电动力学答疑课

罗曾宇

USTC

地球和空间科学学院　固体地球物理

PB20071421

2024 年 1 月 4 日

目录

目录

!!!

下面讲的只是同学们问到的问题，以及一些我觉得容易错的位置，不等同于划重点!

郭书第一章 T5,T6,T8,T9,T11

极化体电荷密度，极化面电荷密度，磁化电流密度和表面磁化电流密度的计算

极化体电荷密度	$\rho_p = -\nabla \cdot \boldsymbol{P},$
极化面电荷密度	$\sigma_p = [(-\boldsymbol{e_n}) \cdot \boldsymbol{P}_{外} + \boldsymbol{e_n} \cdot \boldsymbol{P}_{内}]\|_S,$
磁化电流密度	$\boldsymbol{J_M} = \nabla \times \boldsymbol{M},$
表面磁化电流密度	$\alpha_M = [\boldsymbol{e_n} \times \boldsymbol{M}_{外} + (-\boldsymbol{e_n}) \times \boldsymbol{M}_{内}]\|_S$

如果忘了咋推导，记忆方式也很简单. 类似于记忆 *Maxwell* 方程组的边界条件时，将所有的 ∇ 算符换成 $\boldsymbol{e_n}$，这里也是一样的.

郭书第二章 T2,T3,T4,T5,T6

在利用分离变量法解静电问题时，注意以下几点：

(1) 如果没有源项，直接比系数即可；如果有源项，简单点来说就是泊松方程右边不是零，有“东西”，那么可以先猜一个特解，再换元把方程右边变成零。当然这个做法很数学，不用动脑子，也可以去思考题目具体的物理背景，把场拆成几个独立的源项去做，这样更清晰，也更“物理”，但是，何必呢?

(2) 比系数的时候不要瞎比，一股脑的把所有勒让德多项式放上去. 先观察一下大概是哪几项，因为勒让德多项式阶数每高一阶，次数就升高一次，这个还是很容易从边界条件观察出来的，简单来说，看边界条件里 $\cos\theta$ 的最高次数，最高是第几次就用到第几阶，没必要畏首畏尾或者担心遗漏，我们有唯一性定理做后盾，得到一个满足方程的解就可以了.

(3) 写边界条件的时候想清楚，一定要慎重，确保自己明白其中的物理.

比如为什么这里电势趋于零，为什么这里电势有限，为什么 $\epsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \epsilon_2 \dfrac{\partial_2 \varphi}{\partial r}$，它到底在说啥？因为边界条件一旦写错，后面解的一切都没有意义.

(4) 注意电偶极子的源项怎么写.

郭书第二章 T9,T10,T11,T13

(1) 不要在研究区域内放镜像电荷，否则会破坏原有的泊松方程 (泊松方程右边的源项会改变). 镜像电荷是一种代替复杂边界条件的手段，可以从 $T9$ 一窥，也可以用数学来解释：前面猜特解的方法是在泊松方程的源项动手脚，镜像法只不过是在边界条件上做同样的操作——把边界条件右边变成零，“消灭边界”.

(2) 在引入镜像电荷时，原则是保证边界条件成立，比如导体边界就要让它的电势为零，比如 $T13$，这种直角型的边界需要引入三个像电荷，但需要弄清楚每一个像电荷引入时的想法到底是什么，不能只用一句“对称性”糊弄了事，否则换一个题型就不知道咋办了.

郭书第三章 T8,T9,T10,T15

(1) $T8$(计算磁单极子的矢势) 的计算并不容易，最好不看答案自己上手算一算.

(2) $T15$(计算小永磁体的受力) 计算很容易出错，而且比较复杂，也建议算一下.

(3) 超导？了解超导的背景.

(4) 静电静磁类比：(郭书 P109 面)

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathbf{0} \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0}$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \qquad \rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi \qquad \boldsymbol{H} = -\nabla \varphi_m$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_0} \qquad \nabla^2 \varphi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

郭书第四章 T1,T2,T4,T6,T7,T8

(1) $T1$ 弄明白群速度和相速度的物理意义，知道它们的计算公式是怎么推的.

(2) $T2$, $T8$ 是作业中唯二两道和电磁波折反射有关的题目.

