应用随机过程期末考试

2020 年 6 月 7 日

姓名：邹广翼　　学号：PB18071555

第一部分　知识总结

我们下半学期讲了连续时间离散状态马氏链,鞅论,布朗运动以及随机积分.我们依次梳理这些知识.

1　连续时间离散马氏链

我们先从离散马氏链进一步拓展,考虑连续时间马氏链离散状态,我们给出如下定义:

定义1. *随机过程X满足马尔科夫性如果*

$$\mathbb{P}(X(t_n)=j|X(t_1)=i_1,...,X(t_{n-1})=i_{n-1})=\mathbb{P}(X(t_n)=j|X(t_{n-1})=i_{n-1})$$

对所有的$j,i_1,...,i_n\in S$和时刻$t_1<t_2...<t_n$.

如果状态S是可数的,那我们就称之为连续时间离散状态马氏链.那么和离散时间马氏链一样,我们引入转移概率:

定义2. *转移概率$p_{ij}(s,t)$如下定义:*

$$p_{ij}(s,t)=\mathbb{P}(X(t)=j|X(s)=i),s\leq t$$

该链被称为时间其次的如果$p_{ij}(s,t)=p_{ij}(0,t-s)$对所有的$i,j,s,t$.成立,并且我们用$p_{ij}(t-s)$来表示$p_{ij}(s,t)$.

因此,当我们有一时齐链X,并且记$\boldsymbol{P}_t=(p_{ij}(t))$.并且我们将$\{\boldsymbol{P}_t:t\geq 0\}$称作该链的转移半群.

和离散时间马氏链一样,我们有如下定理:

定理1. *$\{\boldsymbol{P}_t:t\geq 0\}$是一个随机半群,也就是说其满足以下条件:(a)$\boldsymbol{P}_0=I$.(b)$\boldsymbol{P}_t$是随机矩阵.(c)其满足$\boldsymbol{P}_{s+t}=\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_t$对于$s,t\geq 0$.*

我们希望能够更好的表达出$\boldsymbol{P}_t$,因为其满足乘积关系我们会考虑其是不是为E^{tG}对某个G.因此我们引入如下定义:

定义3. *半群$\{\boldsymbol{P}_t\}$被称为标准的如果$\boldsymbol{P}_t \to I, t \downarrow 0$.也就是说$p_{ii}(t) \to 1, p_{ij}(t) \to 0, i \neq j$.*

同时引入如下定义:

定理2. *矩阵$\boldsymbol{G} = (g_{ij})$被称作转移矩阵$\boldsymbol{P}$的生存子如果其满足:*

$$p_{ij}(h) \sim g_{ij}h, i \neq j.$$

$$p_{ii}(h) \sim 1 + g_{ii}h$$

也可以写成:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(\boldsymbol{P}_h - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{G}$$

由上面的定义我们可以得到两个关于$\boldsymbol{P}_t$的微分方程.

$$\text{向前方程}\boldsymbol{P}_t' = \boldsymbol{P}_t\boldsymbol{G}.$$

和

$$\text{向后方程}\boldsymbol{P}_t' = \boldsymbol{G}\boldsymbol{P}_t.$$

其一般可解出$\boldsymbol{P}_t = e^{t\boldsymbol{G}}$.

我们接下来想要研究随机过程的一些其他性态,比如离散时间马氏链研究过的极限分布.不过我们其实可以对连续时间离散状态马氏链进行分解,也就是将其分解为第$n-1$到第n次跳间隔的时间,以及跳到哪去.但首先我们需要考虑第$n-1$到第n次跳间隔的时间.这实际上是一独立增量过程.

定理3. *记U_n为第n次跳间隔的时间,当前状态为i,则U_n对应于参数为$-g_{ii}$的指数分布.*

Proof. 由马氏性,不妨设一开始处在状态i,我们考虑其离开时间.记$\mathbb{P}_i(t)$为t时刻之前一直在状态i的概率,则有:

$$\mathbb{P}_i(t+h) = \mathbb{P}_i(t)p_{ii}(h)$$

从而有

$$\mathbb{P}_i'(t) = g_{ii}\mathbb{P}_i(t)$$

从而有U_n服从参数为$-g_{ii}$的指数分布. □

而对于第n次跳的转移概率,我们有($g_{ii} \neq 0$):

$$p_{ij} = \frac{g_{ij}}{-g_{ii}}.$$

这样我们就可以将其分解为一个独立增量过程和一个离散状态马氏链$(N(t), Z_n)$的过程.同样的我们研究其极限过程.由离散时间马氏链的经验,Z_n一个会有一个稳定分布π,容易说明,等价于$\pi\boldsymbol{G} = 0$. 并且有$\pi\boldsymbol{G} = 0$等价于$\pi\boldsymbol{P}_t = \pi$.有了平稳分布,我们自然可以得到极限行为的一些性质:

