中 国 科 学 技 术 大 学

数学分析 (B1) 习题课讲义

宗语轩　余启帆

2022 年 8 月

序

从 “$1+1=2$” 谈起[1]

——高等数学[2] 与初等数学的区别, 联系与衔接

“$1+1=2$” 是我们接触数学的起点, 但老师们几乎都是通过数数或是举具象的例子这样直观的方式来告诉我们什么是 “$1+1=2$”, 而没有深入讲解加法的定义. 我们对几何图形的了解, 亦是通过直观感受图形, 以及学习老师们所列举的性质、结论, 而没有探究其背后的几何原理. 至于有理数和无理数, 数学教材带给我们的也仅仅是它们的存在性, 并没有探究两者间的联系, 甚至有很多老师都没有阐明有理数和无理数本质的区别 (例如, 很多学生并不了解任何有理数都能表示成 $\dfrac{p}{q}$, $(p,q)=1$ 的形式). 初等数学里这些直观上 “ 显然” 的内容却恰恰是学生踏入高等数学的大门后所需要细究的. 很多同学对这一转变无法适应, 这导致他们在学习第一门核心基础课程——数学分析时就开始掉队.

当然, 笔者列举这些事实并不是要否定初等数学. 相反, 在初等数学教育阶段, 绝大部分学生对数学的认知能力非常有限, 他们很难绕开形象来接触抽象. 因此, 在这样的起步阶段, 是需要通过这样直观的方式去引导学生学习数学的. 较之于高等数学, 初等数学所学习的内容就好比练武中蹲马步、打沙袋、举石锁的过程. 如果急功近利, 过早地去练复杂的招式, 那么马脚就会逐渐败露, 最后很可能一事无成. 对此, 笔者觉得很有必要从多个角度谈谈高等数学和初等数学的区别与联系, 以及如何完成这二者的衔接.

我们先从定义本身讲起:

初等数学: 以 “$1+1=2$” 为既定事实建立的数学体系. 通俗而言, 就是更加直观, 更强调数学的工具性.

高等数学: 研究何为 “$1+1=2$” 及其衍生出的一系列数学内容. 较之初等数学更加抽象, 更重视数学的本原性.

初等数学直接承认了很多直观上成立的命题. 例如, 初等函数连续性是可以直接使用的, 其衍生出的各类性质也被视为 “显而易见”. 而高等数学正是去研究这些在初等数学体系中视为 “ 直观上成立” 的定义及性质, 很多定义还被作为起点来构建出新的体系. 例如, 把 “$1+1=2$” 作为抽象代数课程的起点, 以此来引申出 “ 群环域” 的概念; 在函数连续性、可导性、可积性的定义中, 引入 “无穷小” 这一工具, 亦是为了真正区分直观上的两个 “1”, 把 “$1+1=2$” 真正抽丝剥茧. 同时, 在新的体系下, 又衍生出新的定义、性质及结论. 这些新的定义、性质及结论相比初等数学而言, 不失直观却更为本原.

同时, 初等数学中的内容或多或少都会被运用到高等数学中去. 因为抽象的探索, 脱不开直观的想象; 本原的洞察, 少不了工具的驾驭. 就如初等数学中直观化和形象化的方法, 亦作为

[1]本文发表于中国科大数院学生会主编的《薪火相传》(2021 版), 略有删改.

[2]这里的高等数学是广义的.

工具被用于高等数学的研究中. 再如 “变量代换及换元” 这一我们在初等数学中学习的技巧, 即使在积分及微分的处理中也经常使用, 它甚至还起到了关键乃至决定性作用. 这些贯穿整个数学阶段的思想方法及工具, 在不同阶段有不同的地位及用途, 时而宏观, 时而具化, 亦或两者兼具.

再从学习模式的角度谈起:

初等数学的教学一般都是以 “简单的定义 $\to$ 适量的性质及推论 $\to$ 大量的例子 $\to$ 衍生出大量课本之外的技巧及结论” 的模式进行. 如前所说, 这些内容始终是高等数学学习及数学研究的基本工具, 在初等数学的学习阶段, 必须对这些 “工具” 先要熟练掌握, 再要灵活运用, 最后融会贯通. 在绝大部分学生几乎不具备抽象思维的时候, 这种如同 “ 学工具” 的学习模式在初等数学的学习中是适用的.

高等数学的教学一般都是以 “困难的定义 $\to$ 大量的性质及推论 $\to$ 适量的例子 $\to$ 衍生出极少量课本之外的技巧及结论” 的模式进行. 高等数学里的课程本身起点很高, 因此高等数学的学习绝不能抱着 “ 学工具” 的想法, 而是要文火慢炖, 勤于思考和探究, 最后要融入所学课程的体系和思维方式, 这是第一要义. 就如数学分析这一课程, 它开门见山地引入了无穷小的概念, 进而定义了极限. 要想尽快适应这样的转变, 就要在学习过程中深入课程, 适应体系, 探明本质.

为了让同学们更好地适应高等数学的学习, 笔者还想谈一谈如何更好地进行初高等数学间的衔接:

(1) 一定要理解无穷 (包括大和小) 的内涵, 深究无穷性与有穷性的区别, 并在无穷性中继续深挖根源. “无穷小” 是研究为何 “$1+1=2$” 成立 (实数的构造) 及其衍生出的内容的一个重要手段;

(2) 要以工具性的观点运用初等数学, 要持求知的态度探索高等数学, 切忌高等数学学习 “工具化”;

(3) 学习高等数学不能忽视初等数学里常用的直观化和形象化的方法, 他们很有可能为高等数学中一些问题的解决提供了动机, 再加上数学本身具有理科语言学的特性. 因此, 具备良好的洞察力及语言逻辑能力是任何阶段的数学学习中不可或缺的一部分;

(4) 学习高等数学要学会探索规律, 追溯本质. 看似复杂的体系及问题, 其关键往往归结于核心的处理手段及思维方式, 同时, 在学习任何知识过程中都要具备类比、归纳、演绎以及多维推广等数学思想方法;

(5) 学习完高等数学中的每一门课程, 都应该回头思考课程的真正核心内容, 明确课程主线, 理清一些重要的定理或命题的地位及用途, 并探究其中的联系.

最后, 祝各位 *USTCer* 在科大四年里能够治学修身, 畅游数学之领域, 感悟生活之乐趣.

2019 级 数学科学学院 1 班 宗语轩
2021 年 2 月于杭州

有关初高等数学衔接的推荐用书:

程艺: 数学基础选讲, 高等教育出版社, 2022.

前 言

数学分析, 是一门以 “什么是极限” 为起点，把微分学、积分学、级数等理论作为主要内容, 并主要在实数范围内以 “极限” 作为工具研究连续性、可微性、可积性等性质的基础课程, 同时亦是从初等数学到高等数学过渡的桥梁. 和多数大学数学课程一样, 数学分析具有严格的公理体系. 但是相比后续课程而言, 数学分析课程中的定义和定理理解起来并不困难, 抽象程度也不高, 大部分内容都可以用直观的方式加以理解; 此外, 数学分析需要用到大量初等数学所学的知识、技巧和结论, 这一特点在许多习题中均有体现, 因此说数学分析起到了初、高等数学间的过渡作用.

当前, 中国科大全校学生都需要通修数学分析课程, 其中非数学专业学生均通修数学分析 (B1)(B2) 两门课程, 数学专业学生通修数学分析 (A1)(A2)(A3) 或数学分析 (B1)(B2)(B3) 三门课程. 本书主要针对数学分析 (B1) 课程, 其知识深度及广度介于其他高等院校的高等数学 (单、多变量微积分) 和数学专业数学分析之间, 课程主干和知识点上更倾向于高等数学 (单、多变量微积分), 但在证明分析能力和技巧运用上更贴近于数学专业的数学分析要求.

在 2021 年秋季学期, 两位笔者分别有幸担任数学分析 (B1) 程艺老师 (宗语轩)、汪琥庭老师 (余启帆) 班级的助教. 在我们担任助教期间, 发现不少同学的学习方式和思维观念一直没有从中学数学中转变, 导致始终没有适应数学分析的课程体系; 从部分同学的作业中也体现出数学语言使用不规范, 逻辑不清晰等问题. 基于我们担任半年助教期间的积累, 同时为了让后人更好地适应课程体系, 加深概念理解, 强化分析功底, 并适当开拓视野, 我们共同编写了此份《中国科学技术大学数学分析 (B1) 习题课讲义》.

本讲义的内容编排基本参照数学分析 (B1) 课程教材《数学分析讲义 (第 1 册)》的顺序, 依次如下: 极限, 函数的连续性, 一元微分学及其应用, 不定积分, 一元积分学及其应用, 无穷级数. 以上内容我们将以章节的形式为大家呈现, 由于本讲义是习题课讲义, 从定位上可以看作课堂内容的补充、延伸和拓展, 我们在每个章节的编排上主要分为 “命题判断及推理”、“专题选讲” 和 “补充习题” 三部分内容 (部分章节略有出入).

- **命题判断及推理**包括命题证明和反例构造, 起到本讲义的 “开胃餐” 作用. 选取的一部分命题来源于教材概念、定理、例题和作业题的延伸, 以及学生作业中的典型 “伪证”, 这一部分的命题我们记为 **A 组**, 要求大家理解和掌握; 还有一部分命题难度较大, 用于拓展, 这一部分的命题我们记为 **B 组**, 让大家欣赏了解即可. 无论是命题证明还是反例构造, 都有助于培养学生独立思考能力, 同时加深概念理解, 明确概念间的地位和联系, 最重要的一点是帮助学生克服主观臆想, 走向逻辑推理, 更好地适应课程体系.

- **专题选讲**是本讲义的 “正餐”. 其中一部分是课堂内容的整理或补充, 包括课堂内容的整合加工, 以及一些难以理解的概念的讨论等; 另一部分是在知识层面和技巧层面上进行适度的延伸及拓展, 但考虑到适用对象的问题, 我们不会在讲义中补充过深过难的拓展内容和奇技淫巧.

- **补充习题**是本讲义的 “加餐”. 我们把习题按难度和要求分为 **A/B/C** 三组. 其中 **A** 组

习题以中档题和少量基础题为主; **B 组**习题以一定技巧性, 灵活度较高, 分析味较重的较难题为主; **C 组**习题一部分来自灵活度很强, 分析味浓厚的难题, 一部分来自层层递进的探究题, 还有少部分题目在知识层面和证明方法上达到数学专业类数学分析的要求, 略超出本课程的要求上限, 但这部分题目有助于提升数学的证明能力和逻辑思维能力. 读者可以根据自己的需求, 选择相应层次的习题进行练习. 部分习题提示与解答会附在本讲义最后, 以供大家参考.

此外, 在期中、期末两个阶段, 我们还分别撰写了期中部分及期末部分的知识梳理, 便于大家复习备考.

程艺老师曾说过: "*Calculus 和 Analysis 两手都要抓! 两手都要硬!* " 分析固然是本课程的核心和精髓, 无需赘言; 但计算能力更是看家子、硬本领, 科学上很多问题都是通过正确的计算才能看出端倪并得以解决. 此外, 提升计算能力还可以训练人的直觉和洞察力, 从而提升认知层次. 因此, 本讲义在侧重分析的同时, 也力求把古典分析精妙与细致的计算力呈现出来.

特别感谢两个班级的老师, 其他助教和所有同学提供的问题, 解法及各种资料, 同时特别感谢 2020 级数院博士吴天学长对助教工作和本书撰写的大力支持.

由于笔者水平有限, 加之时间紧迫, 部分内容未免片面或有所疏漏, 笔误亦在所难免, 恳请广大读者批评指正, 感激不尽!

2019 级 数学科学学院 1 班 宗语轩
2022 年 1 月于杭州
2019 级 少年班学院 创新试点 3 班 余启帆
2022 年 1 月于广州

符号说明

- $a_n \uparrow a$: 数列 $\{a_n\}$ 单调递增趋于 a;
- $b_n \downarrow b$: 数列 $\{b_n\}$ 单调递减趋于 b.

[2]欢迎访问个人主页:
宗语轩: http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/
余启帆: http://home.ustc.edu.cn/~qifan/
闻道有先后, 内容有疏漏. 发现错误欢迎联系我们: zyx240014@mail.ustc.edu.cn, qifan@mail.ustc.edu.cn

目　录

第 1 章　极限

1.1　关于书写规范的建议

1.1.1　格式规范

1 言简意赅, 切忌跳步　不能省略关键步骤, 同时也不要过度交代与题目无关的东西. 如, 不要使用 "显然" " 易证" "易得" 等词语跳过一些关键步骤,[3] 更不要因为一些中间步骤难以证明, 试图通过 " 显然" 来蒙混过关;

2 依据充足, 逻辑清晰　必要时应当注明相应的定理、命题或结论, 逻辑表述上一定要清晰且准确. 如, 在推导过程中, 添加 "由定理…知…" "要证明 A, 只需证明 B. " " 往证: …" 等字眼;

3 语言规范, 符号得当　使用数学化的语言, 避免口语化的描述. 必要时可合理选用规范的逻辑符号或其他数学符号;

4 从模仿做起　对于格式规范的练习, 最好的参照就是教材上的例题, 应当仔细研究教材例题上数学语言的叙述方式, 并根据自身情况进行适当的模仿和训练.

1.1.2　作业中的典型问题

1 数学归纳法的书写格式不规范

例题 1.1 (Bernoulli 不等式)　设 $x \geqslant -1$, $n \geqslant 1$ 是正整数, 则有

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

证明　**用数学归纳法证明**上述命题成立.

(1) **当 $\boldsymbol{n=1}$ 时, 命题成立**;

(2) **假设 $\boldsymbol{n=k}$ $(\geqslant \mathbf{1})$ 时, 命题成立**, 即 $(1+x)^k \geqslant 1+kx$, 下证: 结论对 $n=k+1$ 也成立.

当 $n=k+1$ 时, 由归纳假设知

$$(1+x)^{k+1} \geqslant (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x,$$

即, **$\boldsymbol{n=k+1}$ 时, 命题也成立**.

由 (1)(2) 及数学归纳法知, 结论对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立. □

上述过程展示了规范的数学归纳法书写格式, 其中**黑体加粗**的四个步骤及归纳假设成立的推断过程一定不能省略.

[3] 如果这一结论确实显然, 那当然可以这么写.

2 数学语言不规范 如上所言, 作业中常出现证明中口语化描述偏多, 不会规范及正确使用数学语言及数学符号的问题.

如 "无穷大量乘以一个不是无穷小的量, 仍然是无穷大量" 以及 "a_n 无限逼近于 0" 等等. 这些口语化的描述不允许出现在数学证明中, 必须要用严格的 $\forall, \exists$ 等数学符号 (或文字), 并通过合适的数学语言进行刻画. 同时还需注意数学符号使用的逻辑顺序, 以及数学符号使用的合理性及规范性.

例题 1.2 用定义证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.

证明 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$(取)$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则 $\forall$(当)$n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$. □

如上所示, 在用 "$\varepsilon-N$" 语言证明时, 必须按照 "任意 — 存在— 任意 — 给定精度精确化" 四个步骤的顺序进行. 常见错误如下:

(1) 缺少某个 (某些) 逻辑符号, 或者逻辑符号未按照正确顺序使用;

(2) N 的取值依赖于 n. N 的取值必须是仅与 ε 有关的变量, 不能依赖于 n, 所以 "$\forall\varepsilon>0$" 写在 "$\exists N=\cdots$" 之前就是为了固定 ε 的值, 以便最后的精确化处理.

(3) 常见错误格式: 对 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|\dfrac{\sin n}{n}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, 只用取 $n>\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 即可.

(4) 用夹逼原理 (教材**定理 1.7**) 证明. 本题要求用定义法证明, 不应出现夹逼原理.

例题 1.3 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 又 $|b_n|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

提示 (1) 通过定义证明.

证明 (1) (1) 当 $M=0$ 时, $b_n=0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ $\Longrightarrow$ $a_nb_n=0$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$;

(2) 当 $M>0$ 时, 对 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 知, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n|<\dfrac{1}{M}\varepsilon$, 从而 $|a_nb_n|\leqslant M|a_n|<\varepsilon$, 由定义知, $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

□

注意 对 $M=0$ 的情况单独讨论.

提示 (2) 运用夹逼原理.

证明 (2) 注意到,

$$0\leqslant|a_nb_n|\leqslant M|a_n|,$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 及夹逼原理知, $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$. □

错误格式 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_nb_n|\leqslant M\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0.$

说明 上述错解存在逻辑谬误. 因为敛散性未知的情况下, 不能直接对极限形式比较大小关系. 这也可能是由夹逼原理书写格式不规范造成的, 应当对数列大小进行比较, 而不是对极限进行比较.

3 分类讨论不齐全 在分类讨论时, 常出现分类讨论不齐全, 特殊情况欠考虑的情况. 此处不做详细展开.

1.2 命题判断及推理

判断下列命题或推断是否成立, 并说明理由.

1.2.1 A 组

1 若 $a_n>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \iff \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

2 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a \iff \lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.

3 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

4 $\{a_n\}$ 中任两个子列 $\{a_{k_n}\}$ 和 $\{a_{l_n}\}$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{k_n}-a_{l_n})=0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, $a\in\mathbb{R}$.

5 $a_n>0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1 \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

6 若 $a_n\neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\neq 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

7 无界数列一定是无穷大量.

8 非负数列极限是非负数, 正项数列极限是正数.

9 若数列 $\{a_n\}$ 是单调数列, 则 $\{a_n\}$ 收敛 $\iff$ $\{a_n\}$ 有收敛子列.

10 若对任意 $n,p\in\mathbb{N}^*$, 均有 $|a_{n+p}-a_n|<\dfrac{p}{n^2}$, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

11 若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=0$, 则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. 若假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 回答同样的问题.

12 判断数列 $\{a_n\pm b_n\}$, $\{a_n\cdot b_n\}$ 的敛散性:

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散.

13 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l,\ \lim\limits_{y\to y_0} g(y)=x_0 \implies \lim\limits_{y\to y_0} f(g(y))=l$.

1.2.2 参考答案 - A 组

1 $\not\Longrightarrow$. 反例: $a_n=\dfrac{1}{2^n}$; $\not\Longleftarrow$. 反例: $a_n=1$.

2 $\Longrightarrow$. 定义法证明即可; $\not\Longleftarrow$. 反例: $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

3 $\not\Longrightarrow$. 反例: $a_n=(-1)^n$; $\Longleftarrow$. 截成两段再用定义证明即可, 或者运用 Stolz 定理.

4 $\Longrightarrow$. 利用反证法, 并把 $\{a_n\}$ 发散转化成 Cauchy 列形式; $\Longleftarrow$. 利用 2 的结论即可.

5 $\Longrightarrow$. $\exists q$ 满足 $l^{-1}<q<1$ 及 $\exists n\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q \implies a_n<a_N\cdot q^{n-N} \implies \lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

6 $\Longrightarrow$. 定义法证明即可; $\not\Longleftarrow$. 反例: $a_n=n$.

7 错误. 反例:$a_n=n(1-(-1)^n)$.

8 正确; 错误. 反例: $a_n=\dfrac{1}{n}$.

9　$\Longleftrightarrow$. 用定义证明即可.

10　正确. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时, 对 $\forall p > 0$, 有

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k - a_{k-1}| < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\{a_n\}$ 收敛.

11　不成立. 构造数列:

$$a_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2} = 0, 1, 0, 1, \cdots, \quad b_n = \frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} = 1, 0, 1, 0, \cdots,$$

则 $a_n b_n = 0$, 自然有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$; 但显然 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均不存在.

若假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则答案是肯定的.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = 0$, 则结论自然成立;

(2) 若 $a \neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \dfrac{0}{a} = 0$, 结论成立.

12

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}$ 发散, 数列 $\{a_n b_n\}$ 的敛散性不确定.

(a) 假设数列 $\{a_n \pm b_n\}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \mp\left(\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) - \lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$, 则数列 $\{b_n\}$ 收敛, 矛盾. 故数列 $\{a_n \pm b_n\}$ 发散.

(b) 取 $a_n = 0$, 则 $a_n b_n = 0$, 数列 $\{a_n b_n\}$ 收敛;

(c) 取 $a_n = 1$, 则 $a_n b_n = b_n$, 数列 $\{a_n b_n\}$ 发散.

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ 的敛散性皆不确定.

(a) 取数列

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = (-1)^{n+1},$$

则 $a_n + b_n = 0$, 数列 $\{a_n + b_n\}$ 收敛; $a_n - b_n = 2 \cdot (-1)^n$, 数列 $\{a_n - b_n\}$ 发散; $a_n b_n = (-1)^{2n+1} = -1$, 数列 $\{a_n b_n\}$ 收敛;

(b) 取数列

$$a_n = b_n = (-1)^n,$$

则 $a_n + b_n = 2 \cdot (-1)^n$, 数列 $\{a_n + b_n\}$ 发散; $a_n - b_n = 0$, 数列 $\{a_n - b_n\}$ 收敛; $a_n b_n = 1$, 数列 $\{a_n b_n\}$ 收敛.

13　$\not\Longrightarrow$. 反例: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$, $g(y) \equiv 0$, $x_0 = y_0 = 0$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \neq \lim\limits_{y\to y_0} f(g(y)) = 1$.

1.3　专题选讲

1.3.1 实数理论

1 实数 $\triangleq$ 有序完备域

有序 Archimedes 序;

完备 拓扑结构;

域 代数结构 (四则运算封闭).

$$\mathbb{N} \xRightarrow{\text{减法}} \mathbb{Z} \xRightarrow{\text{除法}} \mathbb{Q} \xRightarrow{\text{极限}} \mathbb{R} \xRightarrow{x^2+1=0} \mathbb{C}$$

2 实数的刻画方式

(1) **十进制小数**: $a_0.a_1a_2\cdots=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}$.

(2) **Dedekind 分割**:

$$A:=\left\{x\in\mathbb{Q}:x<0 \text{ or } (x>0 \text{ and } x^2<2)\right\},B:=\left\{x\in\mathbb{Q}:x>0 \text{ and } x^2>2\right\},$$

则 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\mathbb{Q}$.

(3) **Cauchy 列**: 用收敛数列的极限定义实数. 例如, 设

$$a_1\in\mathbb{Q},\quad a_1>\sqrt{2},\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right),$$

可推知 $a_n\in\mathbb{Q}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$.

3 实数完备性的六个等价表述形式

(1) 单调有界定理

(2) Bolzano-Weierstrass 定理 (列紧性定理)

(3) Cauchy 收敛准则

(4) 确界原理

(5) 闭区间套定理

(6) 有限覆盖定理[4]

例题 1.4 证明: $n\in\mathbb{N}^*,\sqrt{n}\notin\mathbb{N}^* \implies \sqrt{n}\notin\mathbb{Q}^*$.

证明 用反证法. 设 $\sqrt{n}=\dfrac{p}{q}$, $(p,q)=1$ 且 $p,q\in\mathbb{N}^*$. 则 $\exists m\in\mathbb{N}^*$, 使得 $m<\dfrac{p}{q}<m+1$. 而 $q_1:=p-qm\in(0,q)$, 故

$$\frac{p}{q}=\sqrt{n}=\frac{p}{q}\cdot\frac{p-qm}{p-qm}=\frac{qn-pm}{q_1}:=\frac{p_1}{q_1}.$$

由 $q>q_1$ 知 $p>p_1$. 而 $p,q\in\mathbb{N}$, 由无穷递降法知上述过程不能无限进行下去, 矛盾. □

例题 1.5 设 x 是给定的无理数, 则 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\exists p,q\in\mathbb{Z}$, 使得 $|px-q|<\dfrac{1}{n}$.

证明 考虑 $\{x\},\{2x\},\dots,\{nx\}$ 这 n 个互不相同[5] 的无理数. 由抽屉原理知, $\exists i,j\in\{0,1,2,\dots,n\}$, 使得 $0<\{jx\}-\{ix\}<\dfrac{1}{n}$. 而 $\{(j-i)x\}=\{jx\}-\{ix\}$, 令 $k=j-i$, 则 $\{kx\}<\dfrac{1}{n}$. 取 $p=k,q=[kx]$, 则 $|px-q|<\dfrac{1}{n}$. □

由上述结论立即得到下面的推论:

推论 1.5 设 x 是给定的无理数, 则集合 $\{m+nx|m,n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

[4] 数学分析 (B1) 不要求掌握.

[5] 请读者思考为什么.

1.3.2 比值法 & 根值法

命题 1.1 (比值法) 已知数列 $\{a_n\}$.

(1) 若从某项起有 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant q < 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) 若从某项起有 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(3) 若有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, 则当 $q<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; 当 $q>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

命题 1.2 (根值法) 已知数列 $\{a_n\}$.

(1) 若从某项起有 $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant q < 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) 若从某项起有 $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(3) 若有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$, 则当 $q<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; 当 $q>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

说明 上述命题请读者自证. 使用该方法须将完整过程写清楚, 不能直接使用.

下面给出上述命题的应用.

1.3.3 比较数列收敛速度的万能工具

命题 1.3 把 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = 0$ 记作 $a_n \ll b_n\ (n\to\infty)$, 则 $(\ln n)^l \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n\ (k,l>0,\ a>1,\ n\to\infty)$.

提示 运用 Stolz 定理或比值法证明.

证明 (1) 注意到,

$$\frac{(n+1)^k-n^k}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} > n^{1+k}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right]$$

$$\geqslant \begin{cases} n^{1+k}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1\right] = n^k, & k>1 \\ n^{1+k}\left[\left(1+\dfrac{k}{2n}\right)-1\right] = \dfrac{k}{2}n^k, & 0<k\leqslant 1 \end{cases} \to +\infty \quad (n\to\infty)$$

由 Stolz 定理知,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{\ln(n+1)-\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = +\infty. \quad (\alpha>0)$$

(2) 记 $c_n = \dfrac{a^n}{n^k}$. 则 $\exists N\in\mathbb{N}^*$. 当 $n>N$ 时, 有 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k < \dfrac{1+a}{2}$. 故当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k} > \frac{2a}{1+a} \implies c_n > \left(\frac{2a}{1+a}\right)^{n-N} c_N \to +\infty \quad (n\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

(3) 记 $c_n = \dfrac{n!}{a^n}$. 取 $N=[2a+2]$. 当 $n>N$ 时, 有

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+1}{a+1} > 2 \implies c_n > 2^{n-N}c_N \to +\infty \quad (n\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

(4) 记 $c_n = \dfrac{n^n}{n!}$. 则

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 \implies c_n > 2^{n-1}c_1 \to +\infty \quad (n\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

□

例题 1.6　求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n!)^k}{n^n}$ $(k\in\mathbb{N}^*)$.

解　$k=1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$; $k\geqslant 2$ 时, 注意到 $\dfrac{(n!)^2}{n^n}\leqslant\dfrac{(n!)^k}{n^n}$, 而

$$\frac{(n!)^2}{n^n} = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n-1} k(n+1-k)}{n^{n-2}} \geqslant \frac{(2n-2)^{n-2}}{n^{n-2}} \to +\infty \quad (n\to\infty).$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^k}{n^n}=+\infty$. □

例题 1.7　求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln^2(n+1)-\ln^2 n)$.

解　我们有

$$\begin{aligned}0 &< \ln^2(n+1)-\ln^2 n = (\ln(n+1)-\ln n)(\ln(n+1)+\ln n)\\ &< 2\ln(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{2\ln(n+1)}{n},\end{aligned}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln(n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\ln(n+1)}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 0.$$

由夹逼原理知, $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln^2(n+1)-\ln^2 n)=0$. □

1.3.4　自然对数的底 e

在大学教材中, 我们一般把 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 作为 e 的定义. 若进一步想了解自然对数的底 e 的本原和历史, 可以查阅有关数学史的书, 这些内容在本讲义中不再赘述.

我们同时考察如下两个数列:

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \quad (n\in\mathbb{N}^*).$$

显然, 数列 $\{s_n\}$ 严格递增, 且由

$$s_n \leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n} < 3$$

知 $\{s_n\}$ 有上界. 由单调有界定理知 $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在.

由均值不等式知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{ 个}} < \left(\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

因此数列 $\{e_n\}$ 单调递增. 此外, 利用二项式展开, 得

$$e_n=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

由 $\{e_n\}$ 的展开式知, $e_n\leqslant s_n<3$, 故 $\{e_n\}$ 有上界. 由单调有界定理知 $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}e_n$ 存在, 即 e 的定义是合理的. 我们利用如下不等式来得到 $s=\mathrm{e}$.

例题 1.8　证明: $s_n-e_n<\dfrac{3}{2n}$.

引理 1.1　$n\in\mathbb{N}^*$, 对 $\forall r_1,r_2,\ldots,r_n\in(0,1)$, 均有 $\prod\limits_{k=1}^{n}(1-r_k)\geqslant 1-\sum\limits_{k=1}^{n}r_k$.

提示　用数学归纳法证明. 引理的证明留给读者自行完成.

回到原题.

证明　利用 e_n 的二项式展开式, 由上述引理知

$$e_n=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{t=1}^{k-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)\geqslant 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\sum_{t=1}^{k-1}\frac{t}{n}\right)=s_n-\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}>s_n-\frac{3}{2n}.$$

即 $s_n-e_n<\dfrac{3}{2n}$. □

又因为 $s_n\geqslant e_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2n}=0$. 由夹逼原理知 $s=\mathrm{e}$.

为得到 e 的近似值, 利用如下不等式, 我们可用 s_n 的值进行逼近.

例题 1.9　证明: $0<\mathrm{e}-s_n\leqslant\dfrac{1}{n!n}$.

证明　左侧不等式显然成立. 下证右侧不等式成立. 对 $\forall m>0$, 有

$$s_{n+m}-s_n=\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k!}<\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(n+1)^k}<\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}.$$

令 $m\to\infty$, 得 $\mathrm{e}-s_n\leqslant\dfrac{1}{n!n}$. □

因此, 用 s_{10} 逼近 e 所产生得误差小于 10^{-7} $\Longrightarrow$ $\mathrm{e}=2.71828\ldots$

同时, 利用上述不等式我们还可以证明如下命题:

例题 1.10　证明: e 是无理数.

证明　用反证法. 假设 $\mathrm{e}=\dfrac{p}{q}$, 其中 $p,q\in\mathbb{N}^*$. 由于 $2<e<3$, 因此 $q\geqslant 2$.

由 $0<\mathrm{e}-\ s_n\leqslant\dfrac{1}{n!n}$ 得

$$0<q!(\mathrm{e}-s_q)\leqslant\frac{1}{q}\leqslant\frac{1}{2}.$$

但是

$$q!(\mathrm{e}-s_q)=(q-1)!p-q!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q}\right)$$

是整数, 矛盾. □

由此可知, 数列 $\{e_n\}$ 与 $\{s_n\}$ 各项都是有理数, 但它们的极限却是无理数. 这又一次说明有理数域是不完备的.

习题

1　证明: 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 是严格递减数列.

提示　取倒数, 用均值不等式证明即可.

易知 $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. 由此可得 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}<\mathrm{e}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

取对数得 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$. 我们把推广后的情形留给读者自行完成.

2　设 $n\in\mathbb{N}^*$ 且 $k=1,2,\cdots$. 证明不等式:

$$\frac{k}{n+k}<\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<\frac{k}{n}.$$

对 $\dfrac{1}{k+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)<\dfrac{1}{k}$ 分别取 $k=1,2,\ldots,n$. 累加后得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

3　利用上述不等式来解决如下问题.

(1) 令 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln(n+1)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. 证明: $\gamma:=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在;

(2) 利用 (1) 证明: $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$;

(3) 利用 (2) 证明: $1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}=\ln 2\sqrt{n}+\dfrac{\gamma}{2}+\varepsilon_n$.

1.3.5　由迭代生成的数列

说明　这里“由迭代生成的数列”指给定数列 $\{a_n\}$ 中的 a_1 后, 用递推公式 $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ 通过迭代生成的数列.

例题 1.11　设 $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ (n 重根式), 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解　将数列转化成递推形式

$$a_1=\sqrt{2},\quad a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}.$$

用数学归纳法证明: $a_n>a_{n-1}(n\geqslant 2)$. 当 $n=2$ 时, 经计算得 $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>2=a_1$, 命题成立. 假设 $n=k(k\geqslant 2)$ 时命题成立, 则

$$a_{k+1}-a_k=\sqrt{a_k+2}-\sqrt{a_{k-1}+2}=\frac{a_k-a_{k-1}}{\sqrt{a_k+2}+\sqrt{a_{k-1}+2}}>0.$$

所以 $n=k+1$ 时命题成立, 故数学归纳法得证.

