2014-2015学年第二学期数理方程A期末试题

一. (15分)设$a \neq b$为实常数, 考察二阶线性齐次方程:

$$u_{xx} - (a+b)u_{xy} + abu_{yy} = 0,\ (-\infty < x, y < +\infty).$$

1. 是判断方程的类型(椭圆/双曲线/抛物线).
2. 试将该方程化成标准型.
3. 求出该方程的解.
4. 求出该方程满足的条件: $u(x, -ax) = \varphi(x),\ u(x, -bx) = \psi(x)$的特解, 其中$\varphi(0) = \psi(0)$.

二. (10分)考察一阶线性非齐次方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2x\frac{\partial u}{\partial y} = y,\ (-\infty < x, y < +\infty).$$

1. 求出此方程的特征线.
2. 求出此方程满足条件$u(0, y) = 1 + y^2$的解.

三. (20分)考察定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x),\ (0 < x < \pi, t > 0), \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

1. 当$f(t, x) = 0$时, 求此定解问题的解u_1.
2. 当$f(t, x) = \sin 2x \sin \omega t$(其中$\omega \neq 4$), $\varphi(x) = 0,\ \psi(x) = 0$时, 求此定解问题的解$u_2$以及$\lim\limits_{\omega \to 4} u_2(x, t, \omega)$的值.

四. (20分)考察定解问题:

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ (r < a, 0 < \theta < 2\pi, 0 < z < h), \\ u|_{r=a} = 0, \\ u|_{z=0} = g_1(r, \theta),\ u|_{z=h} = g_2(r, \theta). \end{cases}$$

1. 当$g_1(r, \theta) = 0,\ g_2(r, \theta) = f(r)$时,求此定解问题的解.
2. 当$g_1(r, \theta) = \varphi(r, \theta),\ g_2(r, \theta) = \psi(r, \theta)$时, 可作分离变量: $u = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, 分别求出$R, \Theta, Z$满足的常微分方程, 并写出此时与定解问题相应的固有值问题.

五. (15分)考察初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_3 u + 3u + f(t,x,y,z),\ (t>0, -\infty < x,y,z < +\infty), \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y,z). \end{cases}$$

1. 求出此问题的基本解.

2. 当$f(t,x,y,z)=0,\ \varphi(x,y,z)=e^{-(x^2+y^2+z^2)}$时, 求此问题的解.

六. (15分)已知右半平面区域$S=\{(x,y)|x>0, -\infty<y<+\infty\}$

1. 求出S内Poisson方程第一边值问题的Green函数.

2. 求解定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + 25u_{yy} = 0,\ (x>0, -\infty<y<+\infty), \\ u|_{x=0} = \varphi(y). \end{cases}$$

七. (5分)求方程: $Z'(\theta)+\cot\theta Z(\theta)+20Z(\theta)=0,\ (0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$满足条件$Z(0)=1$的解$Z(\theta)$, 并求$Z(\dfrac{\pi}{2})$.

2014-2015学年第二学期数理方程A期末试题

一.

1. $\Delta=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2>0,(a\neq b)$, 它为双曲型方程.

2. 代换$\xi=y+ax,\eta=y+bx$.

3. $u(x,y)=f(y+ax)+g(y+bx),\ f,g\in C^2(\mathcal{R})$.

4. $u(x,y)=\psi(\frac{y+ax}{a-b})+\varphi(\frac{y+bx}{b-a})-\varphi(0)$.

二.

1. 特征线方程:$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{2x}$, 解得特征线$y=x^2+c,\ c\in R$.

2. $u(x,y)=x^4-\frac{2}{3}x^3+xy-2x^2y+y^2+1$.

三.

1. $u_1(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos 2nt+B_n\sin 2nt)\sin nxdx,$
   其中$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nxdx,\ B_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\sin nxdx.$

2. $u_2(t,x)=\frac{1}{16-\omega^2}(\sin\omega t-\frac{\omega}{4}\sin 4t)\sin 2x,$
   $\lim_{\omega\to 4}u_2(t,x,\omega)=\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin 4t-t\cos 4t)\sin 2x.$

四.

1. $u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cosh\omega_{1n}z+B_n\sinh\omega_{1n}zJ_0(\omega_{1n}r),$
   $A_n=0,\ B_n=\frac{2\int_0^a f(r)J_0(\omega_{1n}r)rdr}{a^2\sinh\omega_1 nhJ_1^2(\omega_{1n}a)}.$

2. $\begin{cases}\Theta''+\mu^2\Theta=0,\ (0\le\theta\le 2\pi),\\ \Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta),\end{cases}$ 和 $\begin{cases}R''+\frac{1}{r}R'+(\lambda-\frac{\mu^2}{r^2})R=0,\\ |R(0)|<+\infty,\ R(a)=0.\end{cases}$

五.

1. $U(t,x,y,z)=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^3e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}+3t}.$

2. $u(t,x,y,z)=\frac{1}{(1+4t)^{\frac{3}{2}}}e^{3t-\frac{1}{1+4t}(x^2+y^2+z^2)}.$

六.

1. $G=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$

2. $u(x,y)=\frac{5x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\varphi(\eta)}{(y-\eta)^2+25x^2}\right)d\eta.$

中国科学技术大学

2015—2016学年 第二学期考试试卷

得分 ________

课程名称: 数学物理方程 (A)

专业: ________

学号: ________

姓名: ________

一 (8 分) 求解定解问题:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (t > 0) \\ u\,|_{t=0} = x^2 + e^{7x}. \end{cases}$$

二 (22 分) 已知定解问题:
$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + g(t,x), \quad (t > 0,\ 0 < x < \pi) \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \\ u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = \psi(x). \end{cases}$$

(1) 取 $g(t,x) = 0$ 时，求此定解问题的解.

(2) 取 $\psi(x) = 0,\ g(t,x) = f(t,x)\delta(t - t_0)$ 时，求此定解问题的解. $(t_0 > 0)$

三(14 分) 用分离变量法求以下固有值问题的所有的固有值 λ 和固有函数:
$$\begin{cases} \Delta_2 u + \lambda u = 0, \ (\ r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1) \\ u\,|_{r=1} = 0. \end{cases}$$

四 (6 分) 把方程 $(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0$ 化为 *Sturm – Liouville* 型方程. $(-1 < x < 1)$

五(14 分) 求解以下定解问题，其中 (r,θ,φ) 为球坐标
$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad (r < 4,\ 0 < \theta < \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi) \\ u\,|_{r=4} = 16 + 2\cos^2\theta. \end{cases}$$

六 (10 分) 已知球外区域 $V = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > R > 0\}$, 求出 V 内泊松方程 (场位方程) 第一边值问题的格林函数.

