基础微积分

讲课教材:《**数学分析讲义**》

参考材料: 1.《**数学分析教程**》常庚哲、史济怀 著

2.《**微积分学教程**》菲赫金哥尔茨 著

1. 数学大体上可以分为几何、代数、分析三个部分. 几何与代数的发展起步较早, 而分析发展得晚一些.

1. 数学大体上可以分为几何、代数、分析三个部分. 几何与代数的发展起步较早, 而分析发展得晚一些.
2. 微积分属于分析类, 包含微分、积分、微分与积分的关系.

1. 数学大体上可以分为几何、代数、分析三个部分. 几何与代数的发展起步较早, 而分析发展得晚一些.
2. 微积分属于分析类, 包含微分、积分、微分与积分的关系.
3. 微积分的发展主要是从研究变量以及变量之间的关系开始的, 特别是在 17 世纪下面四类问题的大量出现:

1. 数学大体上可以分为几何、代数、分析三个部分. 几何与代数的发展起步较早, 而分析发展得晚一些.
2. 微积分属于分析类, 包含微分、积分、微分与积分的关系.
3. 微积分的发展主要是从研究变量以及变量之间的关系开始的, 特别是在 17 世纪下面四类问题的大量出现:
   (a) 运动学方面, 物体移动的距离、速度.

1. 数学大体上可以分为几何、代数、分析三个部分. 几何与代数的发展起步较早, 而分析发展得晚一些.
2. 微积分属于分析类, 包含微分、积分、微分与积分的关系.
3. 微积分的发展主要是从研究变量以及变量之间的关系开始的, 特别是在 17 世纪下面四类问题的大量出现:
   (a) 运动学方面, 物体移动的距离、速度.
   (b) 几何学方面, 求曲线的切线方程.

1. 数学大体上可以分为几何、代数、分析三个部分. 几何与代数的发展起步较早, 而分析发展得晚一些.
2. 微积分属于分析类, 包含微分、积分、微分与积分的关系.
3. 微积分的发展主要是从研究变量以及变量之间的关系开始的, 特别是在 17 世纪下面四类问题的大量出现:
   (a) 运动学方面, 物体移动的距离、速度.
   (b) 几何学方面, 求曲线的切线方程.
   (c) 优化方面, 求函数的最大值和最小值.

1. 数学大体上可以分为几何、代数、分析三个部分. 几何与代数的发展起步较早, 而分析发展得晚一些.
2. 微积分属于分析类, 包含微分、积分、微分与积分的关系.
3. 微积分的发展主要是从研究变量以及变量之间的关系开始的, 特别是在 17 世纪下面四类问题的大量出现:
   (a) 运动学方面, 物体移动的距离、速度.
   (b) 几何学方面, 求曲线的切线方程.
   (c) 优化方面, 求函数的最大值和最小值.
   (d) 测量方面, 求曲线长度, 平面区域面积, 空间区域体积, 物体的重心, 等.

1. 数学大体上可以分为几何、代数、分析三个部分. 几何与代数的发展起步较早, 而分析发展得晚一些.
2. 微积分属于分析类, 包含微分、积分、微分与积分的关系.
3. 微积分的发展主要是从研究变量以及变量之间的关系开始的, 特别是在 17 世纪下面四类问题的大量出现:
   (a) 运动学方面, 物体移动的距离、速度.
   (b) 几何学方面, 求曲线的切线方程.
   (c) 优化方面, 求函数的最大值和最小值.
   (d) 测量方面, 求曲线长度, 平面区域面积, 空间区域体积, 物体的重心, 等.
4. 现在公认为微积分是由 Newton (牛顿) 和 Leibniz (莱布尼兹) 发明的.