用数学归纳法类似可得 $a_n<2$. 由单调有界原理知 $\{a_n\}$ 收敛. 设其极限为 a. 在递推公式 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ 两侧令 $n\to\infty$, 得 $a=\sqrt{2+a}$. 由 $a\geqslant 0$ (因为 $a_n>0$) 知 $a=2$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$. □

例题 1.12　设 $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

分析 先确定 a_n 的界. 再假定 $\{a_n\}$ 收敛, 记极限为 a. 在递推公式两侧令 $n\to\infty$ 得 $a^2-a-1=0$ 解得 a. 再利用 a 探究 a_{n+2} 与 a_n 的关系证明 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 用数学归纳法证明: $a_n\in[1,2]$ (请读者自证). 通过题目中的递推关系导出

$$a_{n+2}=2-\frac{1}{a_n+1}.$$

利用 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (注意 a 满足 $a^2-a-1=0$) 得

$$a_{n+2}-a=\frac{a_n-a}{(a_n+1)(a+1)}.$$

由此知 $a_{n+2}-a$ 和 a_n-a 同号且 $|a_{n+2}-a|<|a_n-a|$. 再由 $a_1=1,a_2=2$ 知, 数列 $\{a_{2k-1}\}$ 严格递增, 数列 $\{a_{2k}\}$ 严格递减. 由单调有界原理知 $\{a_{2k-1}\}$, $\{a_{2k}\}$ 收敛. 在递推公式 $a_{n+2}=2-\dfrac{1}{a_n+1}$ 两侧令 $n\to\infty$, 可知两数列极限都是 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

习题：根式的逼近

1 给定正实数 a, 设数列 $\{x_n\}$ 满足迭代公式 A: $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. 其中 $x_1>\sqrt{a}$.

(1) 证明: 数列 $\{x_n\}$ 递减趋于 $\sqrt{a}$. 这表明, 从任意大于 $\sqrt{a}$ 的初值出发, 可用迭代公式 A 近似地计算 $\sqrt{a}$.

(2) 定义逼近的误差项 $\varepsilon_n=x_n-\sqrt{a}$. 证明: $\varepsilon_{n+1}<\dfrac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}$.

(3) 证明: 如果 $b=2\sqrt{a}$, 那么 $\varepsilon_{n+1}<b\left(\dfrac{\varepsilon_1}{b}\right)^{2^n}$. 这表明, 迭代公式 A 收敛速度非常快.

(4) 计算 $\sqrt{3}$ 的精确到小数点后 5 位的近似值.

2 给定 $a>1,y_1>\sqrt{a}$, 设数列 $\{y_n\}$ 满足迭代公式 B: $y_{n+1}=\dfrac{a+y_n}{1+y_n}=y_n+\dfrac{a-{y_n}^2}{1+y_n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

(1) 证明: 数列 $\{y_{2n-1}\}$ 是递减数列.

(2) 证明: 数列 $\{y_{2n}\}$ 是递增数列.

(3) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\sqrt{a}$.

(4) 试讨论迭代公式 B 逼近 $\sqrt{a}$ 的收敛速度, 并与迭代公式 A 进行比较.

1.3.6 多数列关系下数列收敛性问题

例题 1.13 设 a,b,c 是给定的三个实数, 令 $a_0=a$, $b_0=b$, $c_0=c$, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 满足 $\begin{cases}a_n=\dfrac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2},\\ b_n=\dfrac{a_{n-1}+c_{n-1}}{2},\\ c_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\end{cases}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\dfrac{a+b+c}{3}$.

提示 由条件知 $a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$ 及 $a_n-b_n=\dfrac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}$.

证明　两式作差得

$$|a_n-b_n|=\left|\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{2}\right|=\left|\frac{a_{n-2}-b_{n-2}}{2^2}\right|=\cdots=\left|\frac{a-b}{2^n}\right|\to 0\quad(n\to\infty).$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$. 同理, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-c_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-c_n)=0$. 而三式相加得

$$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=\cdots=a+b+c.$$

由

$$a_n=\frac{(a_n+b_n+c_n)+(a_n-b_n)+(a_n-c_n)}{3}$$

可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{a+b+c}{3}$. 同理, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{a+b+c}{3}$. □

例题 1.14　设 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\to a\in\mathbb{R}$, 又设 $\{b_n\}$ 是正数列, $c_n=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$. 求证:

(1) $\{c_n\}$ 收敛;

(2) 若 $(b_1+b_2+\cdots+b_n)\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

提示　以数列 $\{B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\}$ 是否有界为分类依据进行分类讨论. (从而 (2) 为无界的情况.)

对于 (1), 我们无法求出数列 $\{c_n\}$ 的极限, 而要证其收敛, 故应考虑 Cauchy 收敛准则.

证明 (1)　(2) 若数列 $\{B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\}$ 无界, 即 $B_n\to+\infty$, 又 $\{B_n\}$ 严格单调递增, 由 Stolz 定理得:

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{B_n-B_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

(1) 若数列 $\{B_n\}$ 有界, 又 $\{B_n\}$ 严格单调递增, 故数列 $\{B_n\}$ 收敛.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$. 注意到, $B_n\geqslant b_1\implies B\geqslant b_1>0$.

记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$. 往证: 数列 $\{S_n\}$ 极限存在, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}S_n}{\lim\limits_{n\to\infty}B_n}$ 也存在.

因为 $a_n\to a\ (n\to\infty)$, 所以数列 $\{a_n\}$ 有界, 即 $\exists M>0$, 使得 $|a_n|<M\ (n=1,2,\cdots)$.

由数列 $\{B_n\}$ 收敛及 Cauchy 收敛准则知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, 对 $\forall p\in\mathbb{N}^*$, 有 $|B_{n+p}-B_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$. 则 $n>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n|&=|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|\\&\leqslant M\,|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}|\\&=M\,|B_{n+p}-B_n|\\&<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

由上式及 Cauchy 收敛准则知, $\{S_n\}$ 收敛, 记 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, 则

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{B_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}S_n}{\lim\limits_{n\to\infty}B_n}=\frac{S}{B}.$$

故数列 $\{c_n\}$ 收敛. □

证明 (2)　仅对第 (1) 问进行证明.

因为 $a_n \to a\ (n\to\infty)$, 所以数列 $\{a_n\}$ 有界, 即 $\exists M>0$, 使得 $|a_n|<M\ (n=1,2,\cdots)$.

由数列 $\{B_n\}$ 收敛及 Cauchy 收敛准则知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得 $n>N$ 时, 对 $\forall p\in\mathbb{N}^*$, 有 $|B_{n+p}-B_n|<\dfrac{b_1\varepsilon}{2M}$. 则 $n>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}
|c_{n+p}-c_n| &= \left|\frac{\left(\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_ib_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)-\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i\right)\left(\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} b_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n+p} b_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)}\right| \\
&\leqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} |a_i|\,b_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)+\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|\,b_i\right)\left(\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} b_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)^2} \\
&\leqslant \frac{M\left(\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} b_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)+M\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} b_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)^2} \\
&= \frac{2M\left(\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} b_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i} < \frac{2M\cdot\dfrac{b_1\varepsilon}{2M}}{b_1}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

故由 Cauchy 收敛准则知, 数列 $\{c_n\}$ 收敛. □

1.3.7　Stolz 定理的应用

注意　Stolz 定理的逆命题并不成立. 例如对 $a_n=(-1)^n, b_n=n$, 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$, 但 $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=2(-1)^n$ 的极限并不存在.

例题 1.15　设 $k\in\mathbb{N}^*$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$.

证明　由 Stolz 定理得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(k+1)n^k+\cdots+(-1)^k}=\frac{1}{k+1}.$$

□

例题 1.16　设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 令 $y_n=n(x_n-x_{n-1})$. 证明: 若数列 $\{y_n\}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

证明　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$. 由 Stolz 定理知

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(nx_n-(n-1)x_{n-1})=A+B.$$

所以 $B=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. □

例题 1.17　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>0$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$, $n\in\mathbb{N}$. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-\sqrt{2n})=0$.

提示 对 $a_1>0,\ a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 两边平方, 先证明 $a_n\to+\infty\quad(n\to\infty)$, 然后用 Stolz 定理.

证明 (1) 数归可得 $a_n>0$. 对 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 两边平方, 得

$$a_{n+1}^2=a_n^2+2+\frac{1}{a_n^2}>a_n^2+2,$$

所以

$$a_n^2>a_{n-1}^2+2>a_{n-2}^2+4>\cdots>a_1^2+2(n-1)\to+\infty\quad(n\to\infty)$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2a_n^2}\right)=1.$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$.

(2) 由 (1) 知,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{2n})&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-2n}{a_n+\sqrt{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-2n}{\sqrt{2n}\left(\frac{a_n}{\sqrt{2n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-2n}{2\sqrt{2n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-a_{n-1}^2-2}{2(\sqrt{2n}-\sqrt{2(n-1)})}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2a_n^2(\sqrt{2n}-\sqrt{2(n-1)})}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4a_n^2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}+\sqrt{2(n-1)}}{n}\\&=0.\end{aligned}$$

□

1.3.8 无穷小量 & 无穷大量 & 阶

几个重要的等价关系

(1) $\mathrm{e}^x-1\sim x\ (x\to0)$;

(2) $\sin x\sim x\ (x\to0)$;

(3) $\ln(1+x)\sim x\ (x\to0)$;

(4) $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\ (x\to0)$;

(5) $\ln x\sim o(x^\alpha)\ (x\to+\infty,\ \alpha>0)$;

(6) $x^k\sim o(a^x)\ (x\to+\infty,\ a>1)$;

(7) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\ (x\to0)$;

(8) $\arctan x\sim x\ (x\to0)$.

例题 1.18　证明: $O(x^2)=o(x)\ (x\to 0)$.

证明　设 $\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在某个 0 的去心邻域上有界, 即 $\exists M>0$ 和 $\delta>0$, 当 $0<|x|<\delta$, 有 $|f(x)|\leqslant Mx^2$. 则当 $0<|x|<\delta$, 有

$$0\leqslant\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{Mx^2}{x}\right|=|Mx|,$$

由夹逼原理知, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$. 所以 $O(x^2)=o(x)\ (x\to 0)$. □

例题 1.19　证明: 当 $x\to 0$ 时, 无穷小量 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 没有阶.

提示　考察 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}$ 即可. 可证得 $\alpha\geqslant 1$ 时极限不存在, $\alpha<1$ 时极限值是 0.

例题 1.20　设 $f(x)=\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}, m,n\in N^*$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解　令 $y=x-1$, 则 $\lim\limits_{y\to 0}f(1+y)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)$. 我们有

$$\begin{aligned}
f(1+y)&=\frac{m}{1-(1+y)^m}-\frac{n}{1-(1+y)^n}\\
&=\frac{m[1-(1+y)^n]-n[1-(1+y)^m]}{[(1+y)^m-1][(1+y)^n-1]}\\
&=\frac{n[my+\frac{m(m-1)}{2}y^2+o(y^2)]-m[ny+\frac{n(n-1)}{2}y^2+o(y^2)]}{nm(y+o(y))^2}\\
&=\frac{\frac{mn}{2}(m-n)y^2+o(y^2)}{mn(y^2+o(y^2))}\\
&=\frac{m-n}{2}+o(1)\quad(y\to 0).
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{m-n}{2}$. □

1.4　补充习题

1.4.1　A 组

1　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x+x^2)^{1/n}-1}{\sin 2x}\ (n\in\mathbb{N}^*)$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1})$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}\ (n\in\mathbb{N}^*)$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}((n+\ln n)^\alpha-n^\alpha)$ $(\alpha\in(0,1))$;

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

2　证明: 数列 $\{\sin n\}$ 发散.

3　设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 发散.

4　设常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x+k}=0$.

5　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)=1$. 证明: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在.

6　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_n<1$, 且有不等式 $(1-a_n)a_{n+1}>\dfrac{1}{4}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

7　设数列 $\{x_n\}$ 是一个非负数列, 满足 $x_{n+1}\leqslant x_n+\dfrac{1}{n^2}(n\in\mathbb{N}^*)$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

8　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}=0$.

9　设正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 无界.

10　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

1.4.2　B 组

1　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!\mathrm{e}-[n!\mathrm{e}])$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

2　证明: 设数列 $\{a_n\}$ 是正项有界数列, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=0$.

3　对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 及 $\alpha>1$, 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{n^\alpha}$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

4　设 a,b 是给定的两个正数, 且 $a>b>0$. 令 $a_0=a,b_0=b$, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},n\in\mathbb{N}^*$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

5　设 $a_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n},n\in\mathbb{N}^*$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

6　设 E 是非空有上界的数集, 且它的上确界 a 不在 E 中. 求证: 在 E 中存在数列 $\{x_n\}$ 严格递增趋于 a.

7　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\dfrac{1}{q}$(其中 $0<q\leqslant 1$), 并且 $x_{n+1}=x_n(1-qx_n)(n\in\mathbb{N}^*)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\dfrac{1}{q}$.

8　设数列 $\{y_n\}$ 满足 $y_n=2x_n+x_{n-1}$, 证明: 若 $\{y_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

9 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}\subseteq\mathbb{N}^*$, 且满足 $a_1=b_1=1, a_{n+1}+\sqrt{3}b_{n+1}=(a_n+\sqrt{3}b_n)^2, n\in\mathbb{N}^*$. 证明: 数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ 收敛, 并求出其极限值.

10 设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$, 且存在常数 k, 使得 $|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|\leqslant k$ 对所有 $n\in\mathbb{N}^*$ 成立. 令 $z_n=x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=0$.

11

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足函数方程 $f(2x)=f(x)$, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限. 证明: $f(x)$ 是常值函数;

(2) a,b 是两个大于 1 的常数, 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x=0$ 的邻域内有界, 并且对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $f(ax)=bf(x)$. 证明: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$.

12 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数且对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$|xf(y)-yf(x)|\leqslant M|x|+M|y|,$$

其中 $M>0$. 求证:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 收敛;

(2) 存在常数 a 使得对任意 x, 有 $|f(x)-ax|\leqslant M$.

13 记 $H_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, 用 k_n 表示使得 $H_k\geqslant n$ 成立的最小下标. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n}=\mathrm{e}.$$

14 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n=n(a_{n-1}+1)$, $n=2,3\cdots$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{a_k}\right)$.

1.4.3 C 组

1 设数列 $\{a_n\}$, 满足 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

2 设数列 $\{S_n\}$ 满足 $S_n=\left(\dfrac{1}{n}\right)^n+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$.

(1) 证明: 数列 $\{S_n\}$ 单调递增且有界, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

3 证明数列 $\sqrt{7},\sqrt{7-\sqrt{7}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}},\cdots$ 收敛, 并求其极限.

4 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$. 证明:$f(x)=g(x)$.

5 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, 且 $f(x)-f(\dfrac{x}{2})=o(x)$ $(x\to0)$. 证明: $f(x)=o(x)$ $(x\to0)$

6

(1) 定义 Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$ 证明: 对 $\forall x_0\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在;

(2) 定义 Riemann 函数 $R(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n},\ (m,n)=1,\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$ 证明: $\forall x_0\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$.

7 Cesàro 求和极限 设 $\{a_n\}$ 为实数数列, 我们定义算术平均值数列

$$\sigma_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\quad(n\in\mathbb{N}^*).$$

我们已证明命题: 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=a$, 并举了逆命题不成立的反例. 现在我们考虑如下问题:

(1) 是否存在数列 $\{a_n\}$ 使得对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 均有 $a_n>0$ 且 $\limsup\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$?

(2) 对 $k\in\mathbb{N}^*$, 记 $b_k=a_{k+1}-a_k$. 证明: 对 $\forall n\geqslant 2$, 均有 $a_n-\sigma_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}kb_k$;

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=0$, 并且 $\{\sigma_n\}$ 收敛. 证明: $\{a_n\}$ 亦收敛;

(4) 设数列 $\{nb_n\}$ 有界, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$. 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sigma$.

8 连分数 我们进行如下过程: 对正数 a, 选取小于 a 的最大自然数 k_0, 令 $a=k_0+r_0$, 其中 $0\leqslant r_0<1$. 若 $r_0=0$, 则该过程终止; 若 $r_0>0$, 则选取小于 a 的最大自然数 k_1, 令 $\dfrac{1}{r_0}=k_1+r_1$, 其中 $0\leqslant r_1<1$. 若 $r_1=0$, 则该过程终止; 若 $r_1>0$, 则选取小于 a 的最大自然数 k_2, 令 $\dfrac{1}{r_1}=k_2+r_2$, 其中 $0\leqslant r_2<1$. 以此类推下去, 我们得到连分数的定义, 其展开式记作:

$$a=k_0+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{k_3+\cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

例如, π 的连分数展开式是:

$$\pi=3.14159265\cdots=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

(1) 直接写出 3.245 和 $\dfrac{37}{97}$ 的连分数展开式, 并证明: 正数 a 是有理数的充要条件是存在自然数 m, 使得 $r_m=0$. 此时

$$a=k_0+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{k_m}}}}$$

被称为有限连分数.

(2) 若正数 a 是无理数. 记 $k_0=\dfrac{p_0}{q_0}$, $k_0+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{k_n}}}}=\dfrac{p_n}{q_n}$, $(p_n,q_n)=1$.

(a) 若对任意自然数 n, 均有 $k_n=1$, 直接写出 a 的值 (化简后的分式) ;

(b) 直接写出 $\sqrt{2}$ 的连分数展开式;

(c) 证明: 对任意正整数 n, 均有 $q_n\geqslant n-1$;

(d) 证明: 对任意自然数 n, 均有 $\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}<\dfrac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}}<a<\dfrac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}}<\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$;

(e) 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{q_n}=a$.

(3) 设 n 是无平方因子的正整数, 证明: $\sqrt{n}$ 的连分数展开式中数列 $\{k_n\}$ 从某项开始是周期数列.

第 2 章 函数的连续性

2.1 命题判断及推理

判断下列命题或推断是否成立, 并说明理由.

2.1.1 A 组

1 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一个闭子区间上连续 $\iff$ $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

2 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续 $\iff$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在.

3 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续 $\iff$ $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

4

(1) 设在 x_0 处 $f(x)$ 连续, 而 $g(x)$ 不连续, 判断函数 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处的连续性;

(2) 设在 x_0 处 $f(x)$, $g(x)$ 都不连续, 判断函数 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处的连续性.

5 $f(x)$ 在区间 I 上连续 $\iff$ $|f(x)|$ 在区间 I 上连续.

6 $f(x), g(x)$ 在区间 I 上连续 $\implies$ $M(x)=\max\left\{f(x),g(x)\right\}, m(x)=\min\left\{f(x),g(x)\right\}$ 在区间 I 上连续.

7 存在函数 $f(x)$, 满足 $f(x)$ 处处不连续但 $|f(x)|$ 处处连续.

8 若 $f(x), g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则 $f(x)=g(x)$ 对 $\forall x\in\mathbb{Q}$ 成立 $\implies$ $f(x)=g(x)$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立.

9 开区间 I 上的单调函数无第二类间断点.

2.1.2 B 组

1 存在 $\mathbb{R}$ 上的处处不连续但值域是区间的函数 $f(x)$.

2 $f(x), g(x)$ 具有介值性 $\implies$ $f(x)+g(x)$ 具有介值性.

3 存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$, 满足 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$.

4 存在处处不单调的连续函数 $f(x)$.

2.1.3 参考答案 - A 组

1 $\not\Rightarrow$. 反例: $f(x)=\tan x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\Longleftarrow$.

2 $\Longrightarrow$. 用 Cauchy 准则形式证明; $\Longleftarrow$. 构造 $F(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x), & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x), & x=b.\end{cases}$ 证明 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

3 $\Longrightarrow$. 见 2 ; $\not\Longleftarrow$.$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}, x\in(0,1)$.

4

(1) 函数 $f(x)\pm g(x)$ 在点 x_0 处不连续 (反证法), 函数 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处连续性无法判断 (考虑函数 $f(x)$ 在 x_0 处是否为 0);

(2) 均无法判断.

定义 Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$ 证明: 对 $\forall x_0\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在;

5 $\Longrightarrow$. 注意到 $||f(x)|-|f(x_0)||\leqslant|f(x)-f(x_0)|$; $\not\Longleftarrow$. 反例: $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ -1, & x\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

6 $\Longrightarrow$. 注意到 $M(x)+m(x)=f(x)+g(x), M(x)-m(x)=|f(x)-g(x)|$ 都在 I 上连续即可.

7 正确. $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ -1, & x\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

8 $\Longrightarrow$. 利用有理数的稠密性, 对无理点通过有理数列逼近即可.

9 正确. 对 $\forall x\in I$, 考虑定义域中的点列 $\{a_n\}$, 满足 $a_n\downarrow x_0$. 由单调有界原理知 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x_0)$ 存在. 同理可知, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x_0)$ 存在.

2.1.4 参考答案 - B 组

1 正确. 例如: $g(x)=\begin{cases}1-x, & x\in\mathbb{Q},\\ x. & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}g\left(\dfrac{1}{2}\right), & x=0,\\ g(x), & x\neq0,\dfrac{1}{2},\\ g(0), & x=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

2 $\not\Longrightarrow$. 反例: $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

则 $(f+g)(x)=\begin{cases}0, & x\neq0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

3 错误. 反证: 假设存在, 令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. 而 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 由连续函数的介值性知 $g(x)\equiv c, c\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. 而 $f(c)=2c\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 这与 $f:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ 矛盾.

4 正确. 例如: $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{f_0(4^{k-1}x)}{4^{k-1}}$. 其中 $f_0(x)$ 是周期为 1 且当 $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, 满足 $f_0(x)=|x|$ 的周期函数.

2.2 专题选讲

2.2.1 连续与一致连续

定义 2.1 ((逐点) 连续) "f 在 x_0 处 (逐点) 连续[6]" $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

定义 2.2 (一致连续) "f 在区间 I 上**一致连续**" $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对 $\forall x, x_0 \in I$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

注意 给定 $\varepsilon > 0$, 对不同的 x_0, $\delta(\varepsilon, x_0)$ 可能不同.

1 一致连续等价刻画

(1) Cauchy 判别准则形式: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$;

(2) 极限表达形式: $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \sup\limits_{\substack{\forall x_1, x_2 \in I \\ |x_1 - x_2| < \delta}} |f(x_1) - f(x_2)| = 0$.

2 连续与一致连续的区别

(1) "出牌" 顺序不同: 从定义看, 逻辑顺序上连续是先 x_0 后 δ, 一致连续是先 δ 后 x_0.

(2) 研究对象不同: 连续的研究对象是 x_0 一个点, 表示局部性质; 一致连续的研究对象是整个区间[7]I, 表示整体性质.

(3) δ 的依赖性不同: 连续中的 δ 由 $\delta(\varepsilon, x_0)$ 体现, δ 依赖于 ε, x_0 两个变量; 一致连续中的 δ 由 $\inf\limits_{x_0 \in I} \delta(\varepsilon)$ 体现, δ 仅依赖于 ε 一个变量.

3 Cantor 定理 有界闭区间上的连续函数一定一致连续.

4 一致连续的补充命题 以下命题请读者自证, 部分命题亦留作补充习题.

常用判别法 若 f 在区间 I 上可导, 则 f' 有界 $\xrightarrow[\text{Lipschitz}]{\text{微分中值定理}}$ f 在 I 上一致连续.

命题 2.1 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ 存在.

命题 2.2 若 $f(x)$ 在 I 上一致连续, 则对 $\forall \{x_n\}, \{y_n\} \subset I$, $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n - y_n) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

注意 逆命题不成立. 例如: $f(x) = \sqrt{x}, x \geqslant 0$.

命题 2.3 若 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在且有限, 则 f 在 $[a, +\infty)$ 上有界且一致收敛.

命题 2.4 f 在 $(a, b], [b, c)$ 上一致连续 $\Longrightarrow$ f 在 (a, c) 上一致连续.

命题 2.5 f, g 在 $[a, +\infty)$ 上有界且一致连续 $\Longrightarrow$ fg 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

注意 有界不能省略, 反例: $f(x) = g(x) = x, x \in \mathbb{R}^+$. 若把无穷区间换成有穷区间, 则有界可省略, 因为有穷区间的一致连续性包含有界.

命题 2.6 (一致连续的相容性) 设 $z = g(y)$ 在区间 J 上一致连续, 设 $y = f(x)$ 在区间 I 上一致连续且 $f(I) \subset J$. 则 $z = g(f(x))$ 在区间 I 上一致连续. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ 存在.

命题 2.7 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续且 f 是周期函数 $\Longrightarrow$ f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

---

[6]连续最原始的定义针对的是一点而不是区间. 事实上, 我们当然有 f 在区间 I 上连续的说法, 但其实质上表示的是 f 在 I 上每个点处处连续

[7]实际上, 一致连续的研究对象是点集即可, 只不过我们一般都在区间上讨论一致连续性.

注意　一个一致连续的函数, 其反函数未必一致连续. 例如: $f(x)=\ln x, x>1$.

例题 2.1　证明: $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证明 (1)　(具体请读者自行补充完整) 由 Cantor 定理知, $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上一致连续. 由 Lipschitz 判别法知, $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致连续 (导函数有界). □

证明 (2)　对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon^2$, 当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 利用 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geqslant\sqrt{|x_2-x_1|}$, 有

$$|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}|=\frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}\leqslant\sqrt{|x_2-x_1|}<\sqrt{\delta}<\varepsilon.$$

所以 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. □

例题 2.2　证明: $f(x)=\sin x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续.

证明　对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 取 $s_n=\sqrt{2n\pi}, t_n=\sqrt{\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi}$. 有

$$0<t_n-s_n=\frac{\pi}{2\left(\sqrt{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}+\sqrt{2n\pi}\right)}<\frac{\pi}{4\sqrt{2n\pi}}<\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0\quad(n\to\infty).$$

但

$$f(t_n)-f(s_n)=1.$$

故 $f(x)=\sin x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续. □

2.3　补充习题

2.3.1　A 组

1　研究下列函数在 $\mathbb{R}$ 上的一致连续性:

(1) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$;

(2) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2\sin^2 x}$.

2　$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且 $f(x)$ 是周期函数 $\Longrightarrow$ f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

3　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\{x_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的点列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, 证明: 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=A$.

4　证明: 奇数次多项式方程 $x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$ 至少有一个实根.

5　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上只有可去间断点, 定义 $g(x)=\lim\limits_{t\to x}f(t)$. 证明: $g(x)$ 是连续函数.

6　设 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调函数, $f(x)=\sin g(x)$. 求证: $f(x)$ 在任意点 x_0 的左右极限都存在.

7　设函数 $f(x):[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 一致连续, $\alpha\in(0,1]$. 求证: 函数 $g(x)=f^{\alpha}(x)$ 也在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

8　设 $f(x)$ 满足对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 均有 $f(x^2)=f(x)$, 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处连续, 证明: $f(x)$ 是常值函数.

2.3.2 B 组

1 定义: 设 I 为区间. 若存在 $k>0$, 使得 $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$ 对 $\forall x,y\in I$ 成立, 则称 f 在 I 上满足 **Lipschitz 条件**. 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上满足 Lipschitz 条件, 证明:

(1) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续;

(2) $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

2 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限. 证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上或者有最大值, 或者有最小值.

3 压缩映射原理 设函数 $f:[a,b]\to[a,b]$, 且对 $\forall x,y\in[a,b]$ 均有 $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$ 这里 $k\in(0,1)$ 是常数.

(1) 证明: 存在唯一的 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=x_0$;

(2) 任取 $x_1\in[a,b]$, 定义数列 $\{x_n\}:x_{n+1}=f(x_n),n\in\mathbb{N}^*$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$;

(3) 给出一个在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 使得对 $\forall x\neq y$, 均有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$, 但方程 $f(x)-x=0$ 无解.

4 设 $k<0$. 证明: 不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x))=kx$.

5 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$. 证明: 对 $\forall n\in\mathbb{N}^*,\exists x_n\in[0,1]$, 使得 $f(x_n)=f\left(x_n+\dfrac{1}{n}\right)$.

6 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(f(x))=\infty$. 证明: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

7 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上只有第一类间断点, 且对 $\forall x,y\in(a,b)$, 均有 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$. 证明: $f(x)$ 在 (a,b) 上连续.

8 设 $\alpha\in\mathbb{R},\beta\neq0$. 讨论函数 $f(x)=x^\alpha\sin x^\beta$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续性.

2.3.3 C 组

1 设 $f(x),g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 若存在 $x_n\in[a,b]$, 使得 $g(x_n)=f(x_{n+1})$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, 则必存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

2

(1) 证明: 不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 使其任一函数值都恰好被取到两次;

(2) 存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 使其任一函数值都恰好被取到三次.

3 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 型函数方程及其推广:

(1) 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上满足方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 证明: 对 $\forall x\in\mathbb{Q}$, 都有 $f(x)=xf(1)$.

(2) 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且满足方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 证明: 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 都有 $f(x)=xf(1)$.

(3) 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上满足方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 证明:

(i) 若 f 在一点 x_0 处连续, 则 $f(x)=xf(1)$;

(ii) 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上单调, 则 $f(x)=xf(1)$.

(4) 设函数 f 是 $\mathbb{R}$ 上不恒等于 0 的连续函数且满足方程 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 证明: $f(x)=a^x$, 其中 $a=f(1)>0$.

(5) 设函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续且满足方程 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 证明: $f(x)=0$ 或 $f(x)=x^a$, 其中 a 为常数.

4

(1) 定义 Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$ 求函数 $f(x)=xD(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的连续点, 并判断间断点类型;

(2) 定义 Riemann 函数 $R(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n},(m,n)=1,\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$ 求函数 $R(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的连续点, 并判断间断点类型.

第 3 章 一元微分学及其应用

3.1 命题判断及推理

判断下列命题或推断是否成立, 并说明理由.

3.1.1 A 组

1 $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\iff \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2}$ 存在且有限.

2 $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\implies \exists x_0$ 的邻域 I, 使得 $f(x)$ 在 I 上连续.

3 $f(x)$ 在区间 I 上可微, 且 $f'(x)$ 在区间 I 上单调 $\implies f'(x)$ 在 I 上连续.

4 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微. 则 $f'(x)>0 \iff f(x)$ 在 (a,b) 上严格递增.

5 $f(x),g(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微 $\implies \max\{f(x),g(x)\},\min\{f(x),g(x)\}$ 在 $x=x_0$ 处可微.

6 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸函数, 且 $\exists c\in(a,b)$, 使得 $f(a)=f(c)=f(b) \implies f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是常值函数.

3.1.2 B 组

1 $f(x)$ 在 (a,b) 上二阶可微 $\implies f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

2 若 $f(x)$ 在 x_0 处任意阶导数均为 0, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内是常值函数.

3 存在 $\mathbb{R}$ 上在无理点可微而在有理点不可微的连续函数 $f(x)$.

4 存在处处连续但处处不可微的连续函数 $f(x)$.

3.1.3 参考答案 - A 组

1 $\implies$. 左右导数定义; $\not\Longleftarrow$. 反例 $f(x)=|x|,x_0=0$.

2 $\not\Longrightarrow$. 反例: $f(x)=x^2D(x),x_0=0$.

3 $\implies$. 导函数无第一类间断点 + 开区间上的单调函数无第二类间断点. $\implies$ 导函数无间断点.

4 $\implies$. 见教材 **3.5**; $\not\Longleftarrow$. 反例: $f(x)=x^3,x\in(-1,1)$.

5 $\not\Longrightarrow$. 反例: $f(x)=x,g(x)\equiv 0,x_0=0$.

6 $\implies$. 见教材**定理 3.27**.

3.1.4 参考答案 - B 组

1 $\not\Longrightarrow$. 反例: $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

2　错误. 反例: $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处任意阶导数是 0 的证明详见《数学分析教程 上册 (第 3 版)》**P206–207**.

3　正确. 例如: $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{|x-r_k|}{3^k}, \mathbb{Q}=\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$ (其中 $\bigsqcup$ 表示无交并).

4　正确. 例如: $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a^k\cos\left(b^k\pi x\right)$. 其中 $0<a<1, b$ 为正奇数, $ab>1+\dfrac{3\pi}{2}$.

