2020级数分（B2）期末考试题解（2021.7.16）

一、（6分）设 $I(u)=\int\limits_{\sin u}^{\cos u}\mathrm{e}^{x^2-xu}\,\mathrm{d}x$, 求 $I'(u)$.

解

$$I'(u)=-\mathrm{e}^{\cos^2 u-u\cos u}\sin u-\mathrm{e}^{\sin^2 u-u\sin u}\cos u-\int_{\sin u}^{\cos u}x\mathrm{e}^{x^2-xu}\,\mathrm{d}x.$$

二、（12分；每小题4分）设$\vec{v}=\left(\frac{y}{z}-\frac{1}{y},\ \frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},\ 1-\frac{xy}{z^2}\right)$ $(y>0,z>0)$.

（1）证明 $\vec{v}$ 是有势场；（2）求其全体势函数；（3）计算 $\int\limits_{(1,1,1)}^{(1,2,3)}\vec{v}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s$

解 直接验证 $\nabla\times\vec{v}=0$; 设势函数为 $\varphi(x,y,z)$, 解方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{y}{z}-\frac{1}{y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=1-\frac{xy}{z^2}$$

得

$$\varphi(x,y,z)=\frac{xy}{z}-\frac{x}{y}+z+C\ (C\text{ 是任意常数}).$$

$$\int\limits_{(1,1,1)}^{(1,2,3)}\vec{v}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s=\varphi(1,2,3)-\varphi(1,1,1)=\frac{13}{6}.$$

三、（20分，每小题10分）

（1）计算曲线积分 $\int\limits_L\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, 其中$L$ 为圆周 $x^2+y^2=4$, 直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限中所围图形边界.

解 将 L 分成三段, 其中圆弧段令 $x=2\cos\theta,\ y=2\sin\theta\ \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$, 在 x 轴上: $\mathrm{d}s=\mathrm{d}x$, 在直线 $y=x$ 上: $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$, 在弧段上: $\mathrm{d}s=2\,\mathrm{d}\theta$, 因此

$$\begin{aligned}\int_L\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s&=\int_0^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/4}2\mathrm{e}^2\,\mathrm{d}\theta+\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^2-1+\mathrm{e}^2\frac{\pi}{2}+\mathrm{e}^2-1=\mathrm{e}^2(2+\pi/2)-2\end{aligned}$$

（2）设 $u(x,y)$ 在圆盘 $D:\ x^2+y^2\leqslant\pi$ 上有二阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\sin(x^2+y^2),$$

$\vec{n}$ 为边界圆周 ∂D 的单位外法向, 计算曲线积分 $\oint\limits_{\partial D} \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}s$.

解 因为 ∂D 的单位外法向为

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x\vec{i} + y\vec{j})$$

由此推出 ∂D 逆时针指向的单位切向量为

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-y\vec{i} + x\vec{j})$$

由$\tau \,\mathrm{d}s = \vec{r}' \,\mathrm{d}s = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j}$ 推出

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}y \,\mathrm{d}s, \ \ \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}x \,\mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}s &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \oint_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{\partial u}{\partial y}y\right) \,\mathrm{d}s \\
&= \oint_{\partial D} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x} \,\mathrm{d}y\right) \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \sin(x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

这里用到了Green公式. 令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, 就有

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}s = \iint_D \sin(x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \,\mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} (\sin r^2) r \,\mathrm{d}r = 2\pi.$$

四、（12分）计算积分

$$I = \iint_S 2(1 + x) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + yz \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

其中S 是曲线 $y = \sqrt{x}$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 绕 x 轴旋转生成的旋转面, 法向与 x 轴正向夹角为钝角.