七(16 分) 考虑初值问题：$(t>0, a>0, -\infty<x,y<+\infty)$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + b(u_x)^2 + cu_y, \\ u\,|_{t=0} = \varphi(x,y). \end{cases}$$

(1) 当 $b=0$ 时，求此初值问题的解.

(2) 当 $b\neq 0$ 时，求此初值问题的解.

八(10 分) 把以下方程化为标准型：

$$x^5(t^2u_{tt}+tu_t) - xu_{xx} + au_x = 0, \quad (xt\neq 0)$$

参考公式

1) 极坐标系：$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$，柱坐标系：$\Delta_3 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，

球坐标系：$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$.

2) 称二阶常微分方程：$[k(x)X'(x)]' - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0$ 为 Sturm – Liouville 型方程

3)Bessel 方程 $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2)y = 0, \nu\geq 0$ 通解为 $y = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x)$，$N_\nu(x)$ 在 $x=0$ 无界，若 ω 是 $J_\nu(\omega a)=0$ 的一个正根，则有模平方 $N_{\nu 1}^2 = \|J_\nu(\omega x)\|_1^2 = \frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$.

若 ω 是 $J'_\nu(\omega a)=0$ 的一个非负根，则有模平方 $N_{\nu 2}^2 = \|J_\nu(\omega x)\|_2^2 = \frac{1}{2}[a^2 - \frac{\nu^2}{\omega^2}]J_\nu^2(\omega a)$.

4) 勒让德多项式：$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, $n=0,1,2,3,\ldots$，母函数：$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n$.

5) $F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2 t})$

中国科学技术大学数学科学学院
2019—2020学年第二学期考试试卷

课程名称 数学物理方程A　　　课程编号 001506

姓名＿＿＿＿＿　　学号＿＿＿＿＿　　学院＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一 (14分) 已知二阶方程

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0,$$

(1) 判断此方程的类型（答案在”双曲型“,”抛物型“和“椭圆型”中选）

(2) 求此二阶方程的通解。

二 (12分) 求定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y, \\ u(0,y) = y^2, \ \ u(x,0) = \sin 3x \end{cases}$$

三 (16分) 求以下固有值问题的固有值,固有函数。

$$(1) \qquad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad (0 < x < 5) \\ y(0) = 0, \ \ y'(5) = 0. \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - 25) y = 0, \ (0 < x < 1) \\ |y(0)| < +\infty, \quad y'(1) = 0. \end{cases}$$

四 (16分) 利用分离变量法求解定解问题:

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, \ (t > 0, \ 0 < x < 20) \\ u(t,0) = u(t,20) = 0, \\ u(0,x) = \varphi(x)\,. \end{cases}$$

五 (14分)求解以下定解问题,其中(r,θ,φ)为球坐标。

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0,\ (r<3)\\ u\mid_{r=3}=3+\cos^2\theta\,.\end{cases}$$

六 (16分)求解初值问题：

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+20u,\ \ (t>0,\ -\infty<x<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x),\end{cases}$$

并求出$\varphi(x)=\delta(x+2)$时的具体解。

七 (12分)求解边值问题：

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0,\quad (0<x<3,\ y>0)\\ u\mid_{y=0}=0,\ \ u\mid_{y\to+\infty}\text{ 有界}\\ u\mid_{x=0}=\varphi_1(y),\ u\mid_{x=3}=\varphi_2(y)\,.\end{cases}$$

参考公式

1)直角坐标系:$\Delta_3 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，柱坐标系:$\Delta_3 u=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,

球坐标系:$\Delta_3 u=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta})+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$.

2)若ω是$J_\nu(\omega a)=0$的一个正根，则有模平方$N_{\nu1}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_1^2=\dfrac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$.

若ω是$J_\nu'(\omega a)=0$的一个正根，则有模平方$N_{\nu2}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_2^2=\dfrac{1}{2}[a^2-\dfrac{\nu^2}{\omega^2}]J_\nu^2(\omega a)$.

3)勒让德多项式:$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, $n=0,1,2,3,...$,

母函数:$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n$,递推公式: $P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)$

4) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\dfrac{x^2}{4a^2 t})$

5. 由V内Poisson方程第一边值问题的格林函数$G(M;M_0)$,求得Poisson方程第一边值问题解$u(M)$的公式是:

$$u(M)=-\iint\limits_S\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}(M;M_0)dS+\iiint\limits_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0.$$

中国科学技术大学数学科学学院

2019—2020学年第二学期考试试卷

■A 卷　　　□B 卷

课程名称: 数学物理方程(A)　　课程编号: 001506

姓名:　　学号:　　专业:

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一(10分) 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+3u_{xy}-4u_{yy}=0, \\ u(x,0)=\sin 3x,\ u_y(x,0)=2x. \end{cases}$$

二(12分) 考虑如下形式的一阶线性方程: 考虑如下形式的一阶线性方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y)$$

1) 在$f(x,y)=0$时，求方程通解。

2) 在$f(x,y)=xy$时，求满足$u(0,y)=y$的特解。

三(12分) 求以下固有值问题的固有值和固有函数.

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ (0<x<20) \\ y(0)=0,\ y'(20)=0. \end{cases}$$

四(14分) 求解定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}-3u,\ (t>0,\quad 0<x<5) \\ u(t,0)=u(t,5)=0, \\ u(0,x)=\varphi(x),\quad u_t(0,x)=0. \end{cases}$$

五、(14分)考虑如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t=a^2\Delta_3 u, \quad (t>0, x^2+y^2<R^2, -\infty<z<+\infty) \\ u|_{x^2+y^2=R^2}=u_1, \\ u|_{t=0}=u_1+R^2-x^2-y^2, \end{cases}$$

其中a, R, u_1均为给定的常数, 且$a>0$, $R>0$.

(1) 当$u_1=0$时，求解上述定解问题.

(2) 当$u_1=1$时，求解上述定解问题.

六.(12分)(r,θ,φ)为球坐标，考虑如下定解问题：

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0, & r<2,\\ u|_{r=2}=f(\theta).\end{cases}$$

(1) 当$f(\theta)=1+\cos^2\theta$时，求解上述定解问题.

(2) 当$f(\theta)=\begin{cases}4, & 0\le\theta\le\alpha,\\ 0, & \alpha<\theta\le\pi\end{cases}$ 时，求解上述定解问题.

七. (12分)求解初值问题：

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+20u_x+u, & (t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u\,|_{t=0}=\delta(x-2)+3e^{-x^2}.\end{cases}$$

八(14分) 已知空间区域$V=\{(x,y,z)\mid x>0,\ y>0,\ -\infty<z<+\infty\}$，求V内Poisson方程第一边值问题的格林函数。并求解边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0, & (x,y,z)\in V\\ u=\begin{cases}\varphi(x,z), & 当y=0,\ x\ge 0\\ g(y,z), & 当x=0,\ y>0\end{cases}\end{cases}$$

参考公式

1)直角坐标系:$\Delta_3 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，柱坐标系:$\Delta_3 u=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，

球坐标系:$\Delta_3 u=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta})+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$.