3.2　专题选讲

3.2.1　利用递推关系计算高阶导数

例题 3.1　设 $y=\arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

解　由 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ 知, y 有任意阶导数, 且 $\left(1+x^2\right)y'=1$. 由 Leibniz 公式得

$$\left(1+x^2\right)y^{(n)}+2(n-1)xy^{(n-1)}+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}=0.$$

将 $x=0$ 代入得到递推公式

$$y^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0).$$

把 $y(0)=0, y'(0)=1$ 代入得

$$y^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!,\quad y^{(2k)}(0)=0\quad(k\in\mathbb{N}^*).$$

□

例题 3.2　设 $y=\arcsin x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

解　由 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 知, y 有任意阶导数, 且 $\sqrt{1-x^2}y'=1$. 求导得

$$y''\sqrt{1-x^2}-y'\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

整理得

$$(1-x^2)y''-xy'=0.$$

由 Leibniz 公式得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}-(xy^{(n+1)}+ny^{(n)})=0.$$

即

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0.$$

将 $x=0$ 代入得到递推公式

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0).$$

把 $y(0)=0, y'(0)=1$ 代入得

$$y^{(2k+1)}(0)=[(2k-1)!!]^2,\quad y^{(2k)}(0)=0\quad(k\in\mathbb{N}^*).$$

□

3.2.2　隐函数求导法

设函数 $y=f(x)$ 满足方程 $F(x,y)=0$, 把 $y=f(x)$ 代入后得 $F(x,y(x))=0$. 并在 $F(x,y(x))=0$ 的两侧对 x 求导, 由此计算 $y'(x)$ 等.

例题 3.3　求由方程 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy-1=0$ 决定的 $(0,0)$ 附近的隐函数 $y(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶导数.

解　对 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy-1=0$ 两侧关于 x 求导得

$$y'\cos y+\mathrm{e}^x-xy'-y=0.$$

解得

$$y'=\frac{y-\mathrm{e}^x}{\cos y-x},\quad y'(0)=-1.$$

再关于 x 求导得

$$y''=\frac{(y'-\mathrm{e}^x)(\cos y-x)-(y-\mathrm{e}^x)(-y'\sin y-1)}{(\cos y-x)^2}.$$

把 $x,y=0,y'(0)=-1$ 代入得 $y''(0)=-3$. □

例题 3.4　设 $y=y(x)$ 可导, $x+2y\neq 0$. 且满足方程 $x^2+xy+y^2=1$, 求 y',y''.

解　对 $x^2+xy+y^2=1$ 两侧关于 x 求导得

$$2x+y+xy'+2yy'=0.$$

解得

$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}.$$

再对两侧 $2x+y+xy'+2yy'=0$ 关于 x 求导得

$$2+2y'+xy''+2y'^2+2yy''=0.$$

把 $y'=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$ 代入得

$$y''=-\frac{6}{(x+2y)^3}.$$

□

3.2.3　微分中值定理的应用

一些常用的辅助函数构造

1　$f'(x)+\lambda f(x)=0$, 构造 $g(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)$.

特别地, 对于 $\lambda=\pm1$, $f'(x)\pm f(x)=0$, 构造 $g(x)=\mathrm{e}^{\pm x}f(x)$.

2　$f''(x)-f(x)=0$, 构造

(1) $g(x)=\mathrm{e}^x(f'(x)-f(x))$;

(2) $g(x)=\mathrm{e}^{-x}(f'(x)+f(x))$.

3　$f''(x)+f(x)=0$, 构造

(1) $g(x)=f^2(x)+f'^2(x)$;

(2) $g(x)=f(x)\sin x+f'(x)\cos x$.

4　$xf'(x)+\alpha f(x)=0$, 构造 $g(x)=x^{\alpha}f(x)$.

5　$xf(x)+f'(x)=0$, 构造 $g(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}f(x)$.

6　$f'(x)-\lambda(f(x)-x)=1$, 构造 $g(x)=(f(x)-x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

注意　要求掌握构造辅助函数, 并学会利用 Rolle 定理, Lagrange 中值定理和 Cauchy 中值定理解决问题.

例题 3.5　证明: 在区间 (a,b) 上无界的可微函数 $f(x)$, 其导函数在 (a,b) 上也一定无界.

证明　由题意知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 必 $\exists x_n\in(a,b)$, 使得 $f(x_n)\geqslant n$.

反证: 假设 $\exists M>0$, 使得 $|f'(x)|\leqslant M, x\in(a,b)$. 任取 $x_0\in(a,b)$, 由 Lagrange 中值定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 有

$$|f(x_n)-f(x_0)|\leqslant|f'(\xi)(x_n-x_0)|\leqslant M(b-a).$$

故对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 均有

$$|f(x_n)|\leqslant|f(x_0)|+M(b-a).$$

这与 $f(x_n)\geqslant n$ 矛盾. 所以 $f'(x)$ 在 (a,b) 上无界. □

例题 3.6　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $ab>0$. 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证明　记

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}.$$

由 Cauchy 中值定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 有

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{g(b)-g(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{g'(\xi)}{\left(\frac{1}{\xi}\right)'}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

□

例题 3.7　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导, 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)f'(b)>0$. 证明:

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$, $f(\xi)=0$;

(2) 存在 $a<\xi_1<\xi_2<b$, $f'(\xi_1)=f(\xi_1)$, $f'(\xi_2)=f(\xi_2)$;

(3) 存在 $\eta\in(a,b)$, $f''(\eta)=f(\eta)$.

证明　(1) 不妨 $f'(a),f'(b)>0$, 由导数定义知, $\exists\delta>0$, 当 $x\in(a,a+\delta)\cap(a,b)$ 时, 有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>\frac{f'(a)}{2}>0.$$

故 $\exists x_1\in(a,a+\delta)\cap(a,b)$, 使得 $f(x_1)>0$. 同理, $\exists x_2\in(x_1,b)$, 使得 $f(x_2)<0$. 由零点存在定理知, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

(2) 记

$$g(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

则

$$g(a)=g(\xi)=g(b)=0.$$

由 Rolle 定理知, $\exists \xi_1 \in (a,\xi), \xi_2 \in (\xi,b)$, 使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$. 而

$$g'(x)=(f'(x)-f(x))\mathrm{e}^{-x},$$

故 $f'(\xi_1)=f(\xi_1)$, $f'(\xi_2)=f(\xi_2)$.

(3) 记

$$h(x)=(f'(x)-f(x))\mathrm{e}^{x}.$$

则

$$h(\xi_1)=h(\xi_2)=0.$$

由 Rolle 定理知, $\exists \eta \in (\xi_1,\xi_2)$, 使得 $h'(\eta)=0$. 而

$$h'(x)=(f''(x)-f(x))\mathrm{e}^{x},$$

故 $f''(\eta)=f(\eta)$.

□

例题 3.8 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有连续的导函数, 且 $f(0)=1$. 又当 $x \geqslant 0$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x}$. 求证: 存在 $x_0>0$, 使得 $f'(x_0)=-\mathrm{e}^{-x_0}$.

证明 令

$$g(x)=f(x)-\mathrm{e}^{-x}.$$

则

$$g(0)=0, \quad g'(x)=f(x)+\mathrm{e}^{-x}.$$

由 $|f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ 知,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0.$$

若 $g(x)\equiv 0$, 则 $g'(x)\equiv 0$, 得证.

若 $\exists \xi>0$, 使得 $g(\xi)\neq 0$, 由 $g(x)$ 的连续性及 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ 知, $\exists x_1 \in (0,\xi), x_2 \in (\xi,+\infty)$, 使得 $g(x_1)=g(x_2)$. (即 ∞/∞ 型 Rolle 定理, 请读者自行补充完整)

由 Rolle 定理知, $\exists x_0 \in (x_1,x_2)$, 使得 $f'(x_0)+\mathrm{e}^{-x_0}=g'(x_0)=0$. □

例题 3.9 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微且满足 $f(0)=0$ 及 $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$, $x\in[0,1]$. 求证: 在 $[0,1]$ 上, $f(x)\equiv 0$.

证明 (1) 记

$$g(x)=(\mathrm{e}^{-x}f(x))^2,$$

则

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x)) \\ &= 2\mathrm{e}^{-2x}(f(x)f'(x)-|f(x)|^2) \\ &\leqslant 0, \end{aligned}$$

因此 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递减. 因为 $f(a)=0 \implies g(x)\leqslant 0$, 但从 $g(x)$ 的定义可知 $g(x)\geqslant 0$, 从而 $g(x)=0 \implies f(x)=0$. □

证明 (2)　设 $|f(x)|$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上有最大值 $|f(x^*)|$, 由 Lagrange 中值定理, $\exists\xi\in(0,x^*)$, 使得

$$2\,|f(x^*)|\leqslant\left|\frac{f(x^*)}{x^*}\right|=\left|\frac{f(x^*)-f(0)}{x^*-0}\right|=|f'(\xi)|\leqslant|f(\xi)|\leqslant|f(x^*)|$$
$$\implies 2\,|f(x^*)|\leqslant|f(x^*)|\implies f(x^*)=0.$$

因此 $f(x)\equiv 0,\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, 同理可证得 $f(x)\equiv 0,\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, 因此 $f(x)\equiv 0,\ x\in[0,1]$. □

3.2.4　构造辅助函数"搭配" L'Höspital 法则

例题 3.10　设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha f(x)+xf'(x))=\beta(\alpha>0)$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{\beta}{\alpha}$.

证明　由 $\alpha>0$ 知, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty$. 由 L'Höspital 法则知,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha f(x)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}f(x)+x^\alpha f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)+\frac{x}{\alpha}f'(x)\Big)=\frac{\beta}{\alpha}.$$

□

例题 3.11　设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+xf'(x)\ln x)=l$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.

证明　由 L'Höspital 法则知,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\ln x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)\ln x+\frac{1}{x}f(x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+xf'(x)\ln x)=l.$$

□

3.2.5　凸函数

定义 3.1　f 是区间 I 上有定义, 且对 $\forall x_1,x_2\in I$, $\alpha\in[0,1]$ 有

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2).$$

定理 3.1 (斜率递增性)　$\forall x_0,x_1,x_2\in I$, $x_1<x_0<x_2$, 则

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

例题 3.12　设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的凸函数且有上界, 求证: $f(x)$ 是常数.

提示　用反证法, 利用凸函数割线斜率递增的性质.

证明　用反证法. 假设 $\exists a,b$, 使得 $f(a)\neq f(b)$, 不妨设 $f(b)>f(a)$, $b>a$, 则对 $\forall x>b>a$, 有

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\implies f(x)\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b)\to+\infty\quad(x\to+\infty).$$

这与 $f(x)$ 有界矛盾, 因此 $\forall a,b$, $f(a)=f(b)$, 即 $f(x)$ 恒为常数. □

例题 3.13 设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, 证明: $f(x)$ 在 I 的内点是连续的.

提示 证明各内点的左右导数均存在. 或者在各点邻域内考虑 Lipschitz 连续性.

证明 (1) 对 $\forall x_0 \in I$, 往证 $f'_{\pm}(x_0)$ 均存在. 由于 x_0 是区间 I 的内点, 取定 $x_1 < x_0$, $x_1 \in I$, 对 $\forall x > x_0$, $x \in I$, 由 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数知,

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

又 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $x \to x_0^+$ 时, 随 x 的递减而递减, 且有下界 $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, 则 $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 同理可证 $f'_-(x_0)$ 存在, 故 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处左连续且右连续, 从而连续, 由 x_0 的任意性知, $f(x)$ 在 I 的内点是连续的. □

注意 左右导数均存在并不能推得该点处导数存在, 但可以推得左右连续, 而左右分别连续可以推得该点处连续.

证明 (2) 对 $\forall x_0 \in I$ 为内点, $\exists \delta > 0$, 使得 $U(x_0,\delta) \subset I$, 对 $\forall x \in U(x_0,\delta)$, 由 $f(x)$ 是凸函数知

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{\delta} \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta},$$

取

$$M = \max\left\{\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{\delta}, \frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}\right\},$$

从而

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant M\,|x-x_0|,$$

因此 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知, $f(x)$ 在 I 的内点是连续的. □

注意 上述证明利用了 Lipschitz 连续性的思想, 导出了类似的式子, 从而证明 $f(x)$ 在 x_0 处连续; 应当注意到, 若在整个区间 I 上考虑, 将无法得到一个统一的 M, 亦即, f 不一定在整个区间 I 上满足 Lipschitz 连续性.

3.2.6 Taylor 展开的方法

1 几个常见的初等函数的带 Peano 余项 Maclaurin 展开式 (以下 $x \to 0$)

(1) $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$;

(2) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$;

(3) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$;

(4) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$;

(6) $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})$.

注意 以上公式请读者务必熟练掌握.

2 几个常见的初等函数的带 Lagrange 余项 Maclaurin 展开式

(1) $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(x\in\mathbb{R},\ 0<\theta<1)$;

(2) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\dfrac{(-1)^nx^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\quad(x>-1,\ 0<\theta<1)$;

(3) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dfrac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x\quad(x\in\mathbb{R},\ 0<\theta<1)$;

(4) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}\cos\theta x\quad(x\in\mathbb{R},\ 0<\theta<1)$;

(5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)\quad(x>-1)$,

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}\quad(0<\theta<1)$.

3 几类 Taylor 展开的方法

(1) 直接计算 n 阶导数. 如: $(1+x)^\alpha$ 及各基本初等函数的展开;

(2) 利用熟知函数的展开. 如: $\ln(\cos x)$, $\cos(\sin x)$;

(3) 利用 f' 的 Taylor 展开. 此方法的思想是: f 的 n 阶导数等于 f' 的 $n-1$ 阶导数, 因此若通过适当方法求出了 f' 的 Taylor 展开, 则可以根据系数的关系得知 $f'^{(n-1)}$, 从而得到 $f^{(n)}$. 如:

(a) $\arcsin x$

(b) $\arccos x$

(c) $\arctan x$

(d) $\ln(1+x)$

(4) 利用待定系数法. 如: (此方法通常只适用于求前几项系数)

(a) $\arcsin x$

(b) $\sqrt[3]{2-\cos x}$ (也可以利用熟知函数的展开直接计算)

(c) $\sqrt[3]{\sin x^3}$

此外, 若在 Taylor 展开时注意到函数的奇偶性, 将有效减少计算量. 例如, 对于奇函数的展开, 应当只包含奇数项.

对于 Taylor 展开, 还有几点需要说明:

(1) 对于 Peano 余项, 由于包含 $o(\cdots)$, 这包含一个极限过程, 因此应当将相应的极限过程在展开式的最后写出来, 例如 $x\to x_0$;

(2) 对于 Lagrange 余项, 应当指出 ξ 或 θ 的范围, $\xi\in(x_0,x)$ 或 (x,x_0), $\theta\in(0,1)$;

(3) 所谓 Taylor 展开, 其实就是用关于 x 的多项式去逼近原来的函数 $f(x)$, 因此最后展开的结果应该为 x^k, 例如, $\ln(\cos x)$ 的展开并不是展开为关于 $\cos x$ 的函数;

(4) 所有系数都应当求出来, 尽可能化简, 不能将系数写为 $\cos^{(n)}\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ 之类的形式.

对于后 3 种方法, 下面分别通过例题进行阐述.

例题 3.14 (利用熟知函数的展开) 求函数 $f(x)=\ln(\cos x)$ 带 Peano 余项的六阶 Maclaurin 展开式.

解　利用函数 $\ln(1+x)$, $\cos x$ 的 Maclaurin 展开:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+\cos x - 1)\\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6}x^6+o(x^6)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)^2\\
&\quad+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^3+o(x^6)\\
&= -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)\quad (x\to 0).
\end{aligned}$$

□

注意　此题体现了利用已知函数的展开求 Taylor 展开的方法:

(1) 确定共同的极限过程, 如本题中希望利用 $\ln(1+x), \cos x$ 的展开, 因此先检验 $\cos x - 1 \to 0\ (x\to 0)$, 从而可以将 $\cos x - 1$ 的展开代入 $\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的展开;

(2) 对于所需的展开阶数, 确定各代入项需要保留的阶数, 如

$$\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

中,

(a) x 为一次项, 因此需要代入 $\cos x - 1$ 的六阶展开;

(b) $-\frac{1}{2}x^2$ 为二次项, 因此需要代入 $\cos x - 1$ 的四阶展开. 应当注意到, 若只代入二阶展开, 将丢失 x^2, x^4 在平方过程中产生的 6 次项, 这里常见错误点;

(c) $\frac{1}{3}x^3$ 为三次项, 因此需要代入 $\cos x - 1$ 的二阶展开, 因此有 x^4 参与的项在立方的过程中得到的结果至少为 $x^2\cdot x^2\cdot x^4 = x^8$ 八次方项, 无需考虑.

(3) 在代入过程中, 保留初始结果, 写出各项的 $o(\cdots)$, 最后再合并同类项化简, 合并为一个 $o(\cdots)$.

通过这个例子的叙述, 希望读者能理解这一过程和相应的书写格式规范, 最主要的是, 如何根据所需的项确定代入项需要保留的阶数, 既不遗漏, 也不累赘.

例题 3.15 (利用 f' 的 Taylor 展开)　求函数 $f(x) = \arcsin x$ 带 Peano 余项的五阶 Maclaurin 展开式.

证明　注意到,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o(x^5)\quad (x\to 0),$$

对比 $f'(x)$ 的 Taylor 展开式

$$f'(x) = f'(0)+f''(0)x+\frac{f'''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(4)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(5)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(6)}(0)}{5!}x^5+o(x^5)\quad (x\to 0),$$

可得:

$$f'(0)=1,\quad f'''(0)=1,\quad f^{(5)}(0)=9,\quad f''(0)=f^{(4)}(0)=f^{(6)}(0)=0,$$

因此 $f(x)$ 的展开

$$\begin{aligned}
f(x) &= f'(0)x+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(5)}}{5!}x^5+o(x^6)\\
&= x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o(x^6)\quad (x\to 0).
\end{aligned}$$

□

例题 3.16 (待定系数法)　求函数 $f(x)=\arcsin x$ 带 Peano 余项的三阶 Maclaurin 展开式.

证明　注意到 $f(x)$ 为奇函数, 因此设其 Maclaurin 展开式为

$$f(x)=\arcsin x=a_1x+a_3x^3+o(x^3)\quad(x\to 0).$$

将上式代入 $x=\sin(\arcsin x)$, 可得:

$$\begin{aligned}x&=\sin(\arcsin x)\\&=\arcsin x-\frac{1}{3!}(\arcsin x)^3+o(x^3)\\&=(a_1x+a_3x^3+o(x^3))-\frac{1}{6}(a_1x+o(x))^3+o(x^6)\\&=a_1x+\left(a_3-\frac{1}{6}a_1\right)x^3+o(x^3)\quad(x\to 0).\end{aligned}$$

比较等式两边的系数可得:

$$\begin{cases}a_1=1,\\ a_3-\dfrac{1}{6}a_1=0.\end{cases}\implies\begin{cases}a_1=1,\\ a_3=\dfrac{1}{6}.\end{cases}$$

因此 $\arcsin x$ 的展开式

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\quad(x\to 0).$$

这与上一种方法求出的结果是一致的. □

注意　此方法应当灵活应用, 除了反函数, 还可以利用待定系数法计算以下函数的展开: $2-\cos x=(\sqrt[3]{2-\cos x})^3$, 请读者尝试完成.

3.2.7　Taylor 定理在函数估值中的应用

例题 3.17 (存在性问题中的端点展开)　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f'(a)=f'(b)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

分析　题干中的二阶可导及 ξ 的存在性暗示了需要用 Taylor 展开解决问题, $f'(a)=f'(b)=0$ 中暗示了我们要从两端点进行 Taylor 展开.

证明　对 $f(x)$ 分别在 a,b 两点进行 Taylor 展开, 得

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2,\quad \xi_1\in(a,x),\\ f(x)&=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2,\quad \xi_2\in(x,b).\end{aligned}$$

将两式作差, 得

$$|f(a)-f(b)|=\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2\right|.$$

取 $x=\dfrac{a+b}{2}$, 则

$$\begin{aligned}|f(a)-f(b)|&=\frac{(b-a)^2}{4}\left|\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\right|\\&\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}\\&\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|\ (\text{介值定理}).\end{aligned}$$

原命题得证. □

例题 3.18 (存在性问题中的中点展开) 设非负函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且有 $|f''(x)|\leqslant M, f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0, b-a\leqslant 1$. 证明:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\min f(x)\leqslant\frac{M}{8}.$$

分析 题干中的二阶导函数有界及目标的极值性暗示了需要利用 Taylor 展开估计范围, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$ 中暗示了我们要从中点进行 Taylor 展开.

证明 对 $f(x)$ 在中点 $\dfrac{a+b}{2}$ 进行 Taylor 展开, 得

$$\begin{aligned}f(x)&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\\&=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

将 a,b 两点分别代入 x, 相加得

$$\begin{aligned}f(a)+f(b)=|f(a)+f(b)|&=\frac{(b-a)^2}{4}\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}\\&\leqslant\frac{M}{4}(b-a)^2\\&\leqslant\frac{M}{4}.\end{aligned}$$

而

$$\min_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}\leqslant\frac{M}{8},$$

□

例题 3.19 (存在性问题中的最值点展开) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=f(1)=1, \min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)\geqslant 16$.

分析 题干中的二阶可导及 ξ 的存在性暗示了需要用 Taylor 展开解决问题, $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$ 中暗示了我们要从最小值点 x_0 进行 Taylor 展开, 并注意到 $f'(x_0)=0$.

证明 设 $f(x)$ 在 x_0 处取到最小值 -1, $f'(x_0)=0$. 对 $f(x)$ 在 x_0 进行 Taylor 展开, 得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2.$$

若 $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 取 $x = 0$, 有

$$1 = -1 + \frac{f''(\xi)}{2} x_0^2 \implies f''(\xi) \geqslant 16.$$

若 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, 取 $x = 1$, 类似可得 $f''(\xi) \geqslant 16$. 故原命题得证. □

例题 3.20 (单任意点展开) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且有 $|f''(x)| \leqslant M, f(0) = f(1) = 0$. 证明: 对任意 $x \in [0,1]$, 均有 $|f'(x)| \leqslant \frac{M}{2}$ 和 $|f(x)| \leqslant \frac{M}{8}$.

分析 题干中的二阶可导及 x 的任意性暗示了需要用 Taylor 展开解决问题, 同时 x 的任意性暗示了我们要利用 $0,1$ 两个已知点在 x 进行 Taylor 展开.

证明 对 $f(x)$ 在 x 进行 Taylor 展开, 并分别代入 $0,1$ 得

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x) - f'(x)x + \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2, \quad \xi_1 \in (0,x), \\ f(1) &= f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2, \quad \xi_2 \in (x,1). \end{aligned}$$

将两式作差并取绝对值, 得

$$|f'(x)| = \left|\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2 - \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2\right| \leqslant \frac{M}{2}(x^2 + (1-x)^2) \leqslant \frac{M}{2}.$$

将第一式乘 $(1-x)$, 第二式乘 x, 然后相加并取绝对值, 得

$$|f(x)| = \left|\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}x(1-x)^2\right| \leqslant \frac{M}{2}(x(1-x)) \leqslant \frac{M}{8}.$$

故原命题得证. □

例题 3.21 (双任意点展开) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导, 且有

$$|f(x)| \leqslant M_0, \quad |f''(x)| \leqslant M_2, \quad a \leqslant x \leqslant +\infty.$$

证明: 对任意 $x \in [a,+\infty)$, 均有 $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$.

分析 对双任意点展开问题常取 $x, x+h$ 两点. 这样处理一是为了直观地体现出各阶导数间的关系, 并利用 h 的任意性做进一步证明; 二是由于 h 取值不同, 各式之间的线性运算可以消去一些不必要的阶数.

证明 对任意 $x \in [a,+\infty)$ 及任意 $h > 0$, 我们有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2, \quad \xi \in (x, x+h).$$

变形得

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - \frac{f''(\xi)}{2}h\right| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2.$$

而

$$\frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2 \geqslant 2\sqrt{M_0M_2},$$

由 h 任意性知, $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$. □

3.2.8 Taylor 定理在 Stolz 定理中的应用

例题 3.22 设 $x_1=\sin x_0>0, x_{n+1}=\sin x_n\ (n\in\mathbb{N}*)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$

证明 由题意知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ (请读者自证). 由 Stolz 定理得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n^2&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^2-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}=\frac{x^4}{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}\\&=3.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$. □

例题 3.23 设 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0)=1$, $f''(0)\neq0$, 且 $0<f(x)<x$, $x\in(0,a)$. 令

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_1\in(0,a).$$

(1) 求证: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限;

(2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 则求其极限.

证明 (1) 由 $0<f(x)<x$ 及 $f(x)$ 的连续性知, $f(0)=0$. 由 $x_1\in(0,a)\implies 0<f(x_1)<x_1<a$ 及数学归纳法知,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0<x_{n+1}=f(x_n)<x_n<a.$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 故 $\{x_n\}$ 收敛. 记 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$. 由 $0<\cdots<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<a$ 知, $x_0\in[0,a)$. 等式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两边取极限得: $x_0=f(x_0)$. 若 $x_0\in(0,a)$, 则 $f(x_0)<x_0$, 矛盾; 故 $x_0=0$. 即,

$$x_n\to0\quad(n\to\infty).$$

(2) 答案是肯定的.

由 $x_n\to0^+$ 知, $\dfrac{1}{x_n}\to+\infty\ (n\to\infty)$ 且 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 单调递增. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$ 存在, 则由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nf(x_n)}{x_n-f(x_n)}\cdots(*)$$

又 $n\to\infty$ 时, 有

$$\begin{cases}x_nf(x_n)<x_n^2\to0\\x_n\to0,\quad f(x_n)\to0\\x_n-f(x_n)\to0\end{cases}$$

由 "$\dfrac{0}{0}$ 型" L'Höspital 法则知,

$$\begin{aligned}(*)&=\lim_{x\to0^+}\frac{xf(x)}{x-f(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)+xf'(x)}{1-f'(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{2f'(x)+xf''(x)}{-f''(x)}\\&=-2\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{f''(x)}-\lim_{x\to0^+}x=-\frac{2}{f''(0)}.\end{aligned}$$

其中已多次用到 f', f'' 均连续. 故

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = -\frac{2}{f''(0)}.$$

□

3.3 补充习题

3.3.1 A 组

1 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$;

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{\mathrm{e}}{2}x + x^2\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - \mathrm{e}\right)\right]$.

2 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 讨论 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导性.

3 设函数 $y=y(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导且满足方程 $y+2^y-x-\sin x=1$. 求 $y'(0)$.

4 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 满足 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, 并且 $f(x)$ 有反函数 $g(x)$, 求 $f(x^2)$ 和 $g(x^2)$ 在 $x=0$ 处的关于 x 的二阶导数的值.

5 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0)\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)} - \dfrac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right]$.

6 设 $f(x)$ 是定义在实轴 $\mathbb{R}$ 上的函数, 且存在常数 L 和 $\alpha>1$ 使得

$$|f(x)-f(y)| \leqslant L\,|x-y|^{\alpha}, \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

求证: $f(x)$ 是常数.

7 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0, f'(x)$ 严格递增. 证明: $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增.

8 设函数 f 二阶可导, $y=f(x+y)$. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

9 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上二阶可导, $f(a)=f(b)=0$, 且存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)>0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)<0$.

10 设 $f:[0,+\infty)\to(-\infty,0]$ 为凸函数. 证明: $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减.

11 设函数 $f(x)=x^2\ln(1-x^2)$, 求当 $n>2$ 时, $f^{(n)}(0)$ 的值.

12 设 $f(0)=0, f'(0)$ 存在, 定义数列

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right), \quad n\in\mathbb{N}^*.$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 由此计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{k}{n\sqrt{n}}$.

13 设 f 在点 a 处可导, $f(a)\neq 0$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

14 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在二阶导数, 求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}.$$

15 设函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 时二阶可微, 且 $f''(x)<0$, $f(0)=0$. 证明: 对任意正数 x_1,x_2, 有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

16 设 I 是开区间. 证明: 函数 $f(x)$ 在 I 是凸函数的充分必要条件是: 对任意 $c\in I$, 存在常数 a, 使得 $f(x)\geqslant a(x-c)+f(c)$.

17 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $|f''(x)|\leqslant M$, $f(x)$ 在 (0.1) 上取到最大值. 证明: $|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant M$.

3.3.2 B 组

1 $x^a\sin(x^b)$ **型函数探究** 设 $a,b\in\mathbb{R},b>0$, 考察函数 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, 其中

$$f(x)=\begin{cases}x^a\sin(x^b), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明:

(1) $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续 $\iff$ $a>0$;

(2) $f(x)$ 在 0 处可微 $\iff$ $a>1$;

(3) $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有界 $\iff$ $a\geqslant 1+b$;

(4) $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 连续 $\iff$ $a>1+b$;

(5) $f'(x)$ 在 0 处可微 $\iff$ $a>2+b$.

注意 此处暂不考虑该类函数的存在性问题.

2 记 $f^{-1}(x)$ 为 $f(y)$ 的反函数, $f'(f^{-1}(x)),f''(f^{-1}(x))$ 均存在且 $f'(f^{-1}(x))\neq 0$. 证明:

$$\frac{\mathrm{d}^2f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{f''(f^{-1}(x))}{[f'(f^{-1}(x))]^3}.$$

3 设 $y=(\arctan x)^2$, 求 $y^{(n)}(0)$.

4 求 $\tan x$ 带 Peano 余项的五阶 Maclaurin 展开式.

5 设

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}n^x\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right).$$

求 $f(x)$ 的定义域和值域.

6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(0)=0,f(1)=1$. 证明: 对 $\forall a,b>0,\exists\xi,\eta\in(0,1)$, 使得 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

7 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

求证: $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都在 $\mathbb{R}$ 上有界.

8　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内有二阶导数, 且满足 $f''(x)=\mathrm{e}^x f(x)$, $f(a)=f(b)=0$, 证明: $f(x)\equiv 0$.

9　设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 且除有限个点之外 $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在区间 I 上严格递增.

10　设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2f'(x)+f''(x))=l$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$.

11 Newton 切线法求根　设定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的二阶可微函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)>0$, 且 $f(a)f(b)<0$.

(1) 证明: 存在唯一的实数 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$;

(2) 若 $f(a)>0$. 设 $x_0\in(a,b), f(x_0)>0$, 定义数列 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}(n\in\mathbb{N})$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

12　设 $a\in(0,1)$, $b_1=1-a$,

$$b_{n+1}=\frac{b_n}{1-\mathrm{e}^{-b_n}}-a,\quad n=1,2,\cdots.$$

问 $\{b_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 请给予证明; 若收敛, 则求其极限.

13　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微, $f(a)=f(b)=0$. 证明: 对 $\forall x\in(a,b),\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

14　设 $f_n(x)=x^n\ln x\ (n\in\mathbb{N}^*)$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!}$.

15　设 $y_1>0, \dfrac{y_{n+1}}{n+1}=\ln\left(1+\dfrac{y_n}{n}\right)\ (n\in\mathbb{N}^*)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=2$.

16　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数, 且对任意实数 x 及 $n=0,1,2,\cdots$ 满足 $\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant n!\,|x|$. 求证: $f(x)=0$.

17　设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 $n+1$ 阶导数, 且 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$. 将 $f(x)$ 在 x_0 处 Taylor 展开:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta_n h),\quad \theta_n\in(0,1).$$

证明: $\lim\limits_{h\to0}\theta_n=\dfrac{1}{n+1}$.

18　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 如果

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=m,$$

证明: $f'(0)=m$.

19　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{1}{4}f''(\xi)(b-a)^2.$$

20　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且在 $[0,1]$ 上满足 $|f(0)|\leqslant 1, |f(1)|\leqslant 1, |f''(x)|\leqslant 2$. 证明: 对任意 $x\in[0,1]$, 均有 $|f'(x)|\leqslant 3$.

21　设 $a>1$, 函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证: 存在趋于 $+\infty$ 的正数列 $\{x_n\}$, 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\quad n=1,2,\cdots.$$

3.3.3　C 组

1　证明: 在 $\mathbb{R}$ 上不存在可导函数 $f(x)$, 满足

(1) $f(f(x))=-x^3+x^2+1$;

(2) $f(f(x))=x^2-3x+3$.

2　证明: 黎曼函数 $R(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n},(m,n)=1,\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处不可导.

3　设 $p(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的多项式, 且 $p'''(x)-p''(x)-p'(x)+p(x)\geqslant 0$. 证明: $p(x)\geqslant 0$.

4　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导. 假设存在 $x_0\in(a,b]$ 使得 $f'(x_0)=0$. 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

5 线性插值的逼近　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上二阶可导, $l(x)$ 是由 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 确定的线性函数. 若在 (a,b) 上有 $|f''(x)|\leqslant M$, 证明: 对任意 $x\in[a,b]$, 有

$$|f(x)-l(x)|\leqslant\frac{M}{8}(b-a)^2.$$

6　设 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上 4 阶可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(4)}(x)$ 都存在, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0$, $k=1,2,3$.