(3) $T6$(透入金属内部的电磁波能量全部转化为热能) 要掌握证明方法，群中发布的答案里过程很详细.

(4) $T7$防止老年痴呆测试问答：趋肤深度的公式是什么?

郭书第四章 T9,T10,T11,T12,T13

(1) 涉及到波导的题目都很重要，都要好好看一看.

(2) 波导的题目类似于静电解泊松方程，比较套路化，记住亥姆霍兹方程通解的形式，很容易记住，就是三组正余弦函数的乘积，之前的某道思考题也做过. 然后根据边界条件确定系数，在写边界条件时，同样需要慎之又慎，保证自己不要写错. 例如电场 $\boldsymbol{E}$ 在边界处的两条方程 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}|_S=0$，$\boldsymbol{e_n}\times\boldsymbol{E}|_S=\mathbf{0}$，先确定每个导体边界的法向，再挨个去写，并且要注意边界所处位置的影响，比如 $x=0$ 和 $x=a$，代进去是不一样的，先算一般情况，在代具体的值. 最后不要忘了在管内满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$.

(3) *TE* 波，*TM* 波，*TEM* 波是什么意思？波模是什么？截止频率是什么？能回答出来吗?

(4) $T11$(写出波导管内磁场满足的边界条件) 最后的举例部分郭书的答案有错误，我在群里已经勘误了，大家记得看一下.

郭书第五章 T1,T2,T5,T9

(1) $T1$ 郭书的答案没有解释的很清楚，群里发的答案解释的比较详细. 在分解的过程中，要保证方程左右两边的场有相同的性质，要么都是无旋，要么都是无散.

(2) $T2$ 郭书的答案有误，这题的题目也有改动，群里的答案作了详细解释. 需要弄明白：规范变换是什么？使用规范变换时，要确保能取到合适的规范函数.

(3) $T5$, $T9$ 这两题都不好算，尤其是 $T9$，务必弄清楚计算细节.

郭书第五章 T10,T11,T12,T13

(1) 辐射相关的题目同样很重要，计算比较麻烦，但流程也比较固定，务必搞清楚 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}, \overline{\boldsymbol{S}}$ 都是怎么算的. 电偶极辐射，磁偶极辐射，电四极辐射的计算过程大同小异，区别就在 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{m}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}$ 的计算.注意用 $\overleftarrow{\boldsymbol{D}} = 3\Sigma_i q_i x_i$ 即可，不用减去它的迹. 怎么用辐射能流密度计算总辐射功率?

(2) $T13$ 很有意思，把静电问题和辐射结合起来，值得注意.

(3) 短天线的辐射电阻和长度，波长的关系?

郭书第六章 T1,T5,T9,T11,T12,T13,T16

(1) $T1$ 了解协变是什么意思？协变和逆变是张量分析里的概念，可以粗略理解成“协调变化”的意思，这道题里面就是说，在伽利略变换下，不同的坐标系中，方程 (牛顿定律或者麦克斯韦方程) 中的各个量都非常“和谐”，“协调”的变化，从而保证方程形式不变. 当然，具体是否如此还要验证，前提是你还记得牛顿定律和麦克斯韦方程组是什么？(防痴呆测试第二弹)

(2) 相对论的题目，我想更应该关注和场相关的题目，传统一些的题目，大致了解是怎么做就行，毕竟我们这门课是电动力学，不是力学.(我指的关注是亲自动手算一遍)

(3) $T9$ 中涉及到两个可能会困扰的积分.

T9

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}m}{(1-\frac{m^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}, \int_0^v \frac{\mathrm{d}m}{1-\frac{m^2}{c^2}}$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}m}{(1-\frac{m^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \xlongequal{\text{令 } m=c\sin\theta} c\int_0^{\arcsin\frac{v}{c}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} = c\tan\theta\Big|_0^{\arcsin\frac{v}{c}} = \frac{cv}{\sqrt{c^2-v^2}},$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}m}{1-\frac{m^2}{c^2}} = \frac{1}{2}\int_0^v \left(\frac{1}{1+\frac{m}{c}}+\frac{1}{1-\frac{m}{c}}\right)\mathrm{d}m = \frac{c}{2}\ln\frac{c+v}{c-v},$$

