D u_t(u_{tt}-c^2\Delta u)dx+c^2\int_{\partial D}u_t\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma(x)u\right)dS=0.$$

此时能量仍然守恒. 若 σ 未必非负，则不一定存在守恒的非负能量.

作业 15.12 (234-8)

考虑 Klein-Gordon 方程 $u_{tt} - c^2\Delta u + m^2 u = 0(m > 0)$.

1. 指出该方程的能量并证明它是常数.
2. 证明该方程的 causality principle(又叫做有限传播速度), 即方程在 (x_0, t_0) 处的解完全由初值在球域 $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| \leqslant ct_0\}$ 上的取值决定.

证明 本题所有函数均紧支.

1. 该方程的能量函数为

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 + m^2u^2)dx.$$

求导可得

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^3} (u_t u_{tt} + c^2\nabla u \cdot \nabla(u_t) + m^2 u u_t)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u_t(u_{tt} - c^2\Delta u + m^2 u)dx = 0.\end{aligned}$$

2. 只需证明: 若方程的初值在球域 $B(x_0, ct_0)$ 内恒为零, 则 $u(x_0, t_0) = 0$. 考虑特征锥 $C(x_0, t_0) = \{(x, t) : 0 \leqslant t \leqslant t_0, |x - x_0| \leqslant c(t_0 - t)\}$, 并考虑特征锥截面上的能量函数

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_{B(x_0,c(t_0-t))} (u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 + m^2u^2)dx.$$

求导可得

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{c(t_0-t)} \left(\int_{S(x_0,\tau)} (u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 + m^2u^2)dS\right) d\tau \\ &= \int_{B(x_0,c(t_0-t))} (u_t u_{tt} - c^2\nabla u \cdot \nabla(u_t) + m^2 u u_t)dx - \frac{c}{2}\int_{S(x_0,c(t_0-t))} (u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 + m^2u^2)dS \\ &= \int_{B(x_0,c(t_0-t))} (u_t(u_{tt} - c^2\Delta u + m^2u))dx - \frac{c}{2}\int_{S(x_0,c(t_0-t))} \left(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 - 2cu_t\frac{\partial u}{\partial \nu} + m^2u^2\right) dS \\ &= -\frac{c}{2}\int_{S(x_0,c(t_0-t))} \left(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2 - 2cu_t\frac{\partial u}{\partial \nu} + m^2u^2\right) dS.\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式可得

$$\left|2cu_t\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| = |2cu_t(\nabla u \cdot \nu)| \leqslant 2|u_t| \cdot c|\nabla u| \leqslant u_t^2 + c^2|\nabla u|^2.$$

综上可得 $\frac{de}{dt} \leqslant 0$. 结合特征锥底面初值为零可得 $e(0) = 0$, 所以 $e(t) \equiv 0, \forall t \geqslant 0$. 进而在整个特征锥内都有 $u_t \equiv 0, \nabla u \equiv 0 \Rightarrow u$ 为常数, 结合初值可得 u 恒为零. 所以在特征锥顶 (x_0, t_0) 处 u 自然也为零.

作业 15.13 (240-7)

1. 求解以下初值下的三维波动方程:

$$\varphi(x) = A(|x| < \rho), \quad \varphi(x) = 0(|x| \geqslant \rho), \quad \psi(x) \equiv 0.$$

   其中 A 为常数.
2. 绘制你所求得解的图像. 解在何处存在不连续的间断点?
3. 设 $|x_0| < \rho$, 让一束光线从 $(x_0, 0)$ 出发并沿着波面前进, 即考虑 $u(x_0 + tv, t)$, 其中 $|v| = c$. 证明: $t \to \infty$ 时, $tu(x_0 + tv, t)$ 收敛.

解

1. 记 $|x| = r$, 由定义可得
$$\iint_{S_{ct}(x)} \varphi(x)dS = \begin{cases} 4A\pi c^2t^2, & r+ct<\rho \\ \pi cAt\cdot\dfrac{\rho^2-(r-ct)^2}{r}, & |\rho-ct|\leqslant r\leqslant \rho+ct \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
由 Kirchhoff 公式可得
$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2t}\iint_{S_{ct}(x)}\varphi(x)dS\right)=\begin{cases} A, & r+ct<\rho \\ \dfrac{A(r-ct)}{2r}, & |\rho-ct|\leqslant r\leqslant \rho+ct \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
2. 解在 $|x|=\rho-ct, \rho+ct, ct-\rho$ 处存在不连续的间断点.
3. 此时计算可得
$$\begin{aligned} tu(x_0+tv,t) &= t\cdot\frac{A(|x_0+tv|-ct)}{2|x_0+tv|}=t\cdot\frac{A(|x_0+tv|^2-c^2t^2)}{2|x_0+tv|^2+2ct|x_0+tv|} \\ &= \frac{At(|x_0|^2+2(x_0\cdot v)t)}{2c^2t^2+24(x_0\cdot v)t+2ct(|x_0|^2+2(v\cdot x_0)t+c^2t^2)^{\frac{1}{2}}+2|x_0|^2} \\ &\to \frac{A(v\cdot x_0)}{2c^2}(t\to+\infty). \end{aligned}$$

作业 15.14 (241-9)

1. 考虑任意紧支初值下三维波动方程的解, 证明: 对任一固定的 (x,y,z) 和充分大的 t, 都有 $u(x,y,z,t)=0$.
2. 证明: 当 $t\to\infty$ 时一致成立 $u(x,y,z,t)=O(t^{-1})$.

证明

1. 回忆三维波动方程的 Kirchhoff 公式:
$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi c^2t}\iint_{S_{ct}}\psi(\xi,\eta,\zeta)dS+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2t}\iint_{S_{ct}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)dS\right).$$
由于 φ,ψ 均紧支, 故对任一固定的 (x,y,z), 当 t 充分大时, φ 和 ψ 在球面 $S_{ct}=S_{ct}(x,y,z)$ 上的积分均为零, 此时自有 $u(x,y,z,t)=0$.
2. 为方便起见, 我们改记 $x\in\mathbb{R}^3$ 为三元组 (x,y,z), 记 $⨍$ 为平均积分号. 由 Kirchhoff 公式可得初值问题的解为
$$u(x,t)=t⨍_{\partial B(x,ct)}\psi(y)dS(y)+\frac{\partial}{\partial t}\left(t⨍_{\partial B(x,ct)}\varphi(y)dS(y)\right).$$
整理可得
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(t⨍_{\partial B(x,ct)}\varphi(y)dS(y)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(⨍_{\partial B(0,1)}\varphi(x+ctz)dS(z)\right) \\ &= ⨍_{\partial B(0,1)} cz\cdot\nabla\varphi(x+ctz)dS(z) \\ &= ⨍_{\partial B(x,ct)}\nabla\varphi(y)\cdot\frac{y-x}{t}dS(y). \end{aligned}$$

由此可得

$$u(x,t)=\fint_{\partial B(x,ct)}(t\psi(y)+\varphi(y)+\nabla\varphi(y)\cdot(y-x))dS(y).$$

进而成立估计式

$$\begin{aligned}|tu(x,t)| &\leqslant \frac{1}{4\pi c^2 t}\fint_{\partial B(x,ct)}(t|\psi(y)|+|\varphi(y)|+|\nabla\varphi(y)||y-x|)dS(y)\\ &\leqslant \frac{1}{4\pi c^2}\int_{\partial B(x,ct)}(|\psi(y)|+c|\varphi(y)|)dS(y)+\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B(x,ct)}|\varphi(y)|dS(y).\end{aligned}$$

我们可以从两个角度估计 RHS 中的积分. 设 φ 的支集包含于球 $B(0,R)$, 则球面 $\partial B(x,ct)$ 同 $B(0,R)$ 的交为球冠, 其高度不超过 $2R$, 底面半径不超过 R. 所以相交得到的球冠面积不超过 $4\pi R^2$. 进而得到

$$\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B(x,ct)}|\varphi(y)|dS(y)\leqslant\frac{1}{4\pi c^2 t}\cdot 4\pi R^2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}=\frac{R^2}{c^2 t}\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)},$$

$$\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B(x,ct)}|\varphi(y)|dS(y)\leqslant t\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}.$$

由此可得

$$\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B(x,ct)}|\varphi(y)|dS(y)\leqslant\min\left\{\frac{R^2}{c^2 t}\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)},t\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right\}=\frac{R}{c}\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}.$$

类似地也有

$$\frac{1}{4\pi c^2}\int_{\partial B(x,ct)}(|\psi(y)|+c|\varphi(y)|)dS(y)\leqslant\frac{R^2}{c^2}(\|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}+c\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}).$$

综上可得存在 $C>0$, 使得 $|tu(x,t)|\leqslant C, \forall x\in\mathbb{R}^3, t>0$.

作业 15.15 (附加)

用 Fourier 变换求解

$$\begin{cases}u_t=k\Delta u+f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n, t>0\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

其中 f,φ 均为速降函数.

解 对 u 关于空间变量 x 作 Fourier 变换可得

$$\frac{d\hat{u}}{dt}+k|\xi|^2\hat{u}=\hat{f}(\xi,t),\quad \hat{u}(\xi,0)=\hat{\varphi}(\xi).$$

求解该 ODE 可得

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{\varphi}(\xi)e^{-k|\xi|^2 t}+\int_0^t\hat{f}(\xi,s)e^{-k|\xi|^2(t-s)}ds.$$

我们在第八次习题课已求得了

$$F^{-1}[e^{-k|\xi|^2 t}]=\frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}=K(x,t).$$

因此

$$\begin{aligned}u(x,t)&=F^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)\hat{K}(\xi,t)]+\int_0^t F^{-1}[\hat{f}(\xi,s)\hat{K}(\xi,t-s)]ds\\ &=\frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}dy+\int_0^t\frac{1}{(4\pi k(t-s))^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-s)}}dyds.\end{aligned}$$

作业 15.16 (附加 9-1)

考虑方程 $u_{tt}+(u^2)_{xx}=-u_{xxxx}$ 形如 $u(x,t)=v(x-ct)$ 的行波解, 试求出 v 满足的 ODE. 若 $|x|\to\infty$ 时 v 收敛于某常数, 试进一步给出解所满足的形式.

