第 9 章 多变量函数的微分学

从本章开始我们将讨论多个变量 (亦称多元、如二元、三元等等) 函数的极限、连续、可微、可积等基本概念. 除一些共性外, 我们会发现很多在单个变量 (即一元) 情况下不存在的新的现象和理论. 一般来说, 这些新的现象或理论一旦在二元情况下存在或被证明, 则不难推广到更多元 (变量) 的情形中去而无需本质上的改变. 因此我们将以讨论二元的情形为主, 除非三元或多元的情形更能说明问题.

§9.1 多变量函数及其连续性

9.1.1 平面上的点集

在平面上取定一个直角坐标系, 这样的平面记为 $\mathbb{R}^2$. 坐标系中一对有序的数 (x, y) 对应着平面上的一个点 P, 它的坐标是 x 和 y, 设 $E \subset \mathbb{R}^2$, 有如下一系列概念.

(1) **距离** 设 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的两个点, 它们之间的距离可以由公式

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

定义 (类比于直线上的绝对值), 这样定义的距离, 满足距离的三要素, 即

1° 正定性: $\rho(M_1, M_2) \geqslant 0$, 等号成立当且仅当 $M_1 = M_2$.

2° 对称性: $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$.

3° 三角不等式: $\rho(M_1, M_2) \leqslant \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2)$.

(2) **邻域** 有了距离, 就可以定义一点的邻域 (或附近):

$$B(M_0, r) = \{M|\ \rho(M, M_0) < r\}$$

这是一个以 r 为半径的园盘, 如果去掉圆心, 这样的点集记为

$$B_-(M_0, r) = \{M|\ 0 < \rho(M, M_0) < r\}.$$

有时把点集 $\{(x, y)|\ |x - x_0| < r, |y - y_0| < r\}$ 也叫做 $M_0(x_0, y_0)$ 的邻域. 它是一个正方形的内部. 方形邻域和圆形邻域并没有本质的差别, 我们可以根据需要随意选择. 这两种邻域的表示方式, 都可以看成是一维情形以一点为中心的开区间的推广.

(3) **有界集与无界集** 一个平面点集 $\boldsymbol{E}$ 称为有界的, 如果存在一个正数 $\boldsymbol{R}$, 使 $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{B}(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{R})$ ($\boldsymbol{O}$ 为坐标原点). 否则称为无界集. 对于有界非空点集 $\boldsymbol{E}$, 它的直径记为

$$\operatorname{diam} \boldsymbol{E} = \sup\{\rho(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}'') \mid \boldsymbol{M}', \boldsymbol{M}'' \in \boldsymbol{E}\}.$$

(4) **余集** $\mathbb{R}^2$ 中不属于 E 的其余部分, 称为 E 的余集, 记成 E^c. 显然有

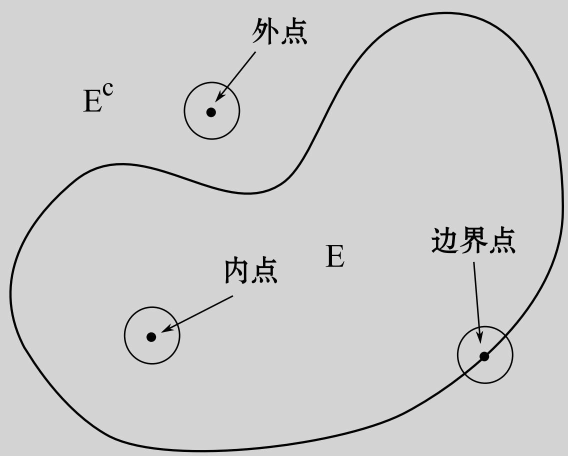
$$(E^c)^c = E.$$

(5) **内点、外点和边界点** 根据余集的定义, 平面上的点可以按照它与 E 的关系分成三种.

1° 如果存在正数 r, 使 $B(M,r) \subset E$, 则称 M 为 E 的内点;

2° 如果存在 $r > 0$, 使 $B(M,r) \subset E^c$, 则称 M 为 E 的外点;

3° 如果对任何 $r > 0, B(M,r)$ 中都有 E 和 E^c 的点, 则称 M 为 E 的边界点. E 的全体边界点的集合称为 E 的边界, 记成 ∂E. E 的边界点可以在 E 中, 也可以在 E^c 中. E 的全体内点组成的集合叫 E 的核, 记成 E°.



(6) **孤立点与聚点** 设 $M \in \mathbb{R}^2$, 如果存在正数 r 使

$$B(M, r) \cap E = \{M\},$$

则称 M 是 E 的孤立点. 显然 E 的孤立点必是 E 的边界点.

如果对任意 $r > 0$, $B_{-}(M, r)$ 中都有 E 中的点, 则称 M 为 E 的聚点. 注意, E 的聚点可以是 E 中的点, 也可以不是 E 中的点.

