

中国科学技术大学物理学院

2021~2022 学年第一学期考试试卷

■ A 卷 □ B 卷

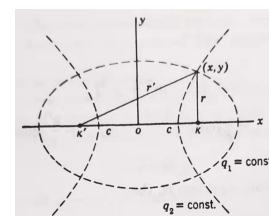
课程名称：_____ 理论力学 _____ 课程代码：_____

开课院系：_____ 物理学院 _____ 考试形式：闭卷

姓 名：_____ 学 号：_____ 专 业：_____

题 号	一	二	三	四	五				总 分
得 分									

一、(25 分) 讨论检验粒子(质量为 m)在两个固定粒子(k, k')力场中的运动(如图所示)。由于问题的对称性, 我们先在 oxy 平面讨论之。两个固定粒子的坐标分别为: $(c, 0), (-c, 0)$, 假设两个固定粒子对检验粒子施加的都是向心力, 检验粒子的势能为: $V = +\frac{k}{r} + \frac{k'}{r'}$, 其 k, k' 为常数, r, r' 分别为:



$r = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$, $r' = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$. 根据问题的特点, 进一步引入椭圆坐标系 (q_1, q_2) :

$x = c \cosh q_1 \cos q_2$, $y = c \sinh q_1 \sin q_2$.

(1) 采用椭圆坐标, 写出检验粒子的哈密顿量 $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$;

(2) 根据哈密顿正则方程, 写出粒子的运动方程。

二、(18 分) 谐振子的哈密顿量为: $H(q, p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ 。如果我们选第一类生成函数(或

称母函数)为: $F_1(q, Q) = \frac{1}{2} \omega q^2 \cot(2\pi Q)$ 。

(1) 写出与母函数 F_1 对应的正则变换;

(2) 写出新的哈密顿量 $\tilde{H}(Q, P)$;

(3) 根据新的哈密顿量写出谐振子的解: $q(t), p(t)$ 。

三、(16 分) 某单自由度体系的哈密顿函数为 $H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{q^2}$, 假设 $q(t = 0) = 1, p(t = 0) = 0$,

(1) 试根据哈密顿正则方程, 写出体系的动力学方程;

(2) 试利用哈密顿-雅克比 (Hamilton-Jacobi) 方法求解 $q(t)$ 。

四、(16 分) 三维谐振子系统的哈密顿函数为

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} k \vec{x}^2$$

已知二次型力学量 G

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^3 \left\{ \frac{1}{2} A_{ij} p_i p_j + \frac{1}{2} B_{ij} x_i x_j + C_{ij} x_i p_j \right\}$$

是守恒量，即： $\frac{dG}{dt} = 0$ ，其中的系数矩阵 A, B, C 是常数，且 A, B 是对称矩阵。

(1) 利用泊松定理判断：这三个系数矩阵必须满足什么条件？

(2) 由上面的结论，推测坐标和动量的二次型中有哪几个线性无关的守恒量，即由

$x_i x_j, p_i p_j, x_i p_j$ 线性组合的物理量中有哪几种组合量为守恒量（除了 G ）？

五、(25 分) 拉格朗日陀螺为在重力场中的对称刚体 ($I_1 = I_2 \neq I_3$)。它的拉格朗日量为： $L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta$ 。

(1) 根据 L 的对称性，找出系统的三个首积分并说明理由；

(2) 根据刚体的欧拉动力学方程，证明广义动量 p_ϕ 和 p_ψ 为运动积分。

附录：可能用到的公式

双曲函数的定义： $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$; $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ 。恒等式： $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 。

欧拉-拉格朗日方程： $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$ ；哈密顿正则方程： $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

泊松括号的定义： $[f(q_\alpha, p_\alpha; t), g(q_\alpha, p_\alpha; t)] \equiv \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \right) \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha}$

泊松定理： $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]$

总角速度 $\vec{\omega}$ 在刚体坐标系（随动惯性系）中的分量：

$$\omega_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \quad \omega_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \quad \omega_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

刚体运动的欧拉动力学方程：

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = N_1, \quad I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = N_2, \quad I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = N_3$$

正则变换（第一类母函数）：

$$dF_1(q, Q, t) = p dq - P dQ + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

哈密顿-雅克比方程： $\frac{\partial}{\partial t} S(q_\alpha, t) + H\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, t\right) = 0$

$$S = -Et + W(q_\alpha) + A, \quad H\left(q_\alpha, \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right) = E$$

在笛卡尔坐标系 (x, y, z) ，柱坐标系 (r, ϕ, z) 以及球坐标系 (r, θ, ϕ) 中两点之间的距离分别为：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

参考答案

一、解答：

(1) 根据坐标变换，易得：

$$V = \frac{k}{c}(\cosh q_1 - \cos q_2)^{-1} + \frac{k'}{c}(\cosh q_1 + \cos q_2)^{-1}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{mc^2}{2}(\cosh^2 q_1 - \cos^2 q_2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

正则动量的定义为：

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = mc^2(\cosh^2 q_1 - \cos^2 q_2)\dot{q}_1$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = mc^2(\cosh^2 q_1 - \cos^2 q_2)\dot{q}_2$$

根据勒让德变换：

$$H = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L$$

得到系统的哈密顿量为：

$$H = \frac{1}{2mc^2}(\cosh^2 q_1 - \cos^2 q_2)^{-1}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{k}{c}(\cosh q_1 - \cos q_2)^{-1} + \frac{k'}{c}(\cosh q_1 + \cos q_2)^{-1}$$