解 下面我们记 $y=x-ct$. 将行波解 $u(x,t)=v(y)$ 代入方程可得

$$c^2v''+(v^2)''=-v^{(4)}\Rightarrow(v''+c^2v+v^2)''=0.$$

现在我们设 v 在 $|x|\to\infty$ 时收敛于常数 V. 由上述方程可得

$$v''+c^2v+v^2=Ay+B.$$

令 $|y|\to\infty$ 可得 $A=0, B=c^2V+V^2$. 代入上式, 并且两边同乘 $2v'$ 可得

$$\frac{d}{dy}\left((v')^2+c^2v^2+\frac{2v^3}{3}\right)=2(c^2V+V^2)v'\Rightarrow(v')^2+c^2v^2+\frac{2v^3}{3}=2(c^2V+V^2)v+C.$$

令 $|y|\to\infty$ 可得

$$c^2V^2+\frac{2V^3}{3}=2(c^2V+V^2)V+C\Rightarrow C=-c^2V^2-\frac{4V^3}{3}.$$

因此 v 满足一阶隐式方程

$$(v')^2+c^2v^2+\frac{2v^3}{3}-2(c^2V+V^2)v+c^2V^2+\frac{4V^3}{3}=0.$$

作业 15.17 (附加 9-2)

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $u(x,t)$ 为满足以下边值问题的光滑函数:

$$\begin{cases}u_{tt}-\Delta u+u^3=0, & (x,t)\in\Omega\times[0,T]\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T]\end{cases}$$

1. 推导 u 所满足的能量守恒式.
2. 证明: 若 $u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0$, 则 u 恒为零.

证明 定义能量函数为

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(u_t^2+|\nabla u|^2+\frac{u^4}{2}\right)dx.$$

1. 求导可得

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}&=\int_\Omega(u_tu_{tt}+\nabla u\cdot\nabla(u_t)+u^3u_t)dx\\&=\int_\Omega u_t(u_{tt}-\Delta u+u^3)dx+\int_{\partial\Omega}u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}dS=0.\end{aligned}$$

   因此能量守恒.
2. 若 $u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0$, 则 $E(0)=0$, 进而 $E(t)\equiv0\Rightarrow u_t\equiv0,\nabla u\equiv0\Rightarrow u$ 为常数. 结合初边值可得 u 恒为零.

问题 15.1 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数, 且存在正整数 d 使得 $u(x)=O(|x|^d)(|x|\to\infty)$. 证明: u 是次数不超过 d 的多项式.

笔记 本题是上次习题课梯度估计的又一重要应用, 不在课程要求内. 本题在复分析中也有对应版本: 设 f 是整函数, 且 $z\to\infty$ 时有 $f(z)=O(|z|^d)$, 则 f 是次数不超过 d 的多项式.

证明 由已知可得对任一固定的 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 也成立 $u(x)=O(|x-x_0|^d)$. 由此可得存在常数 $M>0$, 对任

意 $R>0$, 有

$$\max_{B(x_0,R)}|u|\leqslant MR^d.$$

应用调和函数的梯度估计可得对任意 $k(k>d)$ 阶指标 α, 都有

$$|D^\alpha u|\leqslant\frac{n^ke^{k-1}k!}{R^k}\max_{B(x_0,R)}|u|\leqslant\frac{Mn^ke^{k-1}k!}{R^{k-d}}.$$

令 $R\to+\infty$ 即可得 $D^\alpha u=0$. 由任意性即可得 u 为次数不超过 d 的多项式.

问题 15.2 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集, φ,σ 为 ∂U 上的连续函数, 且存在常数 $\sigma_0>0$ 使得 $\sigma\geqslant\sigma_0$ 恒成立. 设 $u\in C^2(U)\cap C(\overline{U})$ 满足边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u+u^3=0 & \text{in } U\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma u=\varphi, & \text{on } \partial U\end{cases}$$

证明:

$$\max_{\overline{U}}|u|\leqslant\frac{1}{\sigma_0}\max_{\partial U}|\varphi|.$$

证明 设 $M=\frac{1}{\sigma_0}\max_{\partial U}|\varphi|$, 考虑函数

$$\eta(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant M\\ t-M, & t>M\end{cases}$$

定义 $v=\eta(u)$, 则

$$\begin{aligned}\int_U u^3v\,dx=\int_U v\Delta u\,dx&=\int_{\partial U}v\frac{\partial u}{\partial\nu}dS-\int_U\nabla v\cdots\nabla u\,dx\\&=\int_{\partial U}\eta(u)(\varphi-\sigma u)dx-\int_U|\nabla u|^2\eta'(u)dx.\end{aligned}$$

不难验证 $u^3\eta(u),\eta(u)(\sigma u-\varphi),|\nabla u|^2\eta'(u)$ 均为非负函数, 结合上式可得 $u^3\eta(u)\equiv0$. 假设存在 $x_0\in\overline{U}$ 使得 $u(x_0)>M$, 则 $u(x_0)>0$ 且 $\eta(u(x_0))>0$, 矛盾! 所以恒成立 $u\leqslant M$. 类似也可以证明 $u\geqslant -M$(check it!).

问题 15.3 用降维法推导二维波动方程初值问题的解:

$$\begin{cases}u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}), & (x,y)\in\mathbb{R}^2,t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y), & u_t|_{t=0}=\psi(x,y)\end{cases}$$

解 降维法的基本原理是: 将二维方程中的未知函数 u 和初值函数 φ,ψ 视作 $\mathbb{R}^3$ 上与 z 无关的函数, 然后用三维问题的 Kirchhoff 公式求解该二维问题. 考虑三维球面 $S_{ct}:(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+\zeta\leqslant c^2t^2$, 上半球面 S_{ct}^+ 上成立 $\zeta=\sqrt{c^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}$. 给定函数 $f=f(x_1,x_2)$, 设 Σ_{ct} 为二维圆域 $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant c^2t^2$, 则

$$\iint_{S_{ct}^+}\frac{f}{4\pi c^2t}dS=\iint_{\Sigma_{ct}}\frac{f}{4\pi c^2t}\sqrt{1+\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2}d\xi d\eta=\frac{1}{4\pi c}\iint_{\Sigma_{ct}}\frac{f(\xi,\eta)}{\sqrt{c^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta.$$

下半球面上的积分与上述相同, 所以

$$\iint_{S_{ct}}\frac{f}{4\pi c^2t}dS=\frac{1}{2\pi c}\iint_{\Sigma_{ct}}\frac{f(\xi,\eta)}{\sqrt{c^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta.$$

所以二维初值问题的解为

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi c}\iint_{\Sigma_{ct}}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{c^2t^2-r^2}}d\xi d\eta+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi c}\iint_{\Sigma_{ct}}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{c^2t^2-r^2}}d\xi d\eta\right).$$

其中 $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$.

问题 15.4 求解二维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+c^2u, & (x,y)\in\mathbb{R}^2, t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x,y), & u_t|_{t=0}=\psi(x,y) \end{cases}$$

解 作变换 $v(x,y,z)=e^{\frac{cz}{a}}u(x,y)$, 则

$$v_{tt}=e^{\frac{cz}{a}}u_{tt},\quad \Delta v=\frac{e^{\frac{cz}{a}}}{a^2}(a^2(u_{xx}+u_{yy})+c^2u).$$

由此可得 v 满足初值问题

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2\Delta v, & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0 \\ v|_{t=0}=\varphi(x,y)e^{\frac{cz}{a}}, & v_t|_{t=0}=\psi(x,y)e^{\frac{cz}{a}} \end{cases}$$

由此可得

$$v(x,y,z)=\frac{1}{4\pi c^2t}\iint_{S_{ct}(x,y,z)}\psi(\xi,\eta)e^{\frac{c\zeta}{a}}dS+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2t}\iint_{S_{ct}(x,y,z)}\varphi(\xi,\eta)e^{\frac{c\zeta}{a}}dS\right).$$

由于 $u(x,y)=e^{-\frac{cz}{a}}v(x,y,z)$ 与 z 无关, 取 $z=0$ 可得原初值问题的解为

$$u(x,y)=\frac{1}{4\pi c^2t}\iint_{S_{ct}(x,y,0)}\psi(\xi,\eta)e^{\frac{c\zeta}{a}}dS+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2t}\iint_{S_{ct}(x,y,0)}\varphi(\xi,\eta)e^{\frac{c\zeta}{a}}dS\right).$$

15.2 补充内容: 一些非线性方程的处理实例

非线性 PDE 的讨论较线性方程来说更为复杂, 一些初等的处理方法包括: (1) 作变换化为线性; (2) 讨论一些形式较好的解, 例如分离解、行波解、径向解, 等等. 这里我们举一些这两种方法对应的实例.

15.2.1 "玄之又玄" 的变换

Cole-Hopf 变换 本节实际是老师在课上作为一道例题讲过的, 不过由于当时网课临时断开, 这里我们重新讲述一遍, 并作适当的扩展. 考虑如下非线性热方程:

$$\begin{cases} u_t-k\Delta u+\lambda|\nabla u|^2=0, & x\in\mathbb{R}^n, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}^n \end{cases} \tag{15.1}$$

我们待定一个变换 $v=\Phi(u)$, 希望它能满足对应的线性热方程. 计算可得

$$v_t=u_t\Phi'(u),$$

$$\Delta v=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(u_{x_i}\Phi'(u))=\sum_{i=1}^n(u_{x_ix_i}\Phi'(u)+u_{x_i}^2\Phi''(u))=\Phi'(u)\Delta u+\Phi''(u)|\nabla u|^2.$$

为了成立 $v_t-k\Delta v=0$, 须有

$$-k\Phi''(u)=\lambda\Phi'(u).$$

由此求得一个符合要求的可逆变换为 $v=\Phi(u)=e^{-\frac{\lambda}{k}u}$. 我们将该变换称之为 Cole-Hopf 变换. 此时 v

满足初值问题

$$\begin{cases} v_t - k\Delta v = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ v(x,0) = e^{-\frac{\lambda}{k}\varphi(x)}, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

求解可得

$$v(x,t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt} - \frac{\lambda}{k}\varphi(y)} dy.$$

进而对应非线性问题 (15.1) 的解为

$$u(x,t) = -\frac{k}{\lambda} \ln v = -\frac{k}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt} - \frac{\lambda}{k}\varphi(y)} dy \right).$$

作为上述问题的一个应用, 我们可以考虑如下粘性 Burgers 方程, 这是流体力学中的一个重要方程.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{15.2}$$

这里我们考虑上述初值问题在 L^1 意义下的解, 其中 $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. 作变换

$$v = \int_{-\infty}^{x} u(s,t) ds,$$

则有 $u = v_x$. 进而

$$v_t = \int_{-\infty}^{x} u_t(s,t) ds = \int_{-\infty}^{x} (u_{ss} - uu_s) ds = u_x - \frac{u^2}{2} = v_{xx} - \frac{v_x^2}{2}.$$

所以变换后的 v 满足非线性热方程

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} + \dfrac{v_x^2}{2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

其中 $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(s) ds$. 利用刚才的结论求解可得

$$v(x,t) = -2 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t} - \frac{\psi(y)}{2}} dy \right).$$

从而方程 (15.2) 的解为

$$u(x,t) = v_x = \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t} - \frac{\psi(y)}{2}} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t} - \frac{\psi(y)}{2}} dy}.$$

极小曲面方程与 Legendre 变换 本节我们考虑如下极小曲面方程:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

当 $n = 2$ 时, 该方程又可写为

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0. \tag{15.3}$$

在介绍它的处理方法前, 有必要讲讲这个几何方程的由来. 1744 年, Euler 提出了一个问题: 考虑两点之间的一段平面曲线 $y = f(x)$, 何时能使得它绕 x 轴旋转一周获得的曲面面积最小? 这个问题由 Euler 本人给出了答案: 曲线 $(x, f(x))$ 必须是一段悬链线, 这时生成的旋转面叫做悬链面. 19 世纪中后期, 比利时的物理学家 Joseph Plateau 做了一个实验: 如果将一根铜丝弯曲焊接成一条封闭的空间曲线, 将铜丝浸入肥皂液中, 所获得的肥皂泡形成的曲面有什么样的几何性质呢? 他指出: 薄膜的势能在表面张力的作用下达到最小值, 所以肥皂泡所形成的曲面必定有最小的面积.