1. 数学大体上可以分为几何、代数、分析三个部分. 几何与代数的发展起步较早, 而分析发展得晚一些.
2. 微积分属于分析类, 包含微分、积分、微分与积分的关系.
3. 微积分的发展主要是从研究变量以及变量之间的关系开始的, 特别是在 17 世纪下面四类问题的大量出现:
   (a) 运动学方面, 物体移动的距离、速度.
   (b) 几何学方面, 求曲线的切线方程.
   (c) 优化方面, 求函数的最大值和最小值.
   (d) 测量方面, 求曲线长度, 平面区域面积, 空间区域体积, 物体的重心, 等.
4. 现在公认为微积分是由 Newton (牛顿) 和 Leibniz (莱布尼兹) 发明的.
5. 微积分的基础是极限理论. 19 世纪初 Cauchy(柯西)、Weierstrass(魏尔斯特拉斯)、Riemann(黎曼) 等人在前人工作的基础上逐步完成了极限理论的严格化.

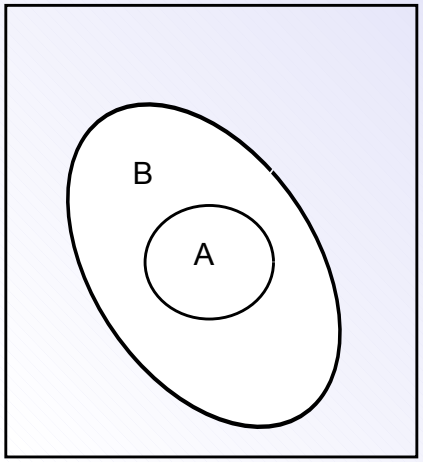
1. 数学大体上可以分为几何、代数、分析三个部分. 几何与代数的发展起步较早, 而分析发展得晚一些.
2. 微积分属于分析类, 包含微分、积分、微分与积分的关系.
3. 微积分的发展主要是从研究变量以及变量之间的关系开始的, 特别是在 17 世纪下面四类问题的大量出现:
   (a) 运动学方面, 物体移动的距离、速度.
   (b) 几何学方面, 求曲线的切线方程.
   (c) 优化方面, 求函数的最大值和最小值.
   (d) 测量方面, 求曲线长度, 平面区域面积, 空间区域体积, 物体的重心, 等.
4. 现在公认为微积分是由 Newton (牛顿) 和 Leibniz (莱布尼兹) 发明的.
5. 微积分的基础是极限理论. 19 世纪初 Cauchy(柯西)、Weierstrass(魏尔斯特拉斯)、Riemann(黎曼) 等人在前人工作的基础上逐步完成了极限理论的严格化.
6. 极限理论严格化的标志性节点是实数理论的建立.

第 1 章　极限

§1.1　实数

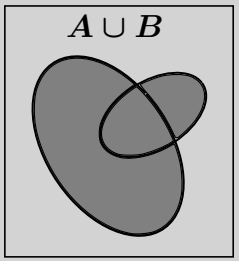
1.1.1　集合

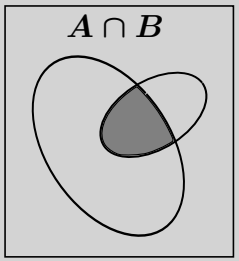
集或称集合是最基本的数学概念, 不能用其它数学概念来定义, 只能用语言来描绘刻画. 所谓集合就是一堆确定的、不同的、具有某些属性的对象的整体. 我们不将那种包罗万象把一切事物都囊括其中的东西称为集合, 因为这样会导致所谓集合悖论. 我们称集合中的对象为元素. 习惯上用大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 等来表示集合, 用小写英文字母 $a, b, c, \cdots$ 等来表示集合中的元素. 若 a 是集合 A 中的元素, 则记成 $a \in A$, 或 $A \ni a$. 当 a 不是集合 A 的元素时, 记为 $a \notin A$.

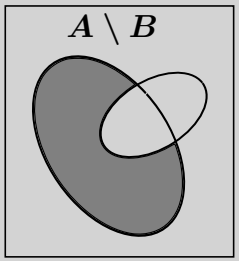


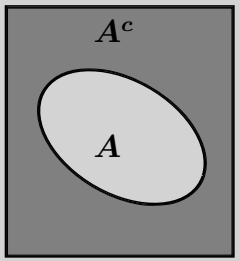
若集合 A 的所有元素都在集合 B 中, 则记为 $A \subset B$, 或 $B \supset A$, 此时称 A 是 B 的子集. 当 $A \subset B$, 同时 $B \subset A$, 即, A 和 B 有完全相同的元素时, 记为 $A = B$. 将一个集合的元素全部取出, 这个集合就变得空无一物. 此种空无一物的集合称为空集, 记为 $\varnothing$. 我们约定空集是任何集合的子集.