E 的内点必定是 E 的聚点. 如果 $M \in \partial E$ 但不是 E 的孤立点, 则 M 必是 E 的聚点.

由此可知边界点或是孤立点, 或是聚点.

聚点则包括了集合的内点和非孤立的边界点.

(7) **平面点列的极限** 设 $\{M_n\}$ 是平面点列. 如有 $M_0 \in \mathbb{R}^2$, 使

$$\lim_{n\to\infty} \rho(M_n, M_0) = 0,$$

则称点列 $\{M_n\}$ 为收敛点列. M_0 称为点列的极限. 记成

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_0.$$

设 $M_n(x_n, y_n), M_0(x_0, y_0)$. 因为

$$|x_n - x_0|, |y_n - y_0| \leqslant \rho(M_n, M_0) \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0|,$$

所以 $\lim M_n = M_0$ 的充要条件是 $\lim x_n = x_0$ 和 $\lim y_n = y_0$.

与直线上的数列不同的是, 平面上有极限的点可以以更自由的方式收敛于一点, 例如点列 $P_n = (e^{-n/4}\cos n,\ e^{-n/4}\sin n)$, 显然 $P_n \to O = (0,0)$ 但趋于的方式是以螺旋形式进行的.

平面上的有界点列满足如下性质, 它是实数连续性在 $\mathbb{R}^2$ 上的体现.

定理 1 (波尔查诺) 平面上的有界点列有收敛的子列.

证明 设 $P_n=(x_n,y_n)$ 是有界点列, 则 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是有界数列. 根据数列的波尔查诺定理, $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$.

现在考虑 $\{y_{n_k}\}$. 这还是有界的, 因此也有收敛子列 $\{y_{n_{k_i}}\}$. 令

$$P_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}},y_{n_{k_i}})$$

它是 $\{P_n\}$ 的子列, 且是收敛的.

9.1.2 开集与闭集

设 $E \subset \mathbb{R}^2$,

$$\text{若 } E = E^\circ, \text{ 则称 } E \text{ 是一个开集.}$$

即开集中的点都是内点.

$$\text{若 } E^c \text{ 是开集, 则称 } E \text{ 是闭集.}$$

开集和闭集相当于一维时候的开区间和闭区间. 例如, 整个平面 $\mathbb{R}^2$, 半平面 $x > 0$, 邻域 $B(M, r), B_-(M, r)$ 等是开集. 空集 $\varnothing$ 也是开集, 因为它没有不是内点的点. 但是 $\mathbb{R}^2$ 和 $\varnothing$ 也是闭集, 空间中, 只有这两个集合有这种特殊性.

开集和闭集有很多性质 (这些性质在一维情形是显然的):

性质 1 两个开集的并集和交集仍是开集; 两个闭集的并集和交集也都还是闭集.

该性质可推广为: 有限个开集的并集和交集仍是开集; 有限个闭集的并集和交集仍是闭集. 一族开集的并集仍是开集, 一族闭集的交集仍是闭集.

性质 2 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是开集的充分必要条件是 $\partial E \cap E = \varnothing$.

由于 $\mathbb{R}^2$ 恰由 E 的内点、边界点、外点所组成, 即,

$$\mathbb{R}^2 = E^\circ \cup \partial E \cup (E^c)^\circ,$$

因为边界点不是内点, 所以当 E 是开集时, $\partial E \cap E = \varnothing$. 反之, 任给 $M \in E$, 因为 E 与它的边界没有公共点, 所以 M 不是边界点, 故必是内点.

性质 3 $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^2$ 是闭集的充分必要条件是 $\partial \boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{E}$.

由于 $\partial \boldsymbol{E} = \partial \boldsymbol{E}^c$ 所以当 $\boldsymbol{E}$ 是闭集时, $\boldsymbol{E}^c$ 是开集, 由性质 2 可知,

$$\partial \boldsymbol{E}^c \cap \boldsymbol{E}^c = \varnothing,$$

也就是

$$\partial \boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{E}^c = \varnothing,$$

所以 $\partial \boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{E}$. 这样的推导是完全可逆的.

性质 4 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是闭集的充要条件是 E 包含其全部聚点.

这是因为一个聚点或是内点, 或是边界点. 故闭集包含其全部聚点. 反之, 因为一个点集的边界点由其聚点或是孤立点组成, 所以聚点在 E 中, 就意味着 E 包含其全部边界点.

9.1.3　连通性

平面曲线的参数表示　设有两个连续函数

$$x = x(t),\ y = y(t), \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

称平面上的点集

$$L = \{(x(t), y(t)) |\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$$

为一条平面曲线. $x = x(t),\ y = y(t)$ 称为 L 的参数方程.