上面两件实例都可以归结为一个统一的问题: 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为一有界区域, 考虑在边界 $(x,y) \in \partial D$ 上取值相同的函数 $f(x,y)$, 当 f 在区域 D 内满足何种条件时, 对应曲面的面积最小? 这个问题在 18 世纪 60 年代由 Lagrange 利用变分法给出了答案, 这里我们来复刻他的证明过程, 亦即推导上述极小曲面方程.

设 $M = (x,y,f(x,y))$ 是一个极小曲面, 考虑任意一族函数 $g(x,y;t) \in C^2(\overline{D} \times (-\varepsilon,\varepsilon))$, 其中 $g(x,y;0) = f(x,y)$, 并且 $g|_{\partial D}$ 为给定函数 $\varphi(x,y)$(这就说明 $\dot{g} \triangleq \frac{\partial g}{\partial t}$ 在 $(x,y) \in \partial D$ 上取值为零). 这一族函数对应着一族曲面 $M_t = (x,y,g(x,y;t))$, 依定义, 面积泛函 $A(t) \triangleq \text{Area}(M_t)$ 在 $t=0$ 处取得极小值. 计算可得

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \frac{d}{dt}\iint_D \sqrt{1+g_x^2+g_y^2}dxdy = \iint_D \frac{\dot{g}_x g_x + \dot{g}_y g_y}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}dxdy \\ &\xlongequal{\text{分部积分}} -\iint_D \dot{g}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g_x}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g_y}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}\right)\right]dxdy.\end{aligned}$$

取 $t=0$ 即可得

$$\iint_D \dot{g}(x,y;0)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)\right]dxdy = 0.$$

注意到 $\dot{g}(x,y;0)$ 是任一 $C_c^1(\overline{D})$ 函数, 由变分法基本引理即可得极小曲面方程[1]

$$\nabla\cdot\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right) = 0.$$

现在我们尝试作变换将二维的极小曲面方程 (15.3) 化为线性. 这里我们需要作如下假设: 函数 u 的 Jacobi 阵 $J = D^2u$ 总是可逆的. 此时令 $p = u_x(x,y), q = u_y(x,y)$, 由隐函数定理可反解出 $x = x(p,q), y = y(p,q)$. 由此可得

$$J\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial p}\\ \frac{\partial x}{\partial q}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad J\begin{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial p}\\ \frac{\partial y}{\partial q}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

从而求解可得

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{u_{xx}}{\det J}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p} = -\frac{u_{xy}}{\det J}, \quad \frac{\partial y}{\partial q} = \frac{u_{yy}}{\det J}.$$

我们作如下 Legendre 变换

$$v(p,q) = px(p,q) + qy(p,q) - u(x(p,q),y(p,q)).$$

计算可得

$$v_p = x + p\frac{\partial x}{\partial p} + q\frac{\partial y}{\partial p} - u_x\frac{\partial x}{\partial p} - u_y\frac{\partial y}{\partial p} = x(p,q).$$

$$v_q = p\frac{\partial x}{\partial q} + y + q\frac{\partial y}{\partial q} - u_x\frac{\partial x}{\partial q} - u_y\frac{\partial y}{\partial q} = y(p,q).$$

[1]在微分几何中会讲到, 曲面 $(x,y,f(x,y))$ 的平均曲率为

$$H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)\right].$$

所以曲面 Σ 为极小曲面 $\Leftrightarrow H=0$, 这也是极小曲面的另一种定义方式.

由此可得

$$v_{pp}=\frac{u_{xx}}{\det J},\quad v_{pq}=-\frac{u_{xy}}{\det J},\quad v_{qq}=\frac{u_{yy}}{\det J}.$$

代回极小曲面方程 (15.3) 即可得

$$(1+q^2)v_{pp}+2pqv_{pq}+(1+p^2)v_{qq}=0.$$

这就变换成为了一个线性方程.

上述借助隐函数定理来作变换的方法还可以应用到其他的非线性方程中, 如下例. 考虑非线性热方程

$$u_t=\frac{u_{xx}}{u_x^2},\quad x\in\mathbb{R},t>0.$$

其中 $u_x>0$. 由隐函数定理, 可以从 $y=u(x,t)$ 中反解出 $x=v(y,t)$. 计算可得

$$u_t=-\frac{v_y}{v_t},\quad u_x=\frac{1}{v_y},\quad u_{xx}=-\frac{v_{yy}}{v_y^3}.$$

代回非线性方程即可得 $v_t=v_{yy}$, 从而化为了线性方程.

笔记 这里我们需要指出: 上述借助隐函数定理的方法虽然巧妙, 但在实际的偏微分方程研究中却难以应用, 因为变换后的函数所满足的初边值条件极难确定 (反解的过程过于棘手).

15.2.2 还是来看看特殊的解吧

分离解 我们首先来讨论一个非常经典的非线性方程: 多孔介质方程 (porous median equation, PME)[2]

$$u_t-\Delta(u^\gamma)=0,\quad x\in\mathbb{R}^n,t>0. \tag{15.4}$$

这里我们要求 $u\geqslant 0,\gamma>1$. 我们可以求出它的分离解. 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$, 代入可得

$$\frac{T'(t)}{T(t)^\gamma}=-\lambda=\frac{\Delta(X(x)^\gamma)}{X(x)}.$$

求解 $T(t)$ 所满足的 ODE 可得

$$T(t)=(\mu-\lambda(1-\gamma)t)^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

为使解满足非负条件, 我们选取 $\mu\geqslant 0$. 另一方面, X 满足非线性方程 $\Delta(X^\gamma)+\lambda X=0$, 这并不好直接求解. 但我们可以给出特殊形式的解. 例如我们考虑形如 $X(x)=|x|^\alpha$ 的径向解, 计算可得

$$0=\Delta(|x|^{\gamma\alpha})+\lambda|x|^\alpha=\gamma\alpha(n+\gamma\alpha-1)|x|^{\gamma\alpha-2}+\lambda|x|^\alpha.$$

为了使上式成立, 我们选取

$$\alpha=\frac{2}{\gamma-1},\quad \lambda=\frac{2\gamma(n-1-(n+1)\gamma)}{(\gamma-1)^2}.$$

---

[2]简要介绍一下该方程的物理背景. 多孔介质在生活中十分常见, 例如毛细血管、植物根茎、滤网等等. 而多孔介质方程也广泛应用于诸多物理模型中, 例如多孔介质中的气体分布、非线性的热传导等等, 感兴趣的同学可以进一步阅读The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. 这里我们简单推导一下多孔介质中的气体分布模型, 以下函数均以空间位置 x 和时间 t 为变量, 设孔隙率为 $\varepsilon\in(0,1)$ 的多孔介质中充满理想气体, 密度为 ρ, 记压强为 p, 气体流速矢量为 $\vec{V}$, 则有: (1) 流体力学的连续性方程 $\varepsilon\rho_t+\nabla\cdot(\rho\vec{V})=0$; (2) 多孔介质中流体满足 Darcy 定律: $\mu\vec{V}=-k\nabla p$, 这里 μ 是流体的粘滞系数, k 为多孔介质的渗透率; (3) 理想气体的多方过程 $p=p_0\rho^n$, 其中 n 为多方指数. 联立 (1)(2)(3) 给出的方程化简可得

$$\rho_t=c\Delta(\rho^\gamma).$$

其中

$$\gamma=1+n,c=\frac{nkp_0}{(n+1)\varepsilon\mu}.$$

所以, 对任意 $\mu \geqslant 0$,

$$u(x,t)=\left(\mu-\frac{2\gamma(\gamma(n+1)-n+1)}{\gamma-1}t\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}|x|^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

给出了 (15.4) 的解. 若我们记

$$t_b=\frac{\mu(\gamma-1)}{2\gamma(\gamma(n+1)-n+1)},$$

则 $x\neq 0$ 且 $t\uparrow t_b$ 时解发生爆破, 从非线性扩散的角度来看, 即代表在有限时间内将有大量物质扩散入系统.

径向解 然后我们来讨论一类特殊的非线性 Poisson 方程[3]:

$$-\Delta u=u^p,\quad x\in\mathbb{R}^n, p>1. \tag{15.5}$$

出于 Laplace 算子的旋转不变性, 我们来研究它的径向解 $u(x)=v(r)$, 其中 $r=|x|$. 计算可得

$$\Delta u=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}v'(r)\right)=\sum_{i=1}^n\left(\frac{r^2-x_i^2}{r^3}v'(r)+\frac{x_i^2}{r^2}v''(r)\right)=v''(r)+\frac{n-1}{r}v'(r).$$

代回方程可得

$$v''(r)+\frac{n-1}{r}v'(r)+v(r)^p=0.$$

这是一个二阶非线性 ODE. 为了求解它, 我们引入 Emden-Fowler 变换:

$$t=\ln r,\quad w=e^{\frac{2t}{p-1}}v.$$

则 ODE 可化为

$$\frac{d^2w}{dt^2}+\frac{n+2+(2-n)p}{1-p}\frac{dw}{dt}+\frac{p^2+(2-2n)p+1+2n}{1-p}w=0. \tag{15.6}$$

成为了一个线性方程. 关于这个方程还有一个有趣的例子. 若 $p=\frac{n+2}{n-2}(n>2)$, 且 $x\in B(0,1)$, 则同学们可以自行验证: 方程存在形如 $u=\alpha(1-|x|^2)^{-\beta}$ 的解, 这里 $\alpha,\beta>0$. 由此说明, 非线性方程的解可以在某个区域内取到有限值, 却在边界上处处发散.