7　通过构造 $x^a\sin(x^b)$ 型函数或类 $x^a\sin(x^b)$ 型函数来回答以下问题:

(1) 举一个在 $(0,+\infty)$ 上连续且有界但不一致连续的函数;

(2) 举一个在 x_0 的任何邻域内都无界的函数 $f(x)$, 但当 $x\to x_0$ 时, $f(x)\nrightarrow\infty$;

(3) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限. 请举一个 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 不成立的例子;

(4) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$. 请举一个 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\infty$ 不成立的例子.

8　记 $P_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$. 证明:

(1) 当 n 为偶数时, $P_n(x)>0$;

(2) 当 n 为奇数时, $P_n(x)$ 有唯一的实零点;

(3) 若将 $P_{2n+1}(x)$ 的零点记为 x_n, $n\in\mathbb{N}^*$, 则 $\{x_n\}$ 严格递减地趋于 $-\infty$;

(4) 当 $x<0$ 时, $P_{2n}(x)>\mathrm{e}^x>P_{2n+1}(x)$;

(5) 当 $x>0$ 时, $\mathrm{e}^x>P_n(x)\geqslant\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$;

(6) 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=\mathrm{e}^x$.

第 4 章 期中部分知识梳理

下面的知识梳理仅基于我们的理解, 简单罗列较为重要的知识点, 未罗列的部分不代表考试不涉及, 更多内容请读者自行阅读教材. 复习时可以对照此提纲自行梳理知识点, 对于提纲中列出的内容, 应当做到自己能够用严格的数学语言将其表述, 并对照课本完善自己的表述.

4.1 极限

4.1.1 定义

1 数列极限 $\varepsilon - N$ 语言.

2 函数极限 (24 种形式) $\varepsilon - \delta, \varepsilon - A, M - \delta, \cdots$.

- $\forall, \exists$ 量词的运用.
- 原命题、逆否命题、逆命题、否命题之间的逻辑.

4.1.2 性质

1 唯一性 存在必唯一.

2 局部性

(1) 数列极限: 收敛性只与充分大以后的项有关, 改变数列的有限项不影响收敛性;

- "充分大" 指: $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 对 $\forall n > N, \cdots$.

(2) 函数极限 (以 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 为例): 收敛性只与 x_0 附近 (去心邻域内) 的函数值有关;

- "附近" 指: $\exists \delta > 0$, 对 $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$.

3 有界性 收敛必有界.

4 相容性 四则运算和函数复合的相容性.

$$\begin{cases} \lim\limits_{y \to y_0} f(y) = a \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0 \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = a.$$

5 保四则运算

6 保序性 保序性与保号性等价.

4.1.3 收敛的证明 & 极限的计算

1 说明 应当注意到, 下列所有方法对数列极限和函数极限均有对应的形式.

2 定义

- "四步走" 书写格式.

3 极限的四则运算法则

4　两边夹法则

- 规范书写格式.
- 放缩够用即可.

5　一些重要的极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a},\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad \lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n},\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$$

及其相应的函数极限形式.

尤其是, 与自然常数 e 有关的极限:

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad s_n=1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!},$$
$$\lim_{n\to\infty}e_n=\lim_{n\to\infty}s_n=\mathrm{e}.$$

6　单调有界判别法　证明数列单调性的 3 种方法:

(1) 将 $a_{n+1}-a_n=f(a_n)-a_n$ 转换为 a_n 的函数, 根据函数的性质证明其 >0 或 <0;

(2) 运用数学归纳法, 根据 $a_{n+1}>a_n$ 证明 $a_{n+2}>a_{n+1}$;

(3) 将 $a_{n+2}-a_{n+1}$ 化为 $a_{n+1}-a_n$ 的因式, 直接根据递推证明其正负性.

7　Cauchy 收敛准则

8　Stolz 定理和 L'Höspital 法则

注意适用条件: 要说明是 "$\dfrac{0}{0}$ 型" 或 "$\dfrac{*}{\infty}$ 型", 不能啥都不说就直接用.

说明　Stolz 定理可以看作离散情形的 L'Höspital 法则.

9　无穷小替换

说明　本质是四则运算法则.

注意　必须是因式替换!

10　Taylor 展开　对于较为复杂的函数极限, 使用 Taylor 展开相比 L'Höspital 法则往往更方便.

4.1.4　发散的证明

1　定义法　考虑收敛的否命题.

2　反证法　假设极限存在且有限, 推导矛盾.

3　证明无界

4　Cauchy 收敛准则

5　子列极限 & 单边极限

(1) 数列: 考虑两个收敛于不同极限的子列;

(2) 函数: 考虑左右极限不相等.

4.1.5　定理

注意　以下定理都应该能够清晰地叙述出其含义, 包括定理的**条件**, **结论**, **适用范围**.

1　单调有界原理

2 Bolzano-Weierstrass 定理 (列紧性定理)

3 Cauchy 收敛准则

4 确界原理

5 闭区间套定理

6 有限覆盖定理[8]

说明　以上 6 条定理构成实数连续性的 6 种等价表述形式.

7 Heine 归结原理　函数极限和数列极限的桥梁.

4.2　单变量函数的连续性

4.2.1　定义

1 连续

2 一致连续　强调一致性!!!

思考　到底指的是哪个量与哪个量的一致性? 或者说, "一致连续性" 相比 "连续性" 的优越性到底体现在何处?

回答清楚了这个问题, 基本就可以算是学懂了 "一致连续".

3 Lipschitz 连续　见教材推论 3.17.

下面列出一些命题帮助理解.

(1) 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续;

(2) 若 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ 为有限的数, 则 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续;

(3) 若将极限的条件替换成有界: 证明存在这样的函数: 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界, 但不一致连续;

(4) 若 f 在 $[a,b)$ 上连续, 但 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$, 则 f 在 $[a,b)$ 上不一致连续;

(5) 若 f 在 (a,b) 上连续, 则 f 在 (a,b) 上一致连续的充分必要条件是: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 均存在且有限;

(6) 若 f 在 $(a,b]$, $[b,c)$ 上均一致连续, 则 f 在 (a,c) 上一致连续;

(7) 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续且 f 是周期函数, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续;

(8) 若 f 在区间 I 上可导且 f' 有界, 则 f 在 I 上一致连续; (这里的区间 I 既可以是有限区间, 也可以是无限区间)

(9) 若 f 是区间 (a,b) 上的有界凸函数, 则 f 在 (a,b) 上一致连续.

提示　　(1) 此即 Cantor 定理;

(2) 选取合适的 X, 在 $[a,X+1]$, $[X,+\infty)$ 两个区间上分别考虑;

(3) 注意到函数有界, 因此应当考虑振荡导致不一致连续的函数;

(4) 见下一问;

(5) 充分性: 补充定义 $f(a)=f(a+)$, $f(b)=f(b-)$; 必要性: Cauchy 收敛准则;

[8] 数学分析 (B1) 不要求掌握.

(6) 对 x_1, x_2 均落在左半区间、右半区间、落在两边的情况分别讨论, 然后选取共同的 δ; 对于落在两边的情形, 可以利用区间 $\left[\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}\right]$ 上的一致连续性;

(7) 在一个周期上考虑, 然后用上一结论即可;

(8) 运用 Lagrange 中值定理. 对于此结论, 补充说明一点:

对于可导的函数, 区间 I 上导函数有界是 f 在 I 上 Lipschitz 连续的充分必要条件;

(9) 考虑证明函数在区间端点的邻域内单调, 从而因为有界存在单边极限, 可以补充定义后使之成为闭区间.

证明　先证 f 在端点 $x = a$ 的右邻域 $(a, a+\delta)$ $(\delta > 0)$ 内单调.

(a) 若能直接找到这样的 $\delta > 0$ 满足条件, 则证毕.

(b) 若未能找到这样的 δ 满足条件, 不妨设 f 在区间 $(a, a+\delta')$ $(\delta' > 0)$ 上不单调, 从而 $\exists \xi_1, \xi_2 \in (a, a+\delta')$, $\xi_1 < \xi_2$, 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2)$, 则对 $\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < \xi_1 < \xi_2$, 由凸函数的性质知

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant \frac{f(\xi_1) - f(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} = 0,$$

这说明 f 在 (a, ξ_1) 上单调递减, 取 $\delta = \xi_1$.

至此, 我们证明了 $\exists \delta > 0$, 使得 f 在点 a 的邻域 $(a, a+\delta)$ 上单调, 又 f 有界, 因此存在有限极限 $f(a+)$, 补充定义 $f(a) := f(a+)$.

同理可定义 $f(b) = f(b-)$, 得到定义在闭区间 $[a, b]$ 上的函数 f.

由**习题 3.5.4** 的结论知, f 在 $[a, b]$ 上连续, 因此必一致连续. □

4.2.2　间断点

1 第一类间断点

(1) 可去间断点;

(2) 跳跃间断点.

2 第二类间断点

4.2.3　闭区间上连续函数的性质

1 ★ 一致连续性

定理 (Cantor)　有限闭区间上的连续函数一定一致连续.

2 零值性

3 介值性

4 有界性

5 最值性

4.3　单变量函数的微分学

4.3.1　定义

区分 $f'_{\pm}(x_0)$, $f'(x_0\pm)$, 并理解二者的关系 (**定理 3.19**).

4.3.2 计算法则

1 四则运算

2 复合函数求导

3 ★ 反函数求导

4 ★ Leibniz 公式 — 高阶导数

5 隐函数求导

6 参数方程表示的函数求导

4.3.3 导函数的性质

1 介值性 Darboux 定理.

2 无第一类间断点

4.3.4 利用导数研究函数

1 单调性 & 极值点

2 凹凸性 & 拐点

3 曲率 & 曲率半径

4.3.5 定理

1 Fermat 定理

2 Rolle 定理

3 Lagrange 中值定理 (微分中值定理)

4 Cauchy 中值定理

4.3.6 一元微分学的顶峰 — Taylor 定理

1 带 Peano 余项的 Taylor 公式

2 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

3 带 Cauchy 余项的 Taylor 公式[9]

4 Taylor 展开的方法

[9] 讲到积分相关的内容之后才涉及, 暂时不要求掌握.

第 5 章　不定积分

5.1　专题选讲

5.1.1　不定积分计算的特殊方法

1 配对积分法　有时, 我们计算不定积分 $I(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, 可以找另一个不定积分 $J(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ 及实数 a, b, c, d $(ad - bc \neq 0)$, 使得 $af + bg$ 和 $cf + dg$ 的不定积分容易计算. 计算出 $aI(x) + bJ(x)$ 和 $cI(x) + dJ(x)$ 之后, 用变量代换的方法求出 $I(x)$.

例题 5.1　计算不定积分 $I(x) = \int \frac{\sin x}{\sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解　令 $J(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}x$. 则由

$$I(x) + 2J(x) = \int \frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C_1$$

及

$$\begin{aligned}J(x) - 2I(x) &= \int \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}(\sin x + 2\cos x)\\ &= \ln|\sin x + 2\cos x| + C_2\end{aligned}$$

可知, $I(x) = \frac{(I(x) + 2J(x)) - 2(J(x) - 2I(x))}{5} = \frac{x - 2\ln|\sin x + 2\cos x|}{5} + C$. □

例题 5.2　计算不定积分 $I(x) = \int \frac{1}{1 + x^4}\,\mathrm{d}x$.

解　令 $J(x) = \int \frac{x^2}{1 + x^4}\,\mathrm{d}x$. 则由

$$\begin{aligned}I(x) + J(x) &= \int \frac{1 + x^2}{1 + x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} + C_1\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}I(x) - J(x) &= \int \frac{1 - x^2}{1 + x^4}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2}\\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + C_2\end{aligned}$$

可知,

$$I(x) = \frac{(I(x) + J(x)) + (I(x) - J(x))}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + C.$$

□

2 递推法 设 $f_n(x)$ 是自变量为 x 的函数, 其表达式中含有参数 $n\in\mathbb{N}^*$. 为计算不定积分 $I_n(x)=\displaystyle\int f_n(x)\,\mathrm{d}x$, 可以用各种方法将其化成参数值较小的积分 $I_{n-k}(x)=\displaystyle\int f_{n-k}(x)\,\mathrm{d}x$, 直至最后把问题化为求参数值最小的一个或几个积分.

例题 5.3 导出 $I_n(x)=\displaystyle\int\cos^n x\,\mathrm{d}x, J_n(x)=\int\sin^n x\,\mathrm{d}x$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ 的递推关系式.

解 由分部积分法, 得

$$\begin{aligned}I_n(x)=\int\cos^n x\,\mathrm{d}x&=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\sin^2 x\,\mathrm{d}x\\&=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x\\&=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,\mathrm{d}x-(n-1)\int\cos^n x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

解得

$$I_n(x)=\frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}(x).$$

同理, 我们有

$$J_n(x)=-\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}J_{n-2}(x).$$

□

例题 5.4 导出 $I_n(x)=\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ 的递推关系式 (其中 a 为非零实数).

解 由分部积分法, 得

$$\begin{aligned}I_n(x)=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\left(\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x-a^2\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n(I_n(x)-a^2I_{n+1}(x)).\end{aligned}$$

解得

$$I_{n+1}(x)=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n(x).$$

□

5.1.2 有理函数不定积分的代值法

引理 5.1 在复数范围内, 任何实系数多项式 $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0,\ b_m\neq0$ 可分解为

$$Q(x)=b_m(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k},$$

其中 $r_1+\cdots+r_k=m$, α_i $(i=1,\dots,k)$ 都是复数.

定理 5.1 设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,\ a_n\neq0$ 和 $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0,\ b_n\neq0$ 分别是 n 次和 m 次实系数多项式, 并且 $n<m$. 若 $Q(x)$ 以分解成引理 5.1 中的形式, 则存在实数 $A_{i,j}$, 使得

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{1,1}}{x-\alpha_1}+\cdots+\frac{A_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}+\cdots+\frac{A_{k,1}}{x-\alpha_k}+\cdots+\frac{A_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}$$

其中

$$A_{i,j}=\lim_{x\to\alpha_i}\frac{1}{(r_i-j)!}\frac{\mathrm{d}^{r_i-j}}{\mathrm{d}x_i^{r_i-j}}\left[\frac{(x-\alpha_i)^{r_i}P(x)}{Q(x)}\right].$$

请读者自证.

例题 5.5　在复数范围内分解: $\dfrac{1}{x^3-5x^2+8x-4}$.

解　按定理 5.1 分解, 得

$$\frac{1}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A_{1,1}}{x-1}+\frac{A_{2,1}}{x-2}+\frac{A_{2,2}}{(x-2)^2}.$$

而

$$\begin{aligned}
A_{1,1}&=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x-2)^2}=1,\\
A_{2,1}&=\lim_{x\to2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)^2}\right]=\lim_{x\to2}\frac{-1}{(x-1)^2}=-1,\\
A_{2,2}&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)^2}=1.
\end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}.$$

□

例题 5.6　计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

解　按定理 5.1 分解, 得

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-1}{x^4+1}&=\frac{x^2-1}{[x-\frac{1}{\sqrt2}(1+\mathrm{i})][x-\frac{1}{\sqrt2}(1-\mathrm{i})][x-\frac{1}{\sqrt2}(-1+\mathrm{i})][x-\frac{1}{\sqrt2}(-1-\mathrm{i})]}\\
&=\frac{1}{2\sqrt2[x-\frac{1}{\sqrt2}(1+\mathrm{i})]}+\frac{1}{2\sqrt2[x-\frac{1}{\sqrt2}(1-\mathrm{i})]}\\
&\quad-\frac{1}{2\sqrt2[x-\frac{1}{\sqrt2}(-1+\mathrm{i})]}-\frac{1}{2\sqrt2[x-\frac{1}{\sqrt2}(-1-\mathrm{i})]}\\
&=\frac{\sqrt2}{4}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{\sqrt2}(1+\mathrm{i})}+\frac{1}{x-\frac{1}{\sqrt2}(1-\mathrm{i})}\right)\\
&\quad-\frac{\sqrt2}{4}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{\sqrt2}(-1+\mathrm{i})}+\frac{1}{x-\frac{1}{\sqrt2}(-1-\mathrm{i})}\right)\\
&=\frac{\sqrt2}{4}\frac{2x-\sqrt2}{x^2-\sqrt2x+1}-\frac{\sqrt2}{4}\frac{2x+\sqrt2}{x^2+\sqrt2x+1}.
\end{aligned}$$

故

$$\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt2}{4}\int\left(\frac{2x-\sqrt2}{x^2-\sqrt2x+1}-\frac{2x+\sqrt2}{x^2+\sqrt2x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt2}{4}\ln\frac{x^2-\sqrt2x+1}{x^2+\sqrt2x+1}+C.$$

□

5.1.3 Chebyshëv 型积分

Chebyshëv 型积分形式如下:

$$\int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}\,\mathrm{d}x\ (a,b\in\mathbb{R},b\neq 0,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}).$$

Chebyshëv 在 19 世纪证明了: 如果 $\gamma,\dfrac{\alpha+1}{\beta},\dfrac{\alpha+1}{\beta}+\gamma$ 三个数中有一个是整数, 那么 Chebyshëv 型积分可化作有理函数来求原函数; 否则, 它的原函数不能用初等函数表示.

下面我们证明前一结论, 后一结论的证明超出了本书的知识范围.

设 $x^{\beta}=t$, 则 $\displaystyle\int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\beta}\int t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}(a+bt)^{\gamma}\,\mathrm{d}t$.

(1) 若 γ 是整数, 记 $\dfrac{\alpha+1}{\beta}-1=\dfrac{p}{q}$ $(p,q\in\mathbb{Z})$, 设 $u=\sqrt[q]{t}$, 则可化为有理函数积分:

$$\int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}\,\mathrm{d}x=\frac{q}{\beta}\int u^{p+q-1}(a+bu^{q})^{\gamma}\,\mathrm{d}u.$$

(2) 若 $n:=\dfrac{\alpha+1}{\beta}$ 是整数, 记 $\gamma=\dfrac{p}{q}$ $(p,q\in\mathbb{Z})$, 设 $u=\sqrt[q]{a+bt}$, 则可化为有理函数积分:

$$\int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}\,\mathrm{d}x=\frac{q}{\beta b^{n}}\int u^{p+q-1}(u^{q}-a)^{n-1}\,\mathrm{d}u.$$

(3) 若 $n:=\gamma+\dfrac{\alpha+1}{\beta}$ 是整数, 记 $\gamma=\dfrac{p}{q}$ $(p,q\in\mathbb{Z})$, 设 $u=\sqrt[q]{\dfrac{a}{t}+b}$, 则可化为有理函数积分:

$$\int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}\,\mathrm{d}x=-\frac{qa^{n}}{\beta}\int u^{p+q-1}(u^{q}-b)^{-n-1}\,\mathrm{d}u.$$

细节留给读者自行补充完整. 大家运用时不要去死记硬背以上结论, 而是要学会理解, 掌握其中的变量代换技巧并能灵活运用它们来解决问题.

例题 5.7 计算不定积分 $I(x)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

证明 把 $I(x)$ 化成 Chebyshëv 型积分形式

$$I(x)=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-1}\,\mathrm{d}x.$$

此时 $\alpha=-\dfrac{1}{2},\beta=\dfrac{1}{3},\gamma=-1$. 故 $\dfrac{\alpha+1}{\beta}-1=\dfrac{1}{2},\gamma$ 是整数. 设 $t=x^{\frac{1}{3}},u=t^{\frac{1}{2}}$, 则有

$$\begin{aligned}I(x)&=3\int\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1+t}\,\mathrm{d}t=6\int\frac{u^{2}}{1+u^{2}}\,\mathrm{d}u=6\int\left(1-\frac{1}{1+u^{2}}\right)\mathrm{d}u\\&=6u-6\arctan u+C=6x^{\frac{1}{6}}-6\arctan x^{\frac{1}{6}}+C.\end{aligned}$$

□

例题 5.8 计算不定积分 $I(x)=\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

证明　把 $I(x)$ 化成 Chebyshëv 型积分形式

$$I(x)=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x.$$

此时 $\alpha=-\frac{1}{2},\beta=\frac{1}{4},\gamma=\frac{1}{3}$. 故 $\frac{\alpha+1}{\beta}=2$ 是整数. 设 $t=x^{\frac{1}{4}},u=(1+t)^{\frac{1}{3}}$, 则有

$$\begin{aligned}I(x)&=4\int t(1+t)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t=12\int u^3(u^3-1)\,\mathrm{d}u\\&=\frac{12}{7}u^7-3u^4+C=\frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}}-3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}}+C.\end{aligned}$$

□

例题 5.9　计算不定积分 $I(x)=\int\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$.

证明　把 $I(x)$ 化成 Chebyshëv 型积分形式

$$I(x)=\int(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x.$$

此时 $\alpha=0,\beta=4,\gamma=-\frac{1}{4}$. 故 $\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma=0$ 是整数. 设 $t=x^4,u=\left(\frac{t}{1+t}\right)^{\frac{1}{4}}$, 则有

$$\begin{aligned}I(x)&=4\int\left(\frac{t}{1+t}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}u}{1-u^4}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+\frac{1}{2}\arctan u+C\\&=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt[4]{1+x^4}}{x-\sqrt[4]{1+x^4}}\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}}+C.\end{aligned}$$

□

5.2　补充习题

5.2.1　A 组

1　求下列不定积分:

(1) $\int\arctan x\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int|\ln x|\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{1}{2-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int\frac{\sin x}{(\sin x+\cos x)^3}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$;

(6) $\int\cos\ln x\,\mathrm{d}x$;

(7) $\int\frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\,\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$.

2 反函数积分　设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可微函数且有反函数. 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\displaystyle\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x$.

3　导出下列不定积分的递推关系式:

(1) $\displaystyle I_n(x)=\int \frac{1}{x^n\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle I_n(x)=\int \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$, 其中正整数 $n>2$.

4　设对 $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$, 定义不定积分 $\displaystyle I(m,n)=\int \cos^m x\sin^n x\,\mathrm{d}x$, 证明:

(1) $\displaystyle I(m,n)=-\frac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2)$;

(2) $\displaystyle I(n,n)=-\frac{\cos 2x\sin^{n-1}2x}{n\cdot 2^{n+1}}+\frac{n-1}{4n}I(n-2,n-2)$.

5.2.2　B 组

1　求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2(x+b)^3}$;

(4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}$.

第 6 章　一元积分学及其应用

6.1　命题判断及推理

判断下列命题或推断是否成立, 并说明理由.

6.1.1　A 组

1　$f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且 $g(x)$ 的值域在 $[a,b]$ 中 $\Longrightarrow$ $f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上一定可积.

2　$f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积 $\Longrightarrow$ $f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上一定不可积.

3　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Longleftrightarrow$ $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积.

6.1.2　B 组

1　存在具有原函数的非连续函数.

6.1.3　参考答案 - A 组

1　错误. 反例: $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x\neq 0,\end{cases}$ $g(x)=R(x)$. 则 $f(g(x))=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

$f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积但 $f(g(x))$ 在 $[0,1]$ 上不可积. (Riemann 函数 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积的证明放在补充习题中)

2　错误. 反例: $f(x)=D(x)$, $g(x)=-D(x)$. 则 $f(g(x))\equiv 1$.

$f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积但 $f(g(x))$ 在 $[0,1]$ 上可积.

3　$\Longrightarrow$. 对分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 记 $w_k(f)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅, $w_k'(f)$ 是 $|f(x)|$ 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅. 利用 $||f(x)|-|f(y)||\leqslant|f(x)-f(y)|$ 可知 $w_k'=\sup\limits_{x_1,x_2\in[x_{k-1},x_k]}||f(x_1)|-|f(x_2)||\leqslant\sup\limits_{x_1,x_2\in[x_{k-1},x_k]}|f(x_1)-f(x_2)|=w_k$.

$\not\Longleftarrow$. 反例:$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ -1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

6.1.4　参考答案 - B 组

1　非连续函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 具有原函数 $F(x)$. 取 $F(0)=0$. 当 $x\neq 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
F(x)=\int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x t^2\mathrm{d}\cos\frac{1}{t}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x^2}\bigg|_\varepsilon^x-\int_\varepsilon^x 2t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)\\
&\overset{\text{连续性}}{=} x^2\cos\frac{1}{x^2}-\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

经验证, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.

6.2　专题选讲

6.2.1　原函数 & 可积函数

1 联系

(1) 微积分基本定理 (Newton—Leibniz 公式)

- 一个函数的原函数可以通过变上限积分来表示.
- 函数可导下, 一个函数的导数积分可以还原到函数自身.

(2) 闭区间上的连续函数一定可积, 且一定存在原函数.

2 独立性: 两者无包含关系

- $f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\in[-1,1]\setminus\{0\}\end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上可积, 但没有原函数 (Darboux 定理).
- $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 但 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不可积 (无界).

6.2.2　变限积分

我们先回顾变限积分的定义:

定义 6.1 (变上 (下) 限积分)　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, x\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 的**变上限积分**, $G(x)=\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t, x\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 的**变下限积分**.

关于变限积分的主要定理如下:

定理 6.1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则变上限积分 $F(x)$ 和变下限积分 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

定理 6.2　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $x_0\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 的连续点, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x).$$

在**定理** 6.1 中出现的变限积分不仅在建立微积分基本定理时有用, 而且是非常有效的一

种工具. 对在 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$, 引入变上限积分 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续可微函数. 因此, 我们就可以同时用微分学和积分学的工具去研究它.

例题 6.1 (变限积分的求导) 设

$$G(x)=\int_{x^2}^{x^3}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

求 $G'(x)$.

解 记 $F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, 则

$$\begin{aligned}G(x)&=\int_0^{x^3}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t-\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\&=F(x^3)-F(x^2).\end{aligned}$$

利用 $F'(x)=\sqrt{1+x^2}$, 得

$$G'(x)=3x^2F'(x^3)-2xF'(x^2)=3x^2\sqrt{1+x^6}-2x\sqrt{1+x^4}.$$

□

注意 $G(x)$ 是一个有关变上限积分 $F(x)$ 的复合函数, 求导要满足链式法则, 不能直接把 x^3,x^2 代入被积函数后就不了了之.

例题 6.2 (利用变限积分研究函数单调性) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且递增. 证明:

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

分析 从题干中对变量 a/b 没有做任何限制以及 $f(x)$ 的递增性暗示了要把 a/b 看成变量, 引入变限积分来解决问题.

证明 设

$$g(t)=\int_a^t xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

则

$$g'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}f(t)=\frac{1}{2}\int_a^t(f(t)-f(x))\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

故 $g(b)\geqslant g(a)=0$. 即

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

例题 6.3 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处连续, a,b 是 $\mathbb{R}$ 上两点. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

分析 题干中只有连续而无可导. 故需利用变量代换改变积分限, 再利用**定理** 6.2

证明 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x+h)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{b}^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= f(b)-f(a).\end{aligned}$$

其中, 最后一步已用到**定理** 6.2. □

错解

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= f(b)-f(a).\end{aligned}$$

错解中的三步推导每一步都是错误的.

(1) 没有任何依据就将极限与积分交换运算次序 (事实上未必成立, 具体之后会详细讲解);

(2) 题目中没有 $f(x)$ 可导的条件, 故不能对差商直接求极限;

(3) 即使 $f(x)$ 可导, 但导函数未必可积 (详见 6.2.1 节), 故不能用 Newton-Leibniz 公式.

6.2.3 定积分计算的特殊方法

1 对称性 我们先考虑区间 $[-a,a]$ $(a>0)$. 已知 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积, 我们知道, 当 $f(x)$ 是奇函数时, 有 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=0$; 当 $f(x)$ 是偶函数时, 有 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$. 现在我们将其进行推广:

命题 6.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, 当 $a=0$ 时, 有

$$\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^b f(b-x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 6.2 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上可积, 且有 $f(x)=f(a-x)$ (即 $f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{a}{2}$ 对称). 则有

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

命题 6.3 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上可积, 且有 $f(x)+f(a-x)=0$ (即 $f(x)$ 关于 $\dfrac{a}{2}$ 呈中心对称). 则有

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

我们结合上面两个命题作进一步加强:

命题 6.4　设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上可积, 记 $f(x)+f(a-x)=g(x)$. 则有

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{a}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

以上命题请读者自证.

例题 6.4　求定积分 $I=\displaystyle\int_{-1}^1 \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$.

解　设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 则

$$f(x)+f(-x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln(-x^2+1+x^2)=0.$$

故 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $I=0$. □

例题 6.5　求定积分 $I=\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解　我们有

$$\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}=\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}.$$

由命题 6.4 得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

□

例题 6.6　求定积分 $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解　令 $x=\tan t$, 我们有

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t.$$

而

$$\begin{aligned}\ln(1+\tan t)+\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]&=\ln(1+\tan t)+\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)\\&=\ln(1+\tan t)+\ln\frac{2}{1+\tan t}=\ln 2.\end{aligned}$$

由命题 6.4 得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln 2\ \,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

□

例题 6.7　证明: 对 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, 均有

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^\alpha x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^\alpha x}=\frac{\pi}{4}.$$

证明　因为 $\cot x=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, 由命题 6.1 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^\alpha x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^\alpha x}.$$

而

$$\frac{1}{1+\tan^\alpha x}+\frac{1}{1+\cot^\alpha x}=\frac{1}{1+\tan^\alpha x}+\frac{\tan^\alpha x}{1+\tan^\alpha x}=1.$$

由命题 6.4 得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

□

2 递推法　设函数列 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且其表达式中含有参数 $n\in\mathbb{N}^*$. 为计算定积分 $I_n(x)=\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$, 可以用各种方法将其化成参数值较小的积分 $I_{n-k}(x)=\int_a^b f_{n-k}(x)\,\mathrm{d}x$, 直至最后把问题化为求参数值最小的一个或几个积分.

例题 6.8　计算 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$.

解　因为 $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, 由命题 6.1 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

由分部积分法, 得

$$\begin{aligned}I_n&=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.\end{aligned}$$

移项, 得到递推公式

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\ (n\geqslant 2).$$

反复利用上述公式, 利用 $I_0=\frac{\pi}{2}, I_1=1$, 得

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为奇数},\\[2mm] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

□

例题 6.9　设 $m,n\in\mathbb{N}^*$, 求含参积分

$$\mathrm{B}(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x.$$

解　由分部积分法, 得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(m,n)&=\frac{x^m(1-x)^{n-1}}{m}\Big|_0^1+\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{n-1}{m}\mathrm{B}(m+1,n-1).\end{aligned}$$

反复利用上述公式, 利用 $\mathrm{B}(m,1)=\int_0^1 x^{m-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{m}$, 得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(m,n)&=\frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\mathrm{B}(m+n-1,1)\\&=\frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-2)(m+n-1)}\\&=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.\end{aligned}$$

□

6.2.4　积分不等式

1 Cauchy-Schwarz 不等式　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right).$$

证明　考虑 $\phi(t)=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot t^2+2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot t+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$. 则 $\phi(t)$ 为二次函数, 且 $\phi(t)=\int_a^b (f(x)t+g(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant 0$. 所以 $\Delta\leqslant 0$, 即

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-4\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant 0.$$

故 Cauchy-Schwarz 不等式成立. □

例题 6.10　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数, 且 $f(a)=0$. 证明:

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

分析　从 $\frac{1}{2}(b-a)^2$ 中就能联想到 $\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x$, $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续及 $f(a)=0$ 暗示了要用由 Newton-Leibniz 公式过渡. 最后用 Cauchy-Schwarz 不等式解决问题.

证明　由 Newton-Leibniz 公式, 得

$$f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_a^x 1\cdot f'(t)\mathrm{d}t.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$f^2(x)\leqslant(x-a)\int_a^x (f'(t))^2\mathrm{d}t\leqslant(x-a)\int_a^b (f'(t))^2\mathrm{d}t.$$

对两边从 a 到 b 积分, 得

$$\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b (f'(t))^2\mathrm{d}t.$$

□

当然, 也可以引入变上限积分, 将其转化为函数单调性问题.

