§10.4 n 重积分

设 $I_i = [a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 n 个一维闭区间, 称

$$F = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$$

为 n 维区间或 n 维方体, 其体积定义为

$$\sigma(F) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是定义在 F 上的 n 元函数. T 是平行于 $\mathbb{R}^n$ 中坐标平面的超平面组成的分割, 它将 F 分割成有限多个小 n 维方体 $F_1, F_2, \cdots, F_m$, 在每个小方体 F_j 中取一点 P_j, 作 Riemann 和

$$S(f, T) = \sum_{j=1}^{m} f(P_j)\sigma(F_j).$$

若当分割 T 的宽度 $\|T\| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \{\mathrm{diam}(F_j)\}$ 趋于零时, 上面的和式有极限

A, 则称 f 在 F 上可积, A 称为 f 的积分, 记为

$$\int\cdots\int_{F} f(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n,$$

简记为

$$\int_F f\,d\sigma.$$

设 f 是定义在一般有界区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数. f_D 是 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的零延拓, 若 f_D 在 n 维方体 $F\supset D$ 上可积, 则称 f 在 D 上可积. 积分记为

$$\int\cdots\int_{D} f(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n,$$

简记为

$$\int_D f\,d\sigma.$$

也可以定义 n 维零测集和 n 维有体积的集.

定义 1 设 $V \subset \mathbb{R}^n$ 是一个集合. 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在有限个或一列 n 维区间 $\{I_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ 使得

$$V \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(I_k) \leqslant \varepsilon,$$

(这里 $\sigma(I_k)$ 表示 I_k 的体积), 那么称 V 为 (n 维) 零测度集, 简称零测集. 若上面的 I_k 只需要有限个, 则 V 称为零体积集.

定理 1 (1) 至多可数集是零测集, 至多可数个零测集的并集还是零测集;
(2) 有限个零体积集的并集还是零体积集;
(3) B 是零体积集等价于 $\overline{B}$ 是零体积集;
(4) 设 $B \subset \mathbb{R}^n$ 是有界闭集. 则 B 是零测集等价于 B 是零体积集;
(5) $\mathbb{R}^n$ 中 $n-1$ 维光滑体是零体积集.

定理 2 (Lebesgue **定理**) 设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是 n 维闭区间 I 上的有界函数, 那么 f 在 I 上可积的充分必要条件是: f 的间断点全体是一个零测集.

所谓 n 重积分，除了更加繁琐一点之外，本质上与二重、三重积分没有区别. n 维方体 F 上的有界函数 f 可积的充分必要条件是 f 的间断点全体是一个 n 维零测集. 因此连续函数在方体上总是可积的. 在进行累次积分时，只要认真分析清楚区域的特点，一步一步地降低积分重数，逐次进行积分. 例如对于 n 维方体 $F = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ 上连续函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$，它的积分可以化为累次积分

$$\int \cdots \int_F f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \cdots, x_n) dx_n.$$

等式右边的积分的顺序可以是任意的.

定理 3 (**累次积分**) 设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是有体积的有界闭集, f 是 V 上连续函数. 对于 V 中的点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$

(1) 如果当 $(x_1,\cdots,x_{n-1})\in D\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 固定时, 有

$$\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant\varphi_2(x_1,\cdots,x_{n-1}),$$

其中 φ_1,φ_2 是 D 上的连续函数, 那么有

$$\int_V f\,d\sigma=\int\cdots\int_D dx_1\cdots dx_{n-1}\int_{\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\cdots,x_{n-1})}f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)dx_n.$$

(2) 如果当 $x_n\in[a,b]$ 固定时, 有 $(x_1,\cdots,x_{n-1})\in D_{x_n}\subset\mathbb{R}^{n-1}$, 那么有

$$\int_V f\,d\sigma=\int_a^b dx_n\int\cdots\int_{D_{x_n}}f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)dx_1\cdots dx_{n-1}.$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

定理 4 (n **重积分换元公式**) 设集合 $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ 有界且有体积, 映射

$$\varphi:\ x_i = x_i(u_1, u_2, \cdots, u_n),\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

在 Δ 上是正则的, 即 φ 在 Δ 是 C^1 的, 且 $\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)} \neq 0$, 那么对于定义在 $\Omega = \varphi(\Delta)$ 上的连续函数 f, 有

$$\begin{aligned}&\int\cdots\int_{\varphi(\Delta)} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ =& \int\cdots\int_{\Delta} f \circ \varphi(u_1, \cdots, u_n) \left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)}\right| du_1 \cdots du_n.\end{aligned}$$

(1) n **维单形的体积** 所谓 n 维单形是空间 $\mathbb{R}^n$ 中这样的点集

$$S_n(a) = \{(x_1, \cdots, x_n) : \ x_1, \cdots, x_n \geqslant 0; \ x_1 + \cdots + x_n \leqslant a\}$$

当 $n = 1$ 时, 就是闭区间 $[0, a]$; 当 $n = 2$ 时, 就是 Oxy 平面上以 $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a)$ 为顶点的三角形. 在三维空间中, 单形就是位于第一象限并以 $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$ 为顶点的四面体. 要计算它的体积 $\sigma(S_n(a))$, 可以计算函数 $f \equiv 1$ 在上面的积分

$$\sigma(S_n(a)) = \int_{S_n(a)} d\sigma$$

作径向伸缩变换

$$x_i = at_i, \ i = 1, \cdots, n,$$

则有

$$\frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(t_1, \cdots, t_n)} = a^n,$$