定理4. *设不可约马氏链X:*

(a)如果存在稳定分布π,则$p_{ij}(t) \to \pi_j$当$t \to \infty$.

(b)如果不存在平稳分布,则$\pi_{ij} \to 0$.

要研究极限行为,我们同时还可以研究$T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n$,$T_n = U_0 + ... + U_n$的性态.我们有如下定理:

定理5. 定义链X会爆炸如果$\mathbb{P}(T_\infty < \infty) > 0$.则如果有以下任一条件成立,则链不爆炸:*(a)*S是有限空间.*(b)*$\sup_i g_i < \infty$;*(c)*$X(0) = i$其中i对于跳链Z是常返的.

Proof. 证明略 □

然后我们讨论了一些具体的连续时间马氏链.比如生灭过程,Poisson过程等.

而后我们学习了鞅:

定义4 (离散鞅)**.** 称$\{S_n, n \geq 1\}$为关于$\{X_n, n \geq 1\}$的鞅,如果:*(a)*$\mathbb{E}|S_n| < \infty$;*(b)*$\mathbb{E}(S_{n+1}|X_n, ..., X_1) = S_n$.

则我们很自然会有如下几个结论:

推论1. 若$\{S_n, n \geq 1\}$关于$\{X_n, n \geq 1\}$为鞅,则*(a)*$\mathbb{E}(S_{m+n}|X_m, X_{m-1}, ..., X_1) = S_m$;*(b)*$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(S_1)$.

我们有如下的定理:

定理6. *(1)[*鞅收敛定理*]*若$\{S_n, n \geq 1\}$为关于$\{X_n, n \geq 1\}$的鞅,且$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}(S_n^2) < M < \infty$.则存在随机变量$S$使得*(a)* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \quad a.s$ *(b)*$\mathbb{E}(S_n - S)^2 \to 0, n \to \infty$.

*(2)[Doob-Kolmogorov*不等式*]*假设同上,我们有$\mathbb{P}(\max\limits_{1\leq i\leq n} |S_i| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}(S_n^2)$.

Proof. 我们记B_j为事件$|S_j| \geq \epsilon$的j是首个j.则B_j不交.我们有:

$$\mathbb{E}(S_n^2) \geq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(S_n^2 I_{B_j}).$$

而

$$\mathbb{E}(S_n^2 I_{B_j}) = \mathbb{E}((S_n - S_j)^2 I_{B_j}) + 2\mathbb{E}((S_n - S_j)S_j I_{B_j}) + \mathbb{E}(S_j^2 I_{B_j}) \geq \mathbb{E}(S_j^2 I_{B_j}) \geq \epsilon^2 \mathbb{P}(I_{B_j}).$$

求和即知

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} |S_i| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}(S_n^2).$$

我们接下来证明定理1.首先我们有:

$$\mathbb{E}(S_{m+n}^2) = \mathbb{E}(S_{m+n} - S_n + S_m)^2 = \mathbb{E}S_m^2 + \mathbb{E}(S_{n+m} - S_m)^2$$

则$\mathbb{E}(S_{m+n})^2$递增.同时可以得到$\mathbb{E}(S_{n+m} - S_n)^2 \to 0$.故其依平方收敛到某随机变量$S$.

