



Introduction to the Controlled thermal Fusion



第九章 惯性约束

1. 证明：(1) 单位体积的能量（即能量密度）与压强具有相同的量纲。(2) $1 \text{ J/m}^3 = 1 \text{ Pa}$ 。
2. DT 燃料的状态方程为 $p = 2n_e T$ ，试给出燃料等温声速的表达式。燃料半径为 $60 \text{ }\mu\text{m}$ ，燃料的温度为 5 keV ，试估计燃料解体的特征时间。

$$\frac{[J]}{[m^3]} = \frac{[N \cdot m]}{[m^3]} = \frac{[N]}{[m^2]} = [Pa]$$

$$\tau \sim \frac{R_f}{C_s} \sim \frac{R_f}{\sqrt{T/m}} \sim \frac{6 \times 10^{-5} m}{\sqrt{5 \times 10^3 \times 1.6 \times 10^{-19} / 10^{-27}}} \sim \frac{10^{-5}}{10^5} \sim 10^{10} s$$



习 题

第九章 惯性约束

1. 将常压下的氘氚冰绝热压缩至高密度，燃料的能量密度近似为

$$\epsilon[\text{J/g}] = 3.27 \times 10^5 \rho^{2/3}.$$

(a) 200 μg 氘氚冰压缩至 300g/cc，燃料的能量是多少？(b) 若这 200 μg 燃料的温度为 5keV，其能量是多少？

2. 假定氘氚燃料总质量为 200 μg ，其中热斑占 10%。点火要求热斑的温度为 $T = 5\text{keV}$ ，面密度为 $\rho r = 0.3\text{g/cm}^2$ 。求：(a) 热斑的质量密度；(b) 热斑的压强；(c) 热斑的能量。

3. 经过绝热压缩的氘氚冰，其压强与密度的关系近似为

$$p[\text{Mbar}] = 2.2\rho^{5/3}.$$

若绝热压缩后的氘氚冰与热斑压强相同，求：(a) 压缩后燃料的质量密度；(b) 若氘氚冰的质量为 180 μg ，那么压缩后这部分燃料的能量是多少？

$$\begin{aligned}
 1. \quad E &= m\epsilon = m \times 3.27 \times 10^5 \rho^{2/3} = 2.9 \times 10^3 \text{J} \\
 E &= \frac{3}{2} NT = \frac{3}{2} \frac{m_{DT}}{M_{DT, \text{mol}}} T \\
 &= \frac{3}{2} \frac{2 \times 10^{-4}}{2} \times 6.02 \times 10^{23} \times 5 \times 10^3 \times 1.6 \times 10^{-19} \\
 &= 7.224 \times 10^4 \text{J}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \rho &= \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi(\rho r)^3}{m}} = 75.2 \text{ g/cm}^3 \\
 p &= 2nT = 2 \frac{\rho}{m} T = 2.9 \times 10^{10} \text{ Mpa} \\
 E &= 4.84 \times 10^5 \frac{(\rho r)^3}{\rho^2} T = 1.16 \times 10^4 \text{ J}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad p &= 2.2\rho^{5/3} = 2nT = 2 \frac{\rho}{m_{DT}} T, T = 5\text{keV}, \rho \sim 10^3 \text{ g/cc} \\
 E &= \frac{3}{2} pV = \frac{3}{2} p \frac{m_{DT}}{\rho} = \frac{3}{2} \times 2.2 \times 10^5 \rho^{5/3} \frac{m_{DT}}{\rho} \sim 10^2 \text{ J}
 \end{aligned}$$



习 题

第九章 惯性约束

1. 在中心点火方案中，将主燃料的简化为质量为 M 的无限薄球壳。在烧蚀压的驱动下，主燃料内爆速度达到峰值 V_{imp} 时燃料的半径为 R_0 ，热斑燃料的压强为 p_0 ，密度为 ρ_0 。此后，激光脉冲结束。假设热斑燃料在内爆过程中近似满足绝热条件 $p\rho^{-5/3} = \text{常数}$ 。试计算燃料半径与时间的关系。

2. 在美国 NIF 装置上的点火实验中，当靶丸的内爆速度达到峰值 380km/s 时，烧蚀层残余质量约为 0.13mg，主燃料质量为 0.13mg。

(1) 靶丸内爆的动能是多少？(2) 若靶丸内爆动能全部转变为聚变燃料的内能，在等压模型下，热斑的压强是多少？假定热斑的面密度为 $0.3\text{g}/\text{cm}^2$ ，热斑质量是主燃料的 8%。

$$1. \quad M \frac{d^2 R}{dt^2} = 4\pi R^2 p$$

$$M = \rho R^3 = M_0 = \rho R_0^3 \quad p = p_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{-\gamma}$$

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = CR^\alpha \quad C = \frac{4\pi p_0 R_0^{3\gamma}}{M} \quad \alpha = 2 - 3\gamma$$

$$\left. \frac{dR}{dt} \right|_{R=R_0} = V_{imp}$$

$$2. \quad E_k = \frac{1}{2} m V^2 \sim 1.88 \times 10^7 J$$

$$m_{hot} = \rho_h V_h = \frac{4\pi(\rho_h r_h)^3}{3\rho_h^2}, \rho_h = 2.88 \times 10^{-5} m$$

$$E_k = E_{th} = \frac{3}{2} n T V = 2\pi \rho_h^3 p_h$$



Homework 20230510

习 题

第十章 一维不定常流

1. 利用连续性方程(5),由动量守恒方程(6)推导出欧拉方程(7)。【方程编号请参考课件】

2. 结合连续性方程(5)和无外力的动量守恒方程(6),由能量守恒方程(11)推导出方程(13)。

3. 高温气体中辐射起重要作用。假定系统处于热平衡态,气体中的辐射为黑体辐射。此时系统状态方程为 $p = nT + aT^4/4$, 焓为

$$s = \frac{1}{m} \ln(T^{3/2}/n) + \frac{1}{nm} aT^3, \text{ 这里 } T \text{ 是系统温度, } n \text{ 是气体的粒子数密度, } m \text{ 是粒子的质量, } a = 4\pi^2/45h^3c^3. \text{ 求系统的绝热声速。}$$

4. 在一维柱对称情况下引入拉格朗日坐标

$$m = 2\pi \int_0^r \rho(r',t) r' dr'$$

其中 $\rho(r,t)$ 是流体的密度。写出一维柱对称情况下理想流体力学方程组的拉格朗日形式。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) + \nabla p &= \nabla \cdot (\vec{a} \vec{b}) = (\nabla \cdot \vec{a}) \vec{b} + \vec{a} \cdot (\nabla \vec{b}) \\ \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \vec{u} \vec{u} + \rho \nabla \cdot \vec{u} \vec{u} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla p &= 0 \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (A \vec{a}) = A(\nabla \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\nabla A)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \epsilon \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \epsilon + p \right) \vec{u} \right) &= \\ \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + & \\ \vec{u} \cdot \epsilon \nabla \rho + \vec{u} \cdot \rho \nabla \epsilon + \vec{u} \cdot \nabla p + \vec{u} \cdot \left(\frac{1}{2} u^2 \nabla \rho \right) + \vec{u} \cdot (\rho u \nabla u) + & \\ \frac{1}{2} \rho u^2 \nabla \cdot \vec{u} + \rho \epsilon \nabla \cdot \vec{u} + p \nabla \cdot \vec{u} & \\ = \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \epsilon \right) + p \nabla \cdot \vec{u} - \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \rho \right) & \\ = \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \epsilon \right) - \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho \right) = 0 & \end{aligned}$$

$$\rho \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \epsilon \right] - \frac{p}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho \right] = 0. \quad (13)$$