即把边长为 a 的单形缩成边长为 1 的单形, 这里

$$(t_1, \cdots, t_n) \in S_n(1),$$

且

$$\begin{aligned}\sigma(S_n(a)) &= \int_{S_n(a)} d\sigma \\ &= a^n \int_{S_n(1)} d\sigma \\ &= a^n \sigma(S_n(1)).\end{aligned}$$

注意到, 对于固定的 $t \in [0,1]$, $S_n(1)$ 与 $t_n = t$ 的截口是集合

$$\left\{(t_1, \ldots, t_{n-1}) \,\middle|\, t_1 \geqslant 0, \cdots, t_{n-1} \geqslant 0,\ t_1 + \cdots + t_{n-1} \leqslant 1 - t\right\}.$$

这是一个边长为 $1-t$ 的 $n-1$ 维单形 $S_{n-1}(1-t)$.

因此作累次积分得

$$\begin{aligned}\sigma(S_n(1)) &= \int_0^1 dt \int_{S_{n-1}(1-t)} \cdots \int dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} \\ &= \int_0^1 \sigma(S_{n-1}(1-t))dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^{n-1}\sigma(S_{n-1}(1))dt \\ &= \sigma(S_{n-1}(1)) \int_0^1 (1-t)^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{n}\sigma(S_{n-1}(1))\end{aligned}$$

这样就得到一个递推公式. 因为 $\sigma(S_1(1)) = 1$, 所以

$$\sigma(S_n(1)) = \frac{1}{n!}, \quad \sigma(S_n(a)) = \frac{a^n}{n!}.$$

(2) n 维球的体积 设

$$B_n(a) = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1^2 + \cdots x_n^2 \leqslant a^2\},$$

称之为以原点为球心、以 a 为半径的 n 维球体.

对于 $n = 1, 2, 3$, $B_n(a)$ 分别对应直线上的闭区间、平面上的圆盘和三维空间的球体. 半径为 1 的球体称为单位球体.

类似单形体积的计算, 有

$$\sigma(B_n(a)) = \int_{B_n(a)} d\sigma = a^n \int_{B_n(1)} d\sigma = a^n \sigma(B_n(1))$$

注意到, 对于固定的

$$t_{n-1} = u,\ t_n = v,\ u^2 + v^2 \leqslant 1,$$

它与球体 $B_n(1)$ 的截口是由满足 $t_1^2 + \cdots + t_{n-2}^2 \leqslant 1 - u^2 - v^2$ 的点构成, 所以截口是一个 $n-2$ 维球体 $B_{n-2}(\sqrt{1-u^2-v^2})$.

利用累次积分, 有

$$
\begin{aligned}
\sigma(B_n(1)) &= \int_{B_n(1)} d\sigma \\
&= \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} dudv \int\cdots\int_{B_{n-2}(\sqrt{1-u^2-v^2})} dt_1\cdots dt_{n-2} \\
&= \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} (1-u^2-v^2)^{(n-2)/2}\sigma(B_{n-2}(1))dudv \\
&= \sigma(B_{n-2}(1)) \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} (1-u^2-v^2)^{(n-2)/2}dudv
\end{aligned}
$$

对于上式右端中的二重积分, 利用极坐标 $u=r\cos\theta,\ v=r\sin\theta$, 得

$$
\begin{aligned}
&\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} (1-u^2-v^2)^{(n-2)/2}dudv \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)^{(n-2)/2} r dr \\
&= \frac{2\pi}{n}.
\end{aligned}
$$

由此可得关于单位球体体积计算的递推公式

$$\sigma(B_n(1)) = \frac{2\pi}{n}\sigma(B_{n-2}(1))$$

因为, $\sigma(B_1(1)) = 2,\ \sigma(B_2(1)) = \pi$, 所以有

$$\sigma(B_{2n}(1)) = \frac{\pi^n}{n!}, \qquad \sigma(B_{2n-1}(1)) = \frac{2^n\pi^{n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\sigma(B_{2n}(a)) = \frac{\pi^n}{n!}a^{2n}, \qquad \sigma(B_{2n-1}(a)) = \frac{2^n\pi^{n-1}}{(2n-1)!}a^{2n-1}.$$

例 1 设 $a>0$, $S_n(a)$ 是边长为 a 的 n 维单型. 求

$$I=\int\cdots\int_{S_n(a)}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^m \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

解 作变换

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1-y_2-\cdots-y_n,\\ x_2 &= y_2,\\ &\cdots\\ x_n &= y_n. \end{aligned}$$

则 $\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}=1$, 且此变换将

$$D=\{(y_1,\cdots,y_n): 0\leqslant y_i\,(i=1,\cdots,n), y_2+\cdots+y_n\leqslant y_1\leqslant a\}$$

映射为 $S_n(a)$. 于是

$$
\begin{aligned}
I &= \underset{S_n(a)}{\int\cdots\int}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^m \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \\
&= \underset{D}{\int\cdots\int} y_1^m \mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n \\
&= \int_0^a y_1^m \mathrm{d}y_1 \underset{y_2+\cdots+y_n\leqslant y_1}{\int\cdots\int}\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n \\
&= \int_0^a y_1^m \sigma(S_{n-1}(y_1))\mathrm{d}y_1 \\
&= \int_0^a y_1^m \frac{y_1^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}y_1 \\
&= \frac{a^{m+n}}{(n-1)!(m+n)}.
\end{aligned}
$$