我们现在考虑第一个命题,令$C = \{\omega \in \Omega : \{S_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$是柯西列$\}$. 则我们要证$\mathbb{P}(C) = 1$.记$S(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(\omega)$,并且在其余情况下为0.由Fatou引理:我们有$\mathbb{E}(S^2) \leq \liminf(\mathbb{E}(S_n^2)) < \infty$,从而$|S| < \infty, a.s.$

我们接下来证明$\mathbb{P}(C) = 1$.我们有:

$$C = \cap_{\epsilon<t} \cup_{m=1}^{\infty} \{|S_{m+i} - S_m| < \epsilon, \forall i \geq 1\}$$

从而

$$C^c = \cup_{\epsilon<t} \cap_{m=1}^{\infty} \{|S_{m+i} - S_m| \geq \epsilon, \exists i \geq 1\}$$

而$Y_n = S_{m+n} - S_m$是关于其自身的鞅.因为:

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}|Y_1, ..., Y_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_{n+1}|X_1, ..., X_{m+n}]|Y_1, ..., Y_n] = \mathbb{E}[Y_n|Y_1, ..., Y_n] = Y_n.$$

所以可以用Doob-Kolmogorov不等式.得到$\mathbb{P}(C^c) = 0$.从而$S_n \to S, a.s.$ 下面证明这个也是平方收敛:由fatou引理:$\mathbb{E}(S_n - S)^2 \leq \liminf \mathbb{E}(S_n - S_m)^2 = \liminf(\mathbb{E}S_m^2 - \mathbb{E}S_n^2) = M' - \mathbb{E}S_n^2 \to 0$. □

接下来我们考虑了对随机变量的预测.

定义5. 设随机变量X,Y,若$\bar{Y}=h(X)$满足$||Y-\bar{Y}||^2$最小,则称$\bar{Y}$为给定X条件下关于Y的最小/最好均分预测.

其存在唯一性都是很容易证明的.我们有如下定理:

定理7 (投射定理)**.** $E[(Y-M)Z]=0$对任意闭线性空间$\mathcal{H}$中的Z成立,等价于$||Y-M||_2\leq||Y-Z||_2$对任意的Z.

从而我们有:

定理8. X,Y是随机变量,$\mathbb{E}Y^2<\infty.\mathcal{H}=\{h(X).h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\mathbb{E}(h^2(X))<\infty\}$为一闭线性子空间,则$\mathbb{E}(Y|X)$为给定$X$后$Y$的最佳统计.

而后我们开始考虑布朗运动以及随机积分.

定义6. 称实值过程$(B_t)_{t\geq0}$为布朗运动,如果其满足:*(1)*独立增量性:$\forall n\geq2.0=t_0<t_1...<t_n$,$B_0,B_{t_1}-B_{t_0}...$相互独立.*(2)*正态性对任意$s<t$,$B_t-B_s\sim N(0,\sigma^2(t-s))$其中$\sigma$是常数.

同时我们可以定义连续时间连续状态马氏链:

定义7. 取值于$(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$的随机过程$\{X_t\}_{t\geq0}$被称为马氏过程,如果其有如下马氏性:

$$\forall 0\leq t_1<t_2...<t_n<u$$

$$\mathbb{P}(X_u\leq a|X_{t_1},X_{t_2},...,X_{t_n})=\mathbb{P}(X_u\leq a|X_{t_n})$$

等价于,设$F_t=\sigma\{X_s,0\leq s\leq t\}$为其生成的$\sigma$代数则:

$$\mathbb{P}(X_u\leq a|F_t)=\mathbb{P}(X_u\leq a|X_t),t<u.$$

我们引入转移函数:$p(s,x;t,A)$其中$(t\geq s\geq0.x\in\mathbb{R},A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. 其意思是$s$时刻处在$x$位置的条件下$t$时刻处于$A$范围的概率.其满足如下Chapman-Kolmogorov方程:

$$p(s,x;u,A)=\int_R p(s,x;t,dy)p(t,y;u,A).$$

其被称为时齐的如果$p(s,x;t,A)=p(t-s,x,A)$. 我们接下来考虑布朗运动的性质.首先是布朗运动$a.s.$连续,这个没有给出证明.然后还有几个比较容易证明的结论:

定理9. 设$(B_t)_{t\geq0}$为布朗运动,则以下过程也是布朗运动.*(1)*$(-B_t)_{t\geq0}$*(2)*$(B_{s+t}-B_s)_{t\geq0}$*(3)*$(cB_{t/c^2})_{t\geq0}$*(4)*$(tB_{1/t})_{t\geq0}$*(5)*固定u,$(B_u-B_{u-t}),0\leq t\leq u$.

关于布朗运动的连续性我们有:

定理10. 以概率*1*,布朗运动在任一点非*lipschitz*连续,从而布朗运动无处可微.

