NT.

1. $p_1 < \frac{p_1+p_2}{2} < p_2$.

$\frac{p_1+p_2}{2}$ 是质数与 p_1, p_2 是相邻质数矛盾.

2. 设 $\{p$ 为素数 : $p=4m+3\} = \{p_1, \cdots, p_n\}$.

考虑 $\prod_{i=1}^{n} p_i^2 + 2 \equiv 3 \pmod 4$.

$\prod_{i=1}^{n} p_i^2+2$ 有 $4m+3$ 形素因子. 但不为 $p_1, \cdots, p_n$. 矛盾.

(类似地 $6n+5$ ---)

(Dirichlet) $(a,b)=1 \Longrightarrow \{an+b\}_{n=1}^{\infty}$ 中有无穷多素数.

3. 考虑同余方程组

$$\begin{cases} a \equiv 0 \mod p_1 \\ a \equiv -1 \mod p_2^2 \\ \vdots \\ a \equiv -2020 \mod p_{2021}^{2021} \end{cases}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_{2021}$ 是不同质数

由 CRT. 有整数解. 即为所求 a_1.

4. $n_1^4 + \cdots + n_{14}^4 = 1599$.

$n_i^4 \equiv 0, 1 \mod 16$.

LHS $\equiv 0, 1, \cdots, 14 \mod 16$.
但 $1599 \equiv 15 \mod 16$. $\rightarrow$ 无解.

5. 不妨设 $a \le b \le c$.

若 $a \ge 4$. 则 $LHS \le \left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2$.

故 $a = 2, 3$

i) $a=3$. 若 $b \ge 5$. 则 $LHS \le \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 < 2$.

故 $b = 3, 4$. 对应 $(a,b,c) = (3,3,8)$ 或 $(3,4,5)$

ii) $a=2$. 若 $b \ge 7$ 则 $LHS \le \frac{3}{2} \cdot \frac{64}{49} < 2$.

故 $b = 4, 5, 6$. 对应 $(a,b,c) = (2,6,7), (2,5,9), (2,4,15)$

6. $1 \le f(x) \le 9 \cdot \lceil \log_{10} x \rceil$ (每一位估成9. $\lceil \log_{10} x \rceil$ = 位数).

$f(3333^{3333}) \le 9 \cdot \lceil \log_{10} 3333^{3333} \rceil < 9 \cdot \log_{10} 10000^{1000} = 36000$.

故 $f(3333^{3333})$ 至多为 5 位数.

$f(f(3333^{3333})) \le 5 \cdot 9 = 45$.

注意到 $x \equiv f(x) \mod 9$. 且 $9 \mid 3333^{3333}$.

只能 $f(f(f(3333^{3333}))) = 9$.

7. Kummer定理、$\binom{m+n}{n}$中p的幂次为p进制下m+n的进位次数

(简证)：$V_p\left(\binom{m+n}{n}\right) = V_p((m+n)!) - V_p(m!) - V_p(n!)$

$$= \sum_{i=1}\left(\left[\frac{m+n}{p^i}\right] - \left[\frac{m}{p^i}\right] - \left[\frac{n}{p^i}\right]\right)$$

m+n在第i位进位，则$\left[\frac{m+n}{p^i}\right] - \left[\frac{m}{p^i}\right] - \left[\frac{n}{p^i}\right]=1$，否则为0.

$(100)_{10} = (1100100)_2$、无进位，则 $K = 1000000, 100000, 1100000, 100, 1000100, 100100, 0, 1100100.$

64　32　96　4　68　36　0　100.

Lucas定理. $m = m'p + r_m$

$n = n'p + r_n$　$(0 \le r_m, r_n \le p-1)$.

则 $\binom{m}{n} = \binom{m'}{n'}\binom{r_m}{r_n} \bmod p$.（约定 $a<b$时 $\binom{a}{b}=0$. $\binom{0}{0}=1$.）

设 $K = (K_1K_2K_3K_4K_5K_6K_7)_2$.

则 $\binom{100}{K} = \binom{1}{K_1}\binom{1}{K_2}\binom{0}{K_3}\binom{0}{K_4}\binom{1}{K_5}\binom{0}{K_6}\binom{0}{K_7} \bmod 2$.

$\Rightarrow K_3 = K_4 = K_6 = K_7 = 0$.

$K_1. K_2. K_5 \in \{0,1\}$. $\Rightarrow K = 0.4.32.36.64.68.96.100$.

8. 若 $3 \nmid ab$. 则 $c^2 \equiv a^2+b^2 \equiv 2 \pmod 3$. 矛盾.

补充：$y^2 = (x+1)(x^2+3x+1)$ (解方程).

