

2020级数分 (B2) 期末考试题解 (2021.7.16)

一、(6分) 设 $I(u) = \int_{\sin u}^{\cos u} e^{x^2-xu} dx$, 求 $I'(u)$.

解

$$I'(u) = -e^{\cos^2 u - u \cos u} \sin u - e^{\sin^2 u - u \sin u} \cos u - \int_{\sin u}^{\cos u} x e^{x^2-xu} dx.$$

二、(12分; 每小题4分) 设 $\vec{v} = \left(\frac{y}{z} - \frac{1}{y}, \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}, 1 - \frac{xy}{z^2} \right)$ ($y > 0, z > 0$).

(1) 证明 \vec{v} 是有势场; (2) 求其全体势函数; (3) 计算 $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} \vec{v} \cdot \vec{\tau} ds$

解 直接验证 $\nabla \times \vec{v} = 0$; 设势函数为 $\varphi(x, y, z)$, 解方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y}{z} - \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1 - \frac{xy}{z^2}$$

得

$$\varphi(x, y, z) = \frac{xy}{z} - \frac{x}{y} + z + C \quad (C \text{ 是任意常数}).$$

$$\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} \vec{v} \cdot \vec{\tau} ds = \varphi(1, 2, 3) - \varphi(1, 1, 1) = \frac{13}{6}.$$

三、(20分, 每小题10分)

(1) 计算曲线积分 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 4$, 直线 $y = x$ 及 x 轴在第一象限中所围图形边界.

解 将 L 分成三段, 其中圆弧段令 $x = 2 \cos \theta, y = 2 \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$), 在 x 轴上: $ds = dx$, 在直线 $y = x$ 上: $ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{2} dx$, 在弧段上: $ds = 2 d\theta$, 因此

$$\begin{aligned} \int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds &= \int_0^2 e^x dx + \int_0^{\pi/4} 2e^2 d\theta + \int_0^{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{2} dx \\ &= e^2 - 1 + e^2 \frac{\pi}{2} + e^2 - 1 = e^2(2 + \pi/2) - 2 \end{aligned}$$

(2) 设 $u(x, y)$ 在圆盘 $D: x^2 + y^2 \leq \pi$ 上有二阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x^2 + y^2),$$

\vec{n} 为边界圆周 ∂D 的单位外法向, 计算曲线积分 $\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds$.

解 因为 ∂D 的单位外法向为

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x\vec{i} + y\vec{j})$$

由此推出 ∂D 逆时针指向的单位切向量为

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-y\vec{i} + x\vec{j})$$

由 $\tau ds = \vec{r}' ds = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ 推出

$$dx = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}y ds, \quad dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}x ds$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \oint_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y \right) ds \\ &= \oint_{\partial D} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy \\ &= \iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

这里用到了Green公式. 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), 就有

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} (\sin r^2) r dr = 2\pi.$$

四、(12分) 计算积分

$$I = \iint_S 2(1+x) dy dz + yz dx dy,$$

其中 S 是曲线 $y = \sqrt{x}$, ($0 \leq x \leq 1$) 绕 x 轴旋转生成的旋转面, 法向与 x 轴正向夹角为钝角.

解 对 S 加一个底: $D: x = 1, y^2 + z^2 \leq 1$, 方向指向 x 轴正向. 记 V 是 S 和 D 围成的体积, 于是利用Gauss公式

$$\begin{aligned} \iint_{S+D} 2(1+x) dy dz + yz dx dy &= \iiint_V (2+y) dx dy dz \\ &= 2\mu(V) + \iiint_V y dx dy dz \end{aligned}$$

这里 $\mu(V)$ 表示 V 的体积. 注意到 V 关于 Oxz 平面对称, 因此 $\iiint_V y \, dx \, dy \, dz = 0$, 且在 D 上, $x = 1$, $dx \, dy = 0$, 所以

$$\begin{aligned} I &= 2\nu(V) - \iint_D 2(1+x) \, dy \, dz + yz \, dx \, dy \\ &= 2\mu(V) - \iint_{y^2+z^2 \leq 1} 2 \, dy \, dz = 2\mu(V) - 4\pi. \end{aligned}$$