我们留一些相仿的问题给同学们自行完成, 旨在处理一些实际的非线性方程:

1. 求出 Hamilton-Jacobi 方程 $u_t+H(\nabla u)=0(x\in\mathbb{R}^n,t>0)$ 的一个形如 $u(x,t)=X(x)+T(t)$ 的分离解, 这里 $H:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续函数.
2. 我们已学过热核的相似性, 这启发我们从另一角度去推导 PME $u_t=\Delta(u^\gamma)$ 的解. 若 $1-\frac{2}{n}<\gamma<1$, 请同学们求出上述方程具有形式 $u(x,t)=\frac{1}{t^\alpha}v(\frac{x}{t^\beta})$ 的解, 你的解在 $|x|\to\infty$ 应是收敛于零的.

[3] 一般的非线性 Poisson 方程形如 $-\Delta u=f(x,u)$.

第 16 章 阅读材料: 半线性波动方程解的存在唯一性 (By 黄天一)

在实际的 PDE 研究中, 我们遇到的往往是非线性方程. 当我们遇到一个方程时, 总是希望确定其解的存在性. 对于特殊系数的线性方程, 借助 Fourier 变换可以显式地求出方程的解. 但如果系数较为复杂, 或者方程本身即为非线性, 这时初等的方法则不再奏效, 需要借助一些泛函工具[1]. 而在 ODE 中, 我们其实已经接触过一个较为简单的工具: 压缩映射原理. 本节的主要内容就是以半线性波动方程为例, 利用压缩映射原理简要介绍其解的存在性理论. 此外, 能量估计也是讨论解的存在性的一大重要工具, 例如本章最后提出的例子就可以通过一些 Sobolev 不等式和插值估计来证明它的全局适定性. 但该方法则需要更深的分析功底, 我们便略过了.

16.1 半线性波动方程简介

一般的 n 维半线性波动方程形如

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \tag{16.1}$$

在某些方面, (16.1) 与一般的线性方程 $u_{tt} - \Delta u = 0$ 是相通的. 这里我们以两个重要性质为例: (1) 能量守恒; (2) 有限传播速度.

能量守恒 类比线性方程, 在紧支的意义下, 我们定义 (16.1) 的能量函数为

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2) + F(u) \right) dx. \tag{16.2}$$

其中函数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$F(y) = \int_0^y f(z)dz.$$

值得注意的是, 这里定义的能量函数并不一定是非负的.

定理 16.1 (能量守恒)

按 (16.2) 定义的能量恒为常数.

证明 直接求导可得

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla(u_t) + u_t F'(u))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t(u_{tt} - \Delta u + f(u))dx = 0. \end{aligned}$$

有限传播速度 作为线性波动方程的特征性质, 有限传播速度对于具有非负能量的半线性方程也同样成立. 以下我们记 $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ 处的特征锥为

$$C(x_0, t_0) \triangleq \{(x, t) : 0 \leqslant t \leqslant t_0, |x - x_0| \leqslant t_0 - t\}.$$

[1] 例如算子半群、变分法、Hahn-Banach 定理、扰动方法等.

定理 16.2 (有限传播速度)

设函数 F 非负, 且 (16.1) 的解在 $x \in B(x_0,t_0), t=0$ 时恒为零, 则 u 在特征锥内恒为零.

证明 我们考虑特征锥截面上的能量函数

$$e(t)=\int_{B(x_0,t_0-t)}\left(\frac{1}{2}(u_t^2+|\nabla u|^2)+F(u)\right)dx.$$

求导可得

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt}&=\frac{d}{dt}\int_0^{t_0-t}\left[\int_{\partial B(x_0,\tau)}\left(\frac{1}{2}(u_t^2+|\nabla u|^2)+F(u)\right)dS\right]d\tau\\
&=\int_0^{t_0-t}\left(\int_{\partial B(x_0,\tau)}(u_tu_{tt}+\nabla u\cdot\nabla(u_t)+u_tf(u))dS\right)d\tau-\\
&\quad\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\left(\frac{1}{2}(u_t^2+|\nabla u|^2)+F(u)\right)dS\\
&=\int_{B(x_0,t_0-t)}u_t(u_{tt}-\Delta u+f(u))dx-\\
&\quad\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\left[\frac{1}{2}\left(u_t^2+|\nabla u|^2-2u_t\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)+F(u)\right]dS\\
&\leqslant\frac{1}{2}\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\left(u_t^2+|\nabla u|^2-2u_t\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)dS.
\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式可得 $|2u_t\frac{\partial u}{\partial \nu}|\leqslant u_t^2+|\nabla u|^2$, 因此 $\dot{e}(t)\leqslant 0$. 结合定理条件可得 $e(0)=0$, 结合非负可得 $e(t)\equiv 0(0\leqslant t\leqslant t_0)$, 因此 $u_t\equiv 0, \nabla u\equiv 0$ in $C(x_0,t_0)\Rightarrow u$ 恒为常数, 结合初值可得 u 在特征锥内恒为零.

笔记 由此可得, 若波动方程的初值紧支, 则对固定的 $t\geqslant 0$, $u(x,t)$ 作为 x 的函数也是紧支的. 下面我们总讨论带有光滑紧支初值的半线性波动方程.

16.2 半线性波动方程解的局部存在唯一性与爆破

本节我们以三维的半线性波动方程的初值问题为例, 讨论解的局部存在唯一性与爆破现象.

$$\begin{cases}u_{tt}-\Delta u+f(u)=0, & x\in\mathbb{R}^3, t>0\\ u|_{t=0}=\varphi,\ u_t|_{t=0}=\psi, & x\in\mathbb{R}^3\end{cases}\tag{16.3}$$

这里 $\varphi,\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ 且 $f(0)=0$.

引理 16.1 (三维非齐次线性波动方程在齐次初值下的解)

以下初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}-\Delta u=g(x,t), & x\in\mathbb{R}^3, t>0\\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0, & x\in\mathbb{R}^3\end{cases}$$

的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{B(x,t)}\frac{g(y,t-|x-y|)}{|x-y|}dy.$$

证明 利用齐次化原理. 考虑齐次问题

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > \tau \\ z|_{t=\tau} = 0,\ z_t|_{t=\tau} = g(x,\tau), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

应用三维的 Kirchhoff 公式可得

$$z(x,t;\tau) = \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int_{\partial B(x,t-\tau)} g(y,\tau) dS(y).$$

从而原初值问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int_{\partial B(x,t-\tau)} g(y,\tau) dS(y) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{4\pi\tau} \int_{\partial B(x,\tau)} g(y,t-\tau) dS(y) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{g(y,t-|x-y|)}{|x-y|} dy. \end{aligned}$$

定理 16.3 (三维半线性波动方程解的局部存在唯一性)

存在 $T>0$, 使得 (16.3) 在 $\mathbb{R}^3 \times [0,T]$ 内存在唯一解 $u(x,t)$.

证明 我们先从形式上讨论 (16.3) 解的形状. 若它的解 $u(x,t)$ 存在, 则由叠加原理可得 $u = v + w$, 其中

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ v|_{t=0} = \varphi,\ v_t|_{t=0} = \psi, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{tt} - \Delta w = -f(u(x,t)), & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ w|_{t=0} = 0,\ w_t|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

其中 v 所满足的初值问题由 Kirchhoff 公式给出唯一解, 由引理 (16.2) 可得

$$w(x,t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{f(u(y,t-|x-y|))}{|x-y|} dy.$$

下面我们总记 $\bar{u}(y) = u(y, t-|x-y|)$, v 就表示由上述齐次线性波动方程初值问题的唯一解. 上面的讨论实际已经为我们应用压缩映射原理指明了方向. 先待定 $T>0$, 考虑函数空间

$$X \triangleq \{u \in C(\mathbb{R}^3 \times [0,T]) : u|_{t=0} = \varphi, \|u - v\|_{L^\infty} \leqslant 1\}.$$

在 L^∞ 范数下, X 作为 Banach 空间 $(C(\mathbb{R}^3 \times [0,T]), \|\cdot\|_\infty)$ 的闭子集, 自然成为 Banach 空间. 定义算子 $A : X \to C(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$ 为

$$(Au)(x,t) = v(x,t) - \frac{1}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{f(\bar{u}(y))}{|x-y|} dy.$$

不难验证, 当 T 充分小时, A 成为 X 到自身的变换. 下面我们来证明 T 充分小时 A 成为压缩映射. 由于 f 是光滑函数, 自然局部 Lipschitz. 又因为 X 中的函数一致有界, 因此存在 $L = L(f,X) > 0$, 使得 $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| \leqslant L|\bar{u} - \bar{v}|, \forall u,v \in X$. 进而

$$\begin{aligned} \|Au - Av\|_{L^\infty(X)} &\leqslant \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^3 \\ t \in [0,T]}} \frac{L}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{|\bar{u}(y) - \bar{v}(y)|}{|x-y|} dy \\ &\leqslant \frac{L}{4\pi} \|u - v\|_{L^\infty(X)} \int_0^t \frac{1}{\tau} \int_{\partial B(x,\tau)} dS d\tau \\ &\leqslant \frac{LT^2}{2} \|u - v\|_{L^\infty(X)}. \end{aligned}$$

取 $T < \sqrt{\frac{2}{L}}$ 即证. 此时初值问题 (16.3) 在 $\mathbb{R}^3 \times [0,T]$ 上存在唯一解.

解的局部存在唯一性解决了. 现在我们开始考虑: (16.3) 的解是否能像 ODE 里那样进行延伸? 如果无法延伸为全局解的话, 解在最大存在区间的端点处性态如何? 是否会发生爆破? 这正是下一条定理所回答的问题.