习 题

第十章 一维不定常流

1. 利用连续性方程(5),由动量守恒方程(6)推导出欧拉方程(7)。【方程编号请参考课件】

2. 结合连续性方程(5)和无外力的动量守恒方程(6),由能量守恒方程(11)推导出方程(13)。

3. 高温气体中辐射起重要作用。假定系统处于热平衡态,气体中的辐射为黑体辐射。此时系统状态方程为 $p = nT + aT^4/4$, 熵为

$$s = \frac{1}{m} \ln(T^{3/2}/n) + \frac{1}{nm} aT^3, \text{ 这里 } T \text{ 是系统温度, } n \text{ 是气体的粒子数密度, } m \text{ 是粒子的质量, } a = 4\pi^2/45h^3c^3. \text{ 求系统的绝热声速。}$$

4. 在一维柱对称情况下引入拉格朗日坐标

$$m = 2\pi \int_0^r \rho(r',t) r' dr'$$

其中 $\rho(r,t)$ 是流体的密度。写出一维柱对称情况下理想流体力学方程组的拉格朗日形式。

3.

$$\rho = mn, \quad p = \frac{\rho T}{m} + \frac{aT^4}{4}, \quad s = \frac{1}{m} \ln\left(\frac{mT^{3/2}}{\rho}\right) + \frac{aT^3}{\rho} = const.$$

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{T}{m} + \frac{\rho}{m} \frac{dT}{d\rho} + aT^3 \frac{dT}{d\rho}}$$

$$ds = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{2mT} + \frac{3aT^2}{\rho}\right) dT = \left(\frac{1}{m\rho} + \frac{aT^3}{\rho^2}\right) d\rho \Rightarrow \frac{dT}{d\rho} = \frac{2T(\rho + amT^3)}{3\rho(\rho + 2amT^3)}$$

$$c_s = \sqrt{\frac{T}{m} + \frac{2T(\rho + amT^3)^2}{3m\rho(\rho + 2amT^3)}} = \sqrt{\frac{T}{m} \left(1 + \frac{2(n + aT^3)^2}{3n(n + 2aT^3)}\right)}$$



习 题

第十章 一维不定常流

1. 利用连续性方程(5),由动量守恒方程(6)推导出欧拉方程(7)。【方程编号请参考课件】

2. 结合连续性方程(5)和无外力的动量守恒方程(6),由能量守恒方程(11)推导出方程(13)。

3. 高温气体中辐射起重要作用。假定系统处于热平衡态,气体中的辐射为黑体辐射。此时系统状态方程为 $p = nT + aT^4/4$, 熵为

$$s = \frac{1}{m} \ln(T^{3/2}/n) + \frac{1}{nm} aT^3, \text{ 这里 } T \text{ 是系统温度, } n \text{ 是气体的粒子数密度, } m \text{ 是粒子的质量, } a = 4\pi^2/45h^3c^3. \text{ 求系统的绝热声速。}$$

4. 在一维柱对称情况下引入拉格朗日坐标

$$m = 2\pi \int_0^r \rho(r',t)r'dr'$$

其中 $\rho(r,t)$ 是流体的密度。写出一维柱对称情况下理想流体力学方程组的拉格朗日形式。

4.

$$m = 2\pi \int_0^r \rho(r',t)r'dr',$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = 2\pi \int_0^r \frac{\partial \rho}{\partial t} r' dr' = -2\pi \int_0^r \frac{\partial(\rho u r')}{\partial r'} dr' = -2\pi \rho u r$$

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 2\pi \rho r, \quad \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial m}{\partial r} \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \tau} = 2\pi \rho r \frac{\partial}{\partial m}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial t} \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} = -2\pi \rho u r \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial m} (2\pi u r)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -2\pi r \frac{\partial p}{\partial m}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = 0$$



Homework 20230515

$$\pi_{ik} = -\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) - \zeta \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik},$$

习 题

第十章 一维不定常流

1. 证明, 当流体以角速度 Ω 做整体旋转, 即流速为 $\mathbf{u} = \Omega \times \mathbf{r}$ 时, 粘滞应力张量 $\pi_{ik} = 0$ 。

2. 利用连续性方程和纳维尔-斯托克斯方程, 将非理想流体的能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \epsilon \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho h \right) \mathbf{u} + \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{u} - \kappa \nabla T \right] = 0$$

转化为关于熵的方程

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s \right) = -\pi_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T).$$

$$(58) \quad \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + (\zeta + \eta/3) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{F}. \quad (59)$$

$$T ds = d\epsilon + pdV, \quad Ts = \epsilon + pV = h$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \epsilon \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho h \right) \vec{u} + \vec{\Pi} \cdot \vec{u} - \kappa \nabla T \right) =$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho Ts - p \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho Ts \right) \vec{u} + \vec{\Pi} \cdot \vec{u} - \kappa \nabla T \right) =$$

$$= \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + Ts \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho s \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} +$$

$$\frac{1}{2} \rho u^2 \nabla \cdot \vec{u} + \rho Ts \nabla \cdot \vec{u} +$$

$$\vec{u} \cdot \left(\frac{1}{2} u^2 \nabla \rho + \rho u \nabla u + Ts \nabla \rho + T \rho \nabla s + \rho s \nabla T \right)$$

$$+ \vec{u} \cdot \nabla \cdot (\vec{\Pi}) + \vec{\Pi} \cdot \nabla \cdot \vec{u} - \nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$

$$= \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla s \right) + \rho s \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p \right) + \vec{\Pi} \cdot \nabla \cdot \vec{u} - \nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) s = -\pi_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (66)$$



习 题

第十章 一维不定常流

1. 利用经典理想气体状态方程，证明黎曼不变量有如下形式，

$$r = \frac{c}{\gamma-1} + \frac{u}{2}, s = \frac{c}{\gamma-1} - \frac{u}{2}.$$

2. 证明，经典理想气体具有如下性质，

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0.$$

3. 证明，对于一维平面等熵流，将自变量由 (x, t) 变换为黎曼不变量 (r, s) 的雅克比行列式为

$$\begin{vmatrix} \partial r / \partial x & \partial r / \partial t \\ \partial s / \partial x & \partial s / \partial t \end{vmatrix} = 2c \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x}.$$

4. 对于一维平面等熵流问题，若黎曼不变量 (r, s) 不是常数，我们可以黎曼不变量 (r, s) 为自变量， (x, t) 为待求函数。证明时间 t 满足如下二阶线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r \partial s} + \frac{1}{2c_s} \frac{d \ln(c_s \rho)}{d \ln \rho} \left(\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial t}{\partial s} \right) = 0.$$

1.

$$p\rho^{-\gamma} = \text{const.} \quad dp = \frac{\gamma p}{\rho} d\rho \quad c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)^{1/2} = (\text{const.} \gamma \rho^{\gamma-1})^{1/2}$$
$$l = \int \frac{dp}{\rho c_s} = \int \frac{c_s}{\rho} d\rho = \frac{2}{\gamma-1} c_s$$

2.

$$pV^\gamma = \text{const.} \quad \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{V}{\gamma p} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial p} (V p^{-1}) = \frac{(1+\gamma)V}{\gamma^2 p^2}$$

3.