Proof. 设$B_t(\omega)$在某时刻$t_0 \in [0,1)$处局部lipschitz连续,则存在l使得:

$$|\frac{|B_{t_0+h}-B_{t_0}|}{h}| \le l.$$

则取n充分大,我们有上面这个式子包含在:

$$|B_\omega(\frac{k_1+1}{n})-B_\omega(\frac{k_1}{n})| \le \frac{3l}{n}$$
$$|B_\omega(\frac{k_1+2}{n})-B_\omega(\frac{k_1+1}{n})| \le \frac{5l}{n}$$
$$|B_\omega(\frac{k_1+3}{n})-B_\omega(\frac{k_1+2}{n})| \le \frac{7l}{n}$$

记Λ为对任意$n \ge m$,存在$\{0,...,n-1\}$中接连3个k使得:

$$|B(\frac{k+1}{n})-B(\frac{k}{n})| \le \frac{l}{n}$$

的事件,则

$$\{\omega : B_t(\omega)\text{在某个t处局部Lipschitz连续}\} \subset \Lambda$$

我们记$\Lambda_{l,m} = \cap_{n=m}^{\infty} \cup_{k=0}^{n-1} \cap_{j=0}^{2} \{|B(\frac{k+j+1}{n})-B(\frac{k+j}{n})| \le \frac{l}{n}\}$ 则$\Lambda = \cup_{l=1}^{\infty} \cap_{m=1}^{\infty} \Lambda_{l,m}$

我们只要证明$\mathbb{P}(\Lambda_{l,m})=0$.事实上

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\Lambda_{l,m}) \le \limsup \mathbb{P}(\cup_{k=0}^{n-1} \cap_{j=0}^{2} \{|B(\frac{k+j+1}{n})-B(\frac{k+j}{n})| \le \frac{l}{n}\}) \\
&\le \limsup \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\cap_{j=0}^{2}\{|B(\frac{k+j+1}{n})-B(\frac{k+j}{n})| \le \frac{l}{n}\}) \\
&\le O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \to 0
\end{aligned}$$

而由于有界变差函数几乎处处可导,故布朗运动在任一区间上非有界变差.

我们接下来进一步讨论布朗运动的性质,首先我们看看鞅性,我们有:

定理11. *(1)*$\{B_{t_n}\}$*关于自身为鞅;(2)*$\{B_{t_n}^2 - t_n\}$*关于*B_{t_n}*为鞅;(3)对任意*$\theta \in \mathbb{R}$,$\{e^{\theta B_{t_n}-\frac{1}{2}\theta^2 t_n}\}$*关于*$\{B_{t_n}\}$*为鞅;(4)若*$f \in C^2(R), f, \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$*有界,则*$\{f(B_{t_n}) - \int_0^{t_n} \frac{1}{2}\Delta f(B_u)du\}$*关于*$\{B_{t_n}\}$*为鞅.*

□

我们同时给出连续时间鞅的定义:考虑σ代数的集合$\{F_t, t \ge 0\}$满足$F_s \subset F_t, s \le t$若$\{Y_t, t \ge 0\}$满足(1)$Y_t \in F_t$(2)$\mathbb{E}|Y_t| < \infty$(3)$\mathbb{E}(Y_t|F_s) = Y_s, s \le t$.则称$(Y, \{F_t\}_{t\ge 0})$为鞅.若$Y_t$关于$t$连续,且二次矩有限,则称为平方可积鞅.

定理12. *记*$F_t = \sigma(B_s, 0 \le s \le t)$*则我们有:(1)*$\{B_t\}$*关于*$\{F_t\}_{t\ge 0}$*为鞅;(2)*$\{B_t^2 - t\}$*关于*$F_t$*为鞅;(3)对任意*$\theta \in \mathbb{R}$,$\{e^{\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t}\}$*关于*$\{F_t\}$*为鞅;(4)若*$f \in C^2(R), f, \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$*有界,则*$\{f(B_t) - \int_0^t \frac{1}{2}\Delta f(B_u)du\}$*关于*$\{F_t\}$*为鞅.*

我们还有如下结论:

定理13. *设*$\Delta_{m,n} = B(tm2^{-n}) - B(t(m-1)2^{-n})$*,则*$\mathbb{E}(\sum_{m\le 2^n} \Delta_{m,n}^2 - t)^2 \to 0, n \to \infty$*.而由*$Borel-cantelli$*引理,我们可以证明:*$\sum_{m\le 2^n} \Delta_{m,n}^2 \to ta.s, n \to \infty$

Proof. $\Delta_{m,n} = N(0, 2^{-n}t) = 2^{-n/2}\Delta_{1,0}$故可用大数定理来证明. □

同时我们可以证明布朗运动的Kolmogorov不等式:

定理14. $\forall r > 0, \mathbb{P}(\sup\limits_{0\le s\le t} |B_s| > r) \le \frac{t}{r^2}$.

这个证明就用离散时间鞅来证就行.

接下来我们开始考虑随机积分,我们想考虑随机过程在一段时间–积分之后的的结果的概率,所以我们会想要引入随机积分.一开始我们自然考虑Lebesgue积分,但事实上由于很多随机过程并不有界变差所以这种定义并不好,事实上,我们是用L^2逼近来定义的随机积分: 设f是阶梯函数,如果f满足:

$$f(s) = f_{j-1}, t_{j-1} < s \le t_j, f_{j-1}\text{常数}.$$

我们对这样的f定义积分$\int_0^t f(r)dB(\omega, r) = \sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$. 记$F_t = \sigma(B(s), 0 \le s \le t)$.我们有:

$$\mathbb{E}\int_0^t f(s)dB(\omega, s) = 0$$

而

$$\mathbb{E}[\int_0^t f(s)dB(\omega, s)]^2 = \sum_{i,j=1}^n f_{i-1}f_{j-1}\mathbb{E}[(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})] = \sum_{j=1}^n |f_{j-1}|^2\mathbb{E}(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})^2 = \int_0^t |f(s)|^2 ds.$$

从而有:

$$\mathbb{E}[\int_0^t f(s)dB_s]^2 = \int_0^t |f(s)|^2 ds.$$

这就使我们能够用L^2空间的理论.取阶梯函数f_n, f_m使得:

$$\mathbb{E}\int_0^t |f_n(s)dB_s - f_m(s)dB_s|^2 = \int_0^t |f_n - f_m|^2 ds \to 0$$

我们用这个去逼近被积函数$f(s)$即可.我们有如下结果,设$X(t) = \int_0^t f(s)dB(s)$: (1)$\{X_t, t \in [0, t]\}$关于$t$连续.(2)$\{X_t, t \in [0, T]\}$关于$F_t$为连续平方可积鞅.(3)$\mathbb{E}\int_0^t f(s)dB(s)\int_0^t f(s)dB(s) = \int_0^t f(s)g(s)ds$.(4)对任意$a, b \in \mathbb{R}$有:$\int_s^t af(l)+bg(l)dB(l) = a\int_s^t f(l)dl+b\int_s^t g(l)dB(l)$.(5)$\int_0^t f(s)dB(s) \sim N(0, \int_0^t f^2(s)ds)$.(6)若$f \in L^2([0, T], \mathbb{R})$则$\int_0^t f(s)dB(s) \sim N(0, \int_0^t f^2(s)ds)$.

(5)(6)证明用矩收敛推出依分布收敛即可.或者用特征函数也可以证明.接下来我们要将随机积分推广到与该随机过程有关的函数上.

设$f = \{f_t, t \in [0, T]\}$为$(\Omega, F, P)$是的随机过程,且满足:$\exists 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T, f_{j-1} \in F_{t_{j-1}}, \mathbb{E}[f_{j-1}^2] < \infty$.使得$f(s) = f_{j-1}, t_{j-1} < s \le t_j$.这样的$f$被称为随机阶梯过程.则对上述$f$,定义:$\int_0^T f(s)dB(s) = \sum_{j=1}^n f_{j-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$.其中$f_{j-1}$是与$\omega$有关的常数函数.则我们可以证明:

$$\mathbb{E}[\int_0^T f(s)dB(s)]^2 = \mathbb{E}\int_0^T f(s)^2 ds.$$

则我们可用L^2理论来得到一般的随机积分.我们接下来得到了著名的Ito积分公式,也就是随机积分中的链式法则:

定理15. 设$Y_t = f(t, X_t)$.其中f二次连续,则:$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2$.