定理 16.4 (三维半线性波动方程解的爆破)

若初值问题 (16.3) 解的最大存在区间有限, 设右端点为 $\beta > 0$, 则

$$\lim_{t\uparrow\beta} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = +\infty.$$

♡

证明 假设定理所述的极限有界, 即 u 在存在区间上关于 x,t 有一致界, 我们只需证明此时存在区间可以向右延伸即可. 任取 $h \neq 0, k = 1, \cdots, n$, 考虑 u 的差分 $U = \frac{u(x+he_k,t)-u(x,t)}{h}$, 则 U 满足初值问题

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + \sigma U = 0, & x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leqslant T < \beta \\ U|_{t=0} = \Phi,\ U_t|_{t=0} = \Psi, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

这里

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x+he_k) - \varphi(x)}{h}, \quad \Psi(x) = \frac{\psi(x+he_k) - \psi(x)}{h}.$$

$$\sigma(x,t) = \int_0^t (f'(su(x+he_k,t) + (1-s)u(x,t))ds.$$

由 u 有界可得 σ 有界, 并且 σ 的界与 k,h 是无关的. 由前一条定理可得

$$U(x,t) = V(x,t) - \frac{1}{4\pi}\int_{B(x,t)} \frac{\bar{\sigma}\bar{U}}{|x-y|}dy. \tag{16.4}$$

这里 V 是初值问题

$$\begin{cases} V_{tt} - \Delta V = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ V|_{t=0} = \Phi,\ V_t|_{t=0} = \Psi, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的解, 由初值紧支可得 V 紧支, 自然有界. 结合 (16.4) 可得存在与 k,h 无关的 $M > 0$ 使得

$$\|U(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leqslant M + M\int_0^t \|U(\cdot,t)\|_{L^\infty} dt.$$

应用 Gronwall 不等式可得

$$\|U(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leqslant Me^{Mt} \leqslant Me^{M\beta}.$$

于是我们估计出了一阶差分的一个一致上界, 因此 u 的一阶偏导均有一致上界. 类似可证明 u 的各阶偏导都有一致的上界. 从而 u 可以延伸到 $t = \beta$ 处, 矛盾!

16.3 解的爆破: 更进一步的讨论

本节我们来讨论一类半线性波动方程, 来证明它的解一定不是全局存在的.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{16.5}$$

这里我们仍旧要求初值光滑紧支, 且 $f(0) = 0$. 我们要求该方程的能量函数 (16.2) 满

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2}(\psi^2 + |\nabla\varphi|^2) + F(\varphi(x))\right) dx < 0. \tag{16.6}$$

并且存在 $\lambda > 2$, 使得函数 f 满足

$$yf(y) \leqslant \lambda F(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{16.7}$$

则有:

定理 16.5

在条件 (16.6) 和 (16.7) 下, 初值问题 (16.5) 不存在光滑的全局解 (即在 $t \geqslant 0$ 上存在).

证明 假设存在全局光滑解 u. 我们考虑另一种形式的能量函数

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx.$$

计算可得

$$\begin{aligned} I''(t) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} uu_t dx = \int_{\mathbb{R}^n} (u_t^2 + uu_{tt})dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [u_t^2 + u(\Delta u - f(u))]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t^2 + |\nabla u|^2 - uf(u))dx \end{aligned}$$

设 $\alpha = \frac{\lambda-2}{4}$, 由能量守恒可得 $E(t) = E(0)$, 所以

$$\begin{aligned} I''(t) &= (2+4\alpha)E(t) + I'' - (2+4\alpha)E(0) \\ &= (2+2\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx + 2\alpha\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} ((2+4\alpha)F(u) - uf(u))dx - (2+4\alpha)E(0). \end{aligned}$$

由于我们已给定了 $uf(u) \leqslant (2+4\alpha)F(u)$, 因此

$$I''(t) \geqslant (2+2\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx - (2+4\alpha)E(0).$$

由于 $I'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} uu_t dx$, 由 Hölder 不等式估计可得

$$(1+\alpha)I'(t)^2 \leqslant (1+\alpha)\left(\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx\right) \leqslant I(t)(I''(t) + \lambda E(0)).$$

此时考虑 $J(t) = I(t)^{-\alpha}$, 下面我们记 $\beta = -\lambda E(0) > 0$, 则

$$J''(t) = \alpha(\alpha+1)(I')^2 I^{-\alpha-2} - \alpha I'' I^{-\alpha-1} \leqslant -\alpha\beta I^{-\alpha-1} = -\alpha\beta J^{1+\frac{1}{\alpha}}.$$

由此可得 J 是关于 t 的凹函数.

- 假设存在 $T > 0$ 使得 $J'(T) < 0$. 则由凹性可得

  $$J(t) \leqslant J(T) + (t-T)J'(T)(t \geqslant 0).$$

  由此可得 t 充分大时 $J < 0$, 这与 J 的非负性矛盾!
- 从而 $J'(t) \geqslant 0$ 恒成立, 即 J 单调递增. 从而

  $$J''(t) \leqslant -\alpha\beta J(t)^{1+\frac{1}{\alpha}} \leqslant -\alpha\beta J(0)^{1+\frac{1}{\alpha}} \triangleq -\gamma.$$

  不难验证 $\gamma > 0$. 由此可得

  $$J'(t) \leqslant J'(0) - \gamma t.$$

  当 t 充分大时 $J'(t) < 0$, 矛盾!

综上可得初值问题 (16.5) 不存在光滑的全局解.

笔记 本定理以一个较为初等的例子展示了能量估计的妙用.

当能量非负时, 存在一些具有全局解的半线性波动方程的例子. 例如:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi,\ u_t|_{t=0} = \psi, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

其中 $1 < p \leqslant 5$. 但是这个问题的讨论需要用到非常硬核的先验估计和 Sobolev 不等式, 完全超出了这门课的范围. 等大家学完微分方程 (II) 与高等实分析后再来刷这个副本吧!

第 17 章 2019 秋微分方程 (I) 期末参考解答 (宁班)(by 黄天一)

问题 17.1(每小题 5 分, 共 30 分)

1. 偏微分方程 $u_{xx} - 2\sin y u_{xy} - \cos^2 y u_{yy} + xu_x - yu_y + u = 0$ 的类型是 (　　).
2. 波动方程初值问题 $u_{tt} - 4u_{xx} = 0, u|_{t=0} = x^2, u_t|_{t=0} = 2x$ 的解是 (　　).
3. 热方程定解问题 $u_t = 2u_{xx}(0 < x < 1, t > 0); u|_{t=0} = x^2(1-x), u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = \sin^2 t$ 的解 $u(x,t)$ 在 $[0,1] \times [0,+\infty)$ 上的最大、最小值分别是 (　　).
4. 设函数 u 在有界区域 $D \subset \mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ 上调和, 且在 $\overline{D}$ 上有连续的一阶偏导数, 则 $\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS =$ (　　).
5. 设 $u(x,t)$ 满足 $u_t = 9\Delta u (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), u|_{t=0} = e^{-9|x|^2}$, 则 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(0,t) =$ (　　).
6. 给出将方程 $u_t = 8u_{xx} + 2u_x^2$ 化为热方程 $v_t = 8v_{xx}$ 的一个变换 $v(u) =$ (　　).

解

1. 由于 $\Delta = (-\sin y)^2 + \cos^2 y = 1 > 0$, 故方程为双曲型.
2. 由 d'Alembert 公式可得解为
$$u(x,t) = \frac{1}{2}[(x+2t)^2 + (x-2t)^2] + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} 2s ds = x^2 + 4t^2 + 2xt.$$
3. 记 $Q = (0,1) \times (0,+\infty), \Gamma = \overline{Q} \setminus \overline{Q}$, 由最值原理可得
$$\max_{\overline{Q}} u = \max_{\Gamma} u = 1, \quad \min_{\overline{Q}} u = \min_{\Gamma} u = 1.$$
4. 由 Green 公式可得
$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int_D \Delta u dx = 0.$$
5. 借助 n 维热核可得
$$\begin{aligned} u(0,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} K(-y,t)\varphi(y)dy = \frac{1}{(36\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{36t} - 9|y|^2} dy \\ &= \frac{1}{(36\pi t)^{\frac{n}{2}}}\prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-(\frac{1}{36t}+9)|y_k|^2} dy_k = \frac{1}{(36\pi t)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{1}{36t}+9\right)^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-|z_k|^2} dz_k \\ &= \left(\frac{1}{1+324t}\right)^{\frac{n}{2}} \to 0 (t \to +\infty). \end{aligned}$$
6. 计算可得
$$u_t = u'(v)v_t, \quad u_x = u'(v)v_x, \quad u_{xx} = u''(v)v_x^2 + u'(v)v_{xx}.$$
代回原方程可得
$$v_t = 8v_{xx} + \frac{8u''(v) + 2u'(v)^2}{u'(v)} v_x^2.$$
只需令 $8u''(v) + 2u'(v)^2 = 0$, 由此求得一可逆解 $u = 4\ln v$, 于是符合要求的一个变换为 $v = e^{\frac{u}{4}}$.

问题 17.2(10 分) 设 $u(x,t)$ 是如下三维波动方程初值问题
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$
的光滑解, 其中 $c > 0$ 为常数, $\varphi(x), \psi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. 证明: 存在常数 $C > 0$ 使得 $|u(x,t)| \leqslant \frac{C}{t}(x \in$

$\mathbb{R}^3, t>0)$.

证明 由 Kirchhoff 公式可得初值问题的解为

$$u(x,t)=t\fint_{\partial B(x,ct)}\psi(y)dS(y)+\frac{\partial}{\partial t}\left(t\fint_{\partial B(x,ct)}\varphi(y)dS(y)\right).$$

整理可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\fint_{\partial B(x,ct)}\varphi(y)dS(y)\right)&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(0,1)}\varphi(x+ctz)dS(z)\right)\\&=\fint_{\partial B(0,1)}cz\cdot\nabla\varphi(x+ctz)dS(z)\\&=\fint_{\partial B(x,ct)}\nabla\varphi(y)\cdot\frac{y-x}{t}dS(y).\end{aligned}$$

由此可得

$$u(x,t)=\fint_{\partial B(x,ct)}(t\psi(y)+\varphi(y)+\nabla\varphi(y)\cdot(y-x))dS(y).$$

进而成立估计式

$$\begin{aligned}|tu(x,t)|&\leqslant\frac{1}{4\pi c^2t}\fint_{\partial B(x,ct)}(t|\psi(y)|+|\varphi(y)|+|\nabla\varphi(y)||y-x|)dS(y)\\&\leqslant\frac{1}{4\pi c^2}\int_{\partial B(x,ct)}(|\psi(y)|+c|\varphi(y)|)dS(y)+\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{\partial B(x,ct)}|\varphi(y)|dS(y).\end{aligned}$$

我们可以从两个角度估计 RHS 中的积分. 设 φ 的支集包含于球 $B(0,R)$, 则球面 $\partial B(x,ct)$ 同 $B(0,R)$ 的交为球冠, 其高度不超过 $2R$, 底面半径不超过 R. 所以相交得到的球冠面积不超过 $4\pi R^2$. 进而得到

$$\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{\partial B(x,ct)}|\varphi(y)|dS(y)\leqslant\frac{1}{4\pi c^2t}\cdot4\pi R^2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}=\frac{R^2}{c^2t}\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)},$$

$$\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{\partial B(x,ct)}|\varphi(y)|dS(y)\leqslant t\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}.$$

由此可得

$$\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{\partial B(x,ct)}|\varphi(y)|dS(y)\leqslant\min\left\{\frac{R^2}{c^2t}\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)},t\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right\}=\frac{R}{c}\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}.$$

类似地也有

$$\frac{1}{4\pi c^2}\int_{\partial B(x,ct)}(|\psi(y)|+c|\varphi(y)|)dS(y)\leqslant\frac{R^2}{c^2}(\|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}+c\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}).$$

综上可得存在 $C>0$, 使得 $|tu(x,t)|\leqslant C, \forall x\in\mathbb{R}^3, t>0$.