(2) 代入哈密顿正则方程，得到如下的动力学方程：

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{1}{mc^2}(\cosh^2 q_1 - \cos^2 q_2)^{-1}p_1,$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{1}{2mc^2}(\cosh^2 q_1 - \cos^2 q_2)^{-2} \sinh 2q_1 (p_1^2 + p_2^2) + \frac{k}{c}(\cosh q_1 - \cos q_2)^{-2} \sinh q_1$$

$$+ \frac{k'}{c}(\cosh q_1 + \cos q_2)^{-2} \sinh q_1$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{1}{mc^2}(\cosh^2 q_1 - \cos^2 q_2)^{-1}p_2,$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{1}{2mc^2}(\cosh^2 q_1 - \cos^2 q_2)^{-2} \sin 2q_2 (p_1^2 + p_2^2) + \frac{k}{c}(\cosh q_1 - \cos q_2)^{-2} \sin q_2$$

$$- \frac{k'}{c}(\cosh q_1 + \cos q_2)^{-2} \sin q_2$$

二、解答：

(1) 由母函数的微分关系：

$$dF_1(q, Q, t) = pdq - PdQ + (\tilde{H} - H)dt$$

易得：

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \omega q \cot(2\pi Q), \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \pi \omega q^2 \operatorname{cosec}^2(2\pi Q)$$

整理后可得相应的正则变换为：

$$q = \left(\frac{P}{\pi \omega}\right)^{1/2} \sin(2\pi Q), \quad p = \left(\frac{P \omega}{\pi}\right)^{1/2} \cos(2\pi Q)$$

(2) 新的哈密顿函数为：

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{\partial F_1}{\partial t} + H = H(q(Q, P), p(Q, P)) = \frac{\omega}{2\pi} P \equiv \nu P$$

其中 $\nu \equiv \frac{\omega}{2\pi}$ 为谐振子的频率。

(3) 根据哈密顿正则方程有：

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = v, \quad \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0$$

积分上两式:

$$Q(t) = v(t - t_0), \quad P(t) = \text{const.} = \frac{E}{v}$$

代入正则变换, 得:

$$q(t) = a \sin \omega(t - t_0), \quad p(t) = a \omega \cos \omega(t - t_0)$$

其中为 a 谐振子的振幅, 定义为:

$$a \equiv \frac{\sqrt{2E}}{\omega}$$

三、解答:

(1)

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{2}{q^3}$$

(2) 哈密顿-雅可比方程为

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{q^2} = P$$

所以

$$S = W - Pt = \int \sqrt{2 \left(P - \frac{1}{q^2} \right)} dq - Pt$$

因而

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \int \frac{dq}{\sqrt{2(P - 1/q^2)}} - t = \frac{\sqrt{Pq^2 - 1}}{\sqrt{2P}} - t$$

利用初始条件得到 $P = H = 1$, $Q = 0$ 。由此给出

$$t = \sqrt{\frac{q^2 - 1}{2}}$$

由此得到 $q(t) = \sqrt{1 + 2t^2}$ 。

四、解答:

(1) 由泊松定理,

$$\left[\frac{p^2}{2m}, G \right] = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i}{m} [p_i, G] = - \sum_{i=1}^3 \frac{p_i}{m} \frac{\partial G}{\partial x_i} = - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 (B_{ij} p_i x_j + C_{ij} p_i p_j)$$

$$\left[\frac{1}{2} k x^2, G \right] = k \sum_{i=1}^3 x_i [x_i, G] = k \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial G}{\partial p_i} = k \sum_{i=1}^3 (A_{ij} x_i p_j + C_{ij} x_i x_j)$$

$$\frac{dG}{dt} = [G, H] = -k A_{ij} x_i p_j + \frac{1}{m} B_{ij} p_i x_j + \frac{1}{m} C_{ij} p_i p_j - k C_{ij} x_i x_j = 0 \Rightarrow B = kmA, C^T = -C$$

即 A, B 必须是成正比的对称矩阵,

$$B = mkA$$

并且 C 是反对称矩阵。

(2) 共有 9 个守恒量，分别为对称张量

$$\frac{1}{2m}p_i p_j + \frac{1}{2}kx_i x_j$$

有 6 个独立分量；以及反对称张量

$$x_i p_j - x_j p_i$$

有 3 个独立分量（是角动量）。

五、解答：

(1) 拉格朗日量 L 不显含时间，因此哈密顿量 $H = E$ 为守恒量。另外， ψ, φ 为循环坐标，因此正则动量 p_ψ, p_φ 为守恒量，即：

$$\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta = E = \text{const.}$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{const.}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_3 \cos^2 \theta + I_1 \sin^2 \theta)\dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = \text{const}$$

(2) 力矩的方向显然同时垂直于刚体的 z 轴和实验室系的 z' 方向，因此，

$$N_3 = 0, N_{3'} = 0$$

根据欧拉动力学公式有：

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1 \omega_2 = I_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

即：

$$p_\psi = L_3 = I_3 \omega_3 = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{const.}$$

另外，

$$\frac{d}{dt}(L_{3'}) = N_{3'} = 0$$

易得：

$$p_\varphi = L_{3'} = (I_3 \cos^2 \theta + I_1 \sin^2 \theta)\dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = \text{const.}$$

其中刚体绕实验室系的 z' 轴的转动惯量为：

$$I_{3'} = I_3 \cos^2 \theta + I_1 \sin^2 \theta$$