另解　即证:

$$g(x) := \frac{1}{2}(x-a)^2 \int_a^x (f'(t))^2 \,\mathrm{d}t - \int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0, \quad x \in [a,b].$$

则

$$g'(x) = (x-a)\int_a^x (f'(t))^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(x-a)^2 (f'(x))^2 - f^2(x).$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$(x-a)\int_a^x (f'(t))^2 \,\mathrm{d}t = \int_a^x 1^2 \,\mathrm{d}t \int_a^x (f'(t))^2 \,\mathrm{d}t \geqslant \left(\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 = f^2(x),$$

从而 $g'(x) \geqslant 0$. 因此 $g(x)$ 单调递增,

$$g(b) \geqslant g(0) \implies \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

例题 6.11　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 且有 $m, M > 0$, 使得 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 对 $\forall x \in [0,1]$ 成立. 证明:

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

证明　由 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 = 1.$$

故左边不等式成立. 又因为

$$\frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{mf(x)} \leqslant 0.$$

即

$$\frac{M}{f(x)} + \frac{f(x)}{m} \leqslant \frac{M}{m} + 1.$$

由均值不等式, 得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x &= \frac{m}{M}\int_0^1 \frac{f(x)}{m}\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{M}{f(x)}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{m}{4M}\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{m}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{M}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2 \\
&\leqslant \frac{m}{4M}\left(\int_0^1 \left(\frac{M}{m}+1\right)\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \frac{(m+M)^2}{4mM}.
\end{aligned}$$

故右边不等式成立.　□

2 Gronwall 不等式 设 $u(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 并满足: 对 $\forall x \in [a,b]$, 均有 $u(x) \leqslant A + \int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t$, 其中 $A \geqslant 0$, $B(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数. 证明:

$$u(x) \leqslant A\mathrm{e}^{\int_a^x B(t)\mathrm{d}t}.$$

证明 由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(A + \int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t\right) = B(x)u(x) \leqslant B(x)\left(A + \int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t\right)$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(A + \int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant B(x).$$

对两边从 a 到 x 积分, 得

$$\ln\left(A + \int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t\right)\Big|_a^x \leqslant \int_a^x B(t)\mathrm{d}t,$$

即

$$\ln\left(A + \int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t\right) - \ln A \leqslant \int_a^x B(t)\mathrm{d}t.$$

所以

$$u(x) \leqslant A + \int_a^x B(t)u(t)\mathrm{d}t \leqslant A\mathrm{e}^{\int_a^x B(t)\mathrm{d}t}.$$

故 Gronwall 不等式成立. □

例题 6.12 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且满足

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{kx} + k\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t.$$

其中 k 是常数. 证明: $|f(x)| \leqslant (kx+1)\mathrm{e}^{kx}$.

证明 由题意得

$$\left(\mathrm{e}^{-kx}\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t\right)' \leqslant 1.$$

设

$$g(x) = \mathrm{e}^{-kx}\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t - x.$$

则 $g(0) = 0$ 且 $g(x)$ 单调递减. 故 $g(x) \leqslant 0$, 即

$$\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant x\mathrm{e}^{kx}.$$

所以 $|f(x)| \leqslant (kx+1)\mathrm{e}^{kx}$. □

Gronwall 不等式常被用于估计微分方程的解的取值范围, 且可以用于证明初值问题的解的唯一性.

3 Hölder 不等式　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $1<p<q<+\infty$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

证明　若 $f(x)\equiv 0$ 或 $g(x)\equiv 0$, 则不等式显然成立.

若 $f(x),g(x)$ 不恒为 0, 不妨 $f(x),g(x)$ 均非负, 则 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x, \int_a^b |g(x)|^q\mathrm{d}x$ 均可积且大于 0 (请读者自证). 记

$$I_f=\left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\quad I_g=\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

利用离散形式的 Hölder 不等式: 对 $\forall a,b>0$, 均有 $a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqslant \dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}$ (可利用 $\ln x$ 的凸性证明). 得

$$\frac{f(x)g(x)}{I_fI_g}\leqslant\frac{f^p(x)}{pI_f^p}+\frac{f^q(x)}{qI_g^q}.$$

上式两边同时从 a 到 b 积分, 得

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{I_fI_g}\leqslant 1.$$

变形后即得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

4 积分形式的 Jenson 不等式　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $h(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数. $f(x)$ 非负且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=1$. 证明:

$$h\left(\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\int_a^b h(g(x))f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　记 $t:=\displaystyle\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x$. 由 $h(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数知, 存在 $\alpha\in\mathbb{R}$, 使得

$$h(x)\geqslant h(t)+\alpha(x-t).$$

故对任意 $x\in[a,b]$, 均有

$$h(g(x))\geqslant h(t)+\alpha(g(x)-t).$$

由 $f(x)$ 的非负性知,

$$h(g(x))f(x)\geqslant h(t)f(x)+\alpha(g(x)f(x)-tf(x)).$$

上式两边同时从 a 到 b 积分, 得

$$\int_a^b h(g(x))f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b h(t)f(x)\,\mathrm{d}x+\alpha\left(\int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b tf(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

把 $t=\displaystyle\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 代入上式, 并利用 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 变形得

$$h\left(\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\int_a^b h(g(x))f(x)\mathrm{d}x.$$

□

注意　在概率论中, 离散形式和积分形式的 Jenson 不等式可以统一写为

$$g(\mathrm{E}(X))\leqslant\mathrm{E}(g(X)).$$

其中 $g(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数.

6.2.5　对含参型积分求极限

定积分是一个数. 若被积函数带有参数, 就会得到数列或函数, 从而就会出现对含参型定积分求极限的问题. 在本章中我们只考虑离散参数的情形.

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上可积, $n\in\mathbb{N}^*$. 满足对 $\forall x\in[a,b]$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 请读者探究下面等式是否一定成立.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x).$$

事实上, 答案是否定的, 即极限与积分无法直接交换运算次序. 我们考虑如下反例即可: 设

$$f_n(x)=\begin{cases}n, & 0<x<\dfrac{1}{n},\\ 0, & x=0\text{ 或 }\dfrac{1}{n}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

则对 $\forall x\in[0,1]$, 有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0.$$

但

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=1\neq 0=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

故该函数列极限与积分不能交换运算次序, 其原因可在教材第 7 章里找到, 这里不再赘述.

我们可以运用截断 + 放缩法等技巧来解决此类问题.

例题 6.13　证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0.$

分析　我们从 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$ 中抓出两个信息: 一是对任意 $n\in\mathbb{N}$, $\sin^n x\leqslant 1$ 有界; 二是对任意固定的 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n x=0$ 以及 $\sin^n x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上递增. 故我们考虑截断成两部分 + 放缩法来解决.

对任意给定的 $\varepsilon>0$(即精度), 一方面, 利用 $\sin^n x$ 的有界性, 通过调控区间 $\left[\dfrac{\pi}{2}-\delta,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的长度 δ 及放缩处理, 把 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$ 放到给定的精度之内. 注意, 该过程不受 n 的干扰; 另一方面, 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n x=0$, 先把 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\delta\right)$ 通过 n 控制在给定的精度之内. 然后利用及

$\sin^n x$ 的递增性, 把在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}-\delta\right)$ 上的 $\sin^n x$ 放缩至 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\delta\right)$, 再由区间长度有限可知, 我们可以通过 n 把 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\,\mathrm{d}x$ 控制在给定的精度之内.

证明　对 $\forall 0<\varepsilon<\pi$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n x=0$ 知, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得

$$\sin^N\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)=\sin^N\frac{\pi-\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{\pi}.$$

则当 $n>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi-\varepsilon}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi-\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1<\frac{\pi}{2}\sin^N\frac{\pi-\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\&<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{\pi}+\frac{\varepsilon}{2}\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0.$ □

错解　由积分第一中值定理, $\exists\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\sin^n\xi\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\sin^n\xi.$$

由 $0<\sin\xi<1$ 知,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sin^n\xi=0.$$

错误原因在于 ξ 依赖于 n, 而不是固定的常数. 为了准确表述, 我们把 ξ 记为 ξ_n. 而 $\xi_n\to\dfrac{\pi}{2}\ (n\to\infty)$, 故 $\sin^n\xi_n$ 是 1^∞ 型不定式, 其极限未必为 0.

例题 6.14　设非负函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 记 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=M.$$

分析　仅考虑 $M>0$. 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$ 可知, 通过 $f(x)$ 在闭区间上连续的性质, 我们把目标放缩到长度有限 (>0) 的区间上即可.

证明　若 $M=0$ 结论显然成立. 若 $M>0$, 请读者自证: 对 $\forall 0<\varepsilon<M, \exists[\alpha,\beta]\subset[a,b](\alpha<\beta)$, 使得

$$M-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in[\alpha,\beta].$$

故有

$$(M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\int_\alpha^\beta f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$, 对上式两端令 $n\to+\infty$, 得

$$M-\varepsilon\leqslant\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant M.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

□

6.2.6　积分在数列极限中的应用

我们可以将数列极限问题转化成求定积分问题, 具体原理如下: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则有与等距划分相对应的极限等式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}$$

或

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(a+\frac{b-a}{n}(i-1)\right)\frac{b-a}{n}.$$

当然还有其他类型的划分, 这里不逐一列举.

例题 6.15　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$.

解　取对数, 令

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = ((1+x)\ln(1+x)-x)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{\mathrm{e}}.$$

□

例题 6.16　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+k^2}$.

解　令

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+k^2},$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{n}{n^2+k^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_0^1\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

□

例题 6.17　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n\left[\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}\right]$.

解　令

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}\right],$$

由 Taylor 展开, 得

$$\sin\frac{k\pi}{n^2}=\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{k^2}{n^4}\right)=\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad k=1,2,\cdots,n.$$

则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\\&=\pi\int_0^1 x(1+x)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{6}\pi.\end{aligned}$$

□

6.2.7　积分在函数估值中的应用

例题 6.18　设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可微, 且 $|f'(x)|\leqslant M$. 证明: 对任意正整数 n,

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}.$$

分析　我们容易想到,

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|\\\leqslant&\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{n}\left(f(\xi_k)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|\\=&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|f'(\eta_k)\left(\xi_k-\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\cdot\frac{1}{n}=\frac{M}{n}.\end{aligned}$$

然而, 上述做法的上界只能达到 $\dfrac{M}{n}$, 并没有达到题中的目标上界. 我们不妨把微分中值定理和积分处理的顺序交换一下, 就有了新的发现.

证明　注意到,

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

考虑

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

由 Lagrange 中值定理知, $\exists \xi_k \in \left(x, \frac{k}{n}\right)$, 使得

$$\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|f'(\xi_k)\cdot\left(x - \frac{k}{n}\right)\right| \leqslant M\left(\frac{k}{n} - x\right)$$

$$\Longrightarrow \left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}x \leqslant M\cdot\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n} - x\right)\mathrm{d}x = \frac{M}{2n^2},$$

故

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n} \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{M}{2n^2}\right| = \frac{M}{2n}.$$

□

注意 上述分析中先通过积分中值定理处理积分, 再通过 Lagrange 中值定理与导数相联系, 所有推导全部正确, 但是放缩精度没有达到我们的目标.

上述证明中先通过 Lagrange 中值定理与导数相联系, 再用积分分段处理, 放缩精度达到了我们的目标.

我们对比两者的做法. 在积分处理过程中, 证明中的做法把分割点 $\frac{k}{n}$ 的作用体现了出来, 即 $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n} - x\right)\mathrm{d}x$, 而分析中的做法并没有体现出点 $\frac{k}{n}$ 的作用. 故证明中的处理比分析更加精细化.

例题 6.19 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可导, $|f'(x)| \leqslant M$. 若 $\exists a \in (0,1)$, 使得 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$. 证明:

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M(1-a^2).$$

提示 由题干中的导函数有界性联想到微分中值定理, 同时要根据 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 结合积分中值定理来进行处理.

证明 由积分中值定理及 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 知, $\exists \eta \in (-a, a)$, 使得 $f(\eta) = 0$. 由微分中值定理, $\exists \xi \in (x, \eta)$, 使得

$$|f(x)| = |f(x) - f(\eta)| = |f'(\xi)||x - \eta| \leqslant M|x - \eta|.$$

故

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_{-1}^{-a} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{a}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{-1}^{-a} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{a}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant M\int_{-1}^{-a} (\eta - x)\mathrm{d}x + M\int_{a}^{1} (x - \eta)\mathrm{d}x \\
&= \frac{M}{2}\left((\eta+1)^2 - (\eta+a)^2 + (1-\eta)^2 - (a-\eta)^2\right) \\
&= M(1-a^2).
\end{aligned}$$

□

例题 6.20 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, $f(0)=f(1)=0$, 且当 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)\neq 0$. 证明:

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4.$$

分析 函数在分母上不好处理, 结合闭区间上连续函数的性质, 我们把分母上的函数统一放到最值情形考虑并单独拎出来. 剩下的部分先利用最值点, 结合函数在两端点的给定值, 运用微分学处理工具 (如微分中值定理, Taylor 等) 进行处理. 最后结合题干中的二阶连续可微, 处理后要用 Newton-Leibniz 公式进行过渡.

证明 不妨 $f(x)>0, x\in(0,1)$. 记 $M=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=f(x_0), x_0\in(0,1)$. 由 Lagrange 中值定理, 得

$$f(x_0)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x_0,\quad 0<\xi<x_0,$$
$$f(x_0)=f(x_0)-f(1)=f'(\eta)(x_0-1),\quad x_0<\eta<1.$$

故有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x&\geqslant\frac{1}{f(x_0)}\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{f(x_0)}\int_\xi^\eta|f''(x)|\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{1}{f(x_0)}\left|\int_\xi^\eta f''(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{f(x_0)}|f'(\eta)-f'(\xi)|\\&=\frac{1}{f(x_0)}\left|\frac{f(x_0)}{x_0-1}-\frac{f(x_0)}{x_0}\right|=\frac{1}{x_0(1-x_0)}\geqslant 4.\end{aligned}$$

□

例题 6.21 设 $f(x)$ 在 $[0,h]$ 上二阶可微, 则存在 $\xi\in[0,h]$, 使得

$$\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{h}{2}(f(0)+f(h))-\frac{1}{12}f''(\xi)h^3.$$

提示 反复利用分部积分.

证明 利用两次分部积分, 得

$$\begin{aligned}\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^h f(x)\left(x-\frac{h}{2}\right)'\mathrm{d}x\\&=f(x)\left(x-\frac{h}{2}\right)\Big|_0^h-\int_0^h f'(x)\left(x-\frac{h}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{h}{2}(f(0)+f(h))-\frac{1}{2}\int_0^h f'(x)[x(x-h)]'\,\mathrm{d}x\\&=\frac{h}{2}(f(0)+f(h))+\frac{1}{2}\int_0^h f''(x)[x(x-h)]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 $x(x-h)$ 不变号, 由积分第一中值定理可知, 存在 $\xi\in[0,h]$, 使得

$$\frac{1}{2}\int_0^h f''(x)[x(x-h)]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f''(\xi)\int_0^h x(x-h)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{12}f''(\xi)h^3.$$

故

$$\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{h}{2}(f(0)+f(h))-\frac{1}{12}f''(\xi)h^3.$$

□

6.3　补充习题

6.3.1　A 组

1　求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$;

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^{n\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x\ (n\in\mathbb{N}^*)$.

2　求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}\int_0^{x^2}\frac{t^4}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{x}|\sin t|\,\mathrm{d}t$.

3　探究以下四个命题间的关系:

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数;

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导;

(3) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续;

(4) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

4　证明: 函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\in(0,1],\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上可积.

5　求 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}$, 其中 $f(x)$ 连续, 且 $f(0)\neq 0$.

6　设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 求 $F'(0)$.

7　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 证明:

$$2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

并求使上式成为等式的连续函数.

8　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且有

$$f(x)\leqslant\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明: $f(x)\leqslant 0$.

9　设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续可导, 且 $f(0)=f(2)=1$. 若 $|f'(x)|\leqslant 1$, 证明:

$$1\leqslant\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 3.$$

10　面积原理的简单情形

(1) 设非负函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增. 证明: 对 $\forall n\in N^*$, 均有

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(n).$$

(2) 设非负函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递减. 证明: 对 $\forall n\in N^*$, 均有

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(1).$$

此外, 极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right):=\alpha$$

存在, 且 $0\leqslant\alpha\leqslant f(1)$.

6.3.2　B 组

1　求下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos 2x}$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{1}x^m\ln^n x\ (m,n\in\mathbb{N}^*)$.

2　求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}}$;

(2) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}R^{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\ (\lambda>1)$.

3　$x^{\alpha}\sin x^{\beta}$ 型函数积分性质探究　设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin x^{\beta}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(1) 求: 当且仅当 α, β 取何值时, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积?

(2) 求: 当且仅当 α, β 取何值时, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有原函数?

4　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(0)=0, 0\leqslant f'(x)\leqslant 1$. 证明:

$$\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

5　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导函数, 证明:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

6　证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 (1-x^3)^n \,\mathrm{d}x = 0.$

7　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数, 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明:

$$\int_0^1 |f(x)+f'(x)| \geqslant 1.$$

8　证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \cos^n \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = 0.$

9　设非负函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格递增. 由积分中值定理, 对任意 $n\in\mathbb{N}^*$, 存在唯一的 $x_n\in[a,b]$, 使得

$$f^n(x_n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b.$

10　设 $f(x)$ 是在 $[0,1]$ 上非负单调递增的连续函数, $0<\alpha<\beta<1$. 求证:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x,$$

且 $\dfrac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不能换为更大的数.

11　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且有

$$\int_a^b x^k f(x) = 0 \quad (k=0,1,\cdots,n).$$

证明: $f(x)$ 在 (a,b) 上至少有 $n+1$ 个不同的零点.

12 Dirichlet 积分　在 $(0,\pi)$ 上定义 Dirichlet 核:

$$D_n(x) = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \quad (n\in\mathbb{N}^*).$$

(1) 求 $\int_0^\pi D_n(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) 利用 (1) 的结果证明:

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \mathrm{d}x = n\pi \quad (n\in\mathbb{N}^*)$$

(3) 设

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t \quad (n\in\mathbb{N}^*).$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_n}{\ln n}$.

13　设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 证明:

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\mathrm{d}x = \pi f(0).$$

14　设非常值函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$|f'(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

6.3.3　C 组

1 Riemann-Lebesgue 引理　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0,\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

2　证明: 黎曼函数 $R(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n},(m,n)=1,\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上可积.

3　证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1(1-x^n)^n\,\mathrm{d}x=0$.

4　设 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且非负, $f(x)$ 不恒为零, $g(x)$ 恒取正值. 对自然数 n, 记 $I_n=\displaystyle\int_a^b(f(x))^n g(x)\,\mathrm{d}x$. 试证数列 $\left\{\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right\}$ 是收敛的, 且其极限为 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$.

5　设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可微, 定义

$$A_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}nA_n=\dfrac{1}{2}(f(0)-f(1))$.

6　设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上满足 $f(0)=f(1)=0$ 的连续可微函数, 求证不等式

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{12}\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x)\equiv Ax(1-x)$, 其中 A 为常数.

7　设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的导函数, 且 $f(0)=0$. 求证:

$$\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)\,|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x)\equiv cx$, 其中 c 为常数.

8 证明 π 是无理数　设 $a,b,n\in\mathbb{N}^*$, 定义函数 $f_{a,b;n}(x)=\dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}$.

(1) 证明: 对 $0\leqslant k\leqslant 2n$, 函数 $f_{a,b;n}(x)$ 的 k 阶导数 $f_{a,b;n}^{(k)}(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=\dfrac{a}{b}$ 处的取值都是整数;

(2) 假设圆周率 $\pi=\dfrac{a}{b}$ 是有理数, 其中 $a,b\in\mathbb{N}^*$. 证明: 对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\pi f_{a,b;n}(x)\sin x\mathrm{d}x$ 是整数;

(3) 证明: 圆周率 π 是无理数.

第 7 章　无穷级数

7.1　命题判断及推理

判断下列命题或推断是否成立, 并说明理由.

7.1.1　A 组

1　Leibniz 判别法中, 去掉 “数列 $\{a_n\}$ 单调递减” 的条件, 结论仍成立.

2　$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1})$ 收敛.

3　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

4　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

5　设 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

6　设 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a$.

(1) 若 $a \neq 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

7　证明或回答下面的论断:

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

(2) 若在 **(1)** 中的基础上加上 “$\{a_n\}$ 是正项数列” 的条件, 则原命题是否成立?

(3) 若在 **(1)** 中的基础上加上 “$\{a_n\}$ 是正的单调数列” 的条件, 则原命题是否成立?

8　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

7.1.2　B 组

1　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 收敛.

2　若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

7.1.3 参考答案 - A 组

1 错误. 反例: $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{k^2}, & n=2k-1,\\ \dfrac{1}{k}, & n=2k.\end{cases}$

2 $\Longrightarrow$. Cauchy 收敛准则.

$\not\Longleftarrow$. 反例:$a_n=(-1)^n$.

3 $\Longrightarrow$. 由题意得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 故 $\exists N\in\mathbb{N}$, 当 $n>N$ 时, 有 $a_n<1$, 即 $a_n^2<a_n$. 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

$\not\Longleftarrow$. 反例: $a_n=\dfrac{1}{n}$.

4 正确. 注意到 $2|a_nb_n|\leqslant a_n^2+b_n^2$ 及 $\dfrac{2|a_n|}{n}\leqslant a_n^2+\dfrac{1}{n^2}$ 即可.

5 正确. 用 Cauchy 收敛准则或利用 $0\leqslant c_n-a_n\leqslant b_n-a_n$ 再用比较判别法.

6

(1) 正确. 由 $a_n=(na_n)\dfrac{1}{n}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a\neq 0$ 知 $\{na_n\}$ 从某项开始同号, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 同敛散. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(2) 正确. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 及 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})+(n+1)a_{n+1}-a_{n+1}$ 即可.

7

(1) 错误. 考虑 $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$;

(2) 不成立. 考虑 $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}, & n\neq k^2,\\ \dfrac{1}{n}, & n=k^2,\end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z})$;

(3) 成立. 此时有 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. 易知 a_n 单调递减趋于 0, 从而

$$0<2na_{2n}\leqslant\sum_{k=n+1}^{2n}a_k<2\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k=0$ 及两边夹法则知, $\lim\limits_{n\to\infty}2na_n=0$, 同理可证得 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

8 错误. 反例: $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, b_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

说明 该例也说明了对非正项级数证明收敛时, 没有比较判别法及其极限形式.

7.1.4 参考答案 - B 组

1 错误. 反例: $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$. 因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$ 有界且 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\downarrow 0$, 由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$ 收敛. 由 $\cos^3\dfrac{2n\pi}{3}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cos^3\dfrac{2n\pi}{3}$ 发散.

2 正确. 设 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 令 $b_n=\sqrt{S-S_{n-1}}-\sqrt{S-S_n}, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k, S_0=0$. 则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(S-S_{n-1})-(S-S_n)}{\sqrt{S-S_{n-1}}-\sqrt{S-S_n}}\\&=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S-S_{n-1}}+\sqrt{S-S_n})=0\end{aligned}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S}-\sqrt{S-S_n})=\sqrt{S}.$$

7.2 专题选讲

7.2.1 Raabe 判别法

说明 我们这里仅考虑其极限形式. 一般形式的证明请读者自证.

设正项数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l,$$

则当 $l>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛; 当 $l<1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散; 当 $l=1$ 时, 无法判断.

证明 (1) 当 $l>1$ 时, $\exists p\in(1,l)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l>p=\lim_{n\to\infty}n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right).$$

故 $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right).$$

即

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{(n+1)^p}{n^p}\implies\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{(n+1)^{-p}}{n^{-p}}.$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-p}$ 收敛, 由教材**习题 7.1.14**, 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 当 $l<1$ 时, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1,$$

即

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n+1}{n} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{(n+1)^{-1}}{n^{-1}}.$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ 发散, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(3) 当 $l=1$ 时, 由

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$$

得

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\\ &= 1+\frac{1}{n}+\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).\end{aligned}$$

现取 $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$. 由 Cauchy 积分判别法知, 当 $\alpha > 1$ 时, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $\alpha \leqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 发散. 但

$$\begin{aligned}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= n\left(\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha}-1\right)\\ &= 1+\frac{\alpha}{\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right) \to 1 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性无法判断.

□

例题 7.1　设 $p, q > 0$. 当 p, q 取何值时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\dfrac{1}{n^q}$ 收敛?

解　因为

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n+p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{q} &= \left(1+\frac{1-p}{n+p}\right)\left(1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 1+\frac{q}{n}+\frac{1-p}{n+p}+o\left(\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{q+1-p}{n}++o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

由 Raabe 判别法知, $q > p$ 时级数收敛; $q < p$ 时级数发散; $q = p$ 时无法判断. □

7.2.2　Cauchy 积分判别法

我们回顾 Cauchy 积分判别法的内容:

设当 $x \geqslant 1$ 时, $f(x) \geqslant 0$ 且单调递减, 那么无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

例题 7.2　证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

证明 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$, 则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上非负且递减, 因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ 与无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 同敛散. 而后者当 $\alpha>1$ 时收敛, 当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散. □

我们按照 Cauchy 积分判别法的证明思路解决如下例题:

例题 7.3 设 $\{a_n\}$ 是单调递增的正项数列, 函数 $f(x)$ 在 $[a_1,+\infty)$ 上恒大于 0 且单调递增, 且无穷积分 $\displaystyle\int_{a_1}^{+\infty}\frac{1}{xf(x)}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明:

(1) 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_{n+1})}$ 收敛;

(2) 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_n)}$ 收敛.

证明 (1) 由条件知, 存在 $M>0$, 使得 $\displaystyle\int_{a_1}^{+\infty}\frac{1}{xf(x)}\,\mathrm{d}x<M$. 而对任意正整数 m, 均有

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_{n+1})}=\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{a_{n+1}f(a_{n+1})}\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{xf(x)}\,\mathrm{d}x=\int_{a_1}^{a_{m+1}}\frac{1}{xf(x)}\,\mathrm{d}x<M.$$

因此级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_{n+1})}$ 收敛.

(2) 对任意正整数 m, 均有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_n)}&=\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\left(\frac{1}{f(a_{n+1})}+\frac{1}{f(a_n)}-\frac{1}{f(a_{n+1})}\right)\\&=\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_{n+1})}+\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\left(\frac{1}{f(a_n)}-\frac{1}{f(a_{n+1})}\right)\\&<M+\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{f(a_n)}-\frac{1}{f(a_{n+1})}\right)\\&<M+\frac{1}{f(a_1)}.\end{aligned}$$

因此级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}f(a_n)}$ 收敛.

□

7.2.3 函数项级数中的收敛 & 一致收敛 & 绝对收敛

给定函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 记 $S_k(x):=\displaystyle\sum_{n=1}^{k}u_n(x)$. 我们回顾以下定义:

定义 7.1 ((逐点) 收敛) "函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 x_0 处 **(逐点) 收敛**[10]" $\iff$ 存

[10]收敛最原始的定义针对的是一点而不是区间. 事实上, 我们当然有函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上收敛的说法, 但其实质上表示的是函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上每个点处处收敛.

在实数 $S(x_0)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0) \iff \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 均有 $|S(x_0) - S_n(x_0)| < \varepsilon$.

定义 7.2 (一致收敛)　"函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上**一致收敛**" $\iff \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 对 $\forall x \in I$, 均有 $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

定义 7.3 (绝对收敛)　记 $T_k(x) := \sum\limits_{n=1}^{k} |u_n(x)|$. "函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 x_0 处**绝对收敛**" $\iff$ 存在实数 $T(x_0)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x_0) = T(x_0) \iff \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 均有 $|T(x_0) - T_n(x_0)| < \varepsilon$.

由此可见, 收敛和绝对收敛本身是数项级数的概念, 但在函数项级数中, 将收敛域中的某个值代入后, 则此函数项级数转化为数项级数. 而一致收敛则是函数项级数中独有的概念.

1　一致收敛等价刻画

(1) Cauchy 判别准则形式: $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n_1, n_2 > N$ 时, 对 $\forall x \in I$, 均有 $|S_{n_1}(x) - S_{n_2}(x)| < \varepsilon$;

(2) 极限表达形式: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| = 0$.

2　收敛与一致收敛的区别

(1) "出牌" 顺序不同: 从定义看, 逻辑顺序上收敛是先 x_0 后 N, 一致收敛是先 N 后 x.

(2) 研究对象不同: 收敛的研究对象是 x_0 一个点, 表示局部性质; 一致收敛的研究对象是整个区间[11] I, 表示整体性质.

(3) N 的依赖性不同: 收敛中的 N 由 $N(\varepsilon, x_0)$ 体现, N 依赖于 ε, x_0 两个变量; 一致收敛中的 N 由 $\sup\limits_{x\in I} N(\varepsilon)$ 体现, N 仅依赖于 ε 一个变量.

3　Dini 定理　设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且非负. 若其和函数 $S(x)$ 也在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

注意　以上 3 条内容请读者自行对比第 2 章中的连续与一致连续.

4　一致收敛与绝对收敛的联系

(1) Weierstrass 判别法: 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且在区间 I 上恒有 $|u_n(x)| \leqslant a_n$, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

提示　由比较判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上绝对收敛.

(2) 设 $u_n(x)$ 是 $[a, b]$ 上的单调函数. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 绝对收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对收敛且一致收敛.

[11]实际上, 一致收敛的研究对象是点集即可, 只不过我们一般都在区间上讨论一致收敛性.

证明 令 $k_n = \max\{|u_n(a)|, |u_n(b)|\}$. 由 $0 \leqslant k_n \leqslant |u_n(a)| + |u_n(b)|$ 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n$ 收敛. 因为 $u_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调, 所以 $|u_n(x)| \leqslant k_n$. 由比较判别法及 Weierstrass 判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对收敛且一致收敛. □

5 一致收敛与绝对收敛的独立性: 两者无包含关系

(1) $u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛但不绝对收敛;

(2) $u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $[0,1)$ 上绝对收敛但不一致收敛.

例题 7.4 证明: 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对且一致收敛, 但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上并不一致收敛.

证明 记 $f_n(x) = x^n(1-x), f_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x)$. 则对任意 $x \in [0,1]$, 均有

$$f(x) \leqslant f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

对 $\forall x \in [0,1]$, $\{f_n(x)\}$ 单调递减. 因为 $f_n(x) \geqslant 0$, 故 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致趋于 0. 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 的部分和 $[0,1]$ 上一致有界, 由 Dirichlet 判别法知, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

而 $S(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(1-x) = \begin{cases} 0, & x=1, \\ (1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1, & x \in [0,1), \end{cases}$ 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛.

又因为 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上不连续, 且 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛. □

7.2.4 一致收敛级数的应用

我们先回顾函数项级数有关一致收敛的性质:

定理 7.1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$, 且通项 $u_n(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $S(x)$ 在 I 上连续.

由**定理** 7.1 直接得到如下推论:

推论 7.1 设 $u_n(x)$ 在区间 I 上连续, 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上收敛于 $S(x)$, 且 $S(x)$ 在 I 上不连续, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上不一致收敛于 $S(x)$.

类似地, 我们还有如下推论:

推论 7.2 设 $u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 内的每一点均收敛, 但

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上不一致收敛.

证明 反证. 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致连续, 则对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$. 当 $n>N$ 时, 对 $\forall p\in\mathbb{N}^*$ 及 $x\in[a,b)$, 均有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性可知,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(b)\right| = \lim_{x\to b^-}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 收敛, 与题设矛盾. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上不一致收敛. □

以上两个推论常用于证明级数不一致收敛中, 例如**例题** 7.4 .

定理 7.2 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 且

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 7.3 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 I 上一致收敛. 则和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

下面我们通过一些例子来体现一致收敛级数的应用.

例题 7.5 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$.

解 对任意 $x\in[-2,2]$, 均有

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$ 在 $[-2,2]$ 上一致收敛. 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$ 在 $[-2,2]$ 上连续. 由**定理** 7.1 得

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 1}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

□

例题 7.6 证明: $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{x}{\ln n}\right)^n$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

分析 首先, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln n}\right)^n$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是一致收敛的 (请读者自证), 故不能直接用**定理 7.1** 来证明. 不过我们不妨先退一步来研究一下题干. 我们知道连续性针对的是一个点, 如果对 $\mathbb{R}$ 每个点都能包含于某个区间, 且该级数在该区间上一致收敛, 这时我们再利用**定理 7.1** 就完成了证明.

证明 对任意 $M>0$, 当 $|x|\leqslant M$ 时, 有

$$\left(\frac{|x|}{\ln n}\right)^n\leqslant\left(\frac{M}{\ln n}\right)^n.$$

由 Cauchy 判别法知, $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{M}{\ln n}\right)^n$ 收敛. 故由 Weierstrass 判别法知, $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln n}\right)^n$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛, 故 $f(x)$ 在 $[-M,M]$ 上连续. 对任意 $x_0\in\mathbb{R}$, 取 $M>0$, 使得 $x_0\in[-M,M]$, 即知 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知, $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. □

例题 7.7 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$. 求 $\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$.

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛 (请读者自证), 由**定理 7.2** 得

$$\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\,\mathrm{d}x=0.$$

□

例题 7.8 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$, 求 $f''(x)$.

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 由**定理 7.3** 得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}.$$

又因为 $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 由定理 3 得

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

□

7.2.5 Cauchy 乘积在幂级数中的应用

我们运用 Cauchy 乘积可以证明如下定理:

定理 7.4 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径均为 R, 则当 $x\in(-R,R)$ 时, 有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

其中 $c_n=\sum_{l=0}^{n}a_lb_{n-l}\ (n\in\mathbb{N}^*)$.

