## 一、选择题和填空（每题 3 分，共 18 分）

**1. (6 分)** $r=\dfrac{Gm_0+\sqrt{G^2m_0{}^2-(2Gm_0-v_0^2R)Rv_0^2\cos^2\alpha}}{2Gm_0/R-v_0^2}$ ， $v=\dfrac{Gm_0\mp\sqrt{G^2m_0{}^2-(2Gm_0-v_0^2R)Rv_0^2\cos^2\alpha}}{Rv_0\cos\alpha}$

**2. (6 分)** $F_{\mathrm{f}}=m_0\dfrac{v^2}{R}$ ， $F_{\mathrm{N1}}=\dfrac{1}{2}m_0g-\dfrac{m_0v^2L}{Rd}$ ， $F_{\mathrm{N2}}=\dfrac{1}{2}m_0g+\dfrac{m_0v^2L}{Rd}$

**3. (3 分)** 920(g); **4. (3 分)7Hz**

## 二、讨论题（每题 8 分，共 16 分）

**1．解:设物体在时间 d$t$ 内的位移为 d$x$,由间隔不变性有:**

$$c^2\mathrm{d}t^2-(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)=c^2\mathrm{d}t'^2-(\mathrm{d}x'^2+\mathrm{d}y'^2+\mathrm{d}z'^2)$$

**因为**$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u\\ \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}=u'\end{cases}$**，则有**$(c^2-u^2)\mathrm{d}t^2=(c^2-u'^2)\mathrm{d}t'^2$

**由于**$|u|<c$**，于是得:**$c^2-u^2>0$

**则**$c^2-u'^2>0$**，所以**$|u'|<c$**。**

**2. 若力$\vec{F}$为保守力,则总可以找到一个标量函数$U$,使得$\vec{F}=-\nabla U$, 其中$U$就是“势函数”。**
**根据保守力的定义，可知在某一确定的保守力场中，任取一个标准电“P”，则从P点到空间中的一个特定点，此保守力所做的功必定是该点空间位置的函数。设这个位置函数为$-U(x,y,z)$，某点M的位置函数为$-U(M)$，点N的势函数为$-U(N)$，则**

$$\int_M^N\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_M^P\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_P^N\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

**其中**$\int_P^N\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-U(N)$, $\int_M^P\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-[-U(M)]$

**所以**$\int_M^N\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=U(M)-U(N)$

**故此位置函数即“位函数”或“势函数”就可描述该力场了且有$\vec{F}=-\nabla U$。**

## 三、证明题（每题 8 分，共 16 分）

**1. 证：设在$\mathrm{d}t$时间内, 行星相对太阳扫过的角度为$\mathrm{d}\theta$。行星在$\mathrm{d}t$时间内扫过的面积则可以表示为：** $\mathrm{d}A=\frac{1}{2}(r+\mathrm{d}r)r\mathrm{d}\theta\approx\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$

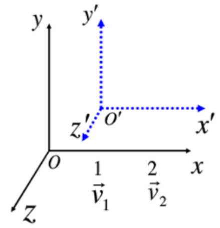
**单位时间内扫过的面积则可以表示为:** $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}rv_\theta$

**以行星为研究对象,以太阳处 O 点为参考点,角动量守恒:**

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=r\vec{e}_r\times m(v_r\vec{e}_r+\vec{e}_\theta)=rmv_\theta\vec{k}=\vec{C}$$

**大小：**$L=rmv_\theta=C$**, 得证开普勒第二定律:** $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}rv_\theta=\frac{C}{2m}$。

**2.** 证明：根据伽利略变换和题意




$$\begin{cases} x = x' + v_0 t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}x_1'}{\mathrm{d}t} + v_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}x_2'}{\mathrm{d}t} + v_0 \\ \Delta x = \Delta x' + v_0 \Delta t \end{cases}$$

于是$F\Delta x = F\Delta x' + Fv_0\Delta t$

$$\boldsymbol{F\Delta x = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2' + v_0)^2 - \frac{1}{2}m(v_1' + v_0)^2}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2}mv'^2_2 - \frac{1}{2}mv'^2_1 + (mv_2' - mv_1')v_0}$$

