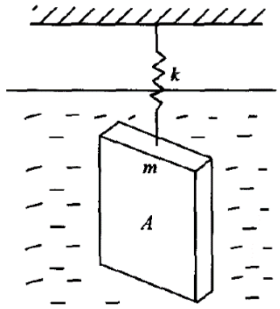
一、（10 分）如下图所示，质量为$m$的薄板挂在弹簧的下端，若空气的阻力可以不计，在空气中的振动周期为$T_1$，在某液体中的振动周期为$T_2$，液体的阻力可表示为$-2\eta Av$，其中$A$为薄板的面积，$v$为速度，$\eta$为液体的黏度，试证$\eta=\frac{2\pi m}{AT_1T_2}\cdot\sqrt{T_2^2-T_1^2}$。




证明：由题意，在液体中薄板的振动方程为

$$m\ddot{x}=-kx-2\eta A\dot{x}$$

与阻尼振动的标准运动方程

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

进行对比，可以得到

$$\beta=\frac{\eta A}{m}$$

而薄板在空气中振动周期为$T_1$，知

$$T_1=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

又对阻尼振动有$\omega_{\mathrm{d}}=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$

其周期为

$$T_2=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

即

$$\omega_0^2-\beta^2=\frac{4\pi^2}{T_2^2}$$

代入

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_1}$$

知

$$\frac{4\pi^2}{T_1^2}-\frac{4\pi^2}{T_2^2}=\frac{\eta^2A^2}{m^2}$$

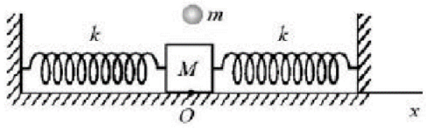
从而

$$\eta=\frac{2\pi m}{A}\sqrt{\frac{1}{T_1^2}-\frac{1}{T_2^2}}$$

$$=\frac{2\pi m}{AT_1T_2}\sqrt{T_2^2-T_1^2}$$

二、（20 分）如下图所示，两根相同的弹簧与物体$M$连接后放在光滑的水平面上，弹簧的另一端分别固定在墙上，两弹簧均处于自然长度。现令$M$沿着水平方向振动，当$M$运动至中点时，将一质量为$m$的质点快速粘在$M$上（设粘上$M$前，$m$的速度为零）。

1. （10 分）试求$m$粘上$M$之前和之后两种情况下振动系统的角频率比和振幅比；
2. （10 分）如果在$M$运动至最大位移时，将$m$快速粘在$M$上，求振动系统的角频率比和振幅比。




1. 解：以中点O为坐标原点，当$M$偏离O点$x$时，受力为

$$f=-2kx$$

由牛顿第二定律

$$M\ddot{x}=-2kx$$

则初始的角频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{2k}{M}}$$

当$m$粘在$M$上后，弹簧振子的质量为$M+m$，所以角频率变为

$$\omega_1=\sqrt{\frac{2k}{M+m}}$$

从而

$$\frac{\omega_0}{\omega_1}=\sqrt{\frac{M+m}{M}}$$

设$m$粘在$M$之前，振幅为$A_0$，$M$通过平衡位置中点O时的速度为$v_0$，则

$$\frac{1}{2}Mv_0^2=2\cdot\frac{1}{2}kA_0^2$$

所以有$v_0=A_0\omega_0$，即

$$A_0=\frac{v_0}{\omega_0}$$

在$m$和$M$粘接过程中，$M+m$系统水平方向动量守恒，则

$$Mv_0=(M+m)v_1$$

由能量守恒

$$\frac{1}{2}(M+m)v_1^2=2\cdot\frac{1}{2}kA_1^2$$

所以有$v_1=A_1\omega_1$，所以

$$A_1=\frac{v_1}{\omega_1}$$

因此

$$\frac{A_0}{A_1}=\frac{v_0}{v_1}\frac{\omega_1}{\omega_0}=\frac{M+m}{M}\sqrt{\frac{M}{M+m}}=\sqrt{\frac{M+m}{M}}$$

2. 解：类似第一问，初始的角频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

当$m$粘在$M$上后，弹簧振子的质量为$M+m$，所以角频率变为

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{M+m}}$$

从而

$$\frac{\omega_0}{\omega_2} = \sqrt{\frac{M+m}{M}}$$

当 M 运动至最大位移处时，$m$粘在$M$上

由水平方向动量守恒知，共同速度为$v_2 = 0$，因此振幅不变，即

$$\frac{A_0}{A_2} = 1$$

三、（15 分）一质量为$42\ \mathrm{u}$的静止粒子衰变为两个碎片，其一静质量为$20\ \mathrm{u}$，速率为$0.25c$，求另一的动量、能量和静质量。（光速$c = 3.0 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$，原子质量单位$1\ \mathrm{u} = 1.66 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$）

