第十一周作业答案

罗曾宇

题目 1. 若把麦克斯韦方程组的所有矢量都分解为无旋的 (纵场) 和无散的 (横场) 两部分，写出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的这两部分在真空中所满足的方程式，并证明电场的无旋部分对应于库伦场.

解答. 令 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E_L}+\boldsymbol{E_T}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B_L}+\boldsymbol{B_T}, \boldsymbol{J}=\boldsymbol{J_L}+\boldsymbol{J_T}$，下角标 L 表示纵场即无旋场，T 表示横场即无散场：

$$\nabla\times\boldsymbol{E_L}=0, \nabla\times\boldsymbol{B_L}=0, \nabla\times\boldsymbol{J_L}=0,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E_T}=0, \nabla\cdot\boldsymbol{B_T}=0, \nabla\cdot\boldsymbol{J_T}=0,$$

由麦克斯韦方程组第一条

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot(\boldsymbol{E_T}+\boldsymbol{E_L})=\nabla\cdot\boldsymbol{E_L}=\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

由第二条

$$\nabla\times(\boldsymbol{E_L}+\boldsymbol{E_T})=-\frac{\partial(\boldsymbol{B_L}+\boldsymbol{B_T})}{\partial t},$$

可得

$$\nabla\times\boldsymbol{E_T}=-\frac{\partial(\boldsymbol{B_L}+\boldsymbol{B_T})}{\partial t},$$

但是注意，方程左边 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E_T})=0$，说明方程左边是无散的，也就是说方程右边也是无散的，所以右边应该改写为 $-\dfrac{\partial\boldsymbol{B_T}}{\partial t}$, 即第二条方程应该修改为

$$\nabla\times\boldsymbol{E_T}=-\frac{\partial\boldsymbol{B_T}}{\partial t},$$

由此也可以知道 $\dfrac{\partial \boldsymbol{B_L}}{\partial t}=0$, 由麦克斯韦方程组第三条

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\nabla\cdot(\boldsymbol{B_T}+\boldsymbol{B_L})=\nabla\cdot\boldsymbol{B_L}=0,$$

对于麦克斯韦方程组第四条 $\nabla\times(\boldsymbol{B_L}+\boldsymbol{B_T})=\mu_0(\boldsymbol{J_L}+\boldsymbol{J_T})+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial(\boldsymbol{E_L}+\boldsymbol{E_T})}{\partial t}$, 类似于对第二条的处理，可以知道

$$\nabla\times\boldsymbol{B_T}=\mu_0\boldsymbol{J_T}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E_T}}{\partial t},\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E_L}}{\partial t}=-\mu_0\boldsymbol{J_L},$$

综上所述，可以总结出各个量满足的方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E_L}=\frac{\rho}{\epsilon_0},\nabla\times\boldsymbol{E_L}=0,\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E_L}}{\partial t}=-\mu_0\boldsymbol{J_L},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E_L}=-\frac{\partial\boldsymbol{B_L}}{\partial t},\nabla\cdot\boldsymbol{E_T}=0,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B_L}=0,\nabla\times\boldsymbol{B_L}=0,\frac{\partial\boldsymbol{B_L}}{\partial t}=0,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B_T}=\mu_0\boldsymbol{J_T}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E_T}}{\partial t},\nabla\cdot\boldsymbol{B_T}=0,$$

可以看出，时变电场的纵向分量 $\boldsymbol{E_L}$ 由电荷激发，它与静电场 (库伦场) 一样是有散无旋场，故 $\boldsymbol{E_L}$ 对应于库伦场. 并且变化的磁场的横向分量 $\boldsymbol{B_T}$ 激发电场的横向分量 $\boldsymbol{E_T}$.

题目 2. 证明在线性各向同性均匀非导电介质中，若 $\rho=0,\boldsymbol{J}=0$，则 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可完全由矢势 $\boldsymbol{A}$ 决定. 若取规范变换使得 $\varphi=0$，这时 $\boldsymbol{A}$ 满足哪两个方程?

解答. 在线性各向同性均匀介质内 $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，若 $\rho=0,\boldsymbol{J}=0$, 麦克斯韦方程组为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0,$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

并且 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$, 代入第一条和最后一条方程中可得

$$\nabla \cdot (\nabla\varphi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) = 0,$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}),$$

从这两个方程可以消去 φ(怎么消去后面说明)，得到一个只关于 $\boldsymbol{A}$ 的方程，从中解出 $\boldsymbol{A}$，即可解出 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$，也就是说，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可完全由矢势 $\boldsymbol{A}$ 决定. 因为只需要一组 $\varphi, \boldsymbol{A}$ 就可以解出 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$，不妨令

$$\nabla\varphi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}\text{是无散场且选定},$$

所以上面的第二条方程可以化为

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + \mu\epsilon \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t},$$

只和 $\boldsymbol{A}$ 有关. 或者令

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

也就是洛伦兹规范，可以发现 $\varphi, \boldsymbol{A}$ 都满足波动方程.

若取规范变换使得 $\varphi = 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 满足的两个方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = 0,$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}).$$

注：这里需要说明一下，回顾我们的规范变换，$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Phi, \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$，选取 $\varphi' = 0$ 的规范没问题，确实可以找到符合标准的规范函数，但是不能选 $\boldsymbol{A}' = 0$ 的规范，因为这样会导致 $\boldsymbol{B} = 0$，换句话说，$\boldsymbol{A}$ 不能保证总是表示成某个规范函数的梯度.