$(x+1, x^2+3x+1) = 1$. $\Rightarrow$ $x+1 = y_1^2$, $x^2+3x+1 = y_2^2$.　同时 $\underset{(x+1)^2}{\underset{\shortparallel}{x^2+2x+1}} \le x^2+3x+1 < \underset{(x+2)^2}{\underset{\shortparallel}{x^2+4x+4}}$.

$\Rightarrow x=0, y=\pm1$.

1. 设 $p_n(x)=x^n$.

若 $p_n(a+b\sqrt{5})=\lambda+\mu\sqrt{5}$ $(a,b,\lambda,\mu\in\mathbb{Q})$

则 $p_n(a-b\sqrt{5})=\lambda-\mu\sqrt{5}$.

2. 虚根成对，若实根有奇次零点，则在两侧取值异号.

$\Downarrow$

实根成对.

$$f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)^2\prod_{j=1}^{n}(x^2-a_jx+b_j)\qquad(a_j^2-4b_j<0,\ \alpha_i,\ a_j,\ b_j\in\mathbb{Q}).$$

取 $p(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)\prod_{j=1}^{n}\left(x-\frac{a_j+\sqrt{4b_j-a_j^2}\,i}{2}\right)$. 则 $f(x)=p(x)\overline{p(x)}$.

3. $f(x)=0$ 则 $(x+1)^n=(x-1)^n$. $\quad\varepsilon=e^{2\pi i/n}$.

$$x+1=\varepsilon^k(x-1)\qquad(k=1,2,\cdots,n-1).$$

$$x=\frac{\varepsilon^k+1}{\varepsilon^k-1}.$$

$$f(x)=2n\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-\frac{\varepsilon^k+1}{\varepsilon^k-1}\right).$$

4. (Lagrange). $f(x)\equiv f(a_1)\mod(x-a_1)$

$\vdots$

$f(x)\equiv f(a_n)\mod(x-a_n)$.

则 $$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}\frac{(x-a_k)}{(a_j-a_k)}\cdot f(a_j)+(x-a_1)\cdots(x-a_n)\cdot h(x).$$

令 $Q(x)=(x+1)P(x)-x$. 则 $Q(x)=x(x-1)\cdots(x-n+1)(x-t)$.

$x=-1$ 代入. $\Rightarrow t=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}-1$.

$$p(n)=n!+\frac{n+(-1)^n}{(n+1)}$$

5. $3m$.

6. $p^2(x) = p^2(-x)$

$(p(x)-p(-x))(p(x)+p(-x))=0$.

其中某个对无穷多 x 取 0. $\Rightarrow$ p 为奇函数或偶函数.

i) p 为奇. $p(x)=x$. (令 $a_n = a_{n-1}^2+1$. $a_1=0$ 则 $p(a_n)=a_n$)

ii) p 为偶 $p(x)=Q(x^2)=R(x^2+1)$.

$\deg p \geq 2$. 记 $S(x)=(x^2+1)$. $\quad p(x) = R(S(x))$.

$$p(x^2+1)=p^2(x)+1 \Rightarrow p(S(x)) = S(p(x))$$

$$R(S(S(x))) = S(R(S(x))).$$

考虑 $h(x)=R(S(x))-S(R(x))$. 则 $h(x)=0$ 对 $S(1)$. $S(2)$. $\cdots$ 都成立.

故 $h(x)=0$. 即 $R(S(x))=S(R(x))$.

对 p 次数归纳知 $p = S(S(\cdots(S(x))\cdots))$

iii) $p=\text{const}$. $\quad p(x)=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

7. 若 $p(1)$ 为质数. 设 $p(1)=p$.

由 $a-b \mid p(a)-p(b) \Rightarrow \forall t\in\mathbb{N}^*$. $p \mid p(1+tp)-p(1)$. $\Rightarrow p \mid p(1+tp) \Rightarrow p(1+tp)=p$.

$\Rightarrow p(x)\equiv p$.

8. $(x-\sqrt{2}-\sqrt{5})(x+\sqrt{2}+\sqrt{5})(x+\sqrt{2}-\sqrt{5})(x-\sqrt{2}+\sqrt{5})=x^4-14x^2+9$.

且 $x^4-14x^2+9=f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约. $\Rightarrow$ $f(x)$ 是满足 $f(\sqrt{2}+\sqrt{5})=0$ 的次数最低多项式. $(*)$.

若 $p(x)=p_1(x)f(x)+r(x)$. 其中 $\deg r\leq \deg f-1$.

且 $p(\sqrt{2}+\sqrt{5})=0$. 则 $r(\sqrt{2}+\sqrt{5})=0$. 由 $(*)$. 知 $r(x)\equiv 0$.

综上. $p(x)=(x^4-14x^2+9)h(x)$.