解：原静止粒子的静质量为$M = 42\ \mathrm{u}$，衰变成两个粒子，静质量分别为$m_1 = 20\ \mathrm{u}$和$m_2$

由能量守恒

$$Mc^2 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$$

由动量守恒

$$\frac{m_1 v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{m_2 v_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$$

即

$$42 = \frac{4 \times 20}{\sqrt{15}} + \frac{m_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$$

$$\frac{20}{\sqrt{15}} = \frac{m_2}{\sqrt{\frac{c^2}{v_2^2} - 1}}$$

解得

$$m_2 \approx 20.71\ \mathrm{u}$$
$$v_2 \approx 0.24c$$

故第二个粒子的动量为

$$p_2 = \frac{m_2 v_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = 2.57 \times 10^{-18}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$

能量为

$$E_2 = \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = 3.19 \times 10^{-9}\ \mathrm{J}$$

质量为

$$m_2 = 3.44 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg}$$

四、（10 分）一宇宙飞船的船身固有长度为$L_0 = 90\ \mathrm{m}$，相对地面以匀速率$v = 0.8c$在一观测站的上空飞过。求：

1. （6 分）观测站测得飞船的船身通过观测站的时间间隔；
2. （4 分）宇航员测得飞船的船身通过观测站的时间间隔。

1. 解：由相对论效应，观测站测出船身的长度为

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

观测站测得飞船的船身通过观测站的时间间隔为

$$\Delta t = \frac{L}{v} = L_0\sqrt{\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}}$$

代入数值计算得$\Delta t = 2.25 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}$

2. 解：宇航员测得飞船船身通过观测站的时间间隔为

$$\Delta t_0 = \frac{L_0}{v}$$

代入数值计算得$\Delta t = 3.75 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}$

五、（10 分）证明均质的质量为$m$的直杆的动能$E_k=\frac{1}{6}m(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})$，其中$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$分别是杆两端的速度。（杆子既有平动也有转动）

证法一：沿着杆子取$x$轴，$x=0$处质元速度为$\boldsymbol{u}$，设杆长为$l$，$x=l$端质元速度为$\boldsymbol{v}$

则$x$处的质元速度为

$$\boldsymbol{u}+\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}}{l}x$$

按动能的定义

$$\begin{aligned}
E_k&=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\boldsymbol{u}+\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}}{l}x\right)\cdot\left(\boldsymbol{u}+\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}}{l}x\right)\frac{m}{l}\mathrm{d}x\\
&=\frac{m}{2l}\int_0^l\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{u}\cdot\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}}{l}x+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\frac{x^2}{l^2}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{m}{2l}\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}l+l\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+\frac{1}{3}l(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\right)\\
&=\frac{m}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+\frac{m}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}-\frac{m}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+\frac{m}{6}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{m}{6}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}-\frac{m}{3}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\\
&=\frac{1}{6}m(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

证法二：利用柯尼希定理

质心的速度为

$$\boldsymbol{v}_C=\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$$

且有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{l}$$

即

$$|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|=|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{l}|=\omega l\sin\alpha$$

其中$\alpha$是$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{l}$的夹角，$\boldsymbol{l}$为速度为$\boldsymbol{v}$的一端对速度为$\boldsymbol{u}$的一端的位矢

又杆子对质心的转动惯量为

$$\boldsymbol{I}_C=\frac{1}{12}ml^2\sin^2\alpha$$

故动能为

$$\begin{aligned}
E_k&=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2\\
&=\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\sin^2\alpha\cdot\left(\frac{|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|}{l\sin\alpha}\right)^2\\
&=\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})+\frac{1}{12}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\right)\\
&=\frac{1}{6}m(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

六、（15 分）一物体沿$x$轴作简谐振动，振幅为$A = 12.0\ \mathrm{cm}$，周期为$T = 2.0\ \mathrm{s}$，在$t = 0$时物体位于$x_0 = 6.0\ \mathrm{cm}$处且向正$x$方向运动，求：

1. （3 分）初相位$\varphi_0$；
2. （7 分）$t = 0.50\ \mathrm{s}$时，物体的位置、速度和加速度；
3. （5 分）在$x = -6.0\ \mathrm{cm}$处且向负$x$方向运动时，物体的速度和加速度。