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是非空集合, 那么由所有 n 元素组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ (其中 $a_i \in A_i$) 形成的集合称为 $A_1, \cdots, A_n$ 的直积, 记为 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. 特别 n 个 A 的直积记为 A^n.









将集合 A 与集合 B 的所有元素合在一起形成的新集合称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$. 属于 A 同时也属于 B 的那些元素形成的集合称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$. 属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集, 记为 $A \setminus B$. 当在某个大集合 X 中来考虑问题时, 不属于 A 的元素所成之集称为 A 的余集, 或补集, 记为 A^c.

显然并运算和交运算满足交换律和结合率, 即有

1° $A \cup B = B \cup A$; (并的交换率)

2° $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; (并的结合率)

3° $A \cap B = B \cap A$; (交的交换率)

4° $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. (交的结合率)

如果参与并或交运算的是一族集合 A_α, $(\alpha \in I)$, 这里 I 称为指标集, 其中可能有无穷多个元素, 那么这一族集合的并和交分别记成:

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \quad 和 \quad \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$$

不难验证下面并和交的运算性质:

1° $B \cap \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I}(B \cap A_\alpha)$; (交关于并的分配率)

2° $B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha)$; (并关于交的分配率)

3° $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$;

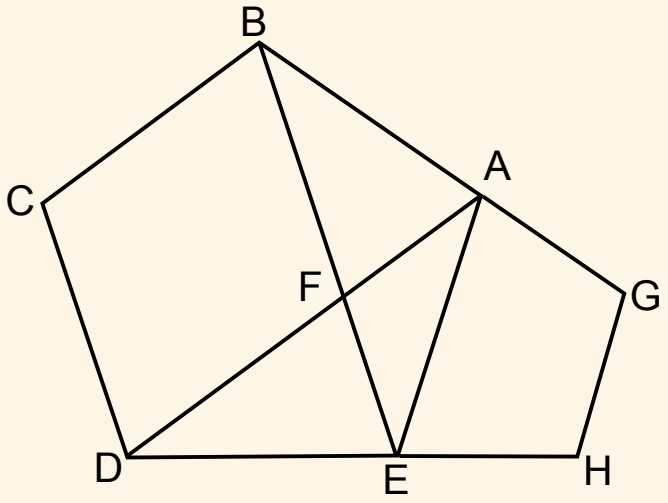
4° $\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

1.1.2 实数

人类的祖先在生产实践活动中为了计数的需要发明了 $1, 2, 3, \cdots$, 这类我们称之为正整数的数, 并发明了加法运算和乘法运算, 之后又发明了 0 (零) 和负整数 $-1, -2, -3, \cdots$ 以及减法运算. 我们用 $\mathbb{Z}^+$ 来表示正整数. 用 $\mathbb{N}$ 表示正整数与 $\{0\}$ 的并. 正整数, 零, 负整数全体合称整数, 用 $\mathbb{Z}$ 表示. 为了表示从 m 个物件中取出了 n 个物件, 发明了 $\frac{n}{m}$ 这样的分数, 分数之间的除法也跟着被发明了. 我们用 $\mathbb{Q}$ 来表示所有整数和正负分数的全体, 称之为有理数. 在相当长的一个时期内, 都没有出现新的数, 一些人甚至认为有理数可以满足一切需求了. 由于在实践中经常要度量线段的长度, 考察两条线段的长短, 以及给定的两条线段是否能同时被某第三条较短的线段量尽 (即, 长度同时是第三条线段的整数倍) 这样的问题就产生了. 两个线段如果同时能被第三条线段量尽, 就称这两条线段是可公度的.