解 对 S 加一个底: $D:\ x = 1, y^2 + z^2 \leqslant 1$, 方向指向 x 轴正向. 记 V 是 S 和 D 围成的体积, 于是利用Gauss公式

$$\begin{aligned}
\iint_{S+D} 2(1 + x) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + yz \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \iiint_V (2 + y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \\
&= 2\mu(V) + \iiint_V y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

这里 $\mu(V)$ 表示 V 的体积. 注意到 V 关于 Oxz 平面是对称的, 因此 $\iiint\limits_V y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$, 且在 D 上, $x=1$, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$, 所以

$$\begin{aligned} I &= 2\nu(V) - \iint_D 2(1+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 2\mu(V) - \iint_{y^2+z^2\leqslant 1} 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\mu(V) - 4\pi. \end{aligned}$$

下面就要计算 V 的体积, 即旋转面围成的旋转体的体积.

$$\mu(V) = \int_0^1 \pi y^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \pi x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi.$$

最后得

$$I = -3\pi.$$

五、（10分）记 $\vec{v} = (y^2+z^2)\vec{i} + (z^2+x^2)\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k}$,计算曲线积分

$$I = \oint_L (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2+x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z,$$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线（$z\geqslant 0$）, 从 z 轴的正向看去 L 沿顺时针方向.

解法一 记 S 是球面上以 L 为边的那块曲面. 由 L 的方向可知, S 的方向指向下侧, S 的单位法向量为

$$\vec{n} = -\frac{1}{2}[(x-2)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}].$$

利用Stokes公式, 有

$$\begin{aligned} I &= \oint_L (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x + (z^2+x^2)\,\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z \\ &= \iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = -\frac{1}{2}\iint_S \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix}\mathrm{d}S \\ &= -\iint_S [(x-2)(y-z) + y(z-x) + z(x-y)]\,\mathrm{d}S = -2\iint_S (z-y)\,\mathrm{d}S \end{aligned}$$

由于 S 关于 Oxz 平面对称, 所以$\iint\limits_S y\,\mathrm{d}S = 0$, 因此

$$I = -2\iint_S z\,\mathrm{d}S$$

注意到在直角坐标系中, S 的方程为

$$z=\sqrt{4-(x-2)^2-y^2}\ (x,y)\in D,\ D: x^2+y^2=2x,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S&=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{\sqrt{4-(x-2)^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{2}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以

$$I=-2\iint_S z\,\mathrm{d}S=-\iint_D z\cdot\frac{2}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-4\mu(D)=-4\pi.$$

解法二 令

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

(也可以用 $x=1+\cos t, y=\sin t, z=\sqrt{2+2\cos t}$, 这里就再讨论了.)

由方程 $x^2+y^2=2x$ 得

$$r=r(\theta)=2\cos\theta.$$

由方程 $x^2+y^2+z^2=4x$ 得

$$z=2\cos\theta.$$

所以曲线的参数方程为:

$$L:\ x=2\cos^2\theta,\ y=2\sin\theta\cos\theta,\ z=2\cos\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\Longrightarrow\ \mathrm{d}x=-4\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta,\ \ \mathrm{d}y=2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta,\ \ \mathrm{d}z=-2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

带入积分, 并充分利用积分区间的对称性, 使得所有奇函数的积分均为零, 因此有

$$\begin{aligned}\oint_L(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x&=-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-4\sin^3\theta\cos^2\theta-16\cos^3\theta\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=0\\\oint_L(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y&=-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2(4\cos^2\theta+4\cos^4\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}8(-\cos^2\theta+\cos^4\theta+2\cos^6\theta)\,\mathrm{d}\theta\\\oint_L(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z&=-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-8\sin\theta\cos^4\theta-8\sin^3\theta\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta=0\end{aligned}$$

因此, 只要计算上式中第二个积分即可. 利用

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta &= \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}, \\
\cos^4\theta &= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) = \left(\frac{3}{8} + 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2}\right), \\
\cos^6\theta &= \frac{1}{8}\left(1 + 3\cos 2\theta + 3\frac{1+\cos 4\theta}{2} + \cos^3 2\theta\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2} + 3\cos 2\theta + 3\frac{\cos 4\theta}{2} + \cos^3 2\theta\right)
\end{aligned}$$

并考虑$\cos 2\theta, \cos 4\theta$ 在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的周期性, 有

$$\oint_L (z^2 + x^2)\,\mathrm{d}y = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8(-\cos^2\theta + \cos^4\theta + 2\cos^6\theta)\,\mathrm{d}\theta = -4\pi.$$

这里用到了

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}\sin t = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \sin^2 t)\,\mathrm{d}\sin t = 0$$

最后有 $I = -4\pi$.