2) Bessel函数在三类边界条件下的模平方分别为： $N_{\nu 1n}^2=\dfrac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega_{1n}a)$，

$N_{\nu 2n}^2=\dfrac{1}{2}[a^2-\dfrac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}]J_\nu^2(\omega_{2n}a)$， $N_{\nu 3n}^2=\dfrac{1}{2}[a^2-\dfrac{\nu^2}{\omega_{3n}^2}+\dfrac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}]J_\nu^2(\omega_{3n}a)$.

Bessel函数有递推公式： $(x^\nu J_\nu)'=x^\nu J_{\nu-1}$， $(x^{-\nu}J_\nu)'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}$，

$2J_\nu'=J_{\nu-1}-J_{\nu+1}$， $2\nu x^{-1}J_\nu=J_{\nu-1}+J_{\nu+1}$.

3) n阶Legendre多项式：$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ n=0,1,2,3,\ldots$; 递推公式：

1. $(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$， 2. $nP_n(x)-xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)=0$，

3. $nP_{n-1}(x)-P_n'(x)+xP_{n-1}'(x)=0$， 4. $P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)$.

4) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x\,d\lambda=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\dfrac{x^2}{4a^2t})$

5)由V内Poisson方程第一边值问题的格林函数$G(M;M_0)$，求相应问题解$u(M)$的公式:

$$u(M)=\iiint\limits_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0-\iint\limits_S\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}_0}(M;M_0)dS_0.$$

参考解答和参考评分标准

一　解：特征线方程为：

$$(\frac{dy}{dx})^2-3\frac{dy}{dx}-4=0$$

得到两个首次积分：

$$x+y=c_1,\ \ y-4x=c_2\,.$$

作变换$\xi=x+y,\ \eta=y-4x$, 方程化为:

$$u_{\xi\eta}=0\Longrightarrow u=f(\xi)+g(\eta)=f(x+y)+g(y-4x)$$

....(5分)

代入定解条件得到：

$$f(x)+g(-4x)=\sin 3x,\ \ f'(x)+g'(-4x)=2x$$

解得：
$$f(x)=\frac{1}{5}(\sin 3x+4x^2+4c),\ \ g(-4x)=\frac{1}{5}(4\sin 3x-4x^2-4c)$$

即：
$$f(x)=\frac{1}{5}(\sin 3x+4x^2+4c),\ \ g(x)=\frac{1}{5}(-4\sin\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}x^2-4c)$$

所以，原定解问题解为：

$$u=\frac{1}{5}(\sin 3(x+y)+4(x+y)^2+4c)+\frac{1}{5}(-4\sin\frac{3}{4}(y-4x)-\frac{1}{4}(y-4x)^2-4c)$$

$$=\mathbf{\frac{1}{5}}\sin(\mathbf{3x+3y})+\mathbf{\frac{4}{5}}\sin(\mathbf{3x}-\mathbf{\frac{3}{4}y})+\mathbf{\frac{3}{4}y^2}+\mathbf{2xy}\,.$$

....(10分)

二　解：1) 在 $f(x,y)=0$时，方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0\,.$$

其特征线方程为：

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-y}\Longrightarrow ye^x=c$$

作变量替换：$\xi=e^xy,\ \eta=y$, 方程化为$\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$. 解得通解：

$$\mathbf{u=F(e^xy)}$$

....(6分)

2)在 $f(x,y)=xy$时，仍使用变换：$\xi=e^xy,\ \eta=y$

$$-\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}=(\ln\xi-\ln\eta)\eta\Longrightarrow\frac{\partial u}{\partial \eta}=\ln\eta-\ln\xi$$

解得：

$$u=\eta\ln\eta-\eta-\eta\ln\xi+\varphi(\xi)=\varphi(e^xy)-y-xy$$

....(10分)

这样$u(0,y)=\varphi(y)-y=y$, 即$\varphi(y)=2y$ 最后得到

$$u(x,y)=\mathbf{2e^{x}y-y-xy}\,.$$

....(12分)

三　解：直接讨论或根据Strum-Liouville 定理，固有值$\lambda>0$, 故可令$\lambda=\omega^2$, 代入方程得到

$$y(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$$

....(6分)

由$y(0)=0$, 得出$A=0$, 因此$y(x)=B\sin\omega x$. 再由另一边界条件$y'(20)=B\omega\cos 20\omega=0$, 得出$\cos 20\omega=0$, 即

$$20\omega=n\pi+\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\omega_n=\frac{n\pi+\frac{\pi}{2}}{20},\quad n=0,1,2....$$

$$\text{固有值：}\ \lambda_{\mathbf{n}}=\left(\frac{\mathbf{n}\pi+\frac{\pi}{2}}{\mathbf{20}}\right)^{\mathbf{2}},\qquad \text{固有函数：}\ \mathbf{y_n(x)}=\sin\frac{\mathbf{n}\pi+\frac{\pi}{2}}{\mathbf{20}}\mathbf{x}$$

....(12分)

四　解：利用分离变量，令$u=T(t)X(x)$, 代入方程得到

$$\frac{X''(x)}{X(x)}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda$$

并利用边界条件，得到固有值问题：

$$\begin{cases}X''+(\lambda-\frac{3}{4})X=0,\ (0<x<5)\\ X(0)=0,\ \ X(5)=0.\end{cases}$$

并相应有$T(t)$的方程:$T''(t)+4\lambda T=0$. 解固有值问题解得到：

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{5}\right)^2+\frac{3}{4},\quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{5}x,\quad n=1,2,...$$

....(7分)

相应地

$$T_n(t)=C_n\cos\left(\sqrt{\frac{4n^2\pi^2}{25}+3}\right)t+D_n\sin\left(\sqrt{\frac{4n^2\pi^2}{25}+3}\right)t$$

利用叠加原理，设

$$u=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[C_n\cos\left(\sqrt{\frac{4n^2\pi^2}{25}+3}\right)t+D_n\sin\left(\sqrt{\frac{4n^2\pi^2}{25}+3}\right)t\right]\sin\frac{n\pi}{5}x$$

最后利用初值条件：

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{5}x=\varphi(x)\Longrightarrow C_n=\frac{2}{5}\int_0^5\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{5}\xi\,d\xi$$