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -(u + c_s) \frac{\partial r}{\partial x}, \quad (107a)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -(u - c_s) \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (107b)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} (u + c_s) - \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} (u - c_s) = 2c_s \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x}$$



习 题

第十章 一维不定常流

1. 利用经典理想气体状态方程，证明黎曼不变量有如下形式，

$$r = \frac{c}{\gamma-1} + \frac{u}{2}, s = \frac{c}{\gamma-1} - \frac{u}{2}.$$

2. 证明，经典理想气体具有如下性质，

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0.$$

3. 证明，对于一维平面等熵流，将自变量由 (x, t) 变换为黎曼不变量 (r, s) 的雅克比行列式为

$$\begin{vmatrix} \partial r / \partial x & \partial r / \partial t \\ \partial s / \partial x & \partial s / \partial t \end{vmatrix} = 2c \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x}.$$

4. 对于一维平面等熵流问题，若黎曼不变量 (r, s) 不是常数，我们可以黎曼不变量 (r, s) 为自变量， (x, t) 为待求函数。证明时间 t 满足如下二阶线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r \partial s} + \frac{1}{2c_s} \frac{d \ln(c_s \rho)}{d \ln \rho} \left(\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial t}{\partial s} \right) = 0.$$

$$4. \quad \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_r = (u + c_s) \left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)_r, \quad (139)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_s = (u - c_s) \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_s. \quad (140)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial r} = \frac{\partial(u + c_s)}{\partial r} \frac{\partial t}{\partial s} + (u + c_s) \frac{\partial^2 t}{\partial s \partial r}. \quad (141)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial r} = \frac{\partial(u - c_s)}{\partial s} \frac{\partial t}{\partial r} + (u - c_s) \frac{\partial^2 t}{\partial s \partial r}. \quad (142)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial s \partial r} + \frac{1}{2c_s} \left[\frac{\partial(u + c_s)}{\partial r} \frac{\partial t}{\partial s} - \frac{\partial(u - c_s)}{\partial s} \frac{\partial t}{\partial r} \right] = 0. \quad (143)$$

$$2r = l + u, 2s = l - u \quad l = \int \frac{c_s}{\rho} d\rho$$

$$2dr = dl + du = \frac{c_s}{\rho} d\rho + du = \frac{c_s}{\rho} \frac{d\rho}{dc_s} dc_s = \frac{d \ln \rho}{d \ln c_s} dc_s + du$$

$$2ds = \frac{d \ln \rho}{d \ln c_s} dc_s - du$$

$$du = dr - ds \quad dc_s = \frac{d \ln c_s}{d \ln \rho} (dr + ds)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -1, \frac{\partial u}{\partial r} = 1 \quad \frac{\partial c_s}{\partial s} = \frac{\partial c_s}{\partial r} = \frac{d \ln c_s}{d \ln \rho}$$



习 题

第十章 一维不定常流

1. 假定一维无限长圆柱形管道的一端由活塞塞住。 $t < 0$ 时，活塞静止，位于 $x=0$ 处， $x > 0$ 的管道内充满压强为 p_0 、声速为 c_{s0} 的经典理想气体；从 $t=0$ 时刻，活塞开始向 $x < 0$ 的方向以速度 $-U$ 作匀速运动，且 $U < 2c_{s0}/(\gamma-1)$ 。求 $t > 0$ 后管道内的流体运动。

2. 假定一维无限长圆柱形管道的一端由活塞塞住。 $t < 0$ 时，活塞静止，位于 $x=0$ 处， $x > 0$ 的管道内则压强为 p_0 、声速为 c_{s0} 的经典理想气体。从 $t=0$ 到 $t=\tau_1$ ，活塞向 $x < 0$ 的方向以速度 $-U_1$ 作匀速运动；从 $t=\tau_1$ 开始，活塞向 $x < 0$ 的方向以速度 $-U_2$ 作匀速运动，且 $U_2 > U_1$ 、 $U_1 + U_2 < 2c_{s0}/(\gamma-1)$ 。求 $t > 0$ 后管道内的流体运动。

3. 假定一维无限长圆柱形管道的一端由活塞塞住。 $t < 0$ 时，活塞静止，位于 $x=0$ 处， $x > 0$ 的管道内则充满压强为 p_0 、声速为 c_{s0} 的经典理想气体； $t > 0$ 后，活塞开始向 $x < 0$ 的方向作匀加速运动，其加速度为 a 。求 $t > 0$ 后管道内的流体运动，并求活塞与气体发生脱离的时刻。

1.

$$s = \frac{c_s}{\gamma - 1} - \frac{u}{2} = \text{const.} \quad c_s = c_{s0} + \frac{\gamma - 1}{2} u$$

活塞面处，流体速度等于活塞速度 $u=-U$ ，活塞坐标

$$x(t) = \int -U dt = -Ut$$

简单波方程中替换成活塞速度

$$\begin{aligned} f(u) = x(t) - (u + c_s)t &\rightarrow f(U) = -Ut - (-U + c_s)t \\ f(U) &= -Ut - \left(-U + c_{s0} - \frac{\gamma - 1}{2} U\right)t \\ &= -\left(c_{s0} - \frac{(\gamma - 1)}{2} U\right)t \end{aligned}$$

带入简单波方程 $x = (u + c_s)t + f(u)$ ，
替换回流体速度，得到流体运动

$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &= c_{s0} + \frac{\gamma + 1}{2} u + \frac{f(u)}{t} = c_{s0} + \frac{\gamma + 1}{2} u - c_{s0} - \frac{\gamma - 1}{2} u \\ x &= ut \end{aligned}$$



习题

第十章 一维不定常流

1. 假定一维无限长圆柱形管道的一端由活塞塞住。 $t < 0$ 时, 活塞静止, 位于 $x=0$ 处, $x > 0$ 的管道内充满压强为 p_0 、声速为 c_{s0} 的经典理想气体; 从 $t=0$ 时刻, 活塞开始向 $x < 0$ 的方向以速度 $-U$ 作匀速运动, 且 $U < 2c_{s0}/(\gamma-1)$ 。求 $t > 0$ 后管道内的流体运动。

2. 假定一维无限长圆柱形管道的一端由活塞塞住。 $t < 0$ 时, 活塞静止, 位于 $x=0$ 处, $x > 0$ 的管道内则压强为 p_0 、声速为 c_{s0} 的经典理想气体。从 $t=0$ 到 $t=\tau_1$, 活塞向 $x < 0$ 的方向以速度 $-U_1$ 作匀速运动; 从 $t=\tau_1$ 开始, 活塞向 $x < 0$ 的方向以速度 $-U_2$ 作匀速运动, 且 $U_2 > U_1$ 、 $U_1 + U_2 < 2c_{s0}/(\gamma-1)$ 。求 $t > 0$ 后管道内的流体运动。

3. 假定一维无限长圆柱形管道的一端由活塞塞住。 $t < 0$ 时, 活塞静止, 位于 $x=0$ 处, $x > 0$ 的管道内则充满压强为 p_0 、声速为 c_{s0} 的经典理想气体; $t > 0$ 后, 活塞开始向 $x < 0$ 的方向作匀加速运动, 其加速度为 a 。求 $t > 0$ 后管道内的流体运动, 并求活塞与气体发生脱离的时刻。

2.

活塞坐标

$$x(t) = \int -U_1 dt = -U_1 t, 0 < t < \tau_1$$

$$= -U_1 \tau_1 + \int_{\tau_1} -U_2 dt = -U_1 \tau_1 - U_2 (t - \tau_1) = (U_2 - U_1) \tau_1 - U_2 t, t \geq \tau_1$$

简单波方程中替换成活塞速度

$$f(u) = -\left(c_{s0} - \frac{(\gamma-1)}{2} U_1\right) t, 0 < t < \tau_1$$

$$= (U_2 - U_1) \tau_1 - \left(c_{s0} - \frac{(\gamma-1)}{2} U_2\right) t, t \geq \tau_1$$

带入简单波方程 $x = (u + c_s)t + f(u)$,

替换回流体速度, 得到流体运动

$$x = ut, 0 < t < \tau_1$$

$$= (U_2 - U_1) \tau_1 + ut, t \geq \tau_1$$

3.