为什么第二个积分不用三角换元呢？因为对它用三角换元会发现

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}m}{1-\frac{m^2}{c^2}} \xlongequal{\text{令 } m=c\sin\theta} c\int_0^{\arcsin\frac{v}{c}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = c\int_0^{\arcsin\frac{v}{c}} \sec\theta\mathrm{d}\theta,$$

$\sec\theta$ 的积分在大一的淑芬应该是一道书上的例题，我记得当时用了一个很巧妙的换元，不是很容易想到. 但是反过来想，我们可以用上面的方法计算 $\sec\theta$ 的积分，还是挺有意思的.

目录

判断题

1. 同轴电缆线中，电磁场能量是沿着导线传输的.( )

关于同轴电缆线，刘老师出过一道思考题. 见群里公告.h

这道题很容易错，想当然就判断成正确. 首先要明确这题在问什么？电磁场能量的传输方向就是能流密度的方向，经过计算可以知道，能流除了有沿着导线的分量以外，还有径向的分量，所以能量传输不仅仅是沿着导线的. 这个有些反直觉，但是杨振宁曾经说过：“当你感觉这个物理过程反直觉的时候，这个机会是很宝贵的.”很多科学家因为反对量子力学错失了探索前沿物理的机会.感兴趣的同学可以计算一下电容器在充电过程中的能流方向，事实上它完全和极板垂直.

2. 设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho(x)$，在 V 的边界 S 上给定电势 $\varphi|_S$ 以及电势的法向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$，则 V 内的静电场唯一地确定.( )

没有问题，这就是唯一性定理.

3. 电荷体系的电偶极矩与坐标原点选择无关.( )

这个描述乍一看没有问题，但其实是错误的. 在电多极矩那一小节中，我们已经对电偶极矩这个概念做了推广，也就是 $\boldsymbol{p} = \Sigma_i q_i x_i$. 对于离散的电荷系统，如果系统为电中性，则系统的电偶极矩与参考点的选取无关，因为正负电荷成对，$\boldsymbol{x}_+ - \boldsymbol{x}_-$ 之后和原点选择无关. 但是，如果系统为非电中性，系统的电偶极矩与参考点的选取就有关，一般的这种情况下，我们选取质心为参考点.

4. 高斯定理的微分形式反映空间电场只和该点上的电荷密度有关，而和其它地点的电荷分布无关.( )

这句话的描述很有迷惑性，正确的描述是：空间某点邻域上场的散度只和该点上的电荷密度有关，而和其他地点的电荷分布无关.

5. 对于 $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$ 的方程，可以给出 $\boldsymbol{A}$ 的切向边值关系。( )

在讨论边值关系时，需要把方程从微分形式转化为积分形式，因为微分形式在边界处失效。积分形式为

$$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{C} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

在边界处选一个长为 $\mathrm{d}l$，宽为 $\mathrm{d}h$ 的长方形微元，应用该积分方程得

$$(A_{1\parallel} - A_{2\parallel})\mathrm{d}l = C\mathrm{d}l\mathrm{d}h,$$

即 $A_{1\|}-A_{2\|}=C\mathrm{d}h$，假如 $\boldsymbol{C}$ 在边界不发散，由于 $\mathrm{d}h\to 0$，可知 $A_{1\|}=A_{2\|}$，$\boldsymbol{A}$ 的切向分量连续；如果 $\boldsymbol{C}$ 在边界发散，$\boldsymbol{A}$ 的切向分量不连续。

6. 由于电阻率为零，超导体内部磁场为零。( )

电阻率为零，也就是电导率无穷大，$\sigma \to \infty$，由欧姆定律

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E},$$

电流密度不可能无穷大，否则违背能量守恒，所以有 $\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$。即超导体内部电场为零，而不是磁场为零。

7. 各级电，磁多极辐射的平均能流密度均反比于距离的平方。( )

电偶极辐射的平均能流密度为

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{|\ddot{p}|^2}{32\pi^2\epsilon_0 c^3 R^2}\sin^2\theta\boldsymbol{n},$$

磁偶极辐射的平均能流密度为

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{\mu_0|\ddot{m}|^2}{32\pi^2 c^3 R^2}\sin^2\theta\boldsymbol{n},$$