以及$u_t(0,x)=0$得出$D_n=0$. 最后求得

$$\mathbf{u}=\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{5}}\varphi(\xi)\sin\frac{\mathbf{n}\pi}{\mathbf{5}}\xi\,\mathbf{d}\xi\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\mathbf{4n^2}\pi^{\mathbf{2}}}{\mathbf{25}}+\mathbf{3}}\right)\mathbf{t}\cdot\sin\frac{\mathbf{n}\pi}{\mathbf{5}}\mathbf{x}$$

....(14分)

五)

解：(1)由于z方向无限长并且定解条件只与r有关，故借助柱坐标方程化为：

$$u_t=a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})\right]$$

作分离变量, 令$u=T(t)H(r)$, 得到

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{H''+\frac{1}{r}H'}{H}=-\lambda$$

结合边界条件，得零阶Bessel方程国有值问题：

$$\begin{cases}r^2H''+rH'+\lambda r^2H=0\\ H(0)\ \text{有界},\ H(R)=0\end{cases}$$

和方程

$$T'+\lambda a^2T=0\,.$$

解固有值问题得到：固有值：$\lambda_n=\omega_n^2$, 固有函数$J_0(\omega_n r)$, 而ω_n是$J_0(\omega R)=0$的第n个正根.相应地:$T_n(t)=e^{-a^2\omega_n^2t}$.设

$$u(t,r)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_ne^{-a^2\omega_n^2t}J_0(\omega_nr)$$

....(7分)

再由初值条件：

$$u\mid_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}C_nJ_0(\omega_nr)=R^2-r^2$$

根据Bessel 函数系数确定公式

$$C_n=\frac{\int_0^R r(R^2-r^2)J_0(\omega_nr)dr}{N_{01n}^2}=\frac{1}{N_{01n}^2}\frac{1}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_nR}t\left(R^2-\frac{t^2}{\omega_n^2}\right)J_0(t)dt$$

$$= \frac{1}{N_{01n}^2\omega_n^2}\left[(R^2-\frac{t^2}{\omega_n^2})tJ_1(t)\Big|_0^{\omega_n R}+\frac{2}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_n R} t^2 J_1(t)dt\right]$$

$$= \frac{2}{R^2J_1^2(\omega_n R)\omega_n^2}.\frac{2}{\omega_n^2}.\omega_n^2R^2J_2(\omega_nR)=\frac{4J_2(\omega_nR)}{\omega_n^2J_1^2(\omega_nR)}=\frac{8}{\omega_n^3RJ_1(\omega_nR)}$$

所以得到解

$$u=\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty}\frac{\mathbf{8}}{\omega_{\mathbf{n}}^{\mathbf{3}}\mathbf{RJ_1}(\omega_{\mathbf{n}}\mathbf{R})}\mathbf{e}^{-\mathbf{a^2}\omega_{\mathbf{n}}^{\mathbf{2}}\mathbf{t}}\mathbf{J_0}(\omega_{\mathbf{n}}\mathbf{r})$$

....(12分)

2)当$u_1=1$时，作变换$V=u-u_1$, 则V的定解问题同情形(1), 因此这时

$$u=u_1+V=\mathbf{1}+\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty}\frac{\mathbf{8}}{\omega_{\mathbf{n}}^{\mathbf{3}}\mathbf{RJ_1}(\omega_{\mathbf{n}}\mathbf{R})}\mathbf{e}^{-\mathbf{a^2}\omega_{\mathbf{n}}^{\mathbf{2}}\mathbf{t}}\mathbf{J_0}(\omega_{\mathbf{n}}\mathbf{r})$$

....(14分)

六)

解：(1) 由于是球内问题, 因此

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_nr^nP_n(\cos\theta).$$

....(4分)

而

$$u\,|_{r=2}=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n2^nP_n(\cos\theta)=1+\cos^2\theta\Longrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}A_n2^nP_n(x)=1+x^2\,.$$

比较得到：$A_0P_0(x)+4A_2P_2(x)=1+x^2\Longrightarrow A_0+4A_2\times\frac{1}{2}(3x^2-1)=1+x^2$ 比较系数，易得: $A_0=\frac{4}{3}$, $A_2=\frac{1}{6}$.这样

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\theta)=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{r^2P_2}(\cos\theta),\quad\left(\text{或}\mathbf{u}(\mathbf{r},\theta)=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}+\mathbf{r^2}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\cos^{\mathbf{2}}\theta-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\right)\right).$$

....(8分)

(2)同样

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_nr^nP_n(\cos\theta).$$

而

$$u\,|_{r=2}=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n2^nP_n(\cos\theta)=f(\theta)=\begin{cases}4, & 0\le\theta\le\alpha,\\ 0, & \alpha<\theta\le\pi.\end{cases}$$

.

因此

$$A_0=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_0(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{4}{2}\int_0^{\alpha}P_0(\cos\theta)\sin\theta d\theta=2\int_0^{\alpha}\sin\theta d\theta=2(1-\cos\alpha).$$

$n\geq 1$ 时,

$$\begin{aligned}A_n2^n&=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\alpha}4P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\\&=2\int_{\cos\alpha}^{1}(2n+1)P_n(x)\,dx=2\int_{\cos\alpha}^{1}\left(P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)\right)\,dx\\&=2\left(P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)\right),\end{aligned}$$

即

$$A_n=\frac{P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)}{2^{n-1}},\ n\geq 1$$

因此

$$\mathbf{u(r,\theta)=2(1-\cos\alpha)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)}{2^{n-1}}\right]r^nP_n(\cos\theta)}.$$

....(14分)

七 解: 记$\delta(x-2)+3e^{-x^2}=\varphi(x)$,并令$\widehat{u}(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x)e^{-i\lambda x}\,dx$,再作Fourier变换得:

$$\begin{cases}\widehat{u}_t=-\lambda^2\widehat{u}+20i\lambda\widehat{u}+\widehat{u},\\ \widehat{u}\mid_{t=0}=\widehat{\varphi}(\lambda)\end{cases}$$

解得:

$$\widehat{u}=\widehat{\varphi}(\lambda)e^{(-\lambda^2+20i\lambda+1)t}.$$

....(5分)

因此

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\varphi}(\lambda)e^{(-\lambda^2+20i\lambda+1)t}e^{i\lambda x}d\lambda=e^t\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda^2t}e^{i\lambda(x+20t)}d\lambda$$

记$h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda^2t}e^{i\lambda x}dx$, 则由上式知:$u(t,x)=e^th(x+20t)$, 而

$$h(x)=F^{-1}[\widehat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda^2t}]=\varphi(x)*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{4t}\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\}d\xi$$

而

$$\delta(x-2)*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4t})=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{(x-2)^2}{4t})$$

$$e^{-x^2}*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{4t}\}=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{1}{1+4t}x^2}$$

这样

$$\mathbf{u(t,x)=e^t h(x+20t)=\frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{(x-2+20t)^2}{4t})+\frac{3e^t}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{1}{1+4t}(x+20t)^2}}$$