问题 17.3(10 分) 找出所有 $\omega\in\mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases}u|_{tt}=4u_{xx}+\sin(\pi x)\sin(\omega t), & 0<x<1,t>0\\u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0\\u|_{x=0}=u|_{x=1}=0\end{cases}$$

的解 $u(x,t)$ 在 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上有界.

解 利用齐次化原理求解. 设函数 $z(x,t;\tau)$ 满足

$$\begin{cases} z_{tt}=4z_{xx}, 0<x<1, t>\tau \\ u|_{t=\tau}=0, u_t|_{t=\tau}=\sin(\pi x)\sin(\omega\tau) \\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0 \end{cases}$$

考虑上述初边值问题的分离解 $T(t-\tau)X(x)$, 则 $\frac{T''(t-\tau)}{4T(t-\tau)}=\frac{X''(x)}{X(x)}:=-\lambda$. 求解 X 关于 x 的边值问题可得特征值、特征函数为 $\lambda_n=n^2\pi^2, X_n(x)=\sin(n\pi x)$. 代回得

$$T''(t-\tau)+(2n\pi)^2T_n(t-\tau)=0\Rightarrow T_n(t-\tau)=A_n\cos(2n\pi(t-\tau))+B_n\sin(2n\pi(t-\tau)).$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\pi x)=0, \sum_{n=1}^{\infty}2n\pi B_n\sin(n\pi x)=\sin(\pi x)\sin(\omega\tau).$$

作 Fourier 展开可得

$$A_n=0, B_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sin(\omega\tau)\sin(\pi x)\sin(n\pi x)dx=\begin{cases}\frac{\sin(\omega\tau)}{2\pi}, n=1\\ 0, n\neq 1\end{cases}$$

由此可得

$$z(x,t;\tau)=\frac{\sin(\omega\tau)}{2\pi}\sin(2\pi(t-\tau))\sin(\pi x).$$

积分可得

$$u(x,t)=\int_0^t z(x,t;\tau)d\tau=\begin{cases}\frac{\sin(\pi x)}{2\pi}\cdot\frac{2\pi\sin(\omega t)-\omega\sin(2\pi t)}{4\pi^2-\omega^2}, & \omega\neq\pm 2\pi\\ \frac{\sin(\pi x)}{4\pi}\cdot\frac{\sin(2\pi t)-2\pi t\cos(2\pi t)}{2\pi}, & \omega=2\pi\\ \frac{\sin(\pi x)}{4\pi}\cdot\frac{2\pi t\cos(2\pi t)-\sin(2\pi t)}{2\pi}, & \omega=-2\pi\end{cases}$$

由此可得当 $\omega\neq\pm 2\pi$ 时，$|u(x,t)|$ 有上界 $\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi+|\omega|}{|4\pi^2-\omega^2|}$；当 $\omega=\pm 2\pi$ 时，$u(x,t)$ 无界.

问题 17.4(10 分) 令 $c\leqslant 0$ 为常数, 考虑如下热方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+cu, \quad 0<x<1, t>0 \\ u|_{t=0}=x \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=1 \end{cases}$$

证明: $0\leqslant u(x,t)\leqslant 1$ 对所有 $x\in[0,1], t\geqslant 0$ 均成立.

证明 任取 $T>0$, 我们只需证明: 对所有 $x\in[0,1], 0\leqslant t\leqslant T$, 均成立 $0\leqslant u(x,t)\leqslant 1$. 实则只需证明 u 在 $\overline{Q}_T$ 上的最值必在抛物边界上取到.

假设 $\max_{\overline{Q}_T}u>\max_{\Gamma_T}u$, 则当 $\varepsilon>0$ 充分小时, $v\triangleq u-\varepsilon t$ 同样满足 $\max_{\overline{Q}_T}v>\max_{\Gamma_T}v$. 设 v 在 $\overline{Q}_T$ 上的最大值点为 $(x_0,t_0)\in Q_T$, 则 $v_{xx}(x_0,t_0)\leqslant 0$ 且 $v_t(x_0,t_0)\geqslant 0$. 注意到 v 满足

$$v_t=u_t-\varepsilon=u_{xx}+cu-\varepsilon=v_{xx}+cv+\varepsilon(ct-1).$$

结合 v 的最大值大于 1 可得

$$0\leqslant v_t(x_0,t_0)=v_{xx}(x_0,t_0)+cv(x_0,t_0)+\varepsilon(ct_0-1)\leqslant\varepsilon(ct_0-1)<0.$$

矛盾! 因此 $\max_{\overline{Q}_T}u=\max_{\Gamma_T}u$.

假设 $\min_{\overline{Q}_T}u<\in_{\Gamma_T}u$, 则此时在 $\varepsilon>0$ 充分小时选取 $v=u+\varepsilon t$, 此时也有 $\min_{\overline{Q}_T}v<\min_{\Gamma_T}v$. 设

v 在 $\overline{Q}_T$ 上的最小值点为 $(x_0,t_0)\in Q_T$, 则 $v_{xx}(x_0,t_0)\geqslant 0$ 且 $v_t(x_0,t_0)\leqslant 0$. 注意到 v 满足

$$v_t=u_t+\varepsilon=v_{xx}+cv+\varepsilon(1-ct).$$

结合 v 的最小值小于 0 可得

$$0\geqslant v_t(x_0,t_0)=v_{xx}(x_0,t_0)+cv(x_0,t_0)+\varepsilon(1-ct_0)\geqslant\varepsilon(1-ct_0)>0.$$

矛盾! 因此 $\min_{\overline{Q}_T}u=\min_{\Gamma_T}u$.

问题 17.5(10 分) 设 $k>0$ 与 c 均为常数, 求解下列热方程的初值问题

$$\begin{cases}u_t=k\Delta u+cu+f(x,t), & x\in\mathbb{R}^3,\ t>0\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

解 这里我们利用齐次化原理求解. 首先考虑齐次方程

$$\begin{cases}v_t=k\Delta v+cv, & x\in\mathbb{R}^3,\ t>0\\ v(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}^3\end{cases}$$

作变换 $\bar{v}=ve^{-ct}$, 则有 $\bar{v}_t=(v_t-cv)e^{-ct}$, $\Delta\bar{v}=\Delta v\cdot e^{-ct}$, 因此

$$\bar{v}_t=k\Delta\bar{v},\quad \bar{v}(x,0)=\varphi(x).$$

由此可得

$$v(x,t)=\bar{v}(x,t)e^{ct}=\frac{e^{ct}}{(4k\pi t)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)dy.$$

然后考虑齐次边界下的非齐次方程

$$\begin{cases}w_t=k\Delta w+cw+f(x,t), & x\in\mathbb{R}^3,t>0\\ w(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}^3\end{cases}$$

考虑初值问题

$$z_t=k\Delta z+cz(t>\tau>0),\quad z(x,\tau)=f(x,\tau).$$

类似前者可求得

$$z(x,t;\tau)=\frac{e^{c(t-\tau)}}{(4k\pi(t-\tau))^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-\tau)}}\varphi(y)dy.$$

由齐次化原理即可得

$$w(x,t)=\int_0^t z(x,t;\tau)d\tau=\int_0^t\frac{e^{c(t-\tau)}}{(4k\pi(t-\tau))^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-\tau)}}\varphi(y)dyd\tau.$$

由叠加原理可得原方程的解为

$$u(x,t)=\frac{e^{ct}}{(4k\pi t)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)dy+\int_0^t\frac{e^{c(t-\tau)}}{(4k\pi(t-\tau))^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-\tau)}}\varphi(y)dyd\tau.$$

问题 17.6(10 分) 设区域 $D_0\subset D\subset\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 均有界, 证明如下边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=0\quad \text{in } D\setminus\overline{D}_0\\ \left(u+\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right)\Big|_{\partial D}=0,\ \left(u-\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\right)\Big|_{\partial D_0}=0\end{cases}$$

的解恒为零.

证明 设 u 是边值问题的解, 则有

$$\begin{aligned}E&=\int_{D\setminus\overline{D}_0}|\nabla u|^2dx\\&=\int_{\partial D}u\frac{\partial u}{\partial\nu}dS-\int_{\partial D_0}u\frac{\partial u}{\partial\nu}dS-\int_{D\setminus\overline{D}_0}u\Delta udx\\&=-\int_{\partial D}u^2dS-\int_{\partial D_0}u^2dS\leqslant 0.\end{aligned}$$

另一方面, $E\geqslant 0$, 所以 $E=0\Rightarrow\nabla u\equiv 0\Rightarrow u$ 为常数. 结合边值条件即可得 u 恒为零.

问题 17.7(10 分) 设区域 $D\subset\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 有界, 证明:

$$\begin{cases}\Delta u+u^2(1-u)=0 & \text{in } D\\ u|_{\partial D}=0\end{cases}$$

的任一解 $u(x)$ 满足 $0\leqslant u(x)\leqslant 1, x\in D$.

