中国科学技术大学数学科学学院

2019 ～ 2020 学年第 1 学期期末考试答案

一、(每题 6 分，共 30分)计算下列积分

1. $\int \ln^2 x\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int 1\mathrm{d}x$
$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

2. $\int_{-3}^{3}(|x|+x)e^{|x|}\mathrm{d}x = \int_{-3}^{3}|x|e^{|x|}\mathrm{d}x + \int_{-3}^{3}xe^{|x|}\mathrm{d}x = \int_{-3}^{3}|x|e^{|x|}\mathrm{d}x$
$= 2\int_0^3 xe^x\mathrm{d}x = 2[xe^x - e^x]\Big|_0^2 = 2[2e^3+1]$

3. $\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x.$

通过变量代换$t=\dfrac{\pi}{2}-x$可得 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}+\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}1\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

4. $\int\dfrac{1}{x^3-3x-2}\mathrm{d}x$

$$\frac{1}{x^3-3x-2} = -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x-2}$$
$$\int\frac{1}{x^3-3x-2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}\ln|1+x| + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{1}{9}\ln|x-2| + C.$$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\frac{t}{1+\tan^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}t\cos^2 t\mathrm{d}t$
$\displaystyle= \int_0^{\pi/2}\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\cos 2t\mathrm{d}t = \frac{t^2}{4}\Big|_0^{\pi/2} + [\frac{1}{4}t\sin 2t + \frac{1}{8}\cos 2t]\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$

二、(每题4分，共16分)填空题.

1. 若$f(x)=\int_x^{x^2}\sin t\mathrm{d}t$, 则$f'(x) = \underline{\ 2x\sin(x^2)-\sin x\ }$.

2. 已知$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + x\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,则$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \underline{\ \frac{\pi}{2}\ }$.

3. 旋轮线方程是$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$,它与$x$轴所围平面图形面积是$\underline{\ 3\pi\ }$.

4. 微分方程$yy' = e^{y^2-2x}$满足$y(2)=2$的解是$\underline{\ y^2=2x\ }$.

三、(每题10分,共20分)

1.求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}\right)$.

解：$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$,.....(3分)

可以看做将区间$[0,1]$ n等分，在每个小区间取右端点时，函数$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$的黎曼和，.....(2分)函数$f(x)$可积，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}\right)=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{2}-1.....(5分)$$

2. 求常数a,b使得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{\ln(1+t^2)}{\sqrt{t^2+a}}\mathrm{d}t=1.$$

解：$x\to 0$时，$\displaystyle\int_0^x\frac{\ln(1+t^2)}{\sqrt{t^2+a}}\mathrm{d}t\to 0$, $bx-\sin x\to 0$,由洛必达法则可得.....(2分)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{\ln(1+t^2)}{\sqrt{t^2+a}}\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{(b-\cos x)\sqrt{x^2+a}}=1.....(3分)$$

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x^2)=0$,原式有极限，故$\lim\limits_{x\to 0}(b-\cos x)\sqrt{x^2+a}=(b-1)\sqrt{a}=0$.....(2分)

若$b=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{(b-\cos x)\sqrt{x^2+a}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{x^2}{2}\sqrt{a}}=1$,所以$a=4$

若$a=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{(b-\cos x)\sqrt{x^2+a}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(b-\cos x)|x|}=\begin{cases}0, & b\neq 1\\ +\infty, & b=1\end{cases}$.

所以 $a=4$, $b=1$.....(3分)

四、(本题 8 分)曲线$y=e^x$,此曲线过原点的切线以及y轴所围图形绕x轴旋转一周，求旋转体的体积.

解：设过原点的切线方程是$y=kx$, 与曲线相切与点(x_0,e^{x_0}).

所以$k=y'(x_0)=e^{x_0}$, 且切点在直线上，$e^{x_0}=kx_0$, 解得$x_0=1,k=e$.....(3分)

旋转体的体积为

$$V=\int_0^1\pi(e^x)^2-\pi(ex)^2\mathrm{d}x=\pi(\frac{e^2}{6}-\frac{1}{2}).....(5分)$$

五、(每题10分，共20分)

1. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2y\ln y-x}$ 的通解.

解：将x看做未知函数，y作为自变量，方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}x=2\ln y,\qquad (y>0).....(3分)$$

$$x=e^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(\int 2\ln y e^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=\frac{1}{y}\left(y^2\ln y-\frac{1}{2}y^2+C\right).....(6分)$$

所以方程的通解是$x = y\ln y - \frac{1}{2}y + \frac{C}{y}$, C是任意常数.....(1分)

2.求微分方程 $y'' - 2y' + y = e^x \sin^2 x$ 的通解.

解：(1)求解齐次微分方程$y'' - 2y' + y = 0$

特征方程为$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda = 1$是二重特征根，齐次方程通解是 $y = C_1e^x + C_2xe^x$.....(3分)

(2)求非齐次方程的特解。

$$y'' - 2y' + y = e^x \sin^2 x = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2}e^x \cos 2x$$

① $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2}$

设特解为$y_1 = ax^2e^x$, 则$y_1' = ae^x(x^2 + 2x)$, $y_1'' = ae^x(x^2 + 4x + 2)$

代入方程①得 $y_1 = \frac{1}{4}x^2e^x$.....(3分)

② $y'' - 2y' + y = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x$

设特解为$y_2 = e^x(a\cos 2x + b\sin 2x)$

$y_2' = e^x[(a + 2b)\cos 2x + (b - 2a)\sin 2x]$, $y_2'' = e^x[(4b - 3a)\cos 2x - (4a + 3b)\sin 2x]$,

代入方程②得 $y_2 = \frac{1}{8}e^x \cos 2x$.....(3分)

所求方程的通解是 $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{4}x^2e^x + \frac{1}{8}e^x \cos 2x$.....(1分)

六、(本题6分) 设$0 < a < b$, $f(x)$在$[a, b]$连续且单调递增, 证明：

$$\int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a^2 + ab + b^2}{3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证：考虑辅助函数 $F(t) = \int_a^t x^2 f(x)\mathrm{d}x - \frac{a^2 + at + t^2}{3}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$, 问题转化为证明$F(b) \geqslant 0 = F(a)$.

$$\begin{aligned}
F'(t) &= t^2 f(t) - \frac{a + 2t}{3}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x - \frac{a^2 + at + t^2}{3}f(t) \\
&= \frac{2t^2 - at - a^2}{3}f(t) - -\frac{a + 2t}{3}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{a + 2t}{3}\left[f(t)(t - a) - \int_a^t f(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{a + 2t}{3}\int_a^t (f(t) - f(x))\mathrm{d}x \geqslant 0
\end{aligned}$$

所以函数$F(t)t \in [a, b]$单调增加，$F(b) \geqslant F(a) = 0$.