....(12分)

八) 解 1)记$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$, 利用镜像法，在$M_0=(\xi,\eta,\zeta)$放$+\epsilon$点电荷，在$M_1=(-\xi,\eta,\zeta)$放$-\epsilon$点电荷,在$M_2=(\xi,-\eta,\zeta)$放$-\epsilon$点电荷, $M_3=(-\xi,-\eta,\zeta)$放$+\epsilon$点电荷. 产生的电场的势函数叠加即为格林函数：

$$G=\frac{1}{4\pi r(M,M_0)}-\frac{1}{4\pi r(M,M_1)}-\frac{1}{4\pi r(M,M_2)}+\frac{1}{4\pi r(M,M_3)}$$

其中

$$r(M,M_0)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},\quad r(M,M_1)=\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$
$$r(M,M_2)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2},\quad r(M,M_3)=\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

....(7分)

2) 对于区域在$y=0$的边界, 其外法方向$\vec{n_0}=(0,-1,0)$, 则

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n_0}}\mid_{\eta=0}=-\frac{\partial G}{\partial \eta}\mid_{\eta=0}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{y-\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{y+\eta}{[(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_{\eta=0}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{y-\eta}{[(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{y+\eta}{[(x+\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_{\eta=0}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{y}{[(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{y}{[(x+\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right)$$

同理

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{[x^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{x}{[x^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

最后

$$u(x,y,z)=\int_{\substack{\xi=0\\(\eta>0)}}g(\eta,\zeta)\frac{\partial G}{\partial \xi}dS_0+\int_{\substack{\eta=0\\(\xi>0)}}\varphi(\xi,\zeta)\frac{\partial G}{\partial \eta}dS_0$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\zeta\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{[(x-\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{y}{[(x+\xi)^2+y^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right)\varphi(\xi,\zeta)\,d\xi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\zeta\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{[x^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{x}{[x^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right)g(\eta,\zeta)d\eta$$

....(14分)

一(12分) 求以下固有值问题的固有值,固有函数.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ (0 < x < 21) \\ y(0) = 0, \ \ y(21) = 0. \end{cases}$$

二(16分) 考虑如下形式定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + f(t,x), \ (t > 0, \ -\infty < x < +\infty) \\ u(0,x) = 2x^2, \ \ u_t(0,x) = 3\cos x \end{cases}$$

(1) 在$f(t,x) = 0$时，求此问题的解。

(2) 在$f(t,x) = t^2 x + 5\sin 2t \sin x$时，求此问题的解。

三(10分)求解定解问题

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3y\dfrac{\partial u}{\partial y} + u = 0, \\ u(1,y) = y + 3y^2 \end{cases}$$

四.(14分)求解混合问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + \delta(t-3, x-2), \ (t > 0, \ \ 0 < x < 5) \\ u(t,0) = u_x(t,5) = 0, \\ u(0,x) = \sin\dfrac{1}{2}\pi x + 3\sin\dfrac{3}{10}\pi x, \ \ u_t(0,x) = 0. \end{cases}$$

五(12分) 利用分离变量求解以下边值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r}) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (r = \sqrt{x^2+y^2} < 2, \ 0 < z < 3) \\ u\mid_{r=2} = 0, \\ u\mid_{z=0} = 8 - 2r^2, \ \ u\mid_{z=3} = 0. \end{cases}$$

六. (16分) 已知以下形式初值问题

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + a^2u_{yy} + bu_x + cu, & (t > 0, -\infty < x, y < +\infty) \\ u\mid_{t=0} = \varphi(x) + g(x,y). \end{cases}$$

(1)当$a = b = c = 0$, $g(x,y) = 0$时，设u不依赖于y，求这时$u = u(t,x)$的解的表达式。

(2)当$a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, $\varphi(x) = x$, $g(x,y) = 5e^{-x^2-y^2}$时，求这时解$u(t,x,y)$.

七. (10分)求解以下定解问题，其中(r,θ,φ)为球坐标.

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, & 1 < r < 3 \\ u|_{r=1} = \cos 2\theta - 1 \\ u\mid_{r=3} = 21 + \cos\theta. \end{cases}$$

八(10分) 求解边值问题：
$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{yy} = 0, & (x > 3,\ y > 0) \\ u = \begin{cases} g(y), & 当x = 3,\ y > 0 \\ f(x), & 当x \geq 3,\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

参考公式

1)直角坐标系:$\Delta_3 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, 柱坐标系:$\Delta_3 u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,

球坐标系:$\Delta_3 u = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$.

2) Bessel函数在三类边界条件下的模平方分别为： $N_{\nu 1n}^2 = \dfrac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega_{1n}a)$,

$N_{\nu 2n}^2 = \dfrac{1}{2}[a^2 - \dfrac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}]J_\nu^2(\omega_{2n}a)$, $\quad N_{\nu 3n}^2 = \dfrac{1}{2}[a^2 - \dfrac{\nu^2}{\omega_{3n}^2} + \dfrac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}]J_\nu^2(\omega_{3n}a)$.

Bessel函数有递推公式： $(x^\nu J_\nu)' = x^\nu J_{\nu-1}$, $\quad (x^{-\nu}J_\nu)' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}$,

$2J_\nu' = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}$, $\quad 2\nu x^{-1}J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}$.

3) n阶Legendre多项式：$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, $n = 0,1,2,3,\ldots$; 递推公式：

1. $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$, 2. $nP_n(x) - xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = 0$,

3. $nP_{n-1}(x) - P_n'(x) + xP_{n-1}'(x) = 0$, 4. $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)$.

4) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x\, d\lambda = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\dfrac{x^2}{4a^2 t})$

5)由Poisson方程第一边值问题的格林函数$G(M;M_0)$, 求相应问题的解$u(M)$的公式:

空间区域： $u(M) = \displaystyle\iiint_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0 - \iint_S \varphi(M_0)\dfrac{\partial G}{\partial \vec{n_0}}(M;M_0)dS_0$,

平面区域： $u(M) = \displaystyle\iint_D f(M_0)G(M;M_0)dM_0 - \int_l \varphi(M_0)\dfrac{\partial G}{\partial \vec{n_0}}(M;M_0)dl_0$.