电四极矩辐射的平均能流密度为

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{288\pi c^5 R^2}(\dddot{\boldsymbol{D}} \times \boldsymbol{n})^2.$$

8. 各级电，磁多极辐射的平均能流密度均反比于距离的平方。( )

可以看出，各个辐射场的平均能流确实都是反比与距离的平方，不过这也并不奇怪，因为在三维空间中能量是以球状传播出去的，能流密度应该 $\propto \dfrac{1}{4\pi R^2}$。

考试还可能会问，这些平均能流与频率 ω 成几次方？

9. 相距为 l 的两个电量大小相等的正负电荷组成的系统，其电四极矩为零。( )

假设正负电荷分别位于 $\boldsymbol{x}_+ = \frac{l}{2}\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{x}_- = -\frac{l}{2}\boldsymbol{e}_x$,

电四极矩

$$\boldsymbol{D} = 3e\boldsymbol{x}_+\boldsymbol{x}_+ + 3(-e)\boldsymbol{x}_-\boldsymbol{x}_- = \mathbf{0}.$$

10. 若绝缘介质表面的电势处处为零，则介质内部电势均为零。( )

若绝缘介质表面电势处处为零，再加上无穷远处电势为零的条件，只能说明介质外的电势处处为零，而绝缘介质内可以带有电荷，会有电场线存在，介质内部电势不一定均为零，注意和导体的差别。

11. 频率分别为 $50Hz$ 和 $5kHz$ 的电磁波对铜的穿透深度约为 $9mm$ 和 $0.09mm$。( )

穿透深度的公式非常重要，一定要记住！

穿透深度

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}} \propto \frac{1}{\sqrt{f}},$$

这里的 $50Hz$ 和 $5kHz$ 的数量级差异为 10^2，所以穿透深度的差异应该是一个数量级。

12. 对均匀，线性，各向同性的介质，有 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \epsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$。( )

搞清楚每个关键词所代表的具体含义：

不均匀———意味着介电系数 ϵ 并不是一个常数，而是 $\epsilon(r, \theta, \phi)$，它的值取决于它所处的位置；

非线性———意味着 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系并不是呈线性的，可能是 $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}^2, \boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}^{\frac{2}{3}}$，等等；

各向异性——意味着在不同方向考虑 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系，它们都是不同的，注意，并不一定是指 ϵ 是一个张量，介电系数是张量是一个很常见的情况。比如在某个方向 $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$，旋转一定角度之后，$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}^2$，这当然也属于各向异性。

所以，答案汇总为 ✗✓✗✗✗✓✗✓✓✗✗✓

简答题

1. 写出电磁场的矢势和标势所满足的方程组。

因为

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},$$

将这两个关系式带入到麦克斯韦方程组中，

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho,$$

可以得到

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}) = -\mu_0 \boldsymbol{J},$$

$$\nabla^2 \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

考试的话还可能不止于此，比如在上面的方程组基础上利用洛伦兹规范导出达朗贝尔方程，利用库伦规范导出对应的方程，这也需要掌握哦。

2. 已知 $t' = t - \frac{r}{c}, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'(t'), \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'(t')}{\mathrm{d}t'},$，求 $\nabla t'$。

$$\nabla t' = -\frac{\nabla r}{c} = -\frac{1}{c}\nabla\sqrt{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}} = -\frac{1}{c}\frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}}\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{cr}[(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\times(\nabla\times\boldsymbol{r})],$$

而

$$(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\cdot(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} + \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t'}\nabla t') = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\cdot\nabla t'),$$

同理

$$\nabla\times\boldsymbol{r} = \nabla\times\boldsymbol{x} - \nabla\times\boldsymbol{x}' = -\nabla t'\times\boldsymbol{v},$$

代入得

$$\nabla t' = -\frac{1}{cr}[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\cdot\nabla t') + \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}\times\nabla t')] = -\frac{1}{cr}[\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\nabla t'],$$

所以

$$\nabla t' = \frac{-\boldsymbol{r}}{rc - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}.$$

3. 写出直角坐标下，均匀磁场 $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e_z}$ 的磁矢势。