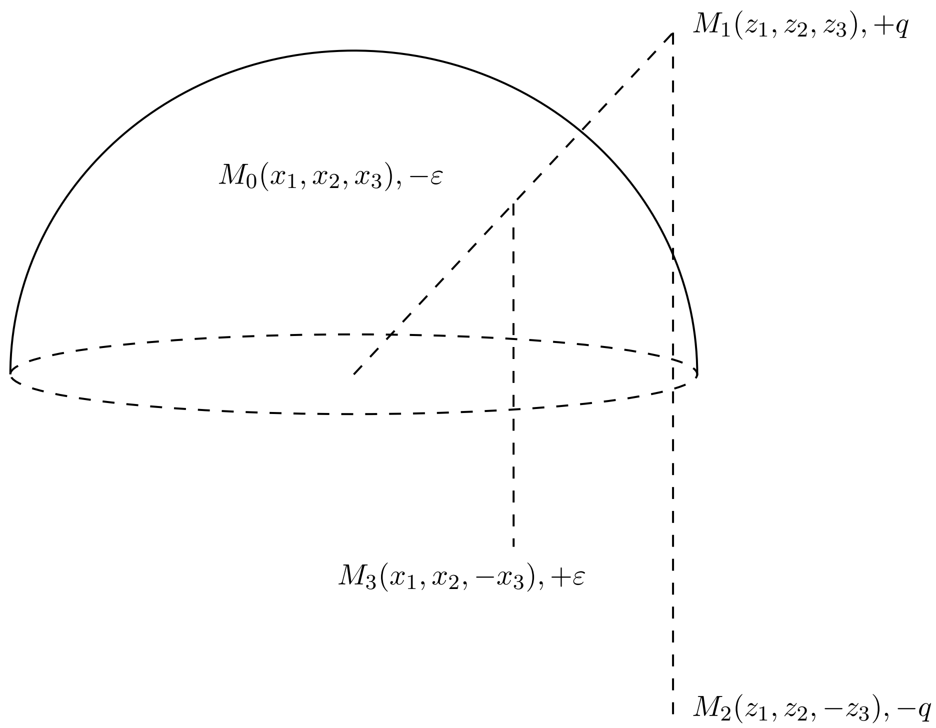
证明 设 $x_1,x_2\in\overline{D}$ 分别是 u 在 $\overline{D}$ 上的最小值、最大值点.

假设 $u(x_1)<0$, 由边值条件可得 $x_1\in D$. 此时 Hessian 矩阵 D^2u 半正定, 因此 $\Delta u(x_1)=\operatorname{tr}(D^2u(x_1))\geqslant 0$. 但是 $\Delta u(x_1)=u(x_1)^2(u(x_1)-1)<0$, 矛盾!

假设 $u(x_2)>1$, 由边值条件可得 $x_2\in D$. 此时 Hessian 矩阵 D^2u 半负定, 因此 $\Delta u(x_2)=\operatorname{tr}(D^2u(x_2))\leqslant 0$. 但是 $\Delta u(x_2)=u(x_2)^2(u(x_2)-1)>0$, 矛盾!

综上可得 $0\leqslant u(x)\leqslant 1$ 对任意 $x\in\overline{D}$ 都成立.

问题 17.8(10 分) 请找出半球 $D=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:x_1^2+x_2^2+x_3^2<1,x_3>0\}$ 的 Green 函数以及边值问题 $\Delta u=0(x\in D), u|_{\partial D}=x_1x_2x_3$ 的解.



解 如图所示, 考虑半球内两点 $M_0(x_1,x_2,x_3)$ 和 $M(y_1,y_2,y_3)$. 设 M_0 处电荷为 $-\varepsilon$, 记 $M_1=(z_1,z_2,z_3)$ 为 M_0 关于球面的对称点, M_2,M_3 分别是 M_1,M_0 关于底面的对称点. 设 M_1 处电荷为 $+q$, 由于球面上电势为零, 且 $|x|\cdot|z|=1$, 故

$$k\frac{-\varepsilon}{1-|x|}+k\frac{q}{|z|-1}=0\Rightarrow q=\frac{\varepsilon}{|x|}.$$

从而 Green 函数 $G(x,y)$, 即 M 处的电势为

$$\begin{aligned}G(x,y)=\frac{1}{4\pi}\Bigg(&\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2}}\\&+\frac{|x|}{\sqrt{(x_1-|x|^2y_1)^2+(x_2-|x|^2y_2)^2+(x_3-|x|^2y_3)^2}}\\&-\frac{|x|}{\sqrt{(x_1-|x|^2y_1)^2+(x_2-|x|^2y_2)^2+(x_3+|x|^2y_3)^2}}\\&-\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}}\Bigg).\end{aligned}$$

当 $y\in\partial B(0,1)$ 时, 成立

$$(x_1-|x|^2y_1)^2+(x_2-|x|^2y_2)^2+(x_3-|x|^2y_3)^2=|x|^2((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2).$$

$$(x_1-|x|^2y_1)^2+(x_2-|x|^2y_2)^2+(x_3+|x|^2y_3)^2=|x|^2((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2).$$

由此计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial\nu}\bigg|_{\partial D\cap\mathbb{R}^3_+}&=\sum_{i=1}^{3}y_i\frac{\partial G}{\partial y_i}\\&=\frac{1-|x|^2}{4\pi}\left(\frac{1}{((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2)^{\frac{3}{2}}}\right).\end{aligned}$$

所以边值问题的解为

$$\begin{aligned}u(x)=\frac{1-|x|^2}{4\pi}\int_{\partial D\cap\mathbb{R}^3_+}y_1y_2y_3\Bigg(&\frac{1}{((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2)^{\frac{3}{2}}}\\&-\frac{1}{((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg)dS(y).\end{aligned}$$

参考公式:

1. Laplace 算子的极坐标形式:
$$\Delta_2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\ \Delta_3=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$
2. Green 第一公式: $\int_D v\Delta u dx=\int_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial\nu}dS-\int_D\nabla v\cdot\nabla u dx$; n 维热核 $S(x,t)=\frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}$.
3. 调和方程基本解: $V(x-y)=\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|(n=2)$, $V(x-y)=-\frac{1}{4\pi|x-y|}(n=3)$.
4. 三维波动方程 Kirchhoff 公式: $x\in\mathbb{R}^3, t>0$
$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi c^2t}\int_{S_{ct}(x)}\psi(y)dS(y)+\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_{ct}(x)}\frac{\varphi(y)}{t}dS(y).$$
5. $\mathbb{R}^n$ 中的 Fourier 变换和逆变换:
$$\mathscr{F}[f](\xi)=\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx,\quad \mathscr{F}^{-1}[f](x)=\check{f}(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$

第 18 章 2020 秋微分方程 (I) 期末参考解答 (赵班)(By 黄天一)

问题 18.1(30 分)

1. (15 分) 用分离变量法求解下列弦振动方程.
$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = -2b\partial_t u + g(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$
其中 $b > 0$ 为常数.
2. (15 分) 用能量方法证明解的唯一性.

证明

1. 定解问题对应 S-L 边值问题的特征值, 特征函数为
$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}(n \geqslant 1).$$
在正交基 $\{X_n(x) : n = 1, 2, \cdots\}$ 下作 Fourier 展开, 可得
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$
其中
$$g_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l g(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$
由此可得
$$T_n''(t) + 2bT_n'(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = g_n(t), \quad T_n(0) = T_n'(0) = 0. \tag{18.1}$$
考虑两种情况分类讨论.
(1) 若对任意 $n \geqslant 1$, 有 $b \neq \frac{n\pi}{l}$, 则方程 (18.1) 的特征值为相异复数
$$\lambda_n = -b - \sqrt{b^2 - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}, \quad \mu_n = -b + \sqrt{b^2 - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}.$$
因此 (18.1) 的解为
$$T_n(t) = \int_0^t \frac{e^{\mu_n(t-s)} - e^{\lambda_n(t-s)}}{\mu_n - \lambda_n} g_n(s)ds.$$
所以原初边值问题的解为
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t \frac{e^{\mu_n(t-s)} - e^{\lambda_n(t-s)}}{\mu_n - \lambda_n} g_n(s)ds\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$
其中 λ_n, μ_n, g_n 的定义如前.
(2) 若 $b = \frac{m\pi}{l}$, 其中 $m \in \mathbb{N}_+$. 则当 $n = m$ 时方程 (18.1) 的特征值为二重根 $-b$, 故其解为
$$T_m(t) = \int_0^t \frac{t-s}{e^{b(t-s)}} g_m(s)ds.$$
所以此时原初边值问题的解为
$$u(x,t) = \sum_{1 \leqslant n \neq m}\left(\int_0^t \frac{e^{\mu_n(t-s)} - e^{\lambda_n(t-s)}}{\mu_n - \lambda_n} g_n(s)ds\right)\sin\frac{n\pi x}{l} + \left(\int_0^t \frac{t-s}{e^{b(t-s)}} g_m(s)ds\right)\sin\frac{m\pi x}{l}.$$
其中 λ_n, μ_n, g_n 的定义如前.

2. 设 u_1, u_2 均为题设初边值问题的解, 令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 满足初边值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \partial_x^2 w = -2b\partial_t w, & 0 < x < l, t > 0 \\ w(0,t) = w(l,t) = 0, & t \geqslant 0 \\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

定义能量函数

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (w_t^2 + w_x^2)dx.$$

则有

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l (w_t w_{tt} + w_x w_{tx})dx = \int_0^l w_t(w_{tt} - w_{xx})dx + w_x w_t\Big|_0^l = -2b\int_0^l w_t^2 dx \leqslant 0.$$

由此可得 $0 \leqslant E(t) \leqslant E(0) = 0, \forall t \geqslant 0$. 所以 $E(t) \equiv 0 \Rightarrow w_t \equiv w_x \equiv 0 \Rightarrow w$ 恒为常数. 结合初边值可得 w 恒为零. 所以 $u_1 \equiv u_2$, 即解是唯一的.

问题 18.2(20 分)

1. (15 分) 求解方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \vec{b}\cdot\nabla u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

其中 $\vec{b} = (1, 1, \cdots, 1)$.

2. (5 分) 若 u_0 是可积函数, 当 $t \to +\infty$ 时, 解的渐近形态如何?