参考解答和参考评分标准

一 解：由S-L定理，可设$\lambda=\omega^2>0$,这样解得

$$y=A\cos\omega x+B\sin\omega x,\ \ldots\ldots 6\text{ 分}$$

由$y(0)=0\Longrightarrow A=0,\ y(21)=B\sin 21\omega=0$, 因此$21\omega=n\pi\Longrightarrow\omega=\dfrac{n\pi}{21}, n=1,2,3\ldots$得

$$\text{固有值}:\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{21}\right)^2,\ ,\ \text{固有函数}:\ y_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{21}\ \ldots\ldots 12\text{分}$$

二 解：(1)在$f(t,x)=0$时,由达朗贝尔公式：

$$u=\frac{2}{2}\left[(x+2t)^2+(x-2t)^2\right]+\frac{1}{2\times 2}\int_{x-2t}^{x+2t}3\cos\xi d\xi=2x^2+8t^2+\frac{3}{2}\sin 2t\cos x$$

……8分

(2)在$f(t,x)=t^2x+5\sin 2t\sin x$时,由叠加原理： $u=u_1+u_2+u_3$, 其中

$$\begin{cases}u_{1tt}=4u_{1xx},\ (t>0,\ -\infty<x<+\infty)\\ u_1(0,x)=2x^2,\ u_{1t}(0,x)=3\cos x\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_{2tt}=4u_{2xx}+t^2x,\ (t>0,\ -\infty<x<+\infty)\\ u_2(0,x)=0,\ u_{2t}(0,x)=0\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}u_{3tt}=4u_{3xx}+5\sin 2t\sin x,\ (t>0,\ -\infty<x<+\infty)\\ u_3(0,x)=0,\ u_{3t}(0,x)=0\end{cases}$$

由第一问的结论：$u_1=2x^2+8t^2+\frac{3}{2}\sin 2t\cos x$, 直接观察可得：$u_2=\dfrac{t^4}{12}x$, 使用冲量原理，求得：

$$u_3=\frac{5}{2\times 2}\int_0^t d\tau\int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}\sin 2\tau\sin\xi d\xi=\frac{5}{2}\int_0^t\sin x\sin 2(t-\tau)\sin 2\tau\,d\tau$$

$$=\frac{5}{4}\sin x\int_0^t(\cos(2t-4\tau)-\cos 2t)\,d\tau=\frac{5}{8}\sin 2t\sin x-\frac{5}{4}t\cos 2t\sin x$$

综上，这时

$$u=2x^2+8t^2+\frac{3}{2}\sin 2t\cos x+\frac{t^4}{12}x+\frac{5}{8}\sin 2t\sin x-\frac{5}{4}t\cos 2t\sin x$$

……16分

三 解：特征方程为：

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-3y}$$

得到首次积分:$x^3y=c$, 因此作变换:

$$\xi = x^3y,\quad \eta = y, \quad \text{..................................5分}$$

方程化为:

$$-3\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}+u=0. \Longrightarrow u=f(\xi)(\eta)^{\frac{1}{3}}=f(x^3y)y^{\frac{1}{3}}$$

再利用定解条件$u(1,y)=y+3y^2$, 得到$f(\xi)=\xi^{\frac{5}{3}}+\xi^{\frac{2}{3}}$, 最后得到

$$\mathbf{u(x,y)=3x^5y^2+x^2y}$$

....10分

四.. 解: 使用叠加原理: $u=u_1+u_2$其中

$$\begin{cases} u_{1tt}=4u_{1xx},\ (t>0,\quad 0<x<5)\\ u_1(t,0)=u_{1x}(t,5)=0,\\ u_1(0,x)=\sin\frac{1}{2}\pi x+3\sin\frac{3}{10}\pi x,\quad u_{1t}(0,x)=0. \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} u_{2tt}=4u_{2xx}+\delta(t-3,x-2),\ (t>0,\quad 0<x<5)\\ u_2(t,0)=u_{2x}(t,5)=0,\\ u_2(0,x)=0,\quad u_{2t}(0,x)=0. \end{cases}$$

为了求u_1,作分离变量$u_1=T(t)X(x)$, 得到固有值问题:

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0,\ (0<x<21)\\ X(0)=0,\quad X'(5)=0. \end{cases}$$

和常微: $T''+4\lambda T=0$. 其中固有值问题的固有值和固有函数为:

$$\lambda_n=\left(\frac{2n\pi+\pi}{10}\right)^2,\ X_n(x)=\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}x$$

相应地$T_n(t)=C_n\cos\frac{2n\pi+\pi}{5}t+D_n\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}t$, 这样, 由叠加原理可设:

$$u_1(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(C_n\cos\frac{2n\pi+\pi}{5}t+D_n\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}t\right)\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}x$$

再由u_1的初值条件, 定出:

$$u_1=3\cos\frac{3\pi}{5}t\sin\frac{3}{10}\pi x+\cos\pi t\sin\frac{1}{2}\pi x$$

....6分

为了求u_2, 利用冲量原理

$$u_2=\int_0^t W(t,x,\tau)d\tau$$

$W(t,x,\tau)$满足：

$$\begin{cases} W_{tt}=4W_{xx}, & (t>\tau,\ \ 0<x<5) \\ W(t,0)=W_x(t,5)=0, \\ W\mid_{t=\tau}=0, & W_t\mid_{t=\tau}=\delta(\tau-3,x-2). \end{cases}$$

利用变换$t_1=t-\tau$, 并利用分离变量法，类似求得：

$$W(t,x,\tau)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(F_n\cos\frac{2n\pi+\pi}{5}(t-\tau)+G_n\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}(t-\tau)\right)\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}x$$

再利用W在$t=\tau$的条件，得到F_n=0, 而G_n满足：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}G_n\frac{2n\pi+\pi}{5}\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}x=\delta(\tau-3,x-2)=\delta(\tau-3)\delta(x-2).$$

得出：

$$G_n=\frac{2}{2n\pi+\pi}\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}\delta(\tau-3)$$

即

$$W(t,x,\tau)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{2n\pi+\pi}\delta(\tau-3)\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}(t-\tau)\right)\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}x$$

因此

$$u_2(t,x)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{2n\pi+\pi}\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}(t-3)\right)\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}x, & t\geq 3 \\ 0, & t<3\end{cases}$$

综上，此定解问题的解：

$\mathbf{u(t,x)}=$

$$\begin{cases} 3\cos\frac{3\pi}{5}\mathbf{t}\sin\frac{3}{10}\pi\mathbf{x}+\cos\pi\mathbf{t}\sin\frac{1}{2}\pi\mathbf{x}+\sum_{n=0}^{+\infty}[\frac{2}{2n\pi+\pi}\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}\sin\frac{2n\pi+\pi}{5}(\mathbf{t}-3)]\sin\frac{2n\pi+\pi}{10}\mathbf{x}, & \mathbf{t}\geq 3 \\ 3\cos\frac{3\pi}{5}\mathbf{t}\sin\frac{3}{10}\pi\mathbf{x}+\cos\pi\mathbf{t}\sin\frac{1}{2}\pi\mathbf{x}. & \mathbf{t}<3. \end{cases}$$