古希腊数学家毕达哥拉斯 (Pythagoras) 认为可公度这件事是毋庸置疑的, 因为只有这样, 任意两条线段长度的比值才都是有理数. 他利用这个思想证明了相似三角形的三条边对应成比例的定理. 在当时毕氏的证明可以说是无懈可击的. 虽然毕氏学派也发现 “任意两条线段都可公度” 也有疑问, 但他们总是有意回避. 毕氏学派的一位年青学者希帕索斯 (Hippasus) 本着实事求是的精神探索关于可公度的先验假设是否成立. 结果他发现正五边形的边和对角线是不可公度的.

如图设有正五边形 $ABCDE$. 根据平面几何知识可知, $BA = BF$, $FA = FE$. 延长 BA 至 G 使 $AG = AF$, 延长 DE 至 H 使 $EH = EF$, 连接 G 和 H. 于是 $AFEHG$ 也是一个正五边形, 其对角线的长等于大五边形的边长,而边长等于大五边形的对角



线与边长之差. 从这个小正五边形出发还可以用同样方法得到更小的正五边形, 以至于可以得到无数个越来越小的正五边形.

假设 BE 与 BA 是可公度的, 可以设 $BE = md$, $BA = nd$, 这里 m, n 是自然数, d 是用来公度 BE 和 BA 的第三条直线段的长度. 易知 $AE = nd$, $AG = (m-n)d$. 因此, 小五边形的边长比大五边形的边长小但还是 d 的整数倍, 这说明小五边形至多有 n 个. 这与可以得到无数个小五边形的结论是矛盾的, 从而证明了正五边形的边和对角线是不可公度的.

希帕索斯还用类似的方法证明了正方形的对角线与边也是不可公度的.

要完全表示任意两条线段的比值就必须引入新的数, 即, 要将有理数集 $\mathbb{Q}$ 进行扩充. 假设 $\mathbb{Q}$ 被扩充成更大的集合, 记为 $\mathbb{R}$, 根据已知的有理数所满足的性质, 我们期望集合 $\mathbb{R}$ 应满足如下性质:

加法 对任意 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 存在唯一的元素 $x+y \in \mathbb{R}$ 与之对应, 称 $x+y$ 为 x 与 y 的和.

乘法 对任意 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, 存在唯一的元素 $x \cdot y \in \mathbb{R}$ 与之对应, 称 $x \cdot y$ 为 x 与 y 的积.

有序 $\mathbb{R}$ 中的元素有关系 $\leqslant$, 即对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 有 $x \leqslant y$ 或者 $y \leqslant x$.

而且这两种运算是可交换的, 即

$$x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x,$$

也是可结合的, 即

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

还应满足下面条件:

P01: 存在零元 $0 \in \mathbb{R}$ 使对任何 $x \in \mathbb{R}$, 有 $x + 0 = 0 + x = x$.

P02: 对任何 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $-x \in \mathbb{R}$, 称为 x 的负元, 使得 $x + (-x) = 0$.

P03: 存在么元 $1 \in \mathbb{R}$, 使对任何 $x \in \mathbb{R}$, 有 $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

P04: 对每个非零元 x, 存在 $x^{-1} \in \mathbb{R}$, 称为 x 的逆元, 使得 $x \cdot x^{-1} = 1$.

P05: 对任意 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 有 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. 称为分配率.

P06: 对任何 $x \in \mathbb{R}$, 有 $x \leqslant x$.

P07: 对 $x, y \in \mathbb{R}$, 若 $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ 同时成立, 则 $x = y$.

P08: 对 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 若 $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, 则 $x \leqslant z$. 称为传递性.

P09: 对 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 若 $x \leqslant y$, 则 $x + z \leqslant y + z$.

P10: 对 $x, y \in \mathbb{R}$, 若 $0 \leqslant x$ 同时 $0 \leqslant y$, 则 $0 \leqslant x \cdot y$.

定义了以上两种运算和序关系并满足性质 P01-P10 的集合称为代数结构域, 简称域. 有理数全体 $\mathbb{Q}$ 的确满足以上性质, 因此, $\mathbb{Q}$ 是一个域, 称为有理数域.