六、（16分:第1小题6分, 第2 小题10分）

（1）将 $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - x\ x \in [0, \pi]$ 展开成余弦级数；

（2）求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$ 的和.

解 将函数 $f(x)$ 偶延拓到 $[-\pi, \pi]$ 上, 则

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\,\mathrm{d}x = 0 \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n^2\pi}(1 - (-1)^n).
\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x = \frac{\pi}{2} - x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

令 $x = 0$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

由Parseval 等式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n-1)^4}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96},$$

根据

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

七、（16分，第1 小题4分, 第2,3小题6分）

（1）求使积分 $\varphi(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛的参数取值范围.

（2）收敛时, 利用Euler 积分计算 $\varphi(\alpha)$.

（3）证明含参变量广义积分 $\varphi(\alpha)$ 在区间 $[-\alpha_0,\alpha_0]$ 上一致收敛 $(0<\alpha_0<1)$.

解（1）: 因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{x^{\alpha}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_0^{1}\frac{x^{\alpha}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

中 $\frac{x^{\alpha}}{1+x^2}\sim x^{\alpha}$ $(x\to 9^+)$, 所以对 $\alpha>-1$ 收敛；而

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

中 $\frac{x^{\alpha}}{1+x^2}\sim x^{\alpha-2}$ $(x\to+\infty)$, 所以对 $\alpha<1$ 收敛.

综合两个积分, 最终得原积分在$-1<\alpha<1$ 上收敛.

解（2）: 令 $x^2=u$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}u^{-1/2}\,\mathrm{d}u$

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{u^{(\alpha-1)/2}}{1+u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{u^{(\alpha+1)/2-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

令 $q=\frac{\alpha+1}{2}$, $P+q=1$, 解得 $p=\frac{1-\alpha}{2}$ 得

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha)&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{u^{(\alpha+1)/2-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1+\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1+\alpha}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\pi\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\end{aligned}$$

证（3）: 在 $[-\alpha_0,\alpha_0]$ 上 $(0<\alpha_0<1)$

当 $0<x<1$ 时: $\frac{x^\alpha}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{x^{\alpha_0}}$ $(x\to0)$, 所以$\int\limits_0^1\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 一致收敛.

当 $x>1$ 时: $\frac{x^\alpha}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{x^{2-\alpha_0}}$ $(x\to+\infty)$, 所以$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 一致收敛.

八、（8分）设 $P(X,y),Q(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且对任一点 (x_0,y_0) 为圆心, 任意 $r>0$ 为半径的半圆 $L:x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,恒有

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}x=0,$$

证明 $P(x,y)=0,\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0$.

证明 注意到 L 不是封闭曲线, 增加直线段 $L_0:x_0-r\leqslant x\leqslant x+r,\ y=y_0$, 并记 L 和 L_0 围成的半圆区域为 D, 则利用Green公式有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_{L+L_0}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{L_0}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

对等式左边使用积分中值公式, 则存在 $(\xi,\eta)\in D$, 使得

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(\xi,\eta)\frac{\pi r^2}{2}.$$

注意到在 L_0 上 $\mathrm{d}y=0$, 所以

$$\int_{L_0} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x = 2rP(\tau,y_0),$$

这里再次使用积分中值公式, 其中 $x_0-r \leqslant \tau \leqslant x_0+r$. 因此

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(\xi,\eta)\frac{\pi r}{2} = 2P(\tau,y_0).$$

根据连续性并令 $r\to 0$, 则 $\tau\to x_0$, $(\xi,\eta)\to(x_0,y_0)$, 所以首先得 $P(x_0,y_0)=0$, 由 (x_0,y_0) 的任意性得

$$P(x,y)\equiv 0 \text{ 对任意的 } (x,y) \text{ 成立}$$

因此

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(\xi,\eta) = 0,$$

通过极限 $r\to 0$ 得

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = 0,$$

同理由(x_0,y_0) 的任意性即得$\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0$.