对于一个收敛半径是 1 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 当 $|x|<1$ 时, 利用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 知,

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n.$$

其中 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

例题 7.9 证明: 当 $x \in (-1,1)$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

证明 利用**定理 7.4**, 我们有

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

再次利用**定理 7.4**, 可得

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{2}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n.$$

□

例题 7.10 把函数 $\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ 展开为 Maclaurin 级数.

证明 由

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad (-1<x<1)$$

及**定理 7.4**, 我们有

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n \quad (-1<x<1).$$

□

7.3 补充习题

7.3.1 A 组

1 判断或讨论下列级数是否收敛. 若收敛, 则是条件收敛还是绝对收敛. 需说明理由.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{n}{n^2+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^b}\ (a,b\in\mathbb{R})$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{\sqrt{n}}}}\ (p>0)$;

(6) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^a(\ln n)^b(\ln\ln n)^c}\ (a,b,c>0)$.

2　判断或讨论下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+\sin x},\quad [0,+\infty)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{1+n^4x^2},\quad [0,+\infty)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x},\quad (1,+\infty)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^a\mathrm{e}^{-nx}\ (a>0),\quad [0,+\infty)$.

3　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛区域以及和函数.

4　设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个非负数列, 满足 $a_{n+1}<a_n+b_n$, 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

5　设 $a_n\geqslant 0$. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

6　设 $u_n(x)=(-1)^nx\mathrm{e}^{-nx}$. 证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛;

(2) 对于任何 $x\in[0,1]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 收敛;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

7

(1) 设实数 $\alpha>0$, 讨论正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^\alpha}\right)$ 的敛散性;

(2) 设实数 $A>0$, 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{n}-\sin\dfrac{x}{n}\right)$ 在闭区间 $[-A,A]$ 上的一致收敛性.

8　设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_1+\cdots+a_n}=0$, 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=1$.

7.3.2　B 组

1　判断或讨论下列级数是否收敛. 若收敛, 则是条件收敛还是绝对收敛. 需说明理由.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin n}{n}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\ (a,b,c>0)$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\ (p>0)$.

2　判断或讨论下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性.

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^a(\ln n)^b}\ (a,b>0),\quad (0,\pi)$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(ne^n)^x},\quad [0,+\infty)$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\cos nx,\quad [0,1]$.

3　设 $\{a_n\}$ 是大于 1 的递增数列. 求证: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

4　设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$$

5　设 $\{a_n\}$ 是正数列, 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+\frac{1}{n^2},\quad n\geqslant 2.$$

试证明:

(1) $\displaystyle\frac{a_n n\ln n}{a_{n+1}(n+1)\ln(n+1)}<1+\frac{1}{n^2}$;

(2) 级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 发散.

6　设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 是 $[0,1]$ 上的正连续函数, 满足 $f_1(x)\leqslant 2f_0(x)$. 设

$$f_{n+1}(x)=\frac{2f_n^2(x)}{f_n(x)+f_{n-1}(x)},\quad n=1,2,\cdots.$$

求证:

(1) $f_n(x)\leqslant c_nf_{n-1}(x)$, 其中 $c_1=2$, $c_{n+1}=\dfrac{2c_n}{c_n+1}$, $n=1,2,\cdots$;

(2) $|f_n(x)-f_{n-1}(x)|\leqslant\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}|f_1(x)-f_0(x)|$;

(3) 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

7　证明: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

8　设 $\{a_n\}$ 是正数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

9　递归定义 $[0,1)$ 上的连续可微函数序列 $\{f_n(x)\}$ 如下: $f_1=1$, 在 $(0,1)$ 上有

$$f'_{n+1}(x)=f_n(x)f_{n+1}(x),\quad f_{n+1}(0)=1.$$

求证: $\forall x\in[0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在. 并求出其极限函数.

10　设函数列 $\{f_n(x)\}$, $n=1,2,\cdots$ 在区间 $[0,1]$ 上由

$$f_0(x)=1,\quad f_n(x)=\sqrt{xf_{n-1}(x)}$$

定义, 证明: 当 $n\to\infty$ 时, 函数列在 $[0,1]$ 上一致收敛到一个连续函数.

7.3.3　C 组

1　若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 收敛, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 也收敛.

2　设 $\{a_n\}$ 是一个严格单调递增的实数列, 且 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 有 $a_n\leqslant n^2\ln n$. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

3　回答有关 Sapagof 判别法的问题:

(1) Sapagof 判别法: 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散.

(2) Sapagof 判别法的等价形式:

(a) 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 证明: $\{a_n\}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 同敛散;

(b) 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 同敛散.

(3) 用 Sapagof 判别法求下列极限:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{2n!!}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n n!}$.

第 8 章 期末部分知识梳理

说明 下面的知识梳理仅基于助教的理解, 简单罗列较为重要的知识点, 未罗列的部分不代表考试不涉及, 更多内容请同学们参照课本.

8.1 不定积分

注意 记得加上常数 C.

8.1.1 积分法

1 换元

2 分部积分

8.1.2 特殊函数的积分

1 有理函数 因式分解 + 待定系数法.

2 三角有理函数 万能置换公式, 或写成容易积分的两部分的线性和, 如

$$\int \frac{\cos x}{a\sin x + b\cos x} \quad (a^2+b^2 \neq 0).$$

8.2 单变量函数的积分学

8.2.1 定义 — Riemann 和

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $\lambda = \|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i$ 是分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 的宽度, $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

8.2.2 可积性

1 可积必有界

2 连续必可积 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数必可积.

3 几乎处处连续 $\Longleftrightarrow$ 可积 闭区间 $[a, b]$ 上有界且至多有有限个间断点的函数可积.

4 单调必可积 闭区间 $[a, b]$ 上的单调函数必可积.

8.2.3 性质

1 线性性 被积函数的可加性.

2 可加性 积分区间的可加性.

3 保序性

$$f(x) \leqslant g(x) \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

4 三角不等式

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

8.2.4 定理

1 积分中值定理 $f(x) \in C[a,b]$, $g(x) \in R[a,b]$ 且不变号, 则 $\exists \xi \in (a,b)$, 满足

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a),$$
$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2 关于变上限积分

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b].$$

(1) $f \in R[a,b] \implies \varphi \in C[a,b]$;
(2) $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\implies \varphi(x)$ 在 x_0 处可微, 且 $\varphi'(x_0) = f(x_0)$;
(3) $f(x)$ 的任意原函数表示为

$$F(x) = \varphi(x) + C = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3 Newton-Leibniz 公式 (微积分基本定理)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

8.2.5 Taylor 展开的余项

1 积分余项

$$R_n(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

2 Lagrange 余项

$$R_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

3 Cauchy 余项

$$R_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n.$$

说明 后两者均可由积分余项导出.

8.2.6　积分的应用

1　平面曲线的弧长

2　平面图形的面积

3　旋转体的体积

4　旋转体的侧面积

5　在物理中的应用

以上积分公式的 3 种表示形式:

(1) 直角坐标: $y = f(x)$;

(2) 极坐标: $r = r(\theta)$;

(3) 参数方程: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

8.2.7　反常积分

1　无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}(F(b) - F(a)) = F(+\infty) - F(a).$$

2　瑕积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b-0) - F(a).$$

3　Cauchy 主值

8.2.8　计算反常积分的两种方法

1　直接法　换元/分部积分 + Newton-Leibniz 公式.

2　间接法　先证明收敛性, 再通过解方程计算其值.

8.3　常微分方程

8.3.1　解的结构

1　线性方程的叠加原理

2　非齐次线性方程解的结构

$$\text{非齐次方程通解 } y = \text{齐次方程通解 } y_{\mathrm{h}} + \text{非齐次方程特解 } y_{\mathrm{p}}.$$

8.3.2　一阶微分方程

1　变量分离法

2　常数变易法

3　一阶线性方程　先通过变量分离法求齐次方程通解 y_{h}, 再利用常数变易法求非齐次方程特解 y_{p}, 两者叠加为非齐次方程通解 $y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}}$.

8.3.3　二阶线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x).$$

1 基本解组 & 线性无关　线性相关 $\iff W(x)=0$.

2 Wronski 行列式

$$W_{[y_1,y_2]}(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

3 Liouville 公式

$$W(x)=W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\,\mathrm{d}t}.$$

4 Liouville 定理　函数二阶齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

在区间 (a,b) 上的两个解, 则 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在区间 (a,b) 上线性相关的充分必要条件是 $W(x)\equiv 0$, $x\in(a,b)$.

或写作:

$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在区间 (a,b) 上线性无关的充分必要条件是 $W(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$.

5 二阶齐次线性方程的 Liouville 公式　设函数 $y_1(x)$ 是齐次线性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的一个非零解, 则函数

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

是方程的另一个与 $y_1(x)$ 线性无关的非零解.

6 二阶非齐次线性方程的特解 (常数变易法)　设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的两个线性无关解, 则非齐次线性微分方程有形如

$$y_{\mathrm{p}}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

的特解, 其中

$$C_1(x)=-\int\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x,\quad C_2(x)=\int\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x,$$

这里 $W(x)$ 是 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的 Wronski 行列式.

特解:

$$y_{\mathrm{p}}(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(x)y_1(t)-y_1(x)y_2(t)}{W(t)}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

说明　上述公式建议熟记. 但要注意, 若能直接瞪出非齐次方程一个显然的特解, 可以大大降低计算量.

7 特征方程 & 特征根

8.3.4 可转化/可降阶的微分方程

以下形式的方程可通过变量代换降阶或转化为易于求解的微分方程.

1 不显含未知函数的二阶方程

$$F(x,y'(x),y''(x))=0.$$

作变量代换 $p=y'(x)$, 则方程化为一阶微分方程

$$F(x,p(x),p'(x))=0.$$

2 不显含自变量的二阶方程

$$F(y,y',y'')=0.$$

作变量代换 $p=y'(x)$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

3 Euler 方程

$$x^2y''+pxy'+qy=f(x),$$

其中 $p,q\in\mathbb{R}$ 是常数. 变形得

$$y''+\frac{p}{x}y'+\frac{q}{x^2}y=\frac{f(x)}{x^2}.$$

作变量代换 $x=\pm\mathrm{e}^t$, 得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(p-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+qy=f(\pm\mathrm{e}^t).$$

8.4 无穷级数

数项级数

8.4.1 定义

1 部分和数列

2 正项级数

3 级数的收敛 & 发散

4 绝对收敛 & 条件收敛

8.4.2 性质

1 线性性 若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k,\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 都收敛, 则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)$ 也收敛, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\beta\sum_{k=1}^{\infty}b_k,\quad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

说明 这是极限的四则运算法则的直接推论.

2 结合律 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一收敛级数. 若把级数的项任意结合而不改变其先后的次序, 得新级数

$$(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots, \tag{8.1}$$

其中 $k_j \in \mathbb{N}^*$, $k_1<k_2<\cdots$ $(j=1,2,\cdots)$, 则新级数也收敛, 且与原级数由相同的和.

说明 这是 "收敛数列的任意子列均收敛, 且与原数列具有相同极限" 的直接推论.

至此, 应当注意到级数的许多性质与数列及数列极限中的许多性质存在对应关系, 而部分和数列 $\{S_n\}$ 即为联系二者的桥梁, 下面许多用于判别敛散性的方法也与数列中有所对应, 值得留意.

若级数 (8.1) 在同一括号中的项都有相同的符号, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是级数 (8.1) 收敛, 且两者有相同的和.

提示 证明充分性时, 运用两边夹法则.

3 收敛的必要条件 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

注意 对于反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 不一定有 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. (请尝试构造反例)

4 有限项的改变 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中改变有限项 (添加/删除/改变), 不影响级数的敛散性.

8.4.3 级数敛散性的判别法

1 Cauchy 收敛准则 $\iff$ 部分和数列收敛的 Cauchy 收敛准则

8.4.4 正项级数的判别法

注意 以下所有判别法都只适用于正项级数!

1 部分和数列有界

说明 这是 "单调有界必收敛" 的直接推论.

2 Cauchy 积分判别法

若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上非负且单调递减, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

3 比较判别法 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. 若 $\forall n>N$, 有

$$a_n \leqslant b_n,$$

则:

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

说明 应当注意到, 比较判别法的本质是两边夹法则. 事实上, 许多判别法 (如 Cauchy 积分判别法等) 的思想都是建立在两边夹法则的基础上的.

极限形式 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数. 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l,$$

则:

(1) 若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;

(2) 若 $l = 0$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(3) 若 $l = +\infty$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

4 Cauchy 开方判别法 (根值判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数.

(1) 如果存在正数 $q < 1$, 使得对充分大的 n, 有

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 如果对无穷多个 n, 有

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注意 (1) 中正数 $q < 1$ 的存在性是十分必要的, 这保证了 $\{a_n\}$ 无法趋近于 1. 例如, 若去掉 q 的限制, 只要求 $\sqrt[n]{a_n} < 1$, 我们有如下的反例: $a_n = 1 - \dfrac{1}{n} > 0$, 则 $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < 1$, 但显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

极限形式 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数, 且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

则:

(1) 若 $q < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $q > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(3) 若 $q = 1$, 无法判断.

5 商比判别法 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个正数列. 若 $\forall n > N$, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

则:

(1) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(2) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

特别地, 我们取 $b_n = q^n$, 立即得到如下的 D'Alembert 判别法.

6 D'Alembert 判别法 设 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$.

(1) 若存在正数 $q < 1$, 使得当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

极限形式 设 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

(1) 若 $q < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $q > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(3) 若 $q = 1$, 则无法判断.

说明 可以证明, Cauchy 判别法比 D'Alembert 判别法的适用范围更广, 但它们都只能判别比几何级数[12] 收敛得快的级数.

7 Raabe 判别法 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数.

(1) 若 $\exists r > 1$, 使得 $\forall n > N$, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $\forall n > N$, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

提示 将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 作比较.

[12] 即, 等比级数.

极限形式　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l,$$

或

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{l}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty).$$

(1) 若 $l>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $l<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(3) 若 $l=1$, 则无法判断.

注意　以下标 * 的判别法在考试中不能直接使用, 在此罗列主要是想展示其思想.

8 * Gauss 判别法　设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\quad(n\to\infty).$$

(1) 若 $\beta>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\beta<1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

9 * Cauchy 凝聚判别法　设 $\{a_n\}$ 是单调递减的正数数列, 则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是: 凝聚项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n = a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^n a_{2^n}+\cdots$$

收敛.

提示　运用比较判别法.

说明　此判别法的意义在于, 将许多不容易判断的级数转化为几何级数的形式, 从而能够运用等比数列求和公式直接求和后判断敛散性.

如, p-级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$. 感兴趣的同学不妨用 Cauchy 凝聚判别法一试.

10 * Sapagof 判别法　设正数数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ 的充分必要条件是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散.

提示　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 对 $a>0$ 和 $a=0$ 的情况分类讨论.

说明　本判别法有以下等价形式:

(1) 设 $\{a_n\}$ 为单调递增的正数数列, 则该数列与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 同敛散;

(2) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 同敛散.

不难发现, 作简单的换元后, (2) 中 $\{S_n\}$ 占据的地位等价于 (1) 中的 $\{a_n\}$, 而 $\{a_n\}$ 的地位等价于 (1) 中的级数通项.

8.4.5　一般级数的判别法

1 Dirichlet 判别法　设 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 是两个数列, $S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$, 满足以下两个条件:

(a) $\{b_k\}$ 单调趋于 0; (b) $\{S_k\}$ 有界.

则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

2 Abel 判别法　设 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 满足以下两个条件:

(a) $\{b_k\}$ 单调有界; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

函数项级数

8.4.6　定义

1 和函数

2 (逐点) 收敛

3 一致收敛

讨论逐点收敛时, 仍然是对单个数列而言的, 因为对某个选定的 x, $\{f_n(x)\}$ 就是一个关于 n 的数列; 讨论一致收敛时, 才是在讨论一个关于函数的性质.

与 “连续” 和 “一致连续” 相类似, “逐点收敛” 是局部的性质, “一致收敛” 是函数在一个区间上整体的性质, 强调的是 $N = N(\varepsilon)$ 对所有的 $x \in I$ 的一致性.

同样, 我们也有 “一致收敛必逐点收敛” 等结论, 而与连续性问题中 Cantor 定理 (有限闭区间上的连续函数必一致连续) 相对应的是 Dini 定理, 其指出, 在添上单调性的条件后, 我们仍有 “逐点收敛则一致收敛” 的结论.

4 有界 & 一致有界

5 内闭一致收敛

8.4.7　性质

1 一致收敛的充分必要条件 (定理 7.28)

2 一致收敛的 Cauchy 收敛准则 (定理 7.29)

3 一致收敛的必要条件 (Cauchy 收敛准则的推论)

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |u_n(x)+u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)| = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

特别地, 级数的通项构成的函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 I 上一致趋于零, 即 $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |u_n(x)| = 0$.

推论 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的通项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则函数项级数在区间 (a,b) 上一致收敛的必要条件是其在 a,b 两点处均收敛.

8.4.8 一致收敛的判别法

1 Weierstrass 判别法 若存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得在区间 I 上有不等式

$$|u_n(x)| \leqslant a_n \quad (n=1,2,\cdots).$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

注意 此判别法只能判别绝对一致收敛的函数项级数.

2 Dirichlet 判别法 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足:

(a) $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x\in I$ 都是单调的, 且在区间 I 上一致收敛于 0;

(b) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和在 I 上一致有界, 即

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M, \quad x\in I, \quad n=1,2,\cdots.$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

3 Abel 判别法 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足:

(a) $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x\in I$ 都是单调的, 且在 I 上一致有界, 即

$$|b_n(x)| \leqslant M, \quad x\in I, \quad n=1,2,\cdots.$$

(b) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

8.4.9 一致收敛级数的性质

1 连续性

2 可积性

3 可微性

上述 3 个解析性质本质上都是两个极限是否可交换的问题.

幂级数 & Taylor 展开式

8.4.10 定义

1 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots .$$

8.4.11 收敛半径的计算

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \text{ 或 } \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

8.4.12 性质

1 Abel 定理 若幂级数在 $x = x_0 (\neq 0)$ 处收敛, 则其在 $|x| < |x_0|$ 上绝对收敛; 反之, 若幂级数在 $x = x_1$ 处发散, 则其必在 $|x| > |x_1|$ 上发散.

2 连续性

3 可微性 (任意阶可微)

4 可积性

8.4.13 Taylor 展开式

1 Taylor 级数

2 Maclaurin 级数 熟记常用函数的 Maclaurin 级数.

级数的应用

8.4.14 微分方程的幂级数解

待定系数法.

8.4.15 Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \theta_n \in (0,1).$$

第 9 章 部分补充习题提示与解答

9.1 第 1 章

9.1.1 A 组

1

(1) 0. 运用 stolz 定理即可;

(2) 1. 运用 stolz 定理即可;

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\times 3}{2^2}\cdot\dfrac{2\times 4}{3^2}\cdot\dfrac{3\times 5}{4^2}\cdots\dfrac{(n-1)\times(n+1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$;

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{n}(x+x^2)+o(x)}{2x}=\dfrac{1}{2n}$;

(5) 0. 注意到 $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1}=2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ 即可;

(6) 0. 注意到 $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 即可;

(7) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\dfrac{\sin x}{x}$;

(8) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)\cdots\left(1-\frac{(nx)^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}=\dfrac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$;

(9) 0. 注意到 $(n+\ln n)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left(\left(1+\dfrac{\ln n}{n}\right)^\alpha-1\right)<n^\alpha\left(\left(1+\dfrac{\ln n}{n}\right)-1\right)=n^{\alpha-1}\ln n$ 即可;

(10) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)^x=\left(1+\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^x=\mathrm{e}$.

2 令 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$. 对 $\sin(n+1)-\sin(n-1)=2\sin 1\cos n$ 两边取极限, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$. 再对 $\sin 2n=2\sin n\cos n$ 两边取极限, 得 $a=0$. 最后对等式 $\sin^2 n+\cos^2 n=1$ 取极限, 得到矛盾.

3 注意到 $\{a_n\}$ 严格递增, 且对 $\forall k\in\mathbb{N}^*$, 有

$$\begin{aligned}a_{2^k}&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\&>1+\frac{k}{2}\xrightarrow{k\to\infty}+\infty.\end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 无界.

4 类似 1(5), 注意到 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x+k}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin(\sqrt{x+k}-\sin\sqrt{x})$ 即可.

5　利用 Cauchy 收敛准则.

6　利用 $(1-a_n)a_n \leqslant \dfrac{1}{4}$ 可得 $a_{n+1} \geqslant a_n$, 再利用单调有界原理即可.

7　由 $x_{n+1} \leqslant x_n + \dfrac{1}{n^2} \leqslant x_n + \dfrac{1}{n(n-1)}(n \geqslant 2)$ 知, $x_{n+1} + \dfrac{1}{n} \leqslant x_n + \dfrac{1}{n-1}$. 而 $\{x_n\}$ 非负, 故 $\left\{x_n + \dfrac{1}{n-1}\right\}$ 有界. 再利用单调有界原理即可.

8　对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n| < n\varepsilon$. 设 $M > \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N}\{a_k\}$. 取 $N_0 = \max\{\left[\dfrac{M}{\varepsilon}\right]+1, N\}$, 当 $n > N_0$ 时, 有

$$\left|\frac{1}{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}\right| < \left|\frac{\max\{M, n\varepsilon\}}{n}\right| \leqslant \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\} = 0$.

9　$\exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$0 < \frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}} \leqslant \frac{1}{3} \Longrightarrow \max\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_n}\right\} \geqslant \frac{3}{2}.$$

我们定义数列 $\{b_n\}$, 其中 $b_N = a_N$, b_{N+1} 是 a_{N+1}, a_{N+2} 中的最大者. 若 $a_{N+2} > a_{N+1}$, 则 b_{N+2} 是 a_{N+3}, a_{N+4} 中的最大者; 否则,b_{N+2} 是 a_{N+2}, a_{N+3} 中的最大者. 以此类推下去，得到数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. 而当 $n \geqslant N$ 时, 有 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \geqslant \dfrac{3}{2}$. 故

$$b_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-N} b_N \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty.$$

因此数列 $\{b_n\}$ 无界, 所以数列 $\{a_n\}$ 无界.

10　由 Stolz 定理得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{2n}}{2n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{x_{2n}-x_{2n-2}}{2} = 0.$$

同理, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{2n-1}}{2n-1} = 0$. 故 $\left|\dfrac{x_n - x_{n-1}}{n}\right| \leqslant \left|\dfrac{x_n}{n}\right| + \left|\dfrac{x_{n-1}}{n}\right| \leqslant \left|\dfrac{x_n}{n}\right| + \left|\dfrac{x_{n-1}}{n-1}\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.
因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

9.1.2　B 组

1

(1) 0. 利用 $0 < \mathrm{e} - \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{n!n}$ 即可;

(2) $\ln 2$. 利用 $\dfrac{1}{k+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) < \dfrac{1}{k}$;

(3) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\exp\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\exp\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n^2}+o\left(\dfrac{k}{n^2}\right)\right)\right\}$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\exp\left\{\dfrac{n+1}{2n}+o(1)\right\}$;

(4) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left\{\dfrac{n\log n-\log n!}{n}\right\}$

$\overset{\text{stolz}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\exp\{(n+1)\log(n+1)-\log(n+1)!-n\log n+\log n!\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left\{n\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right\}=\mathrm{e}.$

2 记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, 0<a_n\leqslant M$. 由 $a_n>0$ 知 $\{S_n\}$ 单调递增.

- 若 S_n 无界, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{M}{S_n}=0$. 因为 $0<\dfrac{a_n}{S_n}\leqslant\dfrac{M}{S_n}$, 由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=0$.
- 若 S_n 有界, 由单调有界原理知 $\{S_n\}$ 收敛, 并记 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=a$. 有

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=a-a=0.$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n}=0$.

3 易知,$\{a_n\}$ 是严格递增数列. 而

$$\begin{aligned}a_{2^k-1}&=1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right)\\&\leqslant 1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{4}{4^\alpha}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^\alpha}\\&=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k-1}\\&=\frac{1-\left(\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k}{1-\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}}\\&<\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}\end{aligned}$$

故数列 $\{a_n\}$ 有一子列 $\{a_{2^n-1}\}$ 是有上界的. 又因为 $\{a_n\}$ 是递增数列, 由此得到 $\{a_n\}$ 有上界, 从而数列 $\{a_n\}$ 收敛.

4 归纳证明: $a_n\geqslant a_{n+1}\geqslant b_{n+1}\geqslant b_n$.

5 利用 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$, 对 $\forall n,p\in\boldsymbol{N}^*$, 有

$$2(\sqrt{n+p+1}-\sqrt{n+1})-2(\sqrt{n+p}-\sqrt{n})<a_{n+p}-a_n<0$$

故

$$|a_{n+p}-a_n|<2(\sqrt{n+p+1}-\sqrt{n+p})+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\xrightarrow{n,p\to\infty}0.$$

6 由于 a 是 E 的上确界, 故对 $\forall\varepsilon>0,\exists x\in E$, 使得 $a-\varepsilon<x<a$.

取 $\varepsilon_1=1,\exists x_1\in E$, 使得 $a-\varepsilon_1<x_1<a$.

取 $\varepsilon_2=\min\left\{\dfrac{1}{2},a-x_1\right\},\exists x_2\in E$, 使得 $a-\varepsilon_1<x_2<a$.

$\cdots$

取 $\varepsilon_n=\min\left\{\dfrac{1}{n},a-x_{n-1}\right\}$, $\exists x_n\in E$, 使得 $a-\varepsilon_{n-1}<x_n<a$.

...

由此得到 E 中的数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 则 $a-x_n<\varepsilon_n<a-x_{n-1}\Rightarrow x_n>x_{n-1}$.

又因为 $0<a-x_n\leqslant\varepsilon_n<\dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$. 由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$.

故 $\{x_n\}$ 严格递增趋于 a.

7　先用归纳法说明 $x_n\in\left(0,\dfrac{1}{q}\right)$, 进而得到 $x_{n+1}<x_n$. 利用单调有界原理得到 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 并有 $a=0$. 然后运用 stolz 定理, 得

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}x_n}{x_{n+1}-x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2(1-qx_n)}{qx_n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q}-x_n\right)=\frac{1}{q}.$$

8　不妨 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$. 否则, 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=A\neq 0$, 则令

$$(y_n-A)=2(x_n-\frac{A}{3})+(x_{n-1}-\frac{A}{3})$$

即可. 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|y_n|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 故有

$$2|x_n|-|x_{n-1}|\leqslant|2x_n+x_{n-1}|=|y_n|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $N_2=N_1+[\log_2\dfrac{3}{2\varepsilon}(|x_{N_1}|-\dfrac{\varepsilon}{3})]+1$, 当 $n>N_2$ 时, 有

$$|x_n|-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant\frac{1}{2}\left(|x_{n-1}|-\frac{\varepsilon}{3}\right)\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^{n-N_1}}\left(|x_{N_1}|-\frac{\varepsilon}{3}\right)<\frac{2}{3}\varepsilon.$$

即 $|x_n|<\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

9　由 $\{a_n\},\{b_n\}\subseteq\mathbb{N}^*$ 知 $\begin{cases}a_{n+1}=a_n^2+3b_n^2\\ b_{n+1}=2a_nb_n\end{cases}$. 令 $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$, 两式作商得 $c_{n+1}=\dfrac{1}{2}(c_n+\dfrac{3}{c_n})$. 后续过程同教材习题 **1.2.18(3)**.

10　$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$(留给读者思考). 故对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|x_n|<\varepsilon$. 若 $x_1=x_2=\cdots=x_{N_1}=0$, 当 $n>N_1$ 时, 有

$$|z_n|\leqslant|x_{N_1+1}y_{n-N_1}|+\cdots+|x_ny_1|<k\varepsilon.$$

若 $x_1,x_2,\ldots,x_{N_1}$ 不全为 0,$\exists N>N_1$, 当 $n>N$ 时, 有

$$|y_n|<\frac{\varepsilon}{|x_1|+\cdots+|x_{N_1}|}.$$

故当 $n>2N+1$ 时, 有

$$|z_n|\leqslant\sum_{i=1}^{N_1}|x_iy_{n+1-i}|+\sum_{i=N_1+1}^{n}|x_iy_{n+1-i}|<\varepsilon+k\varepsilon=(k+1)\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=0$.

11

(1) 反证: 设存在两个不同的正实数 x_1,x_2, 使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 记 $x=\min\{x_1,x_2\}$, 取 $\varepsilon=\dfrac{|f(x_1)-f(x_2)|}{2}>0$, 对 $\forall M>0$, 取 $x_3=2^{[\log_2\frac{M}{x}]+1}x_1, x_4=2^{[\log_2\frac{M}{x}]+1}x_2$. 则有

$$f(x_3)=f(x_1),f(x_4)=f(x_2),x_3,x_4>M,$$

且

$$|f(x_3)-f(x_4)|=|f(x_1)-f(x_2)|>\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在, 矛盾.

(2) 令 $x=0$, 可知 $f(0)=0$. 由题意知,$\exists\ \delta,M>0$, 当 $|x|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|<M$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta'=a^{-[\log_b\frac{M}{\varepsilon}]-1}\delta$, 当 $|x|<\delta'$ 时, 有

$$f(x)=b^{-1}f(ax)=b^{-2}f(a^2x)=\cdots=b^{-n}f(a^nx)<\varepsilon\ (\text{其中 } n=\left[\log_b\frac{M}{\varepsilon}\right]+1).$$

因此 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$.

12

(1) 对 $\forall x,y\neq0$, 两边同时除以 $|xy|$, 有

$$\left|\frac{f(y)}{y}-\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant M\left|\frac{1}{x}\right|+M\left|\frac{1}{y}\right|$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\dfrac{2M}{\varepsilon}$, 当 $|x|,|y|>X$ 时, 有

$$\left|\frac{f(y)}{y}-\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant M\left|\frac{1}{x}\right|+M\left|\frac{1}{y}\right|<\frac{2M}{X}=\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则知,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 收敛.

(2) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. 取 $y=0$ 可知 $|f(0)|\leqslant M$ 成立.
当 $x\neq0$ 时, 即证 $|g(x)-a|\leqslant\dfrac{M}{|x|}$. 反证: 若 $\exists x_0\neq0$, 使得 $|g(x_0)-a|>\dfrac{M}{|x_0|}$ $(*)$

$$|g(x_0)-a|\leqslant|g(x_0)-g(y)|+|g(y)-a|\leqslant\frac{M}{|x_0|}+\frac{M}{|y|}+|g(y)-a|.$$

对上式令 $y\to+\infty$, 得:$|g(x_0)-a|\leqslant\dfrac{M}{|x_0|}$, 这与 $(*)$ 矛盾.

13 由定义知, $H_{k_n}-\dfrac{1}{k_n}=H_{k_n-1}<n\leqslant H_{k_n}$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(H_{k_{n+1}}-H_{k_n}\right)=1$. 再利用 $\lim\limits_{n\to\infty}(H_{k_n}-\ln k_n)=\gamma$ 后即可.

14 对等式两边同时除以 $n!$, 得

$$\frac{a_n}{n!}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}.$$

令 $b_n=\dfrac{a_n}{n!}$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{k+1}}{(k+1)a_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{b_{k+1}}{b_k}=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\mathrm{e}.$$

9.1.3　C 组

1　当 $n>3$ 时, 有 $\sqrt{n-1}<2\sqrt{n-2}$. 故

$$\sqrt{n-1+\sqrt{n}}\leqslant\sqrt{n-1+2\sqrt{n-1}+1}=\sqrt{n-1}+1\leqslant 2\sqrt{n-2}+1.$$

因此 $a_n\leqslant 2$. 又因为 $a_{n+1}>a_n$ 由单调有界定理知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

2

(1) 对 $k=1,2,\ldots,n-1$, 由几何平均—算术平均不等式知

$$k+1>\underbrace{\frac{k}{n}+\cdots+\frac{k}{n}}_{n\text{个}}+1>(n+1)(\frac{k}{n})^{\frac{n}{n+1}}.$$

因此，有 $(\dfrac{k}{n})^n<(\dfrac{k+1}{n+1})^{n+1},k=1,2,\ldots,n-1$. 于是

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=(\frac{1}{n+1})^{n+1}+(\frac{2}{n+1})^{n+1}+\cdots+(\frac{n}{n+1})^{n+1}\\&>(\frac{1}{n+1})^{n+1}+(\frac{1}{n})^{n}+\cdots+(\frac{n-1}{n})^{n}\\&>S_n\end{aligned}$$

即数列 $\{S_n\}$ 单调递增. 利用 $(1-\dfrac{k}{n})^n<\mathrm{e}^{-k}$(留给读者思考) 可知

$$S_n<\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{e}^{-k}=\frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1-(\frac{1}{\mathrm{e}})^n}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}}<\frac{1}{\mathrm{e}-1}.$$

所以 $\{S_n\}$ 有界, 由单调有界定理知, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在.