1. 解：设该简谐振动为$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$，其中$-\pi < \varphi_0 < \pi$

由题意，周期为$T = 2.0\ \mathrm{s}$

故角频率为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

当$t = 0$时，$A\cos\varphi_0 = x_0$且$\dot{x} > 0$

即

$$-\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) > 0$$

代入数值知

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{2}$$

且$\sin\varphi_0 < 0$，故

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$$

若取$0 < \varphi_0 < 2\pi$，则

$$\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$$

2. 解：该简谐振动为

$$x = 12\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\ \mathrm{cm}$$

其速度为

$$v = \dot{x} = -12\pi\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$$

其加速度为

$$a = \dot{v} = -12\pi^2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\ \mathrm{cm \cdot s^{-2}}$$

故在$t = 0.50\ \mathrm{s}$时，有

$$x = 12\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{6} = 6\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$$

$$v = -12\pi\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -12\pi\sin\frac{\pi}{6} = -6\pi\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$$

$$a = -12\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -12\pi^2\cos\frac{\pi}{6} = -6\sqrt{3}\pi^2\ \mathrm{cm \cdot s^{-2}}$$

3. 解：当$x = -6\ \mathrm{cm}$且向负$x$方向运动时，$\dot{x} < 0$

此时

$$\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) > 0$$

故

$$\pi t - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

从而

$$\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

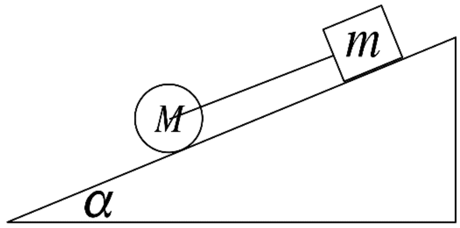
速度

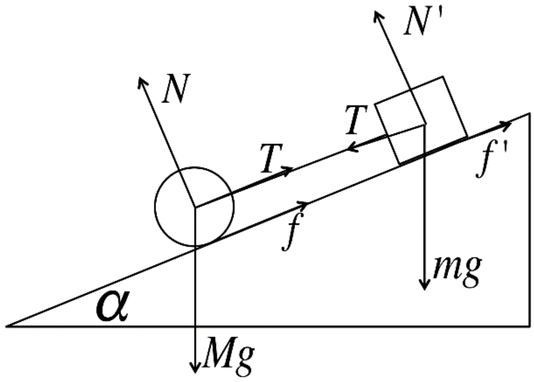
$$v = -12\pi \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = -6\sqrt{3}\pi \ \mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

加速度

$$a = -12\pi^2 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 6\pi^2 \ \mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

七、（20 分）如图，在固定于地表倾角为$\alpha$的斜面上，质量为$m$的木块通过轻绳和质量为$M$，半径为$r$的实心均匀圆柱体的转轴相连。已知斜面和木块及圆柱体之间的动、静摩擦系数均为$\mu$，圆柱体转轴上的摩擦可忽略。圆柱体无滑动滚下，求木块沿斜面下滑的加速度$a$，绳中张力$T$，圆柱体所受摩擦力$f$。




解：倾角很小时，木块和圆柱体静止不动；倾角大到一定程度，圆柱体无滑动滚动；倾角继续增大，圆柱体开始既滚又滑。

受力情形如右下图。

圆柱体无滑动滚动时

$m$受力分析，得：

$$N' = mg\cos\alpha$$

$$mg\sin\alpha + T - f' = ma$$

$$f' = \mu N'$$

$M$受力分析，得：

$$N = Mg\cos\alpha$$

$$Mg\sin\alpha - T - f = Ma$$

$M$转动平衡，得：

$$fr = I\beta = \frac{1}{2}Mr^2\beta$$

无滑动滚动条件：$a = r\beta$

解得

$$a = \frac{(M+m)g\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{\frac{3}{2}M + m}$$

$$f = \frac{M(M+m)g\sin\alpha - \mu Mmg\cos\alpha}{3M+2m}$$

$$T = \frac{Mmg(3\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{3M+2m}$$

在无滑动滚动情况下，$a > 0$，即

$$\tan\alpha > \frac{\mu m}{M+m}$$

如果考虑到圆柱体的摩擦力需要满足$f < \mu N$

这就给出了$\tan\alpha < 3\mu$

此外$T > 0$，得

$$\tan\alpha < 3\mu\frac{M}{m}$$

因此$\tan\alpha$应满足

$$\frac{\mu m}{M+m} < \tan\alpha < \min\left\{3\mu, 3\mu\frac{M}{m}\right\}$$