活塞坐标

$$x(t) = \int -at dt = -\frac{1}{2} at^2, U = -at, t = -\frac{U}{a}$$

简单波方程中替换成活塞速度

$$f(u) = -\frac{1}{2} at^2 - \left(-at + c_{s0} - \frac{\gamma-1}{2} at\right) t = \frac{\gamma U^2}{2a} + c_{s0} \frac{U}{a}$$

替换回流体速度, 得到流体运动

$$x = \left(c_{s0} + \frac{\gamma+1}{2} u\right) t + \frac{\gamma u^2}{2a} + c_{s0} \frac{u}{a}$$

脱离时刻

$$t = \frac{2c_{s0}}{a(\gamma-1)}$$



习 题

第十章 一维非定常流

1. 未受冲击的流体处于静止状态，密度为 ρ_0 ，压强为 p_0 。实验中测量到激波在流体中的速度为 U_s ，冲击后流体的流速为 U_p 。求冲击后流体的压强和密度。

2. 冲击前后，流体的状态(流速、压强、比容、内能)分别为 $u_0, p_0, V_0, \varepsilon_0$ 和 $u_1, p_1, V_1, \varepsilon_1$ 。证明

$$u_1 - u_0 = \sqrt{(p_1 - p_0)(V_0 - V_1)},$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)(V_0 - V_1).$$

3. 利用经典理想气体的状态方程 $\varepsilon = pV/(\gamma - 1)$ 以及习题2中的第二个方程，证明

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_0}{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_0}.$$

4. 在经典理想气体中，已知激波面两侧的流速分别为 u_0 和 u_1 ，求激波传播的速度 U_s 。【参考第十章课件 II 中方程(44)的推导】

5. 已知经典理想气体的熵为

$$s = \frac{c_p}{m} \ln(p\rho^{-\gamma}) + \text{常数},$$

在弱激波情况下 $(V_0 - V_1)/V_0 \ll 1$ ，证明激波面两侧熵的变化是比容差的三阶小量，

$$\Delta s \approx \frac{c_p}{m} \frac{\gamma^2 - 1}{12\gamma^2} \left(\frac{V_0 - V_1}{V_0} \right)^3.$$

$$1. \quad \rho_1 v_1 = \rho_0 v_0, \quad \rho_1 (U_p - U_s) = \rho_0 (0 - U_s), \quad \rho_1 = \frac{U_s}{U_s - U_p} \rho_0$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_0 + \rho_0 v_0^2, \quad p_1 = p_0 + \rho_0 (0 - U_s)^2 - \rho_1 (U_p - U_s)^2$$

$$p_1 = p_0 + \rho_0 U_s U_p$$

2.

$$\rho_1 v_1 = \rho_0 v_0 = j, \quad (22a)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_0 + \rho_0 v_0^2, \quad (22b)$$

$$v_1^2/2 + h_1 = v_0^2/2 + h_0. \quad (22c)$$

引入比容 $v = 1/\rho$ ，由关系式(22a)，流速可以表示为

$$v_0 = jV_0, \quad v_1 = jV_1$$

将之代入到(22b)，有

$$p_1 + j^2 V_1 = p_0 + j^2 V_0.$$

那么质量流 j 为

$$j^2 = -\frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0}. \quad (24)$$

由方程(24)以及(22a)，可以将激波面两侧的流速用压强和比容联系起来，

$$v_0^2 = V_0^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}, \quad (25a)$$

$$v_1^2 = V_1^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}. \quad (25b)$$

利用方程(25)，容易求得激波面两侧流体的流速差，

$$u_1 - u_0 = \sqrt{(p_1 - p_0)(V_0 - V_1)}. \quad (26)$$

将(25)代入(22c)，可以得到激波面两侧的焓的变化，

$$h_1 - h_0 = \frac{1}{2}(p_1 - p_0)(V_0 + V_1) \quad (27)$$

内能的变化则为，

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)(V_0 - V_1). \quad (28)$$



习 题

第十章 一维非定常流

1. 未受冲击的流体处于静止状态，密度为 ρ_0 ，压强为 p_0 。实验中测量到激波在流体中的速度为 U_s ，冲击后流体的流速为 U_p 。求冲击后流体的压强和密度。

2. 冲击前后，流体的状态(流速、压强、比容、内能)分别为 $u_0, p_0, V_0, \varepsilon_0$ 和 $u_1, p_1, V_1, \varepsilon_1$ 。证明

$$u_1 - u_0 = \sqrt{(p_1 - p_0)(V_0 - V_1)},$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)(V_0 - V_1).$$

3. 利用经典理想气体的状态方程 $\varepsilon = pV/(\gamma - 1)$ 以及习题2中的第二个方程，证明

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_0}{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_0}.$$

4. 在经典理想气体中，已知激波面两侧的流速分别为 u_0 和 u_1 ，求激波传播的速度 U_s 。【参考第十章课件 II 中方程(44)的推导】

5. 已知经典理想气体的熵为

$$s = \frac{c_p}{m} \ln(p\rho^{-\gamma}) + \text{常数},$$

在弱激波情况下 $(V_0 - V_1)/V_0 \ll 1$ ，证明激波面两侧熵的变化是比容差的三阶小量，

$$\Delta s \approx \frac{c_p}{m} \frac{\gamma^2 - 1}{12\gamma^2} \left(\frac{V_0 - V_1}{V_0} \right)^3.$$

3.

$$\frac{p_1 V_1 - p_0 V_0}{\gamma - 1} = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)(V_0 - V_1)$$

$$\frac{2}{\gamma - 1}(p_1 V_1 - p_0 V_0) = (p_0 + p_1)V_0 - (p_0 + p_1)V_1$$

$$\left(\frac{2}{\gamma - 1} p_1 + p_0 + p_1 \right) V_1 = \left(p_0 + p_1 + \frac{2}{\gamma - 1} p_0 \right) V_0$$

4.

利用激波关系式

$$\frac{1}{2}v_0^2 + h_0 = \frac{1}{2}v_1^2 + h_1,$$

以及理想气体状态方程

$$h = \frac{c^2}{\gamma - 1},$$

我们有

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma - 1} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{\gamma - 1} = c_*^2. \quad (38)$$

$$h = \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma p V}{\gamma - 1} = pV + \frac{pV}{\gamma - 1}$$

$$c_*^2 \rho_0 = \frac{1}{2} \left(\rho_0 v_0^2 + p_0 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} p_0 \right), \quad (39a)$$

$$c_*^2 \rho_1 = \frac{1}{2} \left(\rho_1 v_1^2 + p_1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} p_1 \right), \quad (39b)$$

利用激波关系式

$$\rho_0 v_0^2 + p_0 = \rho_1 v_1^2 + p_1$$

将方程组(39)中的两式相减，有

$$c_*^2(\rho_1 - \rho_0) = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (p_1 - p_0)$$

又

$$v_1 v_0 = j^2 V_1 V_0 = -\frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0} V_1 V_0 = \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0},$$

我们得

$$c_*^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} v_0 v_1. \quad (40)$$

将(40)代入(38)，于是我们得到如下方程

$$\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{c_0^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{c_1^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} v_0 v_1. \quad (41)$$

将 $v_0 = u_0 - U_s$ ， $v_1 = (u_1 - u_0) + (u_0 - U_s)$ 代入方程(41)，整理后可以得到关于激波速度 U_s 的代数方程

$$(U_s - u_0)^2 - \frac{\gamma + 1}{2}(u_1 - u_0)(U_s - u_0) = c_0^2. \quad (42)$$