解

1. 利用 Fourier 变换求解. 对 u 关于空间变量 x 作 Fourier 变换, 则

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + |\xi|^2\hat{u} = i(\vec{b}\cdot\xi)\hat{u}, \quad \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi).$$

求解该 ODE 可得

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi)e^{(i(\vec{b}\cdot\xi)-|\xi|^2)t}.$$

作 Fourier 逆变换可得

$$F^{-1}[e^{(i(\vec{b}\cdot\xi)-|\xi|^2)t}] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2 t}e^{i(t\vec{b}+x)\cdot\xi}d\xi = \frac{1}{\pi^n}\prod_{i=1}^n \int_0^\infty e^{-\xi_i^2 t}\cos(x_i+t)\xi_i d\xi_i.$$

定义含参变量积分

$$I_t(x_i) = \int_0^\infty e^{-\eta^2 t}\cos((x_i+t)\eta)d\eta.$$

则有 $I_t(-t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$, 且

$$\begin{aligned} \frac{dI_t}{dx_i} &= -\int_0^\infty \eta e^{-\eta^2 t}\sin((x_i+t)\eta)d\eta = \frac{1}{2t}\int_0^\infty \frac{d}{d\eta}(e^{-\eta^2 t})\sin((x_i+t)\eta)d\eta \\ &= \frac{1}{2t}e^{-\eta^2 t}\sin((x_i+t)\eta)\Big|_0^\infty - \frac{x_i+t}{2t}\int_0^\infty e^{-\eta^2 t}\cos((x_i+t)\eta)d\eta \\ &= -\frac{x_i+t}{2t}I_t(x_i). \end{aligned}$$

求解上述 ODE 的初值问题可得

$$I_t(x_i) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(x_i+t)^2}{4t}}.$$

代回原 Fourier 逆变换的表达式可得

$$F^{-1}[e^{(i(\vec{b}\cdot\xi)-|\xi|^2)t}] = \frac{1}{\pi^n}\prod_{i=1}^{n} I_t(x_i) = \frac{e^{-\frac{nt}{4}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot x} \triangleq K(x,t).$$

则原初值问题的解为

$$u(x,t) = F^{-1}[\hat{u}_0(\xi)\hat{K}(\xi,t)] = (u_0 * K)(x,t) = \frac{e^{-\frac{nt}{4}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4t}-\frac{\vec{b}}{2}\cdot y} u_0(x-y)dy.$$

2. 计算可得

$$\exp\left\{-\frac{|y|^2}{4t} - \frac{\vec{b}}{2}\cdot y\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{4t}(|y+t\vec{b}|^2 - |t\vec{b}|^2)\right\} \leqslant \exp\left\{\frac{|t\vec{b}|^2}{4t}\right\} = e^{\frac{nt}{4}}.$$

因此有

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{e^{-\frac{nt}{4}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{nt}{4}}|u_0(x-y)|dy = \frac{\|u_0\|_{L^1}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}.$$

由此可得一致极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$.

问题 18.3(10 分) 设 u,v 分别满足 $\mathbb{R}^3$ 上的波动方程 $\partial_t^2 u - \Delta u = f(x,t)$, $\partial_t^2 v - \Delta v = (f\mathbb{1}_E)(x,t)$, 其中 $E = \{(x,t) : |x| > |t|\}$, $\mathbb{1}_E(x,t)$ 表示 E 上的示性函数. 并且 $u(x,0) = v(x,0)$, $\partial_t u(x,0) = \partial_t v(x,0)$. 证明: 当 $|x| > |t|$ 时, $u(x,t) = v(x,t)$.

证明 记 $F = \mathbb{R}^4 \setminus E = \{(x,t) : |x| \leqslant |t|\}$, 令 $w = u - v$, 则 w 满足初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = (f\mathbb{1}_F)(x,t) \\ w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

定义能量函数

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_{|x|\geqslant|t|} (w_t^2 + |\nabla w|^2)dx.$$

求导可得

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{|x|\geqslant|t|}(w_t^2+|\nabla w|^2)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{|t|}^{\infty}\int_{\partial B(x,\tau)}(w_t^2+|\nabla w|^2)dSd\tau \\
&= -\frac{\operatorname{sgn}(t)}{2}\int_{|x|=|t|}(w_t^2+|\nabla w|^2)dS + \int_{|t|}^{\infty}\int_{\partial B(x,\tau)}(w_t w_{tt} + \nabla w\cdot\nabla(w_t))dSd\tau \\
&= -\frac{\operatorname{sgn}(t)}{2}\int_{|x|=|t|}(w_t^2+|\nabla w|^2)dS + \int_{|x|\geqslant|t|}(w_t w_{tt} + \nabla w\cdot\nabla(w_t))dx \\
&= -\frac{\operatorname{sgn}(t)}{2}\int_{|x|=|t|}(w_t^2+|\nabla w|^2)dS + \int_{|x|\geqslant|t|}(w_t(w_{tt} - \Delta w))dx + \int_{|x|=|t|} w_t\frac{\partial w}{\partial\nu}dS \\
&= -\frac{\operatorname{sgn}(t)}{2}\int_{|x|=|t|}(w_t^2+|\nabla w|^2)dS + \int_{|x|=|t|} w_t\frac{\partial w}{\partial\nu}dS.
\end{aligned}$$

若 $t > 0$, 则

$$\dot{e}(t) = -\frac{1}{2}\int_{|x|=|t|}\left(w_t^2 + |\nabla w|^2 - 2w_t\frac{\partial w}{\partial\nu}\right)dS \leqslant -\frac{1}{2}\int_{|x|=|t|}(|w_t| - |\nabla w|)^2 dS \leqslant 0.$$

若 $t < 0$, 则

$$\dot{e}(t) = \frac{1}{2}\int_{|x|=|t|}\left(w_t^2 + |\nabla w|^2 + 2w_t\frac{\partial w}{\partial\nu}\right)dS \geqslant -\frac{1}{2}\int_{|x|=|t|}(|w_t| - |\nabla w|)^2 dS \geqslant 0.$$

综上可得 $0 \leqslant e(t) \leqslant e(0) = 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow e(t) \equiv 0$. 所以在 E 上恒有 $w_t = 0, \nabla w = 0 \Rightarrow w$ 为常数. 结合

初值可得 w 恒为零, 即有 $u(x,t)=v(x,t)$.

问题 18.4(20 分) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域且边界光滑. 设 $x_0\in\Omega$, $G(x,x_0)$ 表示 Ω 上的格林函数.

1. (10 分) 证明格林函数是唯一的.
2. (10 分) 证明: 对任意 $x\in\Omega\setminus\{x_0\}$, $-\frac{1}{4\pi|x-x_0|}<G(x,x_0)<0$.

证明

1. 假设 G_1,G_2 均为 Green 函数, 令 $F=G_1-G_2$, 则

$$\Delta_x F(x,x_0)=0,\quad F|_{x\in\partial\Omega}=0.$$

对任一 $x_0\in\Omega$, 由调和函数的最值原理可得

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|F(x,x_0)|=\max_{x\in\partial\Omega}|F(x,x_0)|=0\Rightarrow F\equiv 0.$$

所以 $G_1\equiv G_2$, Green 函数唯一.

2. 设修正函数为 $H(x,x_0)$, 即 $G(x,x_0)=V(x-x_0)+H(x,x_0)$. 则 H 满足边值问题

$$\begin{cases}\Delta H_x(x,x_0)=0, & x\in\Omega\\ H(x,x_0)=-V(x-x_0), & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

对任一 x_0, 由调和函数的最值原理可得

$$\min_{x\in\overline{\Omega}}H(x,x_0)=\min_{x\in\partial\Omega}H(x,x_0)=\min_{x_0\in\partial\Omega}\frac{1}{4\pi|x-x_0|}>0.$$

所以

$$G(x,x_0)=V(x-x_0)+H(x,x_0)>V(x-x_0)=-\frac{1}{4\pi|x-x_0|}.$$

另一方面, 由 $\lim\limits_{x\to x_0}G(x,x_0)=-\infty$ 可得存在 $\rho>0$ 使得 $B(x_0,\rho)\subset\Omega$ 且 $G(x,x_0)<0, \forall x\in\overline{B(x_0,\rho)}\setminus\{x_0\}$. 由于 G 满足边值问题

$$\begin{cases}\Delta_x G(x,x_0)=0, & x\in\Omega\setminus\overline{B(x_0,\rho)}\\ G(x,x_0)=0, & x\in\partial\Omega\\ G(x,x_0)<0, & x\in\partial B(x_0,\rho)\end{cases}$$

由强最大值原理可得 $G(x,x_0)<0, \forall x\in\Omega\setminus B(x_0,\rho)$. 综上可得 $G(x,x_0)<0$.

问题 18.5(20 分) 称函数 u 在 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 上是次调和的, 如果在 Ω 上 $\Delta u\geqslant 0$. 证明: $u\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 是次调和的当且仅当对任意的球 $B(x_0,r)\subset\Omega$, 有

$$u(x_0)\leqslant\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}u(x_0+r\omega)dS(\omega).$$

证明 若 u 是次调和的, 考虑函数

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}u(x_0+r\omega)dS(\omega).$$

求导可得

$$\begin{aligned}\varphi'(r)&=\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}\nabla u(x_0+r\omega)\cdot\omega dS(\omega)\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{|x-x_0|=r}\nabla u(x)\cdot\frac{x-x_0}{r}dS(x)\\&=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{|x-x_0|\leqslant r}\Delta u(x)dx\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此 $\varphi(r)$ 关于 r 递增, 所以

$$u(x_0)=\lim_{r\downarrow 0}\varphi(r)\leqslant\varphi(r)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}u(x_0+r\omega)dS(\omega).$$

反之, 假设 u 在 Ω 上不是次调和的, 则存在 $x_0\in\Omega$ 使得 $\Delta u(x_0)<0$. 由连续性可设 $R>0$ 使得 Δu 在 $B(x_0,R)\subset\Omega$ 内恒小于零. $\varphi(r)$ 定义如前. 则任取 $0<r<R$, 有

$$\varphi'(r)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{|x-x_0|\leqslant r}\Delta u(x)dx<0.$$

即此时 $\varphi(r)$ 关于 $r\in(0,R)$ 严格递减. 所以

$$u(x_0)=\lim_{r\downarrow 0}\varphi(r)>\varphi(r)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}u(x_0+r\omega)dS(\omega),\quad \forall r\in(0,R).$$

矛盾! 所以 u 在 Ω 上次调和.

Bibliography

[1] 金福临, 李训经: 常微分方程, 上海科学技术出版社, 1984.

[2] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 董镇喜: 微分方程定性理论, 第一版, 科学出版社, 1985.

[3] Wolfgang Walter: (GTM182)Ordinary Differential Equations, first edition, 1998.

[4] Po-Fang Hsieh, Yasutaka Sibuya: Basic Theory of Ordinary Differential Equations, first edition, 1999.

[5] 丁同仁, 李承治: 常微分方程教程, 第二版, 高等教育出版社, 2004.

[6] 孙清华: 常微分方程内容、方法与技巧, 第一版, 华中科技大学出版社, 2006.

[7] Walter A. Strauss: Partial Differential Equations, An Introduction, second edition, 2008.

[8] Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations, second edition, 2010.

[9] 韩青, 林芳华: Elliptic Partial Differential Equations, second edition, 2011.

[10] 韩青: A Basic Course in Partial Differential Equations, first edition, 2011.

[11] 陈祖墀: 偏微分方程, 第四版, 高等教育出版社, 2018.

[12] 黄天一: 微分方程 I 课程笔记, 2021.