这主要是由于随机过程的二次变差不一定是0导致的.

第二部分　自拟试题

问题1 (Durrett 2.17)**.** 假设一个回答服务接到的电话数是服从比率为4的*Poisson*分布.*(a)*求第一个小时内接入电话数小于2的概率.*(b)*假设第一个小时有6个电话,那么第二个小时电话数< 2的概率.*(c)*假设接了十个电话后接线员就要休息,那么接线员平均工作时间为多少.

解答1. *(a)*设$p_i(t)$为t时刻接入电话为i的概率,则我们有:$p_{i+1}(t+h) = p_i(t)p_1(h) + p_{i+1}(t)p_0(h) + o(h)$.从而解得$p'_{i+1}(t) = 4p_i(t) - 4p_{i+1}(t)$.从而我们有:$p_0(t) = e^{-4t}, p_1(t) = 4te^{-4t}$.从而有概率为$5e^{-4}$.

*(b)*这个概率和*(a)*是一样的,为$5e^{-4}$.

*(c)*这个就是$\mathbb{E}[U_0 + ... + U_9] = 10\mathbb{E}[U_0] = \frac{5}{2}$.

问题2 (Durrett 4.1)**.** 一个销售员以如下概率往返A,B,C三地:

	A	B	C
A	-4	2	2
B	3	-4	1
C	5	0	-5

求*(a)*极限情况下他在各个城市花费的时间比例.*(b)*其每年从B地到A地的平均旅行数目.

解答2. 解$\pi \boldsymbol{G} = 0$,得到$\pi_A = 1/2, \pi_B = 1/4.\pi_C = 1/4$.从而比例为$(2:1:1)$*(b)*只要求年旅行数目即可.我们可以计算平均间隔时间为$4 * 1/2 + 4 * 1/4 + 5 * 1/2 = 11/2$从而一年出行$24/11$次,其中从$B$地到$A$地占$24/11 * 1/4 * 3/4 = 9/22$.

问题3. 设随机变量如下递归定义:$Y_0 = 1$.而Y_n均匀分布在$(0, Y_{n-1})$上.如果我们令$U_1, ...U_n...$为$(0,1)$上的均匀分布.则这个序列可以表示为$Y_n = U_n U_{n-1} ... U_0$.*(a)*设$M_n = 2^n Y_n$.说明其为鞅.*(b)*由$\log Y_n = \sum \log U_n$.说明$\frac{\log Y_n}{n} \to -1$.*(c)*由*(b)*说明$M_n \to 0$.

Proof. (a)证明由$\mathbb{E}(Y_n|Y_{n-1}) = \frac{Y_{n-1}}{2}$即证.

(b)为大数定理.

(c)由(b)即可证明. □

问题4 (Brownian Motion Martingales and Stochastic Calculus 2.25)**.** 证明$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0 a.s.$

Proof. 我们考虑说明$\lim\limits_{s\to\infty} \mathbb{P}(|B_t| \geq \epsilon t, \exists t > s) = 0$.这个我们如下证明:由Kolmogorov不等式我们有:

$$\mathbb{P}(\max_{2^n s 2^{n+1} s} |B_t| \geq \epsilon 2^n s) \leq \frac{\mathbb{E}(B^2_{2^{n+1}s})}{(\epsilon 2^n s)^2} \leq C_\epsilon 2^{-n}/s$$

则我们有:

$$\mathbb{P}(|B_t| \geq \epsilon t, \exists t > s) \leq \sum_n \mathbb{P}(\max_{2^n s 2^{n+1} s} |B_t| \geq \epsilon 2^n s) \leq C_\epsilon \sum_n 2^{-n}/s$$

故有: $\lim_{s\to\infty} \mathbb{P}(|B_t| \geq \epsilon t, \exists t > s) = 0$.从而 $\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0$a.s. □

问题5. 计算随机微分$d(tB^2(t))$

解答3. 设$f(t, X(t)) = tX^2(t)$.因为$dX(t) = 0dt + 1dB(t) = dB(t)$.而$f'_t(t, X(t)) = B^2(t)$,$f'_X(t, X(t)) = 2tW(t)$,$f''_{XX}(t, X(t)) = 2t$故由$Ito$公式有:$dtB^2(t) = [B^2(t) + t]dt + 2tB(t)dB(t)$