见第六次作业第一题的答案。

4. 将电偶极辐射天线长度增加一倍，其辐射阻抗增加几倍。

电偶极辐射的阻抗

$$R_r = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}(\frac{l}{\lambda})^2,$$

所以天线长度增加一倍，其辐射阻抗增加 4 倍。

简答题

5. 采用洛伦兹规范和库伦规范最主要的优点是什么？

采用库伦规范的优点：它的标势 φ 描述库伦作用，可直接由电荷分布 ρ 求出，它的矢势 $\boldsymbol{A}$ 只有横向分量，恰好足够辐射电磁波的电场分量和磁场分量。

采用洛伦兹规范的优点：它的标势 φ 和矢势 $\boldsymbol{A}$ 组成的势方程具有对称性，它的矢势 $\boldsymbol{A}$ 的纵向部分和标势 φ 的选择可以有任意性，即存在多余的自由度，并且，它在相对论中显示出协变性。

6. 在静电问题中，可以将导体看作介电常数为无穷大的介质吗？为什么？

当然可以，考察静电问题中的电场满足的两条方程即可。

7. 在定态的情况下，我们可以用复介电常数描述导体，此时还需考虑自由电流吗？

不需要，复介电常数的虚部已经囊括了传导电流，即自由电流。具体可翻阅郭书 P152 面。

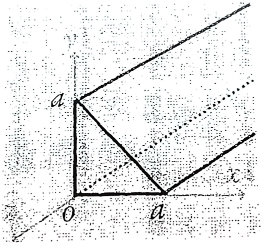
计算题

分离变量法解泊松方程一定要掌握！

第二章有关的习题建议全部搞懂。至少要会解匀强电场中介质球内外电势。

计算题

1. 考虑由理想导体制作的无限长波导管. 设波导管横截面为直角三角形，两直角边的边长均为 a。确定出此波导管中可能传输的电磁场模式，求出其电场强度与磁场强度分布的具体表达式。



波导管内的电磁波电场强度分布满足亥姆霍兹方程，取图示的直角坐标系，以 $u(x, y) \exp^{i(k_z z - \omega t)}$ 表示电场强度的某一直角分量，亥姆霍兹方程有如下特解

$$u(x, y) = [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)][C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)],$$

若 $u(x, y) = E_x(x, y)$，则有 $u(x, 0) = 0, \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}|_{x=0} = 0$。所以

$$E_x(x, y) = A_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y),$$

同理

$$E_y(x, y) = C_1 \sin(k_x x) \cos(k_y y),$$

$$E_z(x, y) = D_1 \sin(k_x x) \sin(k_y y),$$

电场的空间因子可以写为

$$\boldsymbol{E}(x, y) = \hat{\boldsymbol{i}} A_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) + \hat{\boldsymbol{j}} C_1 \sin(k_x x) \cos(k_y y) + \hat{\boldsymbol{k}} D_1 \sin(k_x x) \sin(k_y y),$$

波导管的斜边所在平面的两个相互独立的单位切矢量分别是 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{t}} = \dfrac{\hat{\boldsymbol{i}} - \hat{\boldsymbol{j}}}{2}$。所以此边界面的单位法矢量是：$\hat{\boldsymbol{n}} = \dfrac{\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}}{\sqrt{2}}$，电场强度针对此平面的非零切分量和法分量分别是

$$E_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) - C_1 \sin(k_x x) \cos(k_y y)],$$

$$E_k(x, y) = D_1 \sin(k_x x) \sin(k_y y),$$

$$E_n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) + C_1 \sin(k_x x) \cos(k_y y)],$$

$E_n(x, y)$ 的法向导数为

$$\frac{\partial E_n}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla E_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial E_n}{\partial x} + \frac{\partial E_n}{\partial n}) = \frac{1}{2}(A_1 + C_1)\cos(k_x x + k_y y),$$