....14分

五　解：作分离变量，令$u=R(r)Z(z)$, 则有

$$\frac{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dR(r)}{dr})}{R}+\frac{\frac{d^2Z(z)}{dz^2}}{Z}=0$$

考虑到齐次边界条件并在$r=0$附加自然边界条件, 得到Bessel方程固有值问题：

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0, \\ |R(0)|<+\infty,\ R(2)=0 \end{cases}$$

和微分方程$Z''-\lambda Z=0$. 进一步求得一系列分离变量形式的解：

$$u_n(r,z)=(A_n ch\omega_n z+B_n sh\omega_n z)\,J_0(\omega_n r)$$

其中ω_n是代数方程$J_0(2\omega)=0$的第n个正根。由叠加原理，

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n ch\omega_n z+B_n sh\omega_n z)\,J_0(\omega_n r)$$

利用边界条件：

$$u(r,3)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n ch3\omega_n+B_n sh3\omega_n)\,J_0(\omega_n r)=0\Longrightarrow B_n=-\frac{ch3\omega_n}{sh3\omega_n}A_n=-cth3\omega_n A_n$$

$$u(r,0)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n J_0(\omega_n r)=8-r^2$$

....7分

结合递推公式，可算出广义Fourier系数：

$$A_n=\frac{\int_0^2 r(8-2r^2)J_0(\omega_n r)dr}{N_{0n}^2}=2\frac{\int_0^2 r(4-r^2)J_0(\omega_n r)dr}{N_{0n}^2}=\frac{2}{N_{0n}^2}\frac{1}{\omega_n^2}\int_0^{2\omega_n}t\left(4-\frac{t^2}{\omega_n^2}\right)J_0(t)dt$$

$$=\frac{2}{N_{0n}^2\omega_n^2}\left[(4-\frac{t^2}{\omega_n^2})tJ_1(t)\Big|_0^{2\omega_n}+\frac{2}{\omega_n^2}\int_0^{2\omega_n}t^2J_1(t)dt\right]=\frac{8J_2(2\omega_n)}{\omega_n^2J_1^2(2\omega_n)}=\frac{16}{\omega_n^3J_1(2\omega_n)}.$$

进一步

$$B_n=-\frac{16cth3\omega_n}{\omega_n^3J_1(2\omega_n)}$$

最后

$$\mathbf{u(r,z)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{16}{\omega_n^3\mathbf{J}_1(2\omega_n)}\mathbf{ch}\omega_n\mathbf{z}-\frac{16\mathbf{cth}3\omega_n}{\omega_n^3\mathbf{J}_1(2\omega_n)}\mathbf{sh}\omega_n\mathbf{z}\right)\mathbf{J}_0(\omega_n\mathbf{r})$$

....12分

六. 解：(1) 这时定解问题对应于：

$$\begin{cases}u_t=4u_{xx}\ \ (t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u\,|_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

作Fourier变换，令$\overline{u}(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,x)e^{-i\lambda x}dx$, 则经过Fourier 变换，像函数$\overline{u}$满足：

$$\begin{cases}\frac{d\overline{u}}{dt}=-4\lambda^2\overline{u}\\ \overline{u}\,|_{t=0}=\overline{\varphi}(\lambda)\end{cases}$$

于是解得：

$$\overline{u}=\overline{\varphi}(\lambda)e^{-4\lambda^2 t}$$

作反变换：

$$u(t,x)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{16t})*\varphi(x)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{16t})\varphi(\xi)\,d\xi$$

....8分

(2)当$a=1,\ b=3,c=2,\ \varphi(x)=x,\ g(x,y)=5e^{-x^2-y^2}$时，

$$\begin{cases}u_t=4u_{xx}+u_{yy}+3u_x+2u,\ \ (t>0,-\infty<x,y<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=x+5e^{-x^2-y^2}.\end{cases}$$

令$\overline{u}(t,\lambda,\mu)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}u(t,x,y)e^{-i(\lambda x+\mu y)}dxdy$，则经过Fourier 变换，像函数$\overline{u}$满足：

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{u}}{dt}=(-4\lambda^2-\mu^2+3i\lambda+2)\overline{u}\\ \overline{u}\mid_{t=0}=2\pi h(\lambda)\delta(u)+G(\lambda,\mu)\end{cases}$$

其中$h(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,e^{-i\lambda x}dx,\ G(\lambda,\mu)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}5e^{-x^2-y^2}e^{-i(\lambda x+\mu y)}dxdy$,于是解得：

$$\overline{u}(t,\lambda,\mu)=2\pi h(\lambda)\delta(u)e^{(-4\lambda^2-\mu^2+3i\lambda+2)t}+G(\lambda,\mu)e^{(-4\lambda^2-\mu^2+3i\lambda+2)t}$$

作反变换：

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}2\pi h(\lambda)\delta(u)e^{(-4\lambda^2-\mu^2+3i\lambda+2)t}e^{i(\lambda x+\mu y)}d\lambda d\mu=\frac{e^{2t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)e^{-4\lambda^2 t}e^{i\lambda(x+3t)}d\lambda$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)e^{-4\lambda^2 t}e^{i\lambda x}d\lambda=x*\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{16t})=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\xi)\exp(-\frac{\xi^2}{16t})d\xi$$

$$=\frac{x}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{\xi^2}{16t})d\xi=\frac{x}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau=x$$

这样

$$F^{-1}\left[2\pi h(\lambda)\delta(u)e^{(-4\lambda^2-\mu^2+3i\lambda+2)t}\right]=e^{2t}(x+3t)$$

同样

$$F^{-1}\left[G(\lambda,\mu)e^{(-4\lambda^2-\mu^2)t}\right]=5e^{-x^2-y^2}*(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}})(\frac{1}{4\sqrt{\pi t}})\exp\{-\frac{x^2}{16t}-\frac{y^2}{4t}\}$$

$$e^{-x^2}*\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{16t}\}=\frac{1}{\sqrt{1+16t}}e^{-\frac{1}{1+16t}x^2},\quad e^{-y^2}*\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\{-\frac{y^2}{4t}\}=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{1}{1+4t}y^2}$$

这样

$$F^{-1}\left[G(\lambda,\mu)e^{(-4\lambda^2-\mu^2)t}\right]=\frac{5}{8\pi t}\frac{1}{\sqrt{1+16t}}\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{1}{1+16t}x^2-\frac{1}{1+4t}y^2}$$

进一步

$$F^{-1}\left[G(\lambda,\mu)e^{(-4\lambda^2-\mu^2+3i\lambda+2)t}\right]=\frac{5}{8\pi t}\frac{e^{2t}}{\sqrt{1+16t}}\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{1}{1+16t}(x+3t)^2-\frac{1}{1+4t}y^2}$$