这些性质还不能完全概括实数的全部性质, 我们需要加上下面这条重要性质.

定理 1 (**完备公理**) 如果 X 与 Y 是 $\mathbb{R}$ 的两个非空子集, 且对于任意 $x \in X$, $y \in Y$, 都有 $x \leqslant y$, 那么, 存在 $c \in \mathbb{R}$, 使得对任意 $x \in X$, $y \in Y$, 有 $x \leqslant c \leqslant y$.

定义了加法、乘法、序关系, 并满足性质 P01-P10 和完备公理的集合 $\mathbb{R}$ 称为实数集合, 这样的集合是存在的, 戴德金 (Dedekind)、康托 (Cantor)、米勒 (Meray) 以及海因 (Heine) 曾用不同的方法定义了实数集合. 实际上, 它们是相互同构的, 即相互之间可以建立一一对应, 并保持两种运算的结构不变.

实数集合中的元素称为实数. 以后就用字母 $\mathbb{R}$ 表示实数集合.

定义 1 设 $\mathbb{R}$ 是实数集合. 若集合 $X \subset \mathbb{R}$ 有性质: 当 $x \in X$ 时必有 $x+1 \in X$, 则称 X 是一个归纳集.

定义 2 包含 1 的最小归纳集称为正整数集, 记为 $\mathbb{Z}^+$.

由此出发就可以定义整数集合 $\mathbb{Z}$, 有理数集合 $\mathbb{Q}$. 当然实数集合是有理数集合的扩充, 一个实数若不是有理数就称为无理数.

阿基米德原理 设 h 是一个正数, 那么对于任何实数 x 都能找到唯一的整数 k, 使得 $(k-1)h \leqslant x < kh$.

下面是正整数集合的几条常用性质:

定义 1 设 $\mathbb{R}$ 是实数集合. 若集合 $X \subset \mathbb{R}$ 有性质: 当 $x \in X$ 时必有 $x+1 \in X$, 则称 X 是一个归纳集.

定义 2 包含 1 的最小归纳集称为正整数集, 记为 $\mathbb{Z}^+$.

由此出发就可以定义整数集合 $\mathbb{Z}$, 有理数集合 $\mathbb{Q}$. 当然实数集合是有理数集合的扩充, 一个实数若不是有理数就称为无理数.

阿基米德原理 设 h 是一个正数, 那么对于任何实数 x 都能找到唯一的整数 k, 使得 $(k-1)h \leqslant x < kh$.

下面是正整数集合的几条常用性质:

(1) 对于任意正数 ε, 存在正整数 n 使得 $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

定义 1 设 $\mathbb{R}$ 是实数集合. 若集合 $X \subset \mathbb{R}$ 有性质: 当 $x \in X$ 时必有 $x+1 \in X$, 则称 X 是一个归纳集.

定义 2 包含 1 的最小归纳集称为正整数集, 记为 $\mathbb{Z}^+$.

由此出发就可以定义整数集合 $\mathbb{Z}$, 有理数集合 $\mathbb{Q}$. 当然实数集合是有理数集合的扩充, 一个实数若不是有理数就称为无理数.

阿基米德原理 设 h 是一个正数, 那么对于任何实数 x 都能找到唯一的整数 k, 使得 $(k-1)h \leqslant x < kh$.

下面是正整数集合的几条常用性质:

(1) 对于任意正数 ε, 存在正整数 n 使得 $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(2) 如果 $x \geqslant 0$ 且对于任何 $n \in \mathbb{Z}^+$ 有 $x < \frac{1}{n}$, 那么 $x = 0$.

定义 1 设 $\mathbb{R}$ 是实数集合. 若集合 $X \subset \mathbb{R}$ 有性质: 当 $x \in X$ 时必有 $x+1 \in X$, 则称 X 是一个归纳集.

定义 2 包含 1 的最小归纳集称为正整数集, 记为 $\mathbb{Z}^+$.

由此出发就可以定义整数集合 $\mathbb{Z}$, 有理数集合 $\mathbb{Q}$. 当然实数集合是有理数集合的扩充, 一个实数若不是有理数就称为无理数.