(2) 记 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. 由 (1) 知 $S\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$. 同时对任意正整数 $n>m$, 则 $S_n\geqslant\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(1-\frac{k}{n})^n$. 利用 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{k}{n})^n=\mathrm{e}^{-k}$. 先令 $n\to+\infty$, 再令 $m\to+\infty$, 则有 $S\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$.
因此 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S=\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$

3　记题中数列为 $\{a_n\}$, 其中 $a_1=\sqrt{7},a_2=\sqrt{7-\sqrt{7}}$, 且 $a_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+a_n}}$. 而

$$\begin{aligned}|a_{n+2}-2|&=|\sqrt{7-\sqrt{7+a_n}}-2|=\left|\frac{3-\sqrt{7+a_n}}{\sqrt{7-\sqrt{7+a_n}}+2}\right|=\frac{|a_n-2|}{\left(\sqrt{7-\sqrt{7+a_n}}+2\right)\left(3+\sqrt{7+a_n}\right)}\\&\leqslant\frac{|a_n-2|}{6}.\end{aligned}$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=2=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

4　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期分别是 T_1 和 T_2, 于是对任意固定的实数 x, 有

$$\lim_{n\to+\infty}(f(x)-g(x+nT_1))=\lim_{n\to+\infty}(f(x+nT_1)-g(x+nT_1))=\lim_{y\to+\infty}(f(y)-g(y))=0.$$

即

$$\lim_{n\to+\infty} g(x+nT_1)=f(x).$$

而

$$g(x+nT_1)=g(x+T_2+nT_1),$$

故 $f(x)$ 也是以 T_2 为周期的周期函数. 同理, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+nT_2)=g(x)$, 且 $g(x)$ 也是以 T_1 为周期的周期函数. 因为

$$\lim_{n\to+\infty}(f(x+nT_2)-g(x+nT_1))=\lim_{n\to+\infty}(f(x+nT_2+nT_1)-g(x+nT_1+nT_2))=0,$$

所以 $f(x)=g(x)$.

5 记 $x\beta(x)=f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. 由题意知, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x|<\delta$ 时, 有 $|\beta(x)|<\varepsilon$. 而

$$f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{x}{2^{k-1}}\beta\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right),k=1,2,\ldots,n.$$

故有

$$\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|=\left|\sum_{k=1}^n\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^n\left|\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right|<\sum_{k=1}^n\frac{x}{2^{k-1}}\varepsilon<2|x|\varepsilon.$$

令 $n\to+\infty$, 得 $|f(x)|\leqslant 2|x|\varepsilon$. 因此 $f(x)=o(x)(x\to 0)$.

6

(1) 注意到有理数和无理数的稠密性即可.

(2) 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^*$, 使得 $\dfrac{1}{N}<\varepsilon$. 记 $A=\left\{\dfrac{m}{n},(m,n)=1\text{且}n\leqslant N\right\}$. 则 $|A|$ 有限. 故对 $\forall x_0\in\mathbb{R},\exists\delta>0$, 使得 $A\cap((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\})=\emptyset$. 所以对 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\},0\leqslant R(x)<\dfrac{1}{N}<\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0,\forall x_0\in\mathbb{R}$.

9.2 第 2 章

9.2.1 A 组

1

(1) 一致连续. 对 $\forall\varepsilon>0,\exists X>0$, 当 $x>X$ 时, 有 $|f(x)|<\varepsilon$. 易验证 $f(x)$ 在 $(-\infty,-X)$ 和 $(X,+\infty)$ 上一致连续. 又因为 $f(x)$ 在 $[-2X,2X]$ 上一致连续, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续;

(2) 不一致连续. 考虑点列 $x_n=2n\pi,y_n=\left(2n+\dfrac{1}{n}\right)\pi$, n 充分大时, 有 $y_n\sin y_n>1$ 成立, 故有 $|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant 2n\pi-\dfrac{\left(2n+\frac{1}{n}\right)\pi}{2}\xrightarrow{n\to\infty}+\infty$.

2 $f(x)$ 在 $[-T,T]$ 上一致连续. 所以对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists 0<\delta<T$, 当 $|x-y|<\delta$ 且 $x,y\in[-T,T]$ 时, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 且 $|x-y|<\delta,\exists k\in\mathbb{Z}$, 使得 $x-kT,y-kT\in[-T,T],|f(x)-f(y)|=|f(x-kT)-f(y-kT)|<\varepsilon$.

3 利用 Bolzano-Weierstrass 定理或者利用连续函数的介质性证明.

4　注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, 并利用连续函数的介值定理即可.

5　利用 $g(x)$ 的定义即可.

6　$f(t)=\sin t$ 连续, $g(x)$ 无第二类间断点.

7　先证明 $g(x)=x^\alpha$ 在 $[0,+\infty]$ 上一致连续, 再由一致连续复合的相容性即得证.

8　反证法证明 $f(x)=f(1)$.

9.2.2　B 组

1

(1) 利用 Lagrange 中值定理即可;

(2) 设 $|f'(x)|\leqslant M(M>0)$. 对 $x\geqslant a$, 利用 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi\in(a,x)$, 有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{f(x)-f(a)}{x}\right|+\left|\frac{f(a)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|+\left|\frac{f(a)}{x}\right|=|f'(\xi)|+\left|\frac{f(a)}{x}\right|\leqslant M+\left|\frac{f(a)}{a}\right|<+\infty.$$

故存在 $M_2>0$, 使得 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant M_2$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 由 (1) 知, $\exists\delta_1>0$, 对 $\forall x_i,x_2\geqslant a$ 且 $|x_1-x_2|<\delta_1$, 均有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{a\varepsilon}{2}$. 再取 $\delta_2=\dfrac{a\varepsilon}{2M_0}$, $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则对 $\forall x_i,x_2\geqslant a$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}\right|&=\left|\frac{x_1(f(x_1)-f(x_2))}{x_1x_2}-\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{x_1x_2}\right|\leqslant\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2}\right|+\left|\frac{f(x_1)}{x_1}\cdot\frac{x_2-x_1}{x_2}\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+M_0\cdot\frac{\delta_2}{a}=\varepsilon.\end{aligned}$$

2　记 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. 若 $f(x)$ 为常值函数, 则结论显然成立. 否则, $\exists x_0\in[a,+\infty)$, $f(x_0)\neq A$. 设 $A>f(x_0)$, 取 $\varepsilon=A-f(x_0)$, $\exists X>x_0$, 当 $x>X$, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 故 $f(x)>A-\varepsilon=f(x_0)$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 它在 $[a,X]$ 上存在最小值 $f(x_1)$, 且当 $x>X$ 时, 有 $f(x)>f(x_0)\geqslant f(x_1)$. 故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有最小值 $f(x_1)$.

若 $A<f(x_0)$, 则取 $\varepsilon=f(x_0)-A$, 同理可证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有最大值.

3

(1) 设 $g(x)=f(x)-x$, 则有 $g(a)\geqslant 0, g(b)\leqslant 0$. 由零点存在定理知, 存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $g(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=x_0$. 对 $\forall a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$, 有

$$g(x)-g(y)=(f(x)-f(y))-(x-y)\leqslant(k-1)(x-y)<0.$$

故唯一性得证.

(2) 由 $f([a,b])\subset[a,b]$ 知, $x_n\in[a,b]$. 对 $\forall n,p\in\boldsymbol{N}^*$, 有

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant k|x_{n+p-1}-x_{n-1}|\leqslant k^2|x_{n+p-2}-x_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant k^{n-1}|x_{p+1}-x_1|\leqslant k^{n-1}(b-a)\xrightarrow{n\to+\infty}0.$$

故 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 列. 由 Cauchy 收敛准则知, $\exists x^*\in[a,b]$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$. 对 “$x_{n+1}=f(x_n)$” 两边同时取极限, 并由 (1) 得: $x^*=x_0$.

(3) $f(x)=\begin{cases}x+1+\dfrac{1}{x-2}, & x\leqslant 0,\\ x+\dfrac{1}{x+2}, & x>0.\end{cases}$

4　若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不严格单调, 则 $\exists x_1 < x_2 < x_3$, 使得 $f(x_2) \geqslant f(x_1) = f(x_3)$ 或 $f(x_2) \leqslant f(x_1) = f(x_3)$ 成立. 故有 $f(f(x_1)) = f(f(x_3))$. 而 $x_1 < x_3$, 所以 $kx_1 \neq kx_3$, 矛盾;

若 $f(x)$ 严格递增或严格递减, 则 $f(f(x))$ 严格递增, 这与 kx 严格递减矛盾.

5　记 $g(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$, 则

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

故一定存在 $i_1, i_2 \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 使得 $g\left(\dfrac{i_1}{n}\right) g\left(\dfrac{i_2}{n}\right) \leqslant 0$, 由零点存在定理知, 在 $\dfrac{i_1}{n}, \dfrac{i_2}{n}$ 之间存在 ξ, 使得 $g(\xi) = 0$, 即 $f\left(\xi + \dfrac{1}{n}\right) = f(\xi)$.

6　若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq \infty, \exists M > 0, |x_n| \to +\infty$, 满足 $|f(x_n)| \leqslant M$. 由 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续知 $f(x)$ 在 $[-M, M]$ 上连续, 因而有界. 故 $|f(f(x_n))|$ 有界, 矛盾.

7　对 $\forall x \in (a, b)$, 分别令 $y \to x^-, y \to x^+$, 可得

$$f(x^-) \leqslant \frac{f(x) + f(x^-)}{2}, \qquad f(x^+) \leqslant \frac{f(x) + f(x^+)}{2}.$$

即

$$f(x^-) \leqslant f(x), \qquad f(x^+) \leqslant f(x).$$

然后在 $f(x) = f\left(\dfrac{y + (2x - y)}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(y) + f(2x - y)}{2}$ 中令 $y \to x^+$, 可得

$$f(x) \leqslant \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

故有 $f(x) = f(x^+) = f(x^-)$, 即 f 在 x 点上连续. 由 x 的任意性知, $f(x)$ 在 (a, b) 上连续.

8　若 $\alpha \leqslant 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 不存在或趋于 ∞, 由 Cauchy 收敛准则知, $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上不一致连续. 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

若 $\alpha > 0$, 注意到 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x^\alpha}{x^\alpha} \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha-\beta} = 1 \cdot \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha-\beta} = \begin{cases} +\infty, & \alpha < \beta, \\ 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha > \beta. \end{cases}$

当 $\alpha < \beta$ 时, 由 Cauchy 收敛准则知, $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上不一致连续. 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

当 $\alpha \geqslant \beta$ 时, 定义 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ \lim\limits_{t\to 0^+} f(t), & x = 0. \end{cases}$ 则 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

对 $\beta > 0, \forall \varepsilon > 0$, 取 $x_0 = \left(\dfrac{3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, 对 $x_1, x_2 \in [x_0, +\infty), \exists \delta > 0$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$, 有

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant |F(x_1)| + |F(x_2)| \leqslant \frac{1}{x_1^\beta} + \frac{1}{x_2^\beta} \leqslant \frac{2}{x_0^\beta} = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

所以 $F(x)$ 在 $[x_0, +\infty)$ 上一致连续. 利用 $F(x)$ 的连续性知, $F(x)$ 在 $[0, 2x_0]$ 上一致连续, 所以 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续.

对 $\beta<0$, 当 $0<\alpha-\beta\leqslant 1$ 时, $F'(x)$ 在 $[1,+\infty]$ 上有界 (请读者自行验证), 利用 Lipschitz 条件知, $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续. 同上可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

当 $\alpha-\beta>1$ 时, 注意到 $F'(x)$ 在 $x^\alpha=2n\pi$ 上趋于无穷大, 可通过取点列说明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续 (请读者自行验证).

综上, 当且仅当 $\alpha>0$ 且 $\begin{cases}\alpha\geqslant\beta, & \beta>0,\\ \beta\leqslant\alpha\leqslant\beta+1, & \beta<0.\end{cases}$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

9.2.3 C 组

1 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 令 $F(x)=g(x)-f(x)$, $F(x_n)=f(x_{n+1})-f(x_n)$. 由介值定理知, $\exists\xi_n\in[a,b]$, 使得

$$F(\xi_n)=\frac{F(x_1)+F(x_2)+\cdots+F(x_n)}{n}=\frac{f(x_{n+1})-f(x_1)}{n}.$$

故 $\{\xi_n\}$ 中有子列 $\{\xi_{k_n}\}$, 使得 $\xi_{k_n}\to x_0\in[a,b]$. 并有 $F(\xi_{k_n})=\dfrac{f(x_{k_n+1})-f(x_1)}{k_n}$. 令 $n\to\infty$, 得 $F(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=g(x_0)$.

2

(1) 反证: 若存在题设的函数 $f(x)$, 则 $\exists a<b$, 使得 $f(a)=f(b)$. 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中存在最大值 M 和最小值 m, 且 $\exists x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)=M$ 或 $f(x_0)=m$ 成立. 不妨 $f(x_0)=M$. 若存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $f(x_0)=f(x_1)=M$, 则 $\exists x_1,x_2\in(x_0-\delta,x_0+\delta),x_3\in(x_1-\delta,x_1+\delta)$, 使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, 这与题设矛盾. 所以存在唯一的 $x_0\in\mathbb{R}$, 使得 $f(x_0)+M$ 成立, 亦与题设矛盾. 综上, 不存在这样的函数 $f(x)$.

(2) 例如:$f(x)=\sin x+\dfrac{2x}{3\pi}$.

3 略

4

(1) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $|x|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(0)|=|xD(x)|\leqslant|x|<\delta=\varepsilon.$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 若 $f(x)$ 在 $x_0\neq 0$ 处连续, 则有

$$\lim_{x\to x_0}D(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}x}=\frac{f(x_0)}{x_0}=D(x_0)$$

因此 $D(x)$ 在 x_0 处连续, 矛盾. 所以连续点为 $\{0\}$. 间断点类型: 第二类间断点.

(2) 连续点为 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, 间断点类型: 第一类间断点. 过程类似**补充习题 1 C 组 T6**.

9.3 第 3 章

9.3.1 A 组

1

(1) 因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}\overset{\text{L'Hospital}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{\tan x}=0.$$

故 $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^x=1$;

(2) $\dfrac{1}{6}$. 用 L'Hosptial 法则或者 Taylor 定理. 用 Taylor 定理时需注意 $x\to0$ 时, 有;

$$\cos(\sin x)=1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{4!}(x+o(x))^4+o(x^4)=1-\frac{1}{2!}x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4!}\right)x^4+o(x^4).$$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\mathrm{e}}{2}x+x^2\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})-1}-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\mathrm{e}}{2}x+x^2\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-1}-1\right)\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\mathrm{e}}{2}x+x^2\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}-1\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\mathrm{e}}{2}x+x^2\mathrm{e}\left(1+\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)+\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\mathrm{e}}{2}x+\mathrm{e}\left(-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)\right]$$
$$=\frac{11}{24}\mathrm{e}.$$

2 $f(x_0)\neq0$ 或者 $f(x_0)=f'(x_0)=0$ 时, $|f(x)|$ 在 x_0 处可导, 其余情况不可导.

3 令 $x=0$, 则有 $y(0)+2^{y(0)}=1$. 由于 $x+2^x$ 严格递增, 从而 $y(0)=0$ 是唯一解. 在题设方程两边对 x 求导, 得 $y'+2^y\ln2\cdot y'-1-\cos x=0$. 令 $x=0$, 有 $y'(0)=\dfrac{2}{1+\ln2}$.

4 由题意得,

$$\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x}=2xf'(x^2),\quad \frac{\mathrm{d}^2f(x^2)}{\mathrm{d}x^2}=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)\implies\left.\frac{\mathrm{d}^2f(x^2)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2f'(0)=2,$$

由于 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, $g(0)=0$, $g'(0)=\dfrac{1}{f'(0)}=1$, 故

$$\frac{\mathrm{d}^2g(x^2)}{\mathrm{d}x^2}=2g'(x^2)+4x^2g''(x^2)\implies\left.\frac{\mathrm{d}^2g(x^2)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2g'(0)=2.$$

5 由带 Peano 余项的 Taylor 定理,

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\quad(x\to x_0)$$
$$\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}=\frac{-\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)}{(f'(x_0))^2(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)}=\frac{-\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)}{(f'(x_0))^2+o(1)}\quad(x\to x_0)$$
$$\implies\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right]=-\frac{f''(x_0)}{2(f'(x_0))^2}.$$

或由 L'Höspital 法则,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right]&=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)f'(x_0)-(f(x)-f(x_0))}{(f(x)-f(x_0))(x-x_0)f'(x_0)}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)-f'(x)}{f'(x_0)(f(x)-f(x_0))+(x-x_0)f'(x_0))}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{-\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}}{f'(x_0)\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f'(x_0)\right)}\\&=-\frac{f''(x_0)}{2(f'(x_0))^2}\end{aligned}$$

6 固定 $x_0\in\mathbb{R}$. 我们有

$$0\leqslant\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant L|x-x_0|^{\alpha-1}\xrightarrow{x\to x_0}0.$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, 即 $f'(x_0)=0$. 由 x_0 的任意性知, 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 均有 $f'(x)=0$. 所以 $f(x)$ 是常数.

7 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}, x\in(0,+\infty)$, 则有 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-\frac{f(x)}{x}}{x}$. 利用 Lagrange 中值定理及 $f'(x)$ 的递增性知, $\exists\xi\in(0,x)$, 使得

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)<f'(x).$$

所以 $g'(x)>0$, 即 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增.

8 求导, 得:$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x+y)\left(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$, 故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}.$$

再求导, 得: $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f''(x+y)\left(a+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+f'(x+y)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. 把上式代入, 得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{f''(x+y)}{(1-f'(x+y))^3}.$$

9 由 Lagrange 中值定理知, $\exists x_1\in(a,c), x_2\in(c,b)$, 使得

$$f'(x_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\qquad f'(x_2)=\frac{f(c)-f(b)}{c-b}<0.$$

再由 Lagrange 中值定理知, $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(x_1)-f'(x_2)}{x_1-x_2}<0.$$

10　反证: 若 $\exists x_2 > x_1 > 0$, 使得 $f(x_2) > f(x_1)$. 由凸函数斜率递增性知, 对 $\forall x > x_2$, 有

$$\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} \geqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

因此

$$f(x) \geqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_2)+f(x_2) \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty.$$

11　我们有

$$(\ln(1-x^2))^{(n)} = (\ln(1-x)+\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}-(n-1)!(1-x)^{-n}.$$

利用 Leibniz 公式, 得

$$f^{(n)}(x) = x^2(\ln(1-x^2))^{(n)} + \binom{n}{1}2x(\ln(1-x^2))^{(n-1)} + 2\binom{n}{2}(\ln(1-x^2))^{(n-2)}$$

因此

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(n-3)!((-1)^{n-1}-1) = \begin{cases} \dfrac{2n!}{2-n}, & n=2k+2 \\ 0, & n=2k+1. \end{cases} (k\in \boldsymbol{N}^*)$$

12　对 $\forall 1\leqslant k\leqslant n$, 有

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f(0)+f'(0)\frac{k}{n^2}+o\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} x_n &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\left(f(0)+f'(0)\frac{k}{n^2}+o\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(f'(0)\frac{n+1}{2n}+o(1)\right) = \frac{f'(0)}{2}.\end{aligned}$$

利用 $(\sin x)'\Big|_{x=0} = \cos 0 = 1, (\ln(1+x))'\Big|_{x=0} = \dfrac{1}{1+x}\Big|_{x=0} = 1$. 可得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \sin\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \exp\left\{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right\} = \sqrt{e}.$$

利用

$$\ln\cos\frac{k}{n\sqrt{n}} = \ln(1-\frac{k^2}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)) = -\frac{k^2}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{k^2}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n\cos\frac{k}{n\sqrt{n}} &= \lim_{n\to+\infty}\exp\left\{\sum_{k=1}^n\ln\cos\frac{k}{n\sqrt{n}}\right\} = \lim_{n\to+\infty}\exp\left\{\sum_{k=1}^n\left(-\frac{k^2}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+o(1)\right\}\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.\end{aligned}$$

13 原式 $= \lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\dfrac{f'(a)}{nf(a)}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^n = \mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$

14 因为 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 故 $f(x)$ 在 x_0 **附近**可导. 由 L'Hospital 法则知,

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$$

而

$$f''(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{h}$$

故

$$f''(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{h}\right)=\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$$

所以

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$$

注意 不能对 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$ 继续使用 L'Hosptial 法则, 因为题目中没有 "$f(x)$ 在 x_0 **附近**二阶可导" 这一条件.

15 由 Lagrange 中值定理, $\exists\xi\in(0,x_2),\eta\in(x_1,x_1+x_2)$, 满足

$$\frac{f(x_2)}{x_2}=\frac{f(x_2)-f(0)}{x_2-0}=f'(\xi),\quad \frac{f(x_1+x_2)-f(x_1)}{x_2}=\frac{f(x_1+x_2)-f(x_1)}{(x_1+x_2)-x_1}=f'(\eta).$$

又因为 $f''(x)<0$, 所以 $f'(\xi)>f'(\eta)$. 因此

$$\frac{f(x_2)}{x_2}>\frac{f(x_1+x_2)-f(x_1)}{x_2}.$$

化简得

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

16 充分性: 取 $a=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$(凸函数的斜率递增性保证其存在);
必要性: 对 $\forall x_1,x_2\in I,\alpha\in[0,1]$, 取 $c=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$, 有

$$f(x_2)\geqslant a\alpha(x_2-x_1)+f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2) \tag{9.1}$$
$$f(x_1)\geqslant a(1-\alpha)(x_1-x_2)+f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2) \tag{9.2}$$

$(1-\alpha)\times(1)+\alpha\times(2)$ 得

$$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\geqslant f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2).$$

17 因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上取到最大值, 所以 $\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)=0$. 故 $\exists\theta_1\in(0,\eta),\theta_2\in(\eta,1)$, 使得

$$\left|\frac{f'(\eta)-f'(0)}{\eta-0}\right|=|f''(\theta_1)|\leqslant M,\quad \left|\frac{f'(\eta)-f'(1)}{\eta-1}\right|=|f''(\theta_2)|\leqslant M.$$

故有 $|f'(0)|\leqslant\eta M,|f'(1)|\leqslant(1-\eta)M$, 相加即得 $|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant M$.

9.3.2　B 组

1　略

2　利用 $\mathrm{d}x = f'(y)\,\mathrm{d}y$ 知,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{f'(y)}\right)}{f'(y)\,\mathrm{d}y} = \frac{\left(\frac{1}{f'(y)}\right)'\mathrm{d}y}{f'(y)\,\mathrm{d}y} = -\frac{f''(y)}{(f'(y))^3} = -\frac{f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^3}.$$

3　我们有 $y' = 2\arctan x \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$, 即 $(1+x^2)y' = 2\arctan x$. 对等式两边求 $n-1$ 阶导, 得

$$(1+x^2)y^{(n)}(x) + 2(n-1)xy^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)y^{(n-2)}(x) = 2(\arctan x)^{(n-1)}$$

故有

$$y^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0) + 2(\arctan x)^{(n-1)}\Big|_{x=0}$$

利用例 3.1, 有

$$y^{(2n+1)}(0) = 0, \quad y^{(2n)}(0) = -(n-1)(n-2)y^{(2n-2)}(0) + 2\cdot(-1)^n(2n-2)! = (-1)^n[3(2n-2)! + (2n-1)]$$

4　因为 $\tan x$ 为奇函数, 所以 $\tan x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, 即有

$$(a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5))\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

据此得到方程组 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ -\dfrac{a_1}{2} + a_3 = -\dfrac{1}{6}, \\ a_5 - \dfrac{a_3}{2} + \dfrac{a_1}{24} = \dfrac{1}{120}. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_3 = \dfrac{1}{3}, \\ a_5 = \dfrac{2}{15}. \end{cases}$ 所以 $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

5　因为

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n^2\left((1+\frac{1}{n+1})^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) &= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\mathrm{e}^{(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} - \mathrm{e}^{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\mathrm{e}^{(n+1)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)} - \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^2\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\mathrm{e}}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}}{2}.
\end{aligned}$$

所以当 $x < 2$ 时, $f(x) = 0$. 当 $x > 2$ 时, 极限不存在. 所以 $f(x)$ 无定义. 因此 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 2]$, 值域是 $\left\{0, \dfrac{\mathrm{e}}{2}\right\}$.

6　由 $f(x)$ 的连续性知, $\exists c \in (0,1)$, 使得 $f(c) = \dfrac{a}{a+b}$. 由 Lagrange 中值定理知, $\exists \xi \in (0,c), \eta \in (c,1)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(c)-f(0)}{c-0} = \frac{a}{c(a+b)}, \qquad f'(\eta) = \frac{f(1)-f(c)}{1-c} = \frac{b}{(a+b)(1-c)}.$$

所以

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = (a+b)c + (a+b)(1-c) = a+b.$$

7　记

$$g(x) = f^2(x) + \frac{1}{2}f'^2(x),$$

则

$$g'(x) = (2f(x) + f''(x))f'(x) = -xf'^2(x).$$

因此

$$g'(x) \begin{cases} \geqslant 0, & x < 0, \\ = 0, & x = 0, \\ \leqslant 0, & x > 0, \end{cases}$$

由此可知, $g(x)$ 在 $x=0$ 处取到最大值, 即

$$f^2(x) + \frac{1}{2}f'^2(x) \leqslant f^2(0) + \frac{1}{2}f'^2(0),$$

注意到上式右端是一个常数, 因此 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 均有界.

8　反证: 若 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $|f(\xi)| = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| > 0$. 不妨 $f(\xi) > 0$, 此时 $f'(\xi) = 0, f''(\xi) < 0$. 而 $f''(\xi) = e^{\xi} f(\xi) > 0$, 矛盾.

9　把 $f(x)$ 剖分成有限个区间, 运用 Lagrange 中值定理证明 $f(x)$ 在每个区间上严格递增. 再考虑有限点处, 利用函数连续性及 **Darbox** 定理即可.

10　由 L'Hospital 法则知,

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to+\infty}(f(x) + 2f'(x) + f''(x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x(f(x) + 2f'(x) + f''(x))}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x(f(x) + f'(x))}{\mathrm{e}^x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}(f(x) + f'(x)). \end{aligned}$$

同时, 有

$$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x(f(x)+f'(x))}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$.

11

(1) 存在性: 由函数的连续性即可;

唯一性: 若 $\exists c_1 \neq c_2$ 且 $c_1, c_2 \in (a,b)$, 使得 $f(c_1) = f(c_2) = 0$. 由 Lagrange 中值定理知, $\exists \xi \in (c_1, c_2)$, 使得 $f'(\xi) = 0$. 而 $f''(x) > 0$, 所以当 $x > c_2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x < c_1$ 时, $f'(x) < 0$. 所以 $f(a), f(b) > 0$. 这与 $f(a)f(b) < 0$ 矛盾.

(2) $x_0 < c$. 归纳证明: $f(x_n) > 0, x \in (x_0, c)$. 证明思路: 由 $x_{n+1} - c = x_n - c - \dfrac{f(x_n) - f(c)}{f'(x_n)}$ 和 Lagrange 中值定理说明

$$0 < \frac{1}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = \frac{f'(\xi)}{f'(x_n)} < 1.$$

12　往证: 数列 $\{b_n\}$ 单调递增有上界.

考虑函数

$$f(x) = \frac{x}{1 - \mathrm{e}^{-x}} - a, \quad g(x) = f(x) - x, \quad x > 0,$$

从而

$$b_{n+1} = f(b_n), \quad b_{n+1} - b_n = f(b_n) - b_n = g(b_n).$$

求导得:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - (1+x))}{(1 - \mathrm{e}^{-x})^2} \geqslant 0, \quad g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}(1 - x - \mathrm{e}^{-x})}{(1 - \mathrm{e}^{-x})^2} \leqslant 0,$$

其中已用到 $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$.

因此, $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减.

又

$$g(b_1) = g(1-a) = \frac{-a + \mathrm{e}^{-(1-a)}}{1 - \mathrm{e}^{-(1-a)}} > 0, \quad g(+\infty) = -a < 0,$$

故存在唯一的 $x_0 \in (1 - a, +\infty)$, 使得 $g(x_0) = 0$.

下面对 n 用数学归纳法证明 $b_n < b_{n+1} < x_0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) $b_1 = (1 - a) < x_0$;

(2) 假设 $b_n < x_0$, 往证: $b_n < b_{n+1} < x_0$ $(n \geqslant 1)$.

$$b_n < b_{n+1} \iff g(b_n) > 0 = g(x_0),$$

因为 $g(x)$ 单调递减, 由归纳假设知上式 $\iff$ $b_n < x_0$, 成立.

$$b_{n+1} < x_0 \iff f(b_n) - x_0 < 0,$$

由 $f(x)$ 单调递增及归纳假设知, 上式左端

$$LHS < f(x_0) - x_0 = g(x_0) = 0,$$

因此 $b_n < b_{n+1} < x_0$.

(3) 由 (a)(b) 及数学归纳法知, $b_n < b_{n+1} < x_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

至此, 我们证明了数列 $\{b_n\}$ 单调递增有上界, 因此收敛, 记为 $b_n \to b$ $(n \to \infty)$, 题设等式两端取极限得: $g(b) = 0 \implies b = x_0$ 是方程 $\dfrac{b}{1 - \mathrm{e}^{-b}} - b - a = 0$ 的根.

13　取 $k = \dfrac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$, 令 $F(t) = f(t) - \dfrac{k(t-a)(t-b)}{2}$, 有 $F(a) = F(b) = F(x) = 0$. 由 Rolle 定理知, $\exists \eta_1 \in (a, x), \eta_2 \in (x, b)$, 使得 $F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0$. 故 $\exists \xi(\eta_1, \eta_2)$, 使得 $F''(\xi) = 0$, 即 $f''(\xi) = k$.

14 $f_n'(x) = nx^{n-1}\ln x + x^{n-1} = nf_{n-1}(x) + x^{n-1}$. 对等式两边求 $n-1$ 阶导, 有

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f_{n-1}^{n-1}(x)}{(n-1)!} + \frac{1}{n}$$

递推得

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!} = \ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

令 $x = \dfrac{1}{n}$, 并令 $n \to +\infty$, 可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!} = \gamma$($\gamma$ 是 Euler 常数).

15 先用归纳法证明: $\dfrac{y_{n+1}}{n+1} < \dfrac{y_n}{n}$, 再利用单调有界原理得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y_n}{n} = 0$, 然后有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} y_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{n}{y_n}} \overset{\text{stolz}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{n+1}{y_{n+1}} - \frac{n}{y_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{y_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{y_n}{n}}{\frac{y_n}{n} - \frac{y_{n+1}}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{y_n}{n}\ln\left(1+\frac{y_n}{n}\right)}{\frac{y_n}{n} - \ln\left(1+\frac{y_n}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{y_n}{n}\right)^2}{\frac{y_n}{n} - \left(\frac{y_n}{n} - \frac{y_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{y_n^2}{n^2}\right)\right)} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

16 由条件易知 $f^{(n)}(x) = 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 对 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 Taylor 展开: $\exists\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$
$$\Longrightarrow |f(x)| \leqslant |\theta x| \cdot |x|^n \leqslant |x|^{n+1},$$

上式令 $n \to \infty$ 得: $f(x) = 0$, $x \in (-1, 1)$. 由连续性得: $f(x) = 0$, $x \in [-1, 1]$.

同理, 对 $f^{(n)}(x)$ 进行 Taylor 展开可知, $f^{(n)}(x) = 0$, $x \in [-1, 1]$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

下面对 k 用数学归纳法证明: $f^{(n)}(x) = 0$, $x \in [-k, k]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(1) $k = 1$ 时, 已证明;

(2) 假设结论对 k 成立, 下证对 $k+1$ ($k \geqslant 1$) 成立.

对 $f(x)$ 在 $x = k$ 处 Taylor 展开: $\exists\theta \in (0,1)$, 使得

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(k+\theta)}{n!}(x-k)^n$$
$$\Longrightarrow |f(x)| \leqslant |k+\theta| \cdot |x-k|^n \leqslant (k+1)\,|x-k|^n,$$

上式令 $n \to \infty$ 得: $f(x) = 0$, $x \in [k, k+1)$.