习 题

第十章 一维非定常流

1. 未受冲击的流体处于静止状态，密度为 ρ_0 ，压强为 p_0 。实验中测量到激波在流体中的速度为 U_s ，冲击后流体的流速为 U_p 。求冲击后流体的压强和密度。

2. 冲击前后，流体的状态(流速、压强、比容、内能)分别为 $u_0, p_0, V_0, \varepsilon_0$ 和 $u_1, p_1, V_1, \varepsilon_1$ 。证明

$$u_1 - u_0 = \sqrt{(p_1 - p_0)(V_0 - V_1)},$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)(V_0 - V_1).$$

3. 利用经典理想气体的状态方程 $\varepsilon = pV/(\gamma-1)$ 以及习题2中的第二个方程，证明

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_0}{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_0}.$$

4. 在经典理想气体中，已知激波面两侧的流速分别为 u_0 和 u_1 ，求激波传播的速度 U_s 。【参考第十章课件 II 中方程(44)的推导】

5. 已知经典理想气体的熵为

$$s = \frac{c_v}{m} \ln(p\rho^{-\gamma}) + \text{常数},$$

在弱激波情况下 $(V_0 - V_1)/V_0 \ll 1$ ，证明激波面两侧熵的变化是比容差的三阶小量，

$$\Delta s \approx \frac{c_p}{m} \frac{\gamma^2 - 1}{12\gamma^2} \left(\frac{V_0 - V_1}{V_0} \right)^3.$$

$$5. \quad \frac{p_1}{p_0} = \frac{(\gamma+1)V_0 - (\gamma-1)V_1}{(\gamma+1)V_1 - (\gamma-1)V_0}, \quad (32a)$$

$$\Delta s = s - s_0 = \frac{c_v}{m} \ln \left(\frac{p\rho^{-\gamma}}{p_0\rho_0^{-\gamma}} \right) = \frac{c_v}{m} \ln \left(\frac{(\gamma+1) - (\gamma-1)\frac{V}{V_0}}{(\gamma+1)\frac{V}{V_0} - (\gamma-1)} \left(\frac{V}{V_0} \right)^\gamma \right)$$

$$\frac{V_0 - V_1}{V_0} \ll 1, \quad \frac{V_1}{V_0} \sim 1, \quad \alpha = \frac{V_1}{V_0}$$

$$\Delta s = \frac{c_v}{m} \ln \left(\frac{(\gamma+1)\alpha^\gamma - (\gamma-1)\alpha^{1+\gamma}}{(\gamma+1)\alpha - (\gamma-1)} \right)$$

$$= \frac{c_v}{m} \left(\ln \left((\gamma+1)\alpha^\gamma \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\alpha \right) \right) - \ln((\gamma+1)\alpha - (\gamma-1)) \right)$$

$$= \frac{c_v}{m} \left(\ln(\gamma+1) + \gamma \ln \alpha + \ln \left(\frac{2 + (\gamma-1)\beta}{\gamma+1} \right) - \ln(2 - (\gamma+1)\beta) \right),$$

$$\alpha = \frac{V_0 - V_0 + V_1}{V_0} = 1 - \beta, \quad \beta = \frac{V_0 - V_1}{V_0} \sim 0$$

$$= \frac{c_v}{m} \left(\gamma \ln(1 - \beta) + \ln \left(\frac{2 + (\gamma-1)\beta}{2 - (\gamma+1)\beta} \right) \right)$$

$$= \frac{c_v}{m} \left(\gamma \ln(1 - \beta) + \ln \left(\frac{1 + \frac{(\gamma-1)}{2}\beta}{1 - \frac{(\gamma+1)}{2}\beta} \right) \right)$$

$$\frac{c_v}{m} \left(\gamma \ln(1 - \beta) + \ln \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\beta \right) + \ln \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\beta \right) \right)$$

$$= \frac{c_v}{m} \left(\gamma \left(-\beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} \right) + \left(\frac{\gamma-1}{2}\beta - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma-1}{2}\beta \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma-1}{2}\beta \right)^3 \right) + \dots \right)$$

$$\left(-\frac{\gamma-1}{2}\beta - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma-1}{2}\beta \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma-1}{2}\beta \right)^3 \right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$



习 题

第十章 一维不定常流

1. 证明：对于弱激波，熵增 Δs 与激波面两侧压强差 Δp 之间的关系为

$$\Delta s = \frac{1}{12T_0} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{s_0} \Delta p^3$$

2. 证明：对于理想气体中的弱激波，激波面后的绝热声速可以表示为

$$c = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}(u-u_0) + \dots$$

其中省略号...表示 $(u-u_0)^3$ 及其以上的高阶小量。

3. 证明：对于理想气体中的弱激波，激波面传播的速度与激波面两侧的流速和声速有如下近似关系成立，

$$U_s = \frac{u_0 + c_0 + u_1 + c_1}{2} + \frac{(u_1 + c_1 - u_0 - c_0)^2}{8c_0}$$

1.

1.1.

$$\begin{aligned} \varepsilon(s_1, V_1) - \varepsilon(s_0, V_0) &= \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right)_V \Delta s + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_s \Delta V \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial V^3} \right)_s \Delta V^3. \end{aligned} \quad (55)$$

利用热力学微分关系式 $d\varepsilon = Tds - pdV$ ，有

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right)_V = T, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_s = -p,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(s_1, V_1) - \varepsilon(s_0, V_0) &= T_0 \Delta s - p_0 \Delta V \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \Delta V^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^3. \end{aligned} \quad (56)$$

1.2.

$$\begin{aligned} p_1(V_1, s_1) - p_0(V_0, s_0) &= \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^2, \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_0 &= \frac{1}{2}(p_0 + p_1)(V_0 - V_1) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = -p_0 \Delta V - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \Delta V^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^3. \quad (57)$$

1.3.

比较方程(56)和(57)，我们有

$$\Delta s = -\frac{1}{12T_0} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^3. \quad (58)$$

这个结果表明，对于弱激波，熵的变化是 ΔV 的三阶小量。若我们考察弱激波两侧焓的变化，则可以得到如下关系式，

$$\Delta s = \frac{1}{12T_0} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s \Delta p^3. \quad (59)$$



习题

第十章 一维不定常流

1. 证明：对于弱激波，熵增 Δs 与激波面两侧压强差 Δp 之间的关系为

$$\Delta s = \frac{1}{12T_0} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{s_0} \Delta p^3$$

2. 证明：对于理想气体中的弱激波，激波面后的绝热声速可以表示为

$$c = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}(u-u_0) + \dots$$

其中省略号...表示 $(u-u_0)^3$ 及其以上的高阶小量。

3. 证明：对于理想气体中的弱激波，激波面传播的速度与激波面两侧的流速和声速有如下近似关系成立，

$$U_s = \frac{u_0 + c_0 + u_1 + c_1}{2} + \frac{(u_1 + c_1 - u_0 - c_0)^2}{8c_0}$$

2.

$$\frac{s}{c} - \frac{u}{2} = \frac{c_0}{\gamma-1} - \frac{u_0}{2} + \Delta s$$

$$c = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}(u-u_0) + \Delta s, \quad \Delta s = \frac{1}{12T_0} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^3$$

$$u = -jV, \quad u_0 = -jV_0, \quad \Delta V = V_0 - V = (u-u_0)/j$$

3.

$$c_1 = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}(u_1-u_0), \quad \frac{\gamma+1}{4} = \frac{c_1-c_0}{2(u_1-u_0)} + \frac{1}{2}$$