下面就要计算 V 的体积, 即旋转面围成的旋转体的体积.

$$\mu(V) = \int_0^1 \pi y^2 \, dx = \int_0^1 \pi x \, dx = \frac{1}{2}\pi.$$

最后得

$$I = -3\pi.$$

五、(10分) 记 $\vec{v} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$, 计算曲线积分

$$I = \oint_L (y^2 + z^2) \, dx + (z^2 + x^2) \, dy + (x^2 + y^2) \, dz,$$

其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线 ($z \geq 0$), 从 z 轴的正向看去 L 沿顺时针方向.

解法一 记 S 是球面上以 L 为边的那块曲面. 由 L 的方向可知, S 的方向指向下侧, S 的单位法向量为

$$\vec{n} = -\frac{1}{2}[(x-2)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}].$$

利用Stokes公式, 有

$$\begin{aligned} I &= \oint_L (y^2 + z^2) \, dx + (z^2 + x^2) \, dy + (x^2 + y^2) \, dz \\ &= \iint_S \nabla \times \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = -\frac{1}{2} \iint_S \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} \, dS \\ &= -\iint_S [(x-2)(y-z) + y(z-x) + z(x-y)] \, dS = -2 \iint_S (z-y) \, dS \end{aligned}$$

由于 S 关于 Oxz 平面对称, 所以 $\iint_S y \, dS = 0$, 因此

$$I = -2 \iint_S z \, dS$$

注意到在直角坐标系中, S 的方程为

$$z = \sqrt{4 - (x - 2)^2 - y^2} \quad (x, y) \in D, \quad D: x^2 + y^2 = 2x,$$

所以

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{4 - (x - 2)^2 - y^2}} dx dy = \frac{2}{z} dx dy \end{aligned}$$

所以

$$I = -2 \iint_S z dS = - \iint_D z \cdot \frac{2}{z} dx dy = -4\mu(D) = -4\pi.$$

解法二 令

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

(也可以用 $x = 1 + \cos t, y = \sin t, z = \sqrt{2 + 2 \cos t}$, 这里就再讨论了.)

由方程 $x^2 + y^2 = 2x$ 得

$$r = r(\theta) = 2 \cos \theta.$$

由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 得

$$z = 2 \cos \theta.$$

所以曲线的参数方程为:

$$L: x = 2 \cos^2 \theta, \quad y = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad z = 2 \cos \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\implies dx = -4 \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad dy = 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta, \quad dz = -2 \sin \theta d\theta$$

带入积分, 并充分利用积分区间的对称性, 使得所有奇函数的积分均为零, 因此有

$$\begin{aligned} \oint_L (y^2 + z^2) dx &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-4 \sin^3 \theta \cos^2 \theta - 16 \cos^3 \theta \sin \theta) d\theta = 0 \\ \oint_L (z^2 + x^2) dy &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(4 \cos^2 \theta + 4 \cos^4 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8(-\cos^2 \theta + \cos^4 \theta + 2 \cos^6 \theta) d\theta \\ \oint_L (x^2 + y^2) dz &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-8 \sin \theta \cos^4 \theta - 8 \sin^3 \theta \cos^2 \theta) d\theta = 0 \end{aligned}$$

因此, 只要计算上式中第二个积分即可. 利用

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}, \\ \cos^4 \theta &= \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) = \left(\frac{3}{8} + 2 \cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2} \right), \\ \cos^6 \theta &= \frac{1}{8} \left(1 + 3 \cos 2\theta + 3 \frac{1 + \cos 4\theta}{2} + \cos^3 2\theta \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{5}{2} + 3 \cos 2\theta + 3 \frac{\cos 4\theta}{2} + \cos^3 2\theta \right)\end{aligned}$$

并考虑 $\cos 2\theta, \cos 4\theta$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的周期性, 有

$$\oint_L (z^2 + x^2) dy = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8(-\cos^2 \theta + \cos^4 \theta + 2 \cos^6 \theta) d\theta = -4\pi.$$

这里用到了

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t d \sin t = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \sin^2 t) d \sin t = 0$$

最后有 $I = -4\pi$.