又由于$\boldsymbol{F\Delta t = mv_2' - mv_1'}$，所以$\boldsymbol{F\Delta x' = \frac{1}{2}mv'^2_2 - \frac{1}{2}mv'^2_1}$

四、计算题（50分）

1.（8 分）一质量为 $m$ 的质点受到两个力的作用：一个是有心力$\vec{f}_1 = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$。另一个是摩擦力$\vec{f}_2 = -\lambda\vec{V}$（$\lambda$>0）,其中$\vec{V}$是质点的速度。若该质点初始时对 $r$=0 点的角动量是$\vec{L}_0$。求以后时刻它的角动量。

解：按极坐标列出方程

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) - \lambda\dot{r} \qquad 2 分$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -\lambda r\dot{\theta} \qquad 2 分$$

第二式可以改写成

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -\lambda r\dot{\theta}$$

若令

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

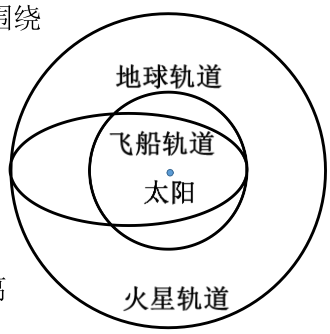
则

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\lambda}{m}L$$

2 分

所以 $$L = L_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t} \qquad 2 分$$

2.（12 分）一飞船从地球发射到达火星。假定飞船被发射到一个围绕太阳的椭圆轨道上，以地球轨道为近日点而以火星轨道为远日点（如图）。（1）求轨道方程$r=\frac{\lambda(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon\cos\theta}$的参数$\lambda$和$\varepsilon$；（2）利用开普勒第三定律计算沿此轨道到达火星所需要的时间；（3）为了最节约燃料，从地球上应向什么方向发射飞船？地球到太阳的平均距离为 1A.U.，火星到太阳的平均距离为 1.5A.U.。




解：（1）记 $R_1$ 为日地距离，$R_2$ 为火星至太阳的距离，有

$$R_1=\frac{\lambda(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon}=\lambda$$

$$R_2=\frac{\lambda(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}$$ 2 分

上两式可求出：$\lambda=1\mathrm{A.U.},\varepsilon=0.2$ 2 分

（2）由开普勒第三定律，$\frac{T^2}{a^3}=C$。地球公转周期为 $T_1$，飞船的公转周期为 $T$，有 1 分

$$T^2=\left(\frac{R_1+R_2}{2R_1}\right)^3T_1^2=1.25^3T_1^2$$ 2 分

所以：

$$T=1.25^{3/2}T_1=1.4(\text{年})$$ 1 分

因此，飞船需要 0.7 年沿着此轨道运行到火星。 1 分

（3）为了节省燃料，火箭应沿地球公转轨道的切线方向发射，并注意它同地球自转方向同一方向。 3 分

3.（12 分）设某人进行高台跳水，跳台高 10m。分别就以下两种情况估算在某人在落水前能完成多少个空中 360 度转体。（1）某人身体保持直线向前自然倒下进行“直身前空翻”（设重心与跳台等高时，脚才与跳台脱离）；（2）某人向前自然倒下，当重心与跳台等高时，身体立刻抱成球形，进行“团身前空翻”。（提示：细棒关于中心的转动惯量为 $ml^2/12$，圆球关于直径的转动惯量为 $2mR^2/5$）

解：（1）方法一：设人身高为 h，由能量守恒方程

$$\frac{1}{2}\mathrm{mgh}=\frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2+\frac{1}{2}mV_c^2 \qquad (1)$$ 2 分