由此我们得到激波传播速度与流速差 u_1-u_0 以及未冲击流体绝热声速之间的关系，

$$U_s = u_0 + \frac{\gamma+1}{4}(u_1-u_0) + \sqrt{c_0^2 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}(u_1-u_0)^2}. \quad (44)$$

$$U_s = u_0 + \frac{c_1-c_0}{2} + \frac{u_1-u_0}{2} + c_0 \sqrt{1 + \left(\frac{c_1-c_0+u_1-u_0}{2c_0} \right)^2}$$
$$\simeq \frac{c_0+c_1+u_0+u_1}{2} - c_0 + c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(u_1+c_1-u_0-c_0)^2}{4c_0^2} \right)$$

$$\left(\frac{c_1-c_0+u_1-u_0}{2c_0} \right)^2 \sim 0 \text{ 小量}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{c_1-c_0+u_1-u_0}{2c_0} \right)^2} \text{ 泰勒展开}$$

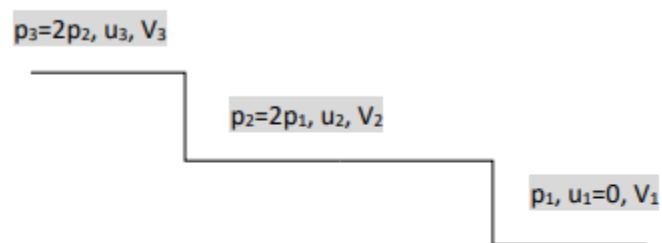


Homework 20230531

习题

第十章 一维不定常流

1. 如图所示，在单原子分子理想气体中有两支激波由左至右传播，两支激波的强度分别为 $p_3 = 2p_2$ ， $p_2 = 2p_1$ ，且 $u_1 = 0$ 。(a) 证明：两支激波融合瞬间形成的间断面会演化为一支激波、一支稀疏波以及接触间断；(b) 间断面演化之后，求激波面下游侧的比容(用 v_1 表示)。



要产生一支激波和一支稀疏波，必然有

$$p_1 < p_3 = p'_3 < p_2.$$

对于激波，有

$$u_1 - u_3 = \sqrt{(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)}.$$

对于稀疏波，有

$$u_2 - u'_3 = \int_{p'_3}^{p_2} \frac{dp}{c_s \rho}.$$

那么有

$$u_1 - u_2 = \sqrt{(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)} - \int_{p_3}^{p_2} \frac{dp}{c_s \rho}.$$

$$p_3 = 2p_2 = 4p_1, \quad p_3 > p_2 > p_1$$

$$u_1 - u_2 = -u_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}$$

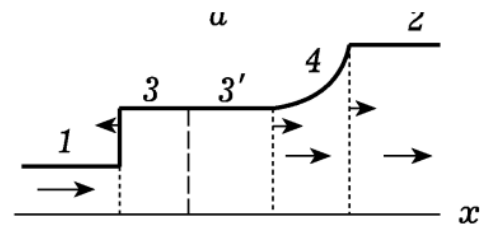
$$u_3 - u_2 = \int_{p_2}^{p_3} \frac{dp}{c_s \rho} = \frac{2c_s}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_3} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right)$$

由于 $p_1 < p_3 < p_2$ ，于是我们有

$$- \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{c_s \rho} < u_1 - u_2 < \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V^*)}.$$

其中 V^* 是 $p_3 = p_2$ 时，冲击后流体的密度，为

$$\frac{V^*}{V_1} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}.$$





习 题

第十一章 烧蚀与内爆

1. 估算电子-离子碰撞频率：电子密度为 $n_e = 5 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ ，电子温度为 $T_e = 2.5 \text{ keV}$ ，电子质量为 $m_e = 9.11 \times 10^{-28} \text{ g}$ ，电子电荷为 $e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ statcoulomb}$ ，离子电荷取为 $Z = 2$ ，频率 ω 就取为朗缪尔率 $\omega = \omega_{pe}$ 。 $\gamma = 1.781$ 是欧拉常数。

2. 估算 $0.35 \mu\text{m}$ 激光在等离子体中的逆韧致吸收长度 $l_{IB} = 1/\kappa_{IB}$ 。等离子体参数为：电子密度为 $n_e = 2 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ ，电子温度 $T_e = 2.5 \text{ keV}$ ，电子质量为 $m_e = 9.11 \times 10^{-28} \text{ g}$ ，电子电荷为 $e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ statcoulomb}$ ，离子电荷为 $Z = 2$ 。

3. 处于失重状态的小液滴在液体表面张力的作用下呈完美球形。若有扰动，液滴球将发生振荡。试利用 Π 定量和量纲分析，给出液滴球振荡频率 f 与液体密度 ρ 、液体表面张力系数 T_s ，以及小球的半径 R 之间的依赖关系。其中表面张力系数的量纲为 $[T_s] = MT^{-2}$ 。

在厘米-克-秒单位制 (CGS制) 里，静库仑 (statC) 或 (esu) 是电荷的物理单位。它是一种衍生出来的单位，表达为

- $1 \text{ statC} = 1 \text{ gcms} = 1 \text{ ergcm}$.

在国际单位制里，则采用库仑 (C) 为电荷的物理单位。转换公式为

- $1 \text{ C} = 2997924580 \text{ statC}$.

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{Z^2 e^4 n_i}{T_e^{3/2} m_e^{1/2}} \ln \frac{2^{5/2} T_e^{3/2}}{\gamma^{5/2} \omega Z e^2 m_e^{1/2}}. \quad (2)$$

$$n_e = n_i, e = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ C},$$

$$\omega = \omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 5 \times 10^{26} [\text{m}^{-3}] \times (1.602 \times 10^{-19} [\text{C}])^2}{9.11 \times 10^{-31} [\text{kg}]}} \approx 1.3304 \times 10^{10},$$

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{(2^2 \times (1.602 \times 10^{-19})^4 \times 5 \times 10^{26})}{2500 [\text{eV}]^{\frac{3}{2}} \times (9.11 \times 10^{-31})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\ln \left(\frac{\frac{5}{2} \times 2500^{\frac{3}{2}}}{1.781^{\frac{5}{2}} \times 1.3304 \times 10^{10} \times 2 \times (1.602 \times 10^{-19})^2 \times (9.11 \times 10^{-31})^{\frac{1}{2}}} \right) \approx 4.0282 \times 10^{-36}$$

2.

$$\kappa_{IB} = 2k_i = \frac{(n_e/n_c)\nu_{ei}}{c\sqrt{1-n_e/n_c}}. \quad (13)$$

$$n_c [\text{cm}^{-3}] = \frac{1.1 \times 10^{21}}{\lambda_{\mu\text{m}}^2}.$$

$$\omega = 8.4144 \times 10^9, \nu_{ei} = 1.6181 \times 10^{-36}, l_{IB} = \frac{1}{\kappa_{IB}} = 8.2038 \times 10^{45}$$

3.

$$f = \frac{1}{[T]}, \rho = \frac{[M]}{[L]^3}, T_s = \frac{[M]}{[T]^2}, R = [L], f = \rho^{a1} T_s^{a2} R^{a3}, a1 = -\frac{1}{2}, a2 = \frac{1}{2}, a3 = -\frac{3}{2}, f = \rho^{-\frac{1}{2}} T_s^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{3}{2}}$$



习题

第十一章 烧蚀与内爆

1. 估算电子-离子碰撞频率：电子密度为 $n_e = 5 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ ，电子温度为 $T_e = 2.5 \text{ keV}$ ，电子质量为 $m_e = 9.11 \times 10^{-28} \text{ g}$ ，电子电荷为 $e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ statcoulomb}$ ，离子电荷取为 $Z = 2$ ，频率 ω 就取为朗缪尔率 $\omega = \omega_{pe}$ 。 $\gamma = 1.781$ 是欧拉常数。

2. 估算 $0.35 \mu\text{m}$ 激光在等离子体中的逆韧致吸收长度 $l_{IB} = 1/\kappa_{IB}$ 。等离子体参数为：电子密度为 $n_e = 2 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ ，电子温度 $T_e = 2.5 \text{ keV}$ ，电子质量为 $m_e = 9.11 \times 10^{-28} \text{ g}$ ，电子电荷为 $e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ statcoulomb}$ ，离子电荷为 $Z = 2$ 。

3. 处于失重状态的小液滴在液体表面张力的作用下呈完美球形。若有扰动，液滴球将发生振荡。试利用 π 定量和量纲分析，给出液滴球振荡频率 f 与液体密度 ρ 、液体表面张力系数 T_s ，以及小球的半径 R 之间的依赖关系。其中表面张力系数的量纲为 $[T_s] = MT^{-2}$ 。

在厘米-克-秒单位制 (CGS制) 里，静库仑 (statC) 或 (esu) 是电荷的物理单位。它是一种衍生出来的单位，表达为

- $1 \text{ statC} = 1 \text{ gcms} = 1 \text{ ergcm}$.