六、(16分:第1小题6分, 第2 小题10分)

(1) 将 $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ $x \in [0, \pi]$ 展开成余弦级数;

(2) 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 的和.

解 将函数 $f(x)$ 偶延拓到 $[-\pi, \pi]$ 上, 则

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = 0 \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi} (1 - (-1)^n).\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x = \frac{\pi}{2} - x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

令 $x = 0$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

由

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

由Parseval 等式得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2n-1)^4} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{6} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96},\end{aligned}$$

根据

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.\end{aligned}$$

七、(16分, 第1 小题4分, 第2,3小题6分)

(1) 求使积分 $\varphi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx$ 收敛的参数取值范围.

(2) 收敛时, 利用Euler 积分计算 $\varphi(\alpha)$.

(3) 证明含参变量广义积分 $\varphi(\alpha)$ 在区间 $[-\alpha_0, \alpha_0]$ 上一致收敛 ($0 < \alpha_0 < 1$).

解(1): 因为

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx$$

其中

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx$$

中 $\frac{x^\alpha}{1+x^2} \sim x^\alpha$ ($x \rightarrow 0^+$), 所以对 $\alpha > -1$ 收敛; 而

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx$$

中 $\frac{x^\alpha}{1+x^2} \sim x^{\alpha-2}$ ($x \rightarrow +\infty$), 所以对 $\alpha < 1$ 收敛.

综合两个积分, 最终得原积分在 $-1 < \alpha < 1$ 上收敛.

解 (2): 令 $x^2 = u$, $dx = \frac{1}{2}u^{-1/2} du$

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{u^{(\alpha-1)/2}}{1+u} du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{u^{(\alpha+1)/2-1}}{1+u} du$$

令 $q = \frac{\alpha+1}{2}$, $P+q=1$, 解得 $p = \frac{1-\alpha}{2}$ 得

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{u^{(\alpha+1)/2-1}}{1+u} du = \frac{1}{2} B\left(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1+\alpha}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \pi \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \end{aligned}$$

证 (3): 在 $[-\alpha_0, \alpha_0]$ 上 ($0 < \alpha_0 < 1$)

当 $0 < x < 1$ 时: $\frac{x^\alpha}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^{\alpha_0}}$ ($x \rightarrow 0$), 所以 $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx$ 一致收敛.

当 $x > 1$ 时: $\frac{x^\alpha}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^{2-\alpha_0}}$ ($x \rightarrow +\infty$), 所以 $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx$ 一致收敛.

八、(8分) 设 $P(X, y), Q(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且对任一点 (x_0, y_0) 为圆心, 任意 $r > 0$ 为半径的半圆 $L: x = x_0 + r \cos \theta, y = y_0 + r \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), 恒有

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

证明 $P(x, y) = 0, \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$.

证明 注意到 L 不是封闭曲线, 增加直线段 $L_0: x_0 - r \leq x \leq x_0 + r, y = y_0$, 并记 L 和 L_0 围成的半圆区域为 D , 则利用Green公式有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L+L_0} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{L_0} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

对等式左边使用积分中值公式, 则存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (\xi, \eta) \frac{\pi r^2}{2}.$$

注意到在 L_0 上 $dy = 0$, 所以

$$\int_{L_0} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x, y_0) dx = 2rP(\tau, y_0),$$

这里再次使用积分中值公式, 其中 $x_0 - r \leq \tau \leq x_0 + r$. 因此

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (\xi, \eta) \frac{\pi r}{2} = 2P(\tau, y_0).$$

根据连续性并令 $r \rightarrow 0$, 则 $\tau \rightarrow x_0$, $(\xi, \eta) \rightarrow (x_0, y_0)$, 所以首先得 $P(x_0, y_0) = 0$, 由 (x_0, y_0) 的任意性得

$$P(x, y) \equiv 0 \text{ 对任意的 } (x, y) \text{ 成立}$$

因此

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (\xi, \eta) = 0,$$

通过极限 $r \rightarrow 0$ 得

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,$$

同理由 (x_0, y_0) 的任意性即得 $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$.