同理可证得 $f^{(n)}(x) = 0$, $x \in [-k-1, k+1]$.

(3) 由 (1)(2) 及数学归纳法知, $f^{(n)}(x) = 0$, $x \in [-k, k]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

因此, $f^{(n)}(x) = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 特别地, 取 $n = 0$, 有 $f(x) = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

17　将函数 $f(x)$ 在 x_0 处进行 Taylor 展开, 得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1}+o(h^{n+1}).$$

与题干展开式作差, 得

$$\frac{h^n}{n!}(f^{(n)}(x_0+\theta_n h)-f^{(n)}(x_0))=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)+o(h^{n+1}).$$

化简得

$$\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_n h)-f^{(n)}(x_0)}{h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x_0)+o(1)$$

利用导数定义可得: $\lim\limits_{n\to+\infty}\theta_n=\dfrac{1}{n+1}$.

18　对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x|<\delta$ 时, 有 $m-\varepsilon<\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}<m+\varepsilon$. 所以有

$$\begin{aligned}
\frac{m-\varepsilon}{2}&<\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}<\frac{m+\varepsilon}{2},\\
\frac{m-\varepsilon}{2^2}&<\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{2^2}\right)}{x}<\frac{m+\varepsilon}{2^2},\\
&\vdots\\
\frac{m-\varepsilon}{2^n}&<\frac{f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}<\frac{m+\varepsilon}{2^n}.
\end{aligned}$$

累加得

$$(m-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}<(m+\varepsilon)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right).$$

利用 $f(x)$ 在 $x=0$ 处得连续性, 并令 $n\to+\infty$, 有

$$m-\varepsilon\leqslant\frac{f(x)-f(0)}{x}\leqslant m+\varepsilon.$$

即得

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-m\right|\leqslant\varepsilon<2\varepsilon.$$

由导数定义知, $f'(0)=m$.

19　在 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 处 Taylor 展开, 并在展开式中分别取 $x=a,x=b$, 即

$$\begin{aligned}
f(a)&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2;\\
f(b)&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

将上述两式相加, 得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{f'(\xi_1)+f'(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}=f''(\xi)\frac{(b-a)^2}{4}$$

其中最后一步用到了导函数的介值性, ξ 位于 ξ_1 和 ξ_2 之间.

20　利用 Lagrange 中值定理, 有

$$f(0) = f(x) - f'(x)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2, \xi \in (0, x)$$
$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2, \eta \in (x, 1).$$

将上述两式相减, 得

$$f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 - \frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2.$$

因此

$$|f'(x)| \leqslant |f(1)| + |f(0)| + \frac{|f''(\xi)|}{2}x^2 + \frac{|f''(\eta)|}{2}(1-x)^2 \leqslant 2 + x^2 + (1-x)^2 \leqslant 3.$$

21　用反证法.

假设结论不成立, 则 $\exists X > 0$, 使得 $\forall x > X$, 有 $f'(x) \geqslant f(ax) > 0$. 即 $f(x)$ 在 $x > X$ 时单调递增. 取 $X = \dfrac{1}{a-1} > 0$, $\forall x > X$, 有 $ax > x+1$. 由 Lagrange 中值定理知, $\exists \xi \in (x, x+1)$, 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \geqslant f(a\xi) \geqslant f(ax) \geqslant f(x+1) \implies f(x) \leqslant 0,$$

这与函数 f 的值域矛盾. 故假设不成立, 即, 对 $\forall X > 0$, $\exists x > X$, 使得 $f'(x) < f(ax)$. 依次取 $X = 1, 2, \cdots$, 即, 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n > n$, 则数列 $\{x_n\}$ 趋于无穷且使得 $f'(x_n) < f(ax_n)$.

9.3.3　C 组

1

(1) 找不动点 $f(f(x)) = x$, 解得 $x_0 = 1$. 并令 $f(1) = \alpha$, 则 $f(\alpha) = 1, f(f(\alpha)) = f(1) = \alpha \implies \alpha = 1$. 而

$$f'(f(x)) \cdot f'(x) = -3x^2 + 2x,$$

取 $x = 1$, 得 $(f'(1))^2 = -1$, 矛盾.

(2) 找不动点 $f(f(x)) = x$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = 3$. 类似得: $f(1) = 1, f(3) = 3$ 或 $f(1) = 3, f(3) = 1$. 而

$$f'(f(x)) \cdot f'(x) = 2x - 3,$$

若为第一种情况, 同 (1); 若为第二种情况, 分别取 $x = 1, x = 3$, 得到矛盾.

2　若 $x_0 \in \mathbb{Q}$, 即 $\exists p_0, q_0 \in \mathbb{Z}$ 且 $(p_0, q_0) = 1$, 使得 $x_0 = \dfrac{p_0}{q_0}$. 当 $x \to x_0$ 且 $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, 有

$$\frac{R(x) - R(x_0)}{x - x_0} = \frac{0 - \frac{1}{q_0}}{x - x_0} = -\frac{1}{q_0(x - x_0)} \xrightarrow{x \to x_0} \infty.$$

故不可导.

若 $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, 考虑 $x = \dfrac{p}{q}$(p, q 定义同上), $\dfrac{R(x)}{x - x_0} = \dfrac{1}{p - qx_0}$. 则存在无穷组 (p, q, N), 使得 $|p - qx_0| < \dfrac{1}{N} < \dfrac{1}{q}$(证明参考本讲义**例 1.5**). 所以

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{1}{p - qx_0} > N.$$

由 N 的任意性知, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R(x) - R(x_0)}{x - x_0}$ 不存在. 故 $R(x)$ 处处不可导.

3 即只需证明引理: 若多项式 $p \pm p' \geqslant 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上成立, 则必有 $p \geqslant 0$.

证明: 因为 $p \pm p' \geqslant 0$, 所以 p 必为首项系数为正数的偶次多项式. 所以 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = +\infty$. 故 p 必有最小值点 x_0, 并满足 $p'(x_0) = 0$. 所以

$$p(x) \geqslant p(x_0) = p(x_0) \pm p'(x_0) \geqslant 0$$

对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立. 因此

$$p''' - p'' - p' + p = (p - p'') - (p - p'')' \geqslant 0 \implies p - p'' \geqslant 0 \implies p \pm p' \geqslant 0 \implies p \geqslant 0.$$

4 考察

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{b-a}}(f(x) - f(a)).$$

只需证 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $g'(\xi) = 0$ 即可.
若 $\eta \in (a, b]$, 使得 $f(\eta) = f(a)$, 则由 Rolle 定理知, $\xi \in (a, \eta) \subseteq (a, b)$, 使得 $g'(\xi) = 0$.
若对 $\forall x \in (a, b]$,$f(x) \neq f(a)$. 由 $f(x)$ 的连续性, 不妨设 $f(x) > f(a)$, 从而 $g'(x_0) < 0$. 又由 Lagrange 中值定理知, $\exists \eta \in (a, b)$, 使得

$$g'(\eta) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} > 0.$$

由 Darboux 定理知, $f'(x)$ 具有介值性. 故 $\exists \xi$ 在 x_0 和 η 之间, 使得 $g'(\xi) = 0$.

5 由题意知,

$$l(x) = \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b).$$

因此

$$l(x) - f(x) = \frac{b - x}{b - a}(f(a) - f(x)) + \frac{x - a}{b - a}(f(b) - f(x)).$$

利用 Lagrange 中值定理, 得

$$\begin{aligned} f(a) - f(x) &= (a - x) f'(x) + \frac{f''(\xi)}{2}(a - x)^2 \ (a < \xi < x), \\ f(b) - f(x) &= (b - x) f'(x) + \frac{f''(\eta)}{2}(b - x)^2 \ (x < \eta < b). \end{aligned}$$

代入后可得

$$l(x) - f(x) = \frac{(b - x)(x - a)}{2}\left(\frac{x - a}{b - a} f''(\xi) + \frac{b - x}{b - a} f''(\eta)\right).$$

由于 $\dfrac{b - x}{b - a}, \dfrac{x - a}{b - a} > 0$ 且其和为 1, 故有

$$|l(x) - f(x)| = \frac{(b - x)(x - a)}{2}\left(\frac{x - a}{b - a}|f''(\xi)| + \frac{b - x}{b - a}|f''(\eta)|\right) \leqslant \frac{M}{2}(b - x)(x - a) \leqslant \frac{(b - a)^2}{8}.$$

6 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(4)}(x)=b$. 由 Taylor 定理知,

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}+\frac{f^{(3)}(x)}{3!}+\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!}\quad(x<\zeta<x+1),$$
$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}-\frac{f^{(3)}(x)}{3!}+\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\quad(x<\eta<x+1).$$

把上式两项相加及相减, 分别得

$$f(x+1)+f(x-1)=2f(x)+f''(x)+\frac{f^{(4)}(\zeta)+f^{(4)}(\eta)}{4!},$$
$$f(x+1)-f(x-1)=2f'(x)+\frac{f^{(3)}(x)}{3}+\frac{f^{(4)}(\zeta)-f^{(4)}(\eta)}{4!}.$$

在上面两式令 $x\to+\infty$, 即得

$$\lim_{x\to+\infty} f''(x)\text{ 存在},\quad \lim_{x\to+\infty}(2f'(x)+\frac{f^{(3)}(x)}{3})=0,$$

再由 Taylor 定理知,

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(\alpha)}{2!}\quad(x<\alpha<x+1),$$
$$f(x+1)=f(x)-f'(x)+\frac{f''(\beta)}{2!}\quad(x<\beta<x+1).$$

在上式令 $x\to+\infty$, 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)$ 存在，故得

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)}{2}=-\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0.$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(2f'(x)+\frac{f^{(3)}(x)}{3})=0$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(3)}(x)=0$.
所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0$,$k=1,2,3$.

7

(1) $f(x)=\sin x^2$;
(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$;
(3) $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$;
(4) $f(x)=\dfrac{2+\sin\frac{1}{x}}{x}$.

8 注意反复运用归纳法以及利用导数研究函数性质.

9.4 第 5 章

9.4.1 A 组

1

(1) 原式 $=x\arctan x-\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=x\arctan x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$;

(2) 分类讨论, 并注意 $x=1$ 处积分的连续性. $\displaystyle\int|\ln x|\,\mathrm{d}x=\begin{cases}-x\ln x+x+C, & 0<x\leqslant 1,\\ x\ln x-x+C+2, & x>1.\end{cases}$;

(3) 原式 $=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{2+\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C$;

(4) 原式 $=\displaystyle\int \frac{\tan x}{(\tan x+1)^3}\mathrm{d}\tan x=\int\left(\frac{1}{(\tan x+1)^2}-\frac{1}{(\tan x+1)^3}\right)\mathrm{d}\tan x=-\frac{1}{\tan x+1}+\frac{1}{2(\tan x+1)^2}$;

(5) 原式 $=x\sqrt{a^2+x^2}-\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\Longrightarrow\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$;

(6) 我们有

$$\int\cos\ln x\,\mathrm{d}x=x\cos\ln x-\int\sin\ln x\,\mathrm{d}x,$$
$$\int\sin\ln x\,\mathrm{d}x=x\sin\ln x+\int\cos\ln x\,\mathrm{d}x.$$

所以

$$\int\cos\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}(\cos\ln x-\sin\ln x)+C;$$

(7) 原式 $=\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$

$\displaystyle\overset{t=x-\frac{1}{2}}{=}\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(t^2+\frac{3}{4})+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}t+C$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$;

(8) 原式 $=\displaystyle\int\left(\frac{1}{(2+x)^2}-\frac{2}{2+x}+\frac{4}{(4+x)^2}+\frac{2}{4+x}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2+x}-2\ln|2+x|-\frac{4}{4+x}+2\ln|4+x|+C$;

(9) 令 $t=\sqrt[6]{x}$. 原式 $=\displaystyle 6\int\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}=6\ln\frac{t}{1+t}+C=6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[6]{x}}+C$;

(10) 令 $t=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$, 原式 $=\displaystyle 8\int\frac{t^2(t^2-1)}{(t^2+1)^3}\mathrm{d}t=8\int\left(\frac{2}{(1+t^2)^3}-\frac{3}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$

$\displaystyle=\frac{4t}{(1+t^2)^2}-\frac{6t}{1+t^2}+2\arctan t+C=(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}+2\arctan\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}+C.$

2　$\displaystyle\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=xf^{-1}(x)-\int x\mathrm{d}f^{-1}(x)\overset{y=f^{-1}(x)}{=}yf(y)-\int f(y)\mathrm{d}y=yf(y)-F(y)+C=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C.$

3

(1) 利用

$$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}}+(n+1)\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+2}}\mathrm{d}x$$

记 $J_n=\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^n}$, 则有 $J_{n+2}=I_n+I_{n+2}$. 故

$$I_n=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}}+(n+1)(I_n+I_{n+2})\implies I_n=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

.

(2) 我们有

$$\begin{aligned}I_n &= \int \frac{\sin(n-1)x\cos x + \sin x\cos(n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(n-1)x\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x + \int \cos(n-1)x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin nx + \sin(n-2)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x + \int \cos(n-1)x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}(I_n + I_{n-2}) + \frac{\sin(n-1)x}{n-1}.\end{aligned}$$

因此

$$I_n = \frac{2}{n-1}\sin(n-1)x + I_{n-2}.$$

4　略

9.4.2　B 组

1

(1) 原式 $= \displaystyle\int \frac{(\tan^2 x+1)^2}{\tan^4 x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t^2+1)^2}{t^4+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}} + C$ $= \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x - \cot x}{\sqrt{2}} + C$;

(2) 我们有

$$\begin{aligned}\int (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x})\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}(\sin x - \cos x)}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}\\ &= \sqrt{2}\arcsin(\sin x - \cos x) + C\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\int (\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x})\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}}\\ &= -\sqrt{2}\ln|\sin x + \cos x + \sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}| + C\end{aligned}$$

因此原式 $= \displaystyle\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin(\sin x - \cos x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln|\sin x + \cos x + \sqrt{(\sin x+\cos x)^2-1}| + C$;

(3) 令 $t = \dfrac{x+b}{x+a}$. 原式 $= \displaystyle -\frac{1}{(b-a)^4}\int\left(1-\frac{1}{t}\right)^3\mathrm{d}t = -\frac{1}{(b-a)^4}\left(\frac{1}{2t^2} - \frac{3}{t} + t - 3\ln t\right) +$ $\displaystyle C = -\frac{1}{(b-a)^4}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^3 - 3\frac{x+a}{x+b} + \frac{x+b}{x+a} - 3\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|\right) + C$;

(4) 原式 $= \displaystyle\frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}} + C$.

9.5　第 6 章

9.5.1　A 组

1

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\sin x}{1-\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-t}\right)$
$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \ln(1+\sqrt{2})$;

(2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$;

(3) 原式 $= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x}}\,\mathrm{d}x$
$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\mathrm{e}^x}{=} \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\mathrm{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\arctan\frac{t}{\sqrt{\mathrm{e}}}\Big|_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} = \frac{\pi}{4\sqrt{\mathrm{e}}} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\arctan\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$;

(4) 原式 $= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} (x+k\pi)|\sin x|\,\mathrm{d}x$
$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} k\pi\sin x\,\mathrm{d}x\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(\pi + 2k\pi) = n^2\pi.$

2

(1) 原式 $= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$;

(2) 利用 L'Hospital 法则, 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x\cdot\frac{x^8}{1+x^6}}{4x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^6}{2(1+x^6)} = \frac{1}{2}$.

(3) 对 $\forall x>0$,$\exists n\in\mathbb{N}$, 使得 $x\in[n\pi,(n+1)\pi)$. 利用 $\int_0^{n\pi} |\sin t|\mathrm{d}t = n\int_0^{\pi} \sin t\mathrm{d}t = 2n$, 得

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{n\pi} |\sin t|\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{x} |\sin t|\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n\pi}\int_0^{(n+1)\pi} |\sin t|\mathrm{d}t = \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2(n+1)}{n\pi} = \frac{2}{\pi} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{(n+1)\pi}$, 由夹逼原理知, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^{x} |\sin t|\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}$.

3　(2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1) (4).

4　对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta = \frac{1}{m+\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}(m\geqslant 2)$, 对 $[0,1]$ 的任意分割 $T := x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$. 设 $x_0, x_1, \cdots, x_i$ 在 $[0,\delta)$ 内, $x_{i+1},\cdots,x_n$ 在 $[\delta,1)$ 内. 记 $w_k(f)$ 是 f 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{i} w_k(f)\Delta x_k + \sum_{k=i+1}^{n} w_k(f)\Delta x_k.$$

一方面,

$$\sum_{k=1}^{i} w_k(f)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{i} \Delta x_k < \delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面, 注意到 f 在 $[\delta,1]$ 内所有间断点是 $\left\{\frac{1}{i} \mid i=2,3,\cdots,m\right\}$, 间断点个数有限, 所以 f 在 $[\delta,1]$ 上可积. 故 $\exists\delta_0>0$, 使得对 $\forall\,||T||<\delta_0$, 满足 $\sum_{k=i+1}^{n} w_k(f)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}$. 综上, 对 $\forall\,||T||<\delta_0$, 有 $\sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta x_k < \varepsilon$. 所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积.

5　利用 L’Hospital 法则和积分中值定理知, $\exists \xi_x \in (0,x)$, 使得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{xf(\xi_x)}{xf(\xi_x)+xf(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(\xi_x)}{f(\xi_x)+f(x)}\ (0<\xi_x<x)\\
&= \frac{f(0)}{f(0)+f(0)}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

6　$F(x) = -x^2\cos\dfrac{1}{x} + \displaystyle\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, F(0)=0,$

$F'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-x\cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)$. 而

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|x|}\int_0^{|x|}|2t\cos\frac{1}{t}|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{|x|}\int_0^{|x|} t\,\mathrm{d}t = |x| \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

且

$$0 \leqslant |x\cos\frac{1}{x}| \leqslant |x| \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

所以 $F'(0)=0$.

7　构造变限积分后求导即可.

8　令 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F'(x) \leqslant F(x)$, 所以 $(\mathrm{e}^{-x}F(x))' \leqslant 0$, $\mathrm{e}^{-x}F(x)$ 在 $[a,b]$ 上递减. 而 $F(a)=0$, 所以 $\mathrm{e}^{-x}F(x) \leqslant 0$, 即 $F(x)\leqslant 0$, 所以 $f(x) \leqslant F(x) \leqslant 0$.

9　$\exists \xi \in (0,1), \eta \in (1,2)$, 有

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (f(0)+xf'(\xi))\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (f(2)+(x-2)f'(\eta))\,\mathrm{d}x\\
&= 2 + \int_0^1 xf'(\xi)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-2)f'(\eta)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

因为 $|f'(x)| \leqslant 1$, 故有

$$2 - \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-2)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2 + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x.$$

所以

$$1 \leqslant \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3.$$

10

(1) 我们有

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}(f(k+1)-f(x))\mathrm{d}x \geqslant f(1) \geqslant 0.$$

及

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}(f(k)-f(x))\mathrm{d}x \leqslant f(n).$$

(2) 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(x)\mathrm{d}x = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}(f(k)-f(x))\mathrm{d}x \geqslant f(n) \geqslant 0.$$

及

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(x)\mathrm{d}x = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}(f(k+1)-f(x))\mathrm{d}x \leqslant f(1).$$

令 $g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(x)\mathrm{d}x$. 而 $g(n+1)-g(n) = f(n+1) - \int_{n}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$, 即 $\{g(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减, 以及 $0 \leqslant g(n) \leqslant f(1)$. 由单调有界原理知命题成立.

9.5.2 B 组

1

(1) 原式 $= \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{\tan x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}^-} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{\tan x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}^+}^{\pi} = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$;

(2) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln\sin x = 0$ 可知其为瑕积分. 利用 $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ 可知,

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= (1-\cos x)\ln\sin x\Big|_{0^+}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin x + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x = (\cos x - \ln(1+\cos x))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

(3) 我们有

$$\begin{aligned}
I(m,n) &= \frac{1}{m+1}x^{m+1}\ln^n x\Big|_0^1 - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}\ln^{n-1}x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{n}{m+1}I(m,n-1) \\
&= \cdots \\
&= -\prod_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{m}I(m,0) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

2

(1) 一方面,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}} &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\
&< \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \xrightarrow{n\to+\infty} \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}>\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-x^2}}\,\mathrm{d}x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\xrightarrow{n\to+\infty}\frac{\pi}{2}.$$

所以原式 $=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) 略

3 略

4 略

5 略

6 略

7 略

8 略

9 略

10 考虑函数

$$g(x)=\frac{1}{x-\alpha}\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in(\alpha,1].$$

往证: $g(x)$ 单调递增.

$$g'(x)=\frac{f(x)(x-\alpha)-\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-\alpha)^2}=\frac{\int_\alpha^x(f(x)-f(t))\,\mathrm{d}t}{(x-\alpha)^2}\geqslant 0,$$

其中已用到 $f(x)$ 单调递增.

因此 $g(x)$ 单调递增, $g(1)\geqslant g(\beta)$, 从而

$$\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

下面证明系数 $\dfrac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 是最佳的. 通过构造函数来证明.

一个容易想到的函数是

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,\alpha),\\ C, & x\in[\alpha,1],\end{cases}$$

其中 $C>0$ 为常数. 但此函数不满足连续的条件, 为了构造一个连续的函数, 我们可以考虑用一系列连续函数来逼近这一函数. 例如, 考虑如下的折线函数:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\alpha-\dfrac{1}{n}\right],\\ n(x-\alpha)+1, & x\in\left(\alpha-\dfrac{1}{n},\alpha\right),\\ 1, & x\in[\alpha,1].\end{cases}\quad n\in\mathbb{N}^*$$

满足

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1-\alpha+\frac{1}{2n},\quad \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x=1-\alpha,$$

现在, 令 $n\to\infty$ 可知, 系数 $\dfrac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 是最佳的.

11　略

12　略

13　令 $t=\dfrac{x}{h},k=\dfrac{1}{h}$. 即证:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-k}^{k}\frac{1}{t^2+1}f(\frac{t}{k})\mathrm{d}t=\pi f(0).$$

由题意知, $\exists M>0$, 使得 $|f(x)|\leqslant M$. 对 $\forall 0<\varepsilon<M,\exists\delta>0$ 及 $X_0=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varepsilon}{8M}\right)$, 当 $|x|<\delta$ 时, $|f(x)-f(0)|<\dfrac{\varepsilon}{4\pi}$. 当 $x>X_0$ 时, 有

$$\left|\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan x<\frac{\pi}{2}-\arctan X_0=\frac{\varepsilon}{8M}.$$

取 $k>\max\left\{\dfrac{X_0}{\delta},X_0\right\}$, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_{-k}^{k}\frac{1}{t^2+1}f(\frac{t}{k})\mathrm{d}t-\pi f(0)\right|&\leqslant\left|\int_{-k}^{k}\frac{1}{t^2+1}(f(\frac{t}{k})-f(0))\mathrm{d}t-2\int_{k}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}f(0)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_{-k}^{k}\frac{1}{t^2+1}\left|f(\frac{t}{k})-f(0)\right|\mathrm{d}t+2\int_{k}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\left|f(0)\right|\mathrm{d}t\\&\leqslant\left(\int_{-X_0}^{X_0}+\int_{-k}^{X_0}+\int_{X_0}^{k}\right)\frac{1}{t^2+1}\left|f(\frac{t}{k})-f(0)\right|\mathrm{d}t\\&+2\int_{k}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\left|f(0)\right|\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_{-X_0}^{X_0}\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathrm{d}t+2\int_{X_0}^{k}\frac{2M}{t^2+1}\mathrm{d}t+2\int_{k}^{+\infty}\frac{M}{t^2+1}\mathrm{d}t\\&<\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathrm{d}t+2\int_{X_0}^{+\infty}\frac{2M}{t^2+1}\mathrm{d}t+2\int_{X_0}^{+\infty}\frac{M}{t^2+1}\mathrm{d}t\\&<\frac{\varepsilon}{4}+6M\cdot\frac{\varepsilon}{8M}<\varepsilon\end{aligned}$$

故有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-k}^{k}\frac{1}{t^2+1}f(\frac{t}{k})\mathrm{d}t=\pi f(0).$$

得证.

14　略

9.5.3　C 组

1　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 故对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的一个分割 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 使得 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}w_k(f)\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2}$. 其中 $w_k(f)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅. 记 M

是 $|f(x)|$ 的一个上界, 当 $\lambda > \dfrac{4nM}{\varepsilon}$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{k=1}^n\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x_k)+f(x_k))\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f(x)-f(x_k)|\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^n|f(x_k)|\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n w_k(f)\Delta x_k + M\sum_{k=1}^n\left|\frac{\cos\lambda x_{k+1}-\cos\lambda x_k}{\lambda}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n w_k(f)\Delta x_k+\frac{2Mn}{\lambda} \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0$. 同理可证: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0$.

2 记 $f(x)=R(x)$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1, \delta=\dfrac{\varepsilon}{2N^2}$. 只需证: 对任意在 $[a,b]$ 上的分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 满足 $||T||<\delta$ 及 $\forall\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, 均有 $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k\right|<\varepsilon$. 将和式分成如下两部分:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{(1)}f(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{(2)}f(\xi_k)\Delta x_k$$

其中 $\displaystyle\sum_{(1)}f(\xi_k)\Delta x_k$ 表示对小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 包含了 $x=0$ 及 $x=\dfrac{m}{n},(m,n)=1,n<N$ 的求和, $\displaystyle\sum_{(2)}f(\xi_k)\Delta x_k$ 表示其余求和部分. 我们有

$$\begin{aligned}|\sum_{(1)}f(\xi_k)\Delta x_k| &\leqslant \sum_{(1)}|f(\xi_k)||\Delta x_k|\leqslant\sum_{(1)}|\Delta x_k| \\ &<\sum_{k=1}^{N-1}k\delta=\left(\frac{N(N-1)}{2}+1\right)\delta \\ &<N^2\delta=\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\tag{9.3}$$

及

$$\begin{aligned}|\sum_{(2)}f(\xi_k)\Delta x_k| &\leqslant\sum_{(2)}|f(\xi_k)||\Delta x_k|\leqslant\frac{1}{N}\sum_{(2)}|\Delta x_k| \\ &<\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\tag{9.4}$$

由 (9.3)、(9.4) 得

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k\right|\leqslant\left|\sum_{(1)}f(\xi_k)\Delta x_k\right|+\left|\sum_{(2)}f(\xi_k)\Delta x_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

3　略

4　略

5　略

6　略

7　略

8　略

9.6　第 7 章

9.6.1　A 组

1　略

2　略

3　略

4　设 $c_n = a_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i \ (n=1,2,\cdots)$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 知其部分和数列 $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right\}$ 有界, 即, $\exists M>0$, $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right| \leqslant M \ (n=1,2,\cdots)$, 故 $c_n = a_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i \geq 0 - M = -M$ 有下界. 又

$$c_{n+1} - c_n = a_{n+1} - a_n - b_n < 0 \implies c_{n+1} < c_n,$$

数列 $\{c_n\}$ 单调递减, 从而 $\{c_n\}$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 存在, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也存在.

5　略

6　略

7

(1) 当 $0<\alpha<1$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} \mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x = \int_0^n \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha},$$
$$\implies \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right) < \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{n^{1+\alpha}}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \ (\alpha>0)$ 收敛, 由上式及比较判别法知, 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right) \ (0<\alpha<1)$ 收敛. 当 $\alpha \geqslant 1$ 时,

$$\frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right) \leq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\right).$$

由 1° 的结论及比较判别法知, 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right) \ (\alpha \geqslant 1)$ 收敛.

综上, 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right) \ (\alpha>0)$ 收敛.

(2) 由于函数 $f_n(x)=\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}$ 是奇函数, 故只需讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)$ 在 $[0,A]$ 上的一致收敛性.

对于某个取定的 $A>0$, 取 $N=[A]+1\in\mathbb{N}^*$, 则原函数项级数的一致收敛性与 $\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)$ 相同. 由于

$$n\geqslant N>A \implies \frac{x}{n}<1 \implies 0\leqslant\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}<\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^3\leqslant\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{A}{n}\right)^3,$$

由级数 $\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛及 Weierstrass 判别法知, 函数项级数 $\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)$ 在 $[0,A]$ 上一致收敛. 从而原函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)$ 在 $[-A,A]$ 上一致收敛.

8　记 $S_N=\sum_{k=1}^{n}a_k$. 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n}=1-\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=1$. 故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}S_nx^n$ 的收敛半径是 1. 又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}S_nx^n\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 由比较判别法知 $R\geqslant 1$. 又由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散知 $R\leqslant 1$. 故 $R=1$.

9.6.2　B 组

1　略

2

(1) 略;

(2) 略;

(3) 当 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\cos nx\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}<+\infty$, 由 Weierstrass 判别法知该级数在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上一致收敛. 对任意固定的 $x\in[\frac{1}{2},1]$, 有

$$\frac{x^{n+1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n+1}}<\frac{x^{n+1}}{x+x^2+\cdots+x^{2n}}=\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}.$$

以及

$$0<\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}<\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^n}<\frac{x^n}{(n+1)x^n}=\frac{1}{n+1}\downarrow 0.$$

由 Weierstrass 判别法知 $\left\{\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\right\}$ 一致收敛于 0.

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上一致有界, 由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\cos nx$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上一致收敛. 综上, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}\cos nx$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

3　证明必要性时, 运用

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}=\frac{\frac{a_{n+1}}{a_n}-1}{\ln a_{n+1}}\geqslant\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{\ln a_{n+1}},$$

4 略

5 略

6 略

7 因为

$$\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k}>\int_{n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{x}=\ln\frac{(n+1)^2}{n^2}>\ln\frac{(n+2)^2-1}{(n+1)^2-1}=\int_{(n+1)^2-1}^{(n+2)^2-1}\frac{1}{x}>\sum_{k=(n+1)^2}^{(n+2)^2-1}\frac{1}{k},$$

由 Leibniz 判别法知, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k}$ 收敛. 又因为

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}=\sum_{n=1}^{[\sqrt{N}]-1}(-1)^n\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{1}{k}+(-1)^{[\sqrt{N}]}\sum_{k=[\sqrt{N}]^2}^{N}\frac{1}{k},$$

且

$$0<\sum_{k=[\sqrt{N}]^2}^{N}\frac{1}{k}<\int_{[\sqrt{N}]^2}^{N}\frac{1}{k}=\ln\frac{N}{[\sqrt{N}]^2}<\ln\frac{N}{(\sqrt{N}-1)^2}\xrightarrow{N\to\infty}0.$$

由夹逼原理知, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{k=[\sqrt{N}]^2}^{N}\frac{1}{k}=0$. 所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

8 易知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=0$. 由 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ 得: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ln n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda$. 因为

$$0<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n<\frac{1}{n}\ln n\xrightarrow{n\to\infty}0,$$
$$\Longrightarrow\ \ln\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}=\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}-\ln\frac{n+1}{n}\sim\frac{\lambda}{\ln n},$$

由 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散及比较判别法知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}=+\infty$, 故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=0$

9 略

10 略

9.6.3 C 组

1 由题意得: $a_n\to+\infty$, 分以下两种情况考虑.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 则

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}\geqslant a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n-1}\geqslant na_n,$$
$$\frac{2n-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}}+\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}\leqslant\frac{2n-1}{na_n}+\frac{2n}{na_n}<\frac{4}{a_n},$$

由 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛及比较判别法知, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 也收敛.

(2) 若 $\{a_n\}$ 不单调, 可以将其从小到大重排, 记新数列为 $\{b_n\}$, 由 Riemann 重排定理知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$ 仍然收敛, 且 $\{b_n\}$ 单调递增, 由 (a) 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ 收敛. 又

$$\begin{aligned} & b_1+b_2+\cdots+b_n \leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n, \\ \Longrightarrow\ & \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}, \end{aligned}$$

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛.

2　若 $\{a_n\}$ 有界, 则 $\{a_n\}$ 收敛, 从而 $a_{n+1}-a_n\to 0$ $(n\to\infty)$, 结论显然成立. 下设 $\{a_n\}$ 无界.

由 $\{a_n\}$ 单调递增知, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得 $\forall n>N$, $a_n>0$, 由于改变有限项不影响级数的敛散性, 不妨设 $\{a_n\}$ 为正数列. 记 $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, 则 $b_1+b_2+\cdots+b_n=a_{n+1}-a_1$.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{b_1+b_2+\cdots+b_k}\leqslant 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{a_{n+1}-a_1}\leqslant 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}-a_k},$$

由 $a_n\leqslant n^2\ln n$ 知

$$\frac{n}{a_{n+1}-a_1}\geqslant\frac{n}{(n+1)^2\ln(n+1)}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ 发散, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

3　略