波导管横截面斜边的直线方程是 $x + y = a$。所以，波导管内电磁波的电场在斜边所在面上需要满足的边界条件是 $E_t(x, a - x) = 0$ 和 $\frac{\partial E_n}{\partial n}|_{y=a-x} = 0$。这些边界条件应与边界面上场点的坐标无关。因此

$$A_1 = -C_1, k_x = k_y = \frac{n\pi}{a}, n = 1, 2, 3...$$

换言之，

$$E_x = A_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \exp^{i(k_z z - \omega t)},$$

$$E_y = -A_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \exp^{i(k_z z-\omega t)},$$

$$E_z = D_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \exp^{i(k_z z-\omega t)}, n = 1, 2, 3, ...$$

在 $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ 的约束下

$$D_1 = 0,$$

所以，此波导管内能传播的电磁波的电场强度是

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = A_1[\hat{\boldsymbol{i}}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - \hat{\boldsymbol{j}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)] \exp^{i(k_x x-\omega t)},$$

根据电磁感应定律

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) &= -\frac{i}{\omega}\nabla \times \boldsymbol{E} \\
&= \frac{k_z}{\omega} A_1 \left[\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\hat{\boldsymbol{i}} + \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\hat{\boldsymbol{j}}\right]\exp^{i(k_z z-\omega t)},
\end{aligned}
$$

其中 $n = 1, 2, 3...$，因为在传播方向没有电场和磁场分量，这样的电磁波是 *TEM* 波

计算题

2. 在各向异性介质 (晶体) 中，介电系数可以写成一个张量，并且在非磁性和透明的物质中，它是实对称的，可以写成

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix},$$

因为实对称阵可以对角化，可以选取某一组 x, y, z 坐标，使得矩阵非对角元素为零，即

计算题

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix},$$

尝试导出各向异性介质中的色散关系。

假设单色平面波的电场和磁场强度分别为

$$\boldsymbol{E}\exp[i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})],\boldsymbol{H}\exp[i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})],$$

把它们代入麦克斯韦方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{J},$$

中，可以得到

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega\mu\boldsymbol{H},$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\omega\boldsymbol{D} = -\omega\overleftrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \boldsymbol{E},$$

消去 $\boldsymbol{H}$ 可得

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) + \omega^2\mu\overleftrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \boldsymbol{E} = \mathbf{0},$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \omega^2\mu\epsilon_x - k_y^2 - k_z^2 & k_xk_y & k_xk_z \\ k_yk_x & \omega^2\mu\epsilon_y - k_x^2 - k_z^2 & k_yk_z \\ k_zk_x & k_zk_y & \omega^2\mu\epsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

为使该方程组有非零解 (非平凡解)，左端矩阵的行列式应为零，即

$$det \begin{vmatrix} \omega^2\mu\epsilon_x - k_y^2 - k_z^2 & k_xk_y & k_xk_z \\ k_yk_x & \omega^2\mu\epsilon_y - k_x^2 - k_z^2 & k_yk_z \\ k_zk_x & k_zk_y & \omega^2\mu\epsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0,$$

这也就是各向异性介质中的色散关系。如果考试时间允许的话，可以尝试展开一下。

目录

速通攻略和一些小建议

如果你实在没有时间完整的把作业题都看一遍，或者从某节课开始逐渐听不懂，或者从第一节课开始就没听课，或者从开学开始只来了这节课……

(1) 先看补充内容里的矢量分析，快速上手数学推导.

(2) 将群里发的刘老师上课 ppt 完整地过一遍，每看完一章，将对应的习题看一下，只用看我前面提到的题目，看懂答案就行，可以不用亲自算.

(3) 把作业交齐，这是稳定能拿到的分数，千万不要不交作业.

(4) 考试的时候不要空题，随便写点东西，默写公式，写一写大概的思路，写诗称颂刘老师或者罗助教，画漫画求给过都可以，总之不要啥都不写.

对于想拿到比较好的分数的同学，我的建议还是要好好看作业题，ppt，争取每一道题都能在不借助答案的情况下有思路，我强调的题亲自算一算. 其他老师的试卷稍微看看就行. 考试前翻一翻课本，把一些零碎的知识点看一下.

期间遇到问题随时在群里或者私聊交流.

$$1.001^{365} \simeq 1.44,$$

但是

$$1.2^2 = 1.44,$$

所以，你突击两天和别人认真学习一年的效果是一样的，更何况我们还有 6 天呢. 加把劲，少年 (女)!

祝同学们在 1 月 10 号的考试中取得好成绩!