综上，求得$u(t,x,y,)$为

$$\mathbf{u(t,x,y)=e^{2t}(x+3t)+\frac{5}{8\pi t}\frac{e^{2t}}{\sqrt{1+16t}}\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{1}{1+16t}(x+3t)^2-\frac{1}{1+4t}y^2}}$$

....16分

七. 解：使用球坐标下Laplace 方程轴对称情形下的求解公式：

$$u=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)$$

....4分

利用边界条件得到：

$$u\,|_{r=1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(A_n+B_n)\,P_n(\cos\theta)=2\cos^2\theta-2$$

$$u\,|_{r=2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(A_n3^n+B_n3^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)=2021+\cos\theta$$

利用变换$x=\cos\theta$, 并在以上两式比较系数得到：

$$(A_0+B_0)P_0(x)+(A_1+B_1)P_1(x)+(A_2+B_2)P_2(x)=2x^2-2$$

$$(A_0+\frac{B_0}{3})P_0(x)+(3A_1+\frac{B_1}{9})P_1(x)+(9A_2+\frac{B_2}{27})P_2(x)=21+x$$

又根据$P_n(x)$的表示, 算得

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

因此

$$(A_0+B_0)P_0(x)+(A_1+B_1)P_1(x)+(A_2+B_2)P_2(x)=-\frac{4}{3}P_0(x)+\frac{4}{3}P_2(x)$$

$$(A_0+\frac{B_0}{3})P_0(x)+(3A_1+\frac{B_1}{9})P_1(x)+(9A_2+\frac{B_2}{27})P_2(x)=21P_0(x)+P_1(x)$$

于是得到：

$$A_0+B_0=-\frac{4}{3},\ \ A_0+\frac{B_0}{3}=21,\ A_1+B_1=0,\ 3A_1+\frac{B_1}{9}=1,\ A_2+B_2=\frac{4}{3},\ 9A_2+\frac{B_2}{27}=0$$

解得：

$$A_0=\frac{193}{6},\ B_0=-\frac{67}{2},\ A_1=\frac{9}{26},\ B_1=-\frac{9}{26},\ A_2=-\frac{2}{363},\ B_2=\frac{162}{121}$$

所以

$$\mathrm{u}(\mathrm{r},\theta)=\frac{193}{6}-\frac{67}{2}\mathrm{r}^{-1}+\left(\frac{9}{26}\mathrm{r}-\frac{9}{26}\mathrm{r}^{-2}\right)\mathrm{P}_1(\cos\theta)+\left(-\frac{2}{363}\mathrm{r}^2+\frac{162}{121}\mathrm{r}^{-3}\right)\mathrm{P}_2(\cos\theta)$$

......10分

八 解：作坐标变换$\bar{x}=x-3$，$\bar{y}=\frac{y}{2}$，这样原问题变为

$$\begin{cases} u_{\bar{x}\bar{x}}+4u_{\bar{y}\bar{y}}=0,\ \bar{x}>0,\bar{y}>0,\\ u=\begin{cases} g(2\bar{y})\text{当}\bar{x}=0,\bar{y}>0\\ f(\bar{x}+3)\text{当}\bar{x}>0,\bar{y}=0\end{cases}\end{cases}$$

利用镜像法，在$M_0=(\bar{\xi},\bar{\eta})$，$M_1=(\bar{\xi},-\bar{\eta})$，$M_2=(-\bar{\xi},\bar{\eta})$，$M_3=(-\bar{\xi},-\bar{\eta})$ 依次放$+\epsilon$，$-\epsilon$，$-\epsilon$，$+\epsilon$的线电荷，产生电场电式叠加就是区域$(\bar{x}>0,\bar{y}>0)$的格林函数：

$$\overline{G}=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(\bar{x}+\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2}+\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}+\bar{\eta})^2}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2}-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(\bar{x}+\bar{\xi})^2+(\bar{y}+\bar{\eta})^2}$$

......4分

对于区域在$\bar{y}=0$的边界，其外法方向$\vec{n_0}=(0,-1)$，则$\frac{\partial G}{\partial\vec{n_0}}|_{\bar{\eta}=0}=-\frac{\partial G}{\partial\bar{\eta}}|_{\bar{\eta}=0}$，

$$\frac{\partial G}{\partial\bar{\eta}}|_{\bar{\eta}=0}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{(\bar{\eta}-\bar{y})}{(\bar{x}+\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2}+\frac{(\bar{\eta}+\bar{y})}{(\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}+\bar{\eta})^2}\right)\Bigg|_{\bar{\eta}=0}$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{(\bar{\eta}-\bar{y})}{(\bar{x}-\bar{\xi})^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2}+\frac{(\bar{\eta}+\bar{y})}{(\bar{x}+\bar{\xi})^2+(\bar{y}+\bar{\eta})^2}\right)\Bigg|_{\bar{\eta}=0}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\bar{y}}{(\bar{x}-\bar{\xi})^2+\bar{y}^2}-\frac{\bar{y}}{(\bar{x}+\bar{\xi})^2+\bar{y}^2}\right).$$
$$\frac{\partial G}{\partial\bar{\xi}}|_{\bar{\xi}=0}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2}-\frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+(\bar{y}+\bar{\eta})^2}\right).$$

因此

$$u(\bar{x},\bar{y})=\int_{\substack{\bar{\eta}=0\\(\bar{\xi}>0)}}f(\bar{\xi}+3)\frac{\partial G}{\partial\bar{\eta}}d\bar{\xi}+\int_{\substack{\bar{\xi}=0\\(\bar{\eta}>0)}}g(2\bar{\eta})\frac{\partial G}{\partial\bar{\xi}}d\bar{\eta}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}f(\bar{\xi}+3)\left(\frac{\bar{y}}{(\bar{x}-\bar{\xi})^2+\bar{y}^2}-\frac{\bar{y}}{(\bar{x}+\bar{\xi})^2+\bar{y}^2}\right)d\bar{\xi}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}g(2\bar{\eta})\left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+(\bar{y}-\bar{\eta})^2}-\frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+(\bar{y}+\bar{\eta})^2}\right)d\bar{\eta}$$

最后，利用$\bar{x}=x-3$、$\bar{y}=\frac{y}{2}$,得到：

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{f}(\xi+3)\left(\frac{\mathrm{y}}{4(\mathrm{x}-3-\xi)^2+\mathrm{y}^2}-\frac{\mathrm{y}}{4(\mathrm{x}-3+\xi)^2+\mathrm{y}^2}\right)d\xi$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{g}(2\eta)\left(\frac{\mathrm{x}-3}{4(\mathrm{x}-3)^2+(\mathrm{y}-2\eta)^2}-\frac{\mathrm{x}-3}{4(\mathrm{x}-3)^2+(\mathrm{y}+2\eta)^2}\right)d\eta.$$

......10分