在国际单位制里，则采用库仑 (C) 为电荷的物理单位。转换公式为

- $1 \text{ C} = 2997924580 \text{ statC}$.

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{Z^2 e^4 n_i}{T_e^{3/2} m_e^{1/2}} \ln \frac{2^{5/2} T_e^{3/2}}{\gamma^{5/2} \omega Z e^2 m_e^{1/2}}. \quad (2)$$

$$n_e = n_i, e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ statcoulomb},$$

$$\omega = \omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 5 \times 10^{20} [\text{cm}^{-3}] \times (4.8032 \times 10^{-10} [\text{statC}])^2}{9.11 \times 10^{-28} [\text{g}]}} \approx 1.2614 \times 10^{15},$$

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{(2^2 \times (4.8032 \times 10^{-10})^4 \times 5 \times 10^{20})}{2500 [\text{eV}]^2 \times (9.11 \times 10^{-28})^{1/2}}$$

$$\ln \left(\frac{\frac{5}{2^2} \times 2500^{\frac{3}{2}}}{1.781^{\frac{5}{2}} \times 1.2614 \times 10^{15} \times 2 \times (4.8032 \times 10^{-10})^2 \times (9.11 \times 10^{-28})^{\frac{1}{2}}} \right) \approx 4.7722 \times 10^{-6}$$

2.

$$\kappa_{IB} = 2k_i = \frac{(n_e/n_c)\nu_{ei}}{c\sqrt{1-n_e/n_c}}. \quad (13)$$

$$n_c [\text{cm}^{-3}] = \frac{1.1 \times 10^{21}}{\lambda_{\mu\text{m}}^2}.$$

$$\omega = \omega_{pe} = 7.978 \times 10^{14}, \nu_{ei} = 1.9262 \times 10^{-6}, l_{IB} = \frac{1}{\kappa_{IB}} = 6.8914 \times 10^{15}$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 5.3676 \times 10^{15}, \nu_{ei} = 1.8543 \times 10^{-6}, l_{IB} = \frac{1}{\kappa_{IB}} = 7.1586 \times 10^{45}$$

3.

$$f = \frac{1}{[T]}, \rho = \frac{[M]}{[L]^3}, T_s = \frac{[M]}{[T]^2}, R = [L], f = \rho^{a1} T_s^{a2} R^{a3}, a1 = -\frac{1}{2}, a2 = \frac{1}{2}, a3 = -\frac{3}{2}, f = \rho^{-\frac{1}{2}} T_s^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{3}{2}}$$



习 题

第十一章 烧蚀与内爆

1. 不考虑介质的流动，介质能量密度的演化方程为

$$\frac{\partial E}{\partial t} = a \nabla \cdot (E^m \nabla E).$$

无限均匀介质中，在 $t=0$ 时刻，于 $x=0$ 平面瞬间释放出面密度为 Q_0 的能量。求介质中能量密度的演化。【提示，与课件中的球对称例子不同，习题是一维平板模型】。

2. 估算功率密度为 $5 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$ 、波长为 $0.351 \mu\text{m}$ 的激光脉冲烧蚀固态 Be 所形成的等离子体的温度以及烧蚀压，假定激光的吸收效率为 50%。【Be 的核电荷数为 4，原子核质量数为 9，电子质量为 $m_e = 9.11 \times 10^{-28} \text{ g}$ ，电子电荷为 $e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ statcoulomb}$ 】。
3. 采用功率密度同为 $2 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$ ，但波长分别为 $0.53 \mu\text{m}$ 和 $0.35 \mu\text{m}$ 的激光辐照相同的固体低 Z 材料。估计烧蚀压之比大约有多少。

$$\xi = \frac{x}{(Q_0^m a t)^{\frac{1}{m+2}}}, \quad E = \left(\frac{Q_0^2}{a t}\right)^{\frac{1}{m+2}} f(\xi)$$

$$\ln E = \frac{2}{m+2} \ln Q_0 - \frac{1}{m+2} (\ln a + \ln t) + \ln f, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{m+2} \frac{E}{t} \frac{\partial E}{\partial f} = \frac{E}{f}$$

$$\ln \xi = \ln x - \frac{m}{m+2} \ln Q_0 - \frac{1}{m+2} (\ln a + \ln t), \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{m+2} \frac{\xi}{t} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\xi}{x}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{E \xi}{f x} \frac{df}{d\xi},$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E \xi}{f x} \frac{df}{d\xi} \right) = \left(\frac{\partial E}{\partial x} \frac{\xi}{f x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{E}{f x} - \frac{E \xi}{f^2 x} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{E \xi}{f x^2} \right) \frac{df}{d\xi} + \frac{E \xi}{f x} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{df}{d\xi} \right) = \frac{E \xi^2}{f x^2} \frac{d^2 f}{d\xi^2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(E^m \frac{\partial E}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{1}{m+2} \frac{E}{t} = a m E^{m-1} \left(\frac{\partial E}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + a E^m \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

$$f^m \frac{d^2 f}{d\xi^2} + m f^{m-1} \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 + \frac{\xi}{m+2} \frac{df}{d\xi} + \frac{f}{m+2} = 0$$

$$d \left(f^m \frac{df}{d\xi} + \frac{\xi f}{m+2} \right) = 0$$

$$df^m = -\frac{m}{2(m+2)} d\xi^2, f = \left(\frac{m}{2(m+2)} \right)^{\frac{1}{m}} (\xi_0^2 - \xi^2)^{\frac{1}{m}}$$



习 题

第十一章 烧蚀与内爆

1. 不考虑介质的流动，介质能量密度的演化方程为

$$\frac{\partial E}{\partial t} = a \nabla \cdot (E^m \nabla E).$$

无限均匀介质中，在 $t=0$ 时刻，于 $x=0$ 平面瞬间释放出面密度为 Q_0 的能量。求介质中能量密度的演化。【提示，与课件中的球对称例子不同，习题是一维平板模型】。