阿基米德原理 设 h 是一个正数, 那么对于任何实数 x 都能找到唯一的整数 k, 使得 $(k-1)h \leqslant x < kh$.

下面是正整数集合的几条常用性质:

(1) 对于任意正数 ε, 存在正整数 n 使得 $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(2) 如果 $x \geqslant 0$ 且对于任何 $n \in \mathbb{Z}^+$ 有 $x < \frac{1}{n}$, 那么 $x = 0$.

(3) 如果 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$, 则存在 $r \in \mathbb{Q}$, 使得 $a < r < b$.

定义 1 设 $\mathbb{R}$ 是实数集合. 若集合 $X \subset \mathbb{R}$ 有性质: 当 $x \in X$ 时必有 $x+1 \in X$, 则称 X 是一个归纳集.

定义 2 包含 1 的最小归纳集称为正整数集, 记为 $\mathbb{Z}^+$.

由此出发就可以定义整数集合 $\mathbb{Z}$, 有理数集合 $\mathbb{Q}$. 当然实数集合是有理数集合的扩充, 一个实数若不是有理数就称为无理数.

阿基米德原理 设 h 是一个正数, 那么对于任何实数 x 都能找到唯一的整数 k, 使得 $(k-1)h \leqslant x < kh$.

下面是正整数集合的几条常用性质:

(1) 对于任意正数 ε, 存在正整数 n 使得 $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(2) 如果 $x \geqslant 0$ 且对于任何 $n \in \mathbb{Z}^+$ 有 $x < \frac{1}{n}$, 那么 $x = 0$.

(3) 如果 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$, 则存在 $r \in \mathbb{Q}$, 使得 $a < r < b$.

(4) 对于任何 $x \in \mathbb{R}$, 存在唯一的整数 k 使得 $k \leqslant x < k+1$. 这个 k 称为 x 的整数部分, 记为 $[x]$.

1.1.3 不等式

Bernoulii 不等式 设 $x \geqslant -1$, $n \geqslant 1$ 是正整数, 则有

$$(x+1)^n \geqslant 1 + nx.$$

1.1.3 不等式

Bernoulii 不等式 设 $x \geqslant -1$, $n \geqslant 1$ 是正整数, 则有

$$(x+1)^n \geqslant 1 + nx.$$

证明 用数学归纳法容易证明.

1.1.3 不等式

Bernoulii 不等式 设 $x \geqslant -1$, $n \geqslant 1$ 是正整数, 则有

$$(x+1)^n \geqslant 1 + nx.$$

证明 用数学归纳法容易证明.

Bernoulii 不等式的推广 设 $n \geqslant 1$ 是自然数, 且 $x_i \geqslant -1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 且都同号, 则有

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i + 1) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

平均不等式 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正实数, 则有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

平均不等式 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正实数, 则有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

证明 (1) 用归纳法可以证明当 $n = 2, 4, \cdots, 2^k, \cdots$ 时, 右边不等式成立.

(2) 假设右边不等式对任意 n 个正数成立, 令 $a = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$, 则有

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}a} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a}{n} = a,$$

化简即得

$$\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1},$$

这说明平均不等式右边对任意 $n-1$ 个正数也成立. (1) 和 (2) 表明平均不等式右边对一切自然数 n 成立.

Cauchy 不等式 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$; $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是两组实数, 则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Cauchy 不等式 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$; $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是两组实数, 则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

证明 对任意实数 t 有

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i t + y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) t + \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

右边这个关于 t 的一元二次式总非负, 因此其判别式非正, 从而可得 Cauchy 不等式.

Cauchy 不等式 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$; $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是两组实数, 则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

证明 对任意实数 t 有

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i t + y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) t + \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

右边这个关于 t 的一元二次式总非负, 因此其判别式非正, 从而可得 Cauchy 不等式.

证法2 令 $X_i = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$, $Y_i = \frac{y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}$, 则 $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 1$, $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = 1$, 由 $X_i Y_i \leqslant \frac{1}{2} X_i^2 + \frac{1}{2} Y_i^2$, 得

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \leqslant 1.$$