如果 $x(t), y(t)$ 都在 $[\alpha, \beta]$ 连续可导, 并且 $x'(t), y'(t)$ 不同时为零, 则称曲线 L 是光滑的.

如果对任意 $\alpha \leqslant t_1 < t_2 < \beta$, 都有 $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$, 则称 L 是一条简单曲线或 Jordan 曲线.

如果 $M(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha)) = M(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$, 则称 L 是一条闭曲线.

联通性 设 $E \subset \mathbb{R}^2$. 当将 E 任意分成两个非空且不相交的集合 A 和 B 时, 则 A 和 B 中, 其中一个含有另一个的聚点, 就称 E 是连通集.

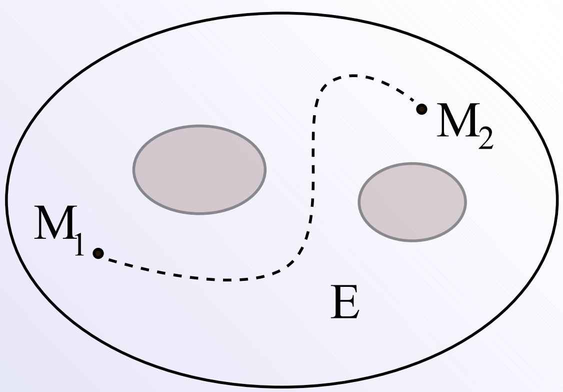
道路联通性 平面上一个点集 $E \subset \mathbb{R}^2$ 称为道路连通集, 如果对于 E 中任意两点 P, Q, 都存在 E 中的一条平面曲线连接之, 即存在平面曲线

$$L = \{M(t) = (x(t), y(t)) \mid \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} \subset E,$$

(其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是 t 的连续函数) 使得

$$M_1 = M(\alpha) = (x(\alpha),\ y(\alpha)), \quad M_2 = M(\beta) = (x(\beta), y(\beta)).$$

非空道路连通开集称为区域, 区域与它的边界的并集称为闭域.



性质 如果把道路连通集 E 分成非空的不相交的两个部分 A, B 满足

$$A \cap B = \varnothing,\ A \cup B = E,$$

则 A 和 B 必有公共的边界点, 即, 道路连通集是连通集.

证明 在 A 中任取点 M_1, 在 B 中任取点 M_2. 作 E 中曲线

$$L = \{M(t) = (x(t), y(t)) |\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\},$$

使 $M(\alpha) = M_1,\ M(\beta) = M_2$. 设

$$t_0 = \inf\{t|\ M(t) \in B\}.$$

如果 $M(t_0) \in A$, 则 $t_0 < \beta$. 任给 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$, 使当 $0 < t - t_0 < \delta$ 时有

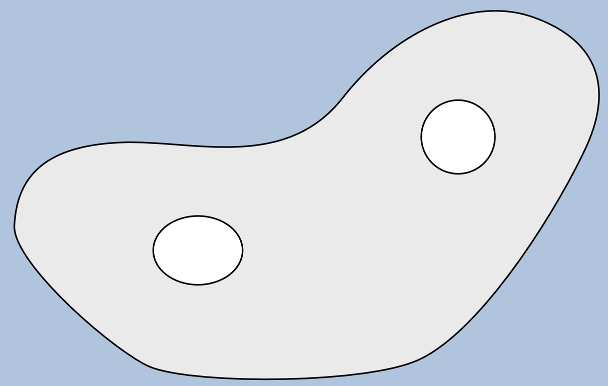
$$|x(t) - x(t_0)| < \varepsilon/2,\ |y(t) - y(t_0)| < \varepsilon/2.$$

由 t_0 的取法可知, 有 $t_0 < t' < t_0 + \delta$ 使 $M(t') \in B$. 即在 $O(M(t_0), \varepsilon)$ 中有 B 中的点 $M(t')$. 所以 $M(t_0)$ 是 A, B 的公共边界点.

如果 $M(t_0) \in B$, 则证明类似.

单连通和多连通区域

如果区域 D 内任一条简单闭曲线的内部还在 D 内, 则称 D 是**单连通**的, 即区域没有空洞. 反之, 就称 D 是**多连通**的.



为了更准确地说明这两类区域的区别, 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域. 如果 D 的余集 D^c 是由 n $(n \geqslant 1)$ 个互不相交的连通闭集组成的, 就称 D 是一个 **n 连通域**, n 叫做 D 的连通数. $n = 1$ 时, 称 D 为单连通域, $n \geqslant 2$ 时称 D 为多 (复) 连通域. 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的无界区域, 如果存在 $R_0 > 0$, 使当 $R > R_0$ 时 $D \cap O(O, R)$ 是 n 连通域, 则称 D 是 n 连通域.