2. 估算功率密度为 $5 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$ 、波长为 $0.351 \mu\text{m}$ 的激光脉冲烧蚀固态 Be 所形成的等离子体的温度以及烧蚀压，假定激光的吸收效率为 50%。【Be 的核电荷数为 4，原子核质量数为 9，电子质量为 $m_e = 9.11 \times 10^{-28} \text{ g}$ ，电子电荷为 $e = 4.8032 \times 10^{-10} \text{ statcoulomb}$ 】。
3. 采用功率密度同为 $2 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$ ，但波长分别为 $0.53 \mu\text{m}$ 和 $0.35 \mu\text{m}$ 的激光辐照相同的固体低 Z 材料。估计烧蚀压之比大约有多少。

$$T = \frac{A m_p}{(Z+1)} [I_a / 4 \rho_c]^{2/3} \propto I_a^{2/3} \lambda_L^{4/3}. \quad (55)$$

$$\begin{aligned} p_a &= 2 \rho_c c_{T_e}^2 \\ &= 12 \left(\frac{I_a}{10^{14} \text{ W/cm}^2} \right)^{2/3} \left(\frac{1 \mu\text{m}}{\lambda_L} \right)^{2/3} \left(\frac{A}{2Z} \right)^{1/3} [\text{Mbar}]. \end{aligned} \quad (56)$$

$$I_a = 0.5I = 2.5 \times 10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}, n_c [\text{cm}^{-3}] \simeq \frac{1.1 \times 10^{21}}{\lambda_{\mu\text{m}}^2} \simeq 8.9285 \times 10^{21} [\text{cm}^{-3}]$$

$$\rho_c^{Be} = \frac{9}{4} m_a n_c = \frac{9}{4} \times 1.673 \times 10^{-24} [\text{g}] \times 8.9285 \times 10^{21} = 3.361 \times 10^{-2} [\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}],$$

$$T = \frac{9 \times 1.673 \times 10^{-24}}{4+1} \times \left[\frac{2.5 \times 10^{14}}{4 \times 3.361 \times 10^{-2}} \right]^{\frac{2}{3}} \simeq 4.5538 \times 10^{-14} \text{ J} \simeq 2.846 \times 10^5 \text{ eV} \simeq 10^9 \text{ K}, 1 \text{ eV} \simeq 10^4 \text{ K}$$

$$p_a = 12 \times 2.5^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{1}{0.351} \right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{9}{2 \times 4} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq 46.2 \text{ Mbar},$$

$$p_a \simeq \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} I_a^{\frac{2}{3}} \rho_c^{\frac{1}{3}} \simeq \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \times (2.5 \times 10^{18} [\text{W} \cdot \text{m}^{-2}])^{\frac{2}{3}} \times (33.61 [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}])^{\frac{1}{3}} \simeq 4.718 \times 10^{12} \text{ Pa} = 47.18 \text{ Mbar}$$

$$\frac{p_a^{\lambda_1}}{p_a^{\lambda_2}} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{0.35}{0.53} \right)^{\frac{2}{3}} \simeq 0.7583$$



习题

第十一章 烧蚀与内爆

1. 给出 Be、C、CH 三种烧蚀材料的特征能流 I_* 的相对比值。

$$I_*(\text{W/cm}^2) = 2.4 \times 10^{12} \left(\frac{\tau_L}{0.1\text{ns}} \right)^{3/2} \left(\frac{1\mu\text{m}}{\lambda_L} \right)^5 \left(\frac{\ln \Lambda_{ei}}{8} \right)^{3/2} \times \frac{\bar{Z}^{3/2} (\bar{Z} + T_i/T_e)^{9/4}}{\bar{Z}^{5/2} A^{5/4}}, \quad (65)$$

习题

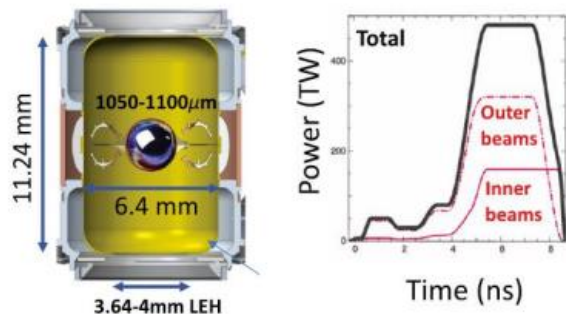
第十一章 烧蚀与内爆

1. 在美国 NIF 装置上的间接驱动实验中，辐射场温度为 290eV，脉冲宽度为 3ns。估算金腔壁的反照率。

对于常见的烧蚀物质 CH，假设 $T_i/T_e = 0.5$ ，那么

$$\frac{\bar{Z}^{3/2} (\bar{Z} + T_i/T_e)^{9/4}}{\bar{Z}^{5/2} A^{5/4}} = 7.57$$

2. 2021 年，美国在 NIF 装置上进行的点火实验所用腔靶尺寸和激光功率如下图所示。假定靶丸的反照率为 0.1，估计腔靶内峰值辐射温度。【来自参考文献 Phys. Plasmas 28, 072706 (2021)】



$$\bar{Z}^2 = \frac{\sum_i Z_i^2 n_i}{\sum_i n_i}, \quad \bar{Z} = \frac{\sum_i Z_i n_i}{\sum_i n_i}, \quad \ln \Lambda_{ei} = \text{const.}$$

$$I_{Be} : I_C : I_{CH} \approx 3.78 : 7.34 : 7.57$$



习题

第十一章 烧蚀与内爆

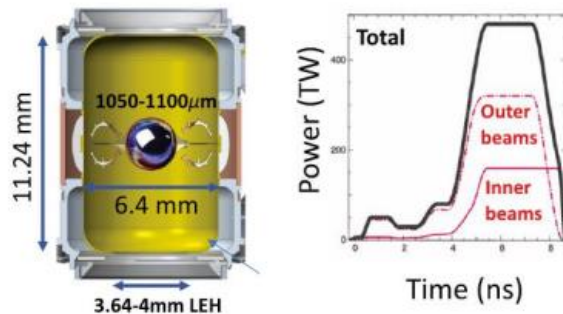
1. 给出 Be、C、CH 三种烧蚀材料的特征能流 I_c 的相对比值。

习题

第十一章 烧蚀与内爆

1. 在美国 NIF 装置上的间接驱动实验中，辐射场温度为 290eV，脉冲宽度为 3ns。估算金腔壁的反照率。

2. 2021 年，美国在 NIF 装置上进行的点火实验所用腔靶尺寸和激光功率如下图所示。假定靶丸的反照率为 0.1，估计腔靶内峰值辐射温度。【来自参考文献 Phys. Plasmas 28, 072706 (2021)】



对于 Au, 近似有

$$\alpha_{albedo} = \frac{1}{1 + 12.7\theta_{eV}^{-3/4} t_{ns}^{-1/2}}$$

$$\alpha_{albedo} = \frac{1}{1 + 12.7 \times 290^{-3/4} \times 3^{-1/2}} \approx 0.91$$

当激光注入到腔靶，将形成近似黑体辐射的辐射场。由能量守恒

$$\begin{aligned} & \eta_{CE}(P_L - P_{Backscatter}) \\ &= P_W + P_{LEH} + P_{CAP} \\ &= \sigma\theta^4 [(1 - \alpha_W)A_W + A_{LEH} + (1 - \alpha_{CAP})A_{CAP}]. \end{aligned} \quad (93)$$

其中， $A_{W,LEH,CAP}$ 分别是腔壁、激光注入口，以及聚变靶丸的表面积， $\alpha_{W,CAP}$ 分别是腔壁和聚变靶丸的反照率， η 是被吸收的激光转换为X射线的效率， $P_{Backscatter}$ 是激光与等离子体相互作用时的背向光的功率。

$$A_W = \pi \times 6.4 \times 11.24 \approx 225.99mm^2$$

$$A_{LEH} = \pi \times 2^2 \approx 25.57mm^2$$

$$A_{CAP} = 4 \times \pi \times 0.55^2 \approx 3.80mm^2$$

$$\eta_{CE} \approx 0.9, \alpha_W \approx 0.9, \alpha_{CAP} = 0.1,$$

$$P_{Backscatter} \approx 0.9P_L, P_L = 4.5 \times 10^{14}W$$

$$\theta \approx 2.07 \times 10^6 K \approx 188.18eV, 1eV \approx 11000K$$