及 $$V_c=\frac{1}{2}h\omega \qquad (2)$$ 1 分

得到 $\omega=\sqrt{\frac{3g}{h}}$

下落时间由 $V_C t+\frac{1}{2}gt^2=H$算出　圈数由$n=\frac{\omega t}{2\pi}$ 算出

设 h=1.8m, 算得 ω=4.04rad/s, $V_c$=3.64m/s, t=1.1s,

n=0.71　　3 分

（注：由设定不同，前面 ω,$V_c$, t 结果可以不同，但 n 应小于 1）

方法二：如不用能量守恒，用以脚为转轴的重力距作用下的转动方程解出 ω 亦可

前面(1),(2)变为(5)(6),其他不变

$I\ddot{\varphi}=-\frac{mgh}{2}*\cos\varphi$　积分限从 π/2 到 0　(5)　2 分

$\varphi$ 的正负和积分限可以与上面不同，结果正确即可

这里的 I 值应取 $mh^2/3$　(6)　1 分

写出 ω 后，下面过程同上。

（2）由直身变团身为角动量守恒

$I_1\omega_1=I_2\omega_2$　(7)　2 分

$mh^2\omega_1=2/5R^2\omega_2$　（8）　1 分

其中 R 由 2πR=h 近似估算。

将前面设定值带入，R=0.287m , $\omega_1$,Vc, t 同前

$\omega_2$=33.1rad/s

n=5.79　　3 分

(注: R 值不做计算，直接估算也可，不应小于上面结果；$\omega_2$ 值由 R 不同，应小于上面结果；圈数可以由 R 估值不同，在 2 到 6 间变动，不应超过 6 圈)

4.（18 分）在弦线上传播的波，其表达式为$y=3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1}-\frac{x}{10}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$(m)，在弦线上形成驻波，在$x=1$(m)处为波节。试求：(1) 应叠加的波的表达式；(2) 形成驻波的表达式；(3) 若弦线的线密度为$1.0\times10^2(\mathrm{g\cdot m^{-1}})$，则相邻两波节之间的总能量。

解：(1) 要形成驻波，叠加的波的表达式为$y'=3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1}+\frac{x}{10}\right)+\varphi\right]$，其中$\varphi$待定。 2 分

在$x=1$(m)处为波节，两波在此振动相位相反，即

$$2\pi\cdot\frac{1}{10}+\varphi-\left(-2\pi\cdot\frac{1}{10}-\frac{\pi}{2}\right)=(2n+1)\pi$$

则 $\varphi=(2n+1)\pi-2\pi\cdot\frac{1}{10}-\frac{\pi}{2}=\frac{1}{10}\pi$（取$n=0$） 3 分

所以 $y'=3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1}+\frac{x}{10}\right)+\frac{1}{10}\pi\right]\text{(m)}$ 2 分

（2） $y+y'=3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1}-\frac{x}{10}\right)-\frac{\pi}{2}\right]+3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1}+\frac{x}{10}\right)+\frac{1}{10}\pi\right]$

$=6\cos\left(\frac{\pi}{5}x+\frac{3}{10}\pi\right)\cos\left(20\pi t-\frac{1}{5}\pi\right)\text{(m)}$ 3 分

（3）由所给的波的表达式可知波长$\lambda=10\text{m}$，相邻两个波节之间的距离为$\frac{1}{2}\lambda=5\text{m}$，今$x=1\text{m}$为波节，$x=6\text{m}$处是相邻的波节。在相邻的波节间驻波的总能量保持不变。当弦线各点处于平衡位置时，势能为 0，各点速度的大小达到它的最大值。相邻两波节间的总能量等于这时这段弦线的总动能。 3 分

$x$处质元的最大速率为$\left[\frac{\partial(\ y+y')}{\partial t}\right]_{\max}=6\times20\pi\cos\left(\frac{\pi}{5}x+\frac{3}{10}\pi\right)$ 2 分

$$\mathrm{E}=\int_1^6\frac{1}{2}\eta\left[\frac{\partial(\ y+y')}{\partial t}\right]_{\max}^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{1.0\times10^{-3}}{10^{-2}}(6\times20\pi)^2\int_1^6\cos^2\left(\frac{\pi}{5}x+\frac{3}{10}\pi\right)\mathrm{d}x$$

$=\frac{1}{2}\times10^{-1}\times36\times400\pi^2\times\frac{1}{2}\times5=1.78\times10^4\text{(J)}$ 3 分