中科大20年春季学期数分(A2)开卷小测II

考试时间: 5月17日上午9:00—12:00

姓名：________________ 学号：____________________ 得分：________

请在12:00之前将依照“学号+姓名+小测2”的格式命名的PDF文件发到BB系统的作业区. 逾期提交解答会导致扣分, 逾期30分钟及以上提交的解答不予接受.

一、(20分) | 得分 | |

设n为大于1的整数. 叙述$\mathbb{R}^n$中的闭长方体$I = \Pi_{j=1}^n [a_j, b_j]$上的实值函数$f : I \to \mathbb{R}$为黎曼可积函数的定义. 不准用Lebesgue 定理, 仅从黎曼可积函数的定义出发证明I上的连续实值函数必定黎曼可积.

二、(40分) | 得分 | |

计算如下多重积分, 要有详细过程, 要注明所用到的定理.

1. 求$\displaystyle\iint\limits_{[0,1]^2} x^2y^4\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
2. 设函数f在某个包含长方体$I = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$的开集上有连续的三阶偏导数. 求$\displaystyle\iiint\limits_{I} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
3. 设$0 < p < q$, $0 < a < b$, 设D是由四条抛物线$y^2 = px$, $y^2 = qx$, $x^2 = ay$, $x^2 = by$ 所围成的有界闭区域. 求$\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{1}{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
4. 求$\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2-x_2^2-\cdots x_n^2}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$.

5. 设A是$\mathbb{R}^3$中以原点为心与$R>0$为半径的闭球体, $y\in\mathbb{R}^3\backslash A$. 求

$$\iiint\limits_A \frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3.$$

三、(10分)

得分	

设f是$\mathbb{R}^2$上的有界子集B上的有界实值函数. 设$f_B(p):=\begin{cases} f(p) & \text{if } p\in B; \\ 0 & \text{if } p\in\mathbb{R}^2\backslash B. \end{cases}$, 再设$f_B$的间断点集合$D(f_B)$为$\mathbb{R}^2$上的零测集. 使用Lebesgue 定理证明如下命题.

1. 任取包含B的闭矩形I, 证明f_B在I上的限制函数$f_B|_I$在I上黎曼可积.

2. 任取包含B的两个闭矩形I_1与I_2, 证明

$$\iint\limits_{I_1} f_B\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{I_2} f_B\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

四、(10分) 要求完整解答过程.

得分	

设$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$为紧支集连续函数, i.e. f连续并且在一个长方形I外面恒为零. 那么由第三题, f在I上可积, 并且$\iint\limits_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$积分值不依赖于长方形$I$的选取, 因此可以将积分记作$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 利用积分换元公式, 证明如下命题.

1. 任给$t>0$, 那么

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(tx,ty)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=t^{-2}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 再假设f在原点$(0,0)$的一个邻域里恒为零, 那么

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

五、(10分)

得分	

设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为$C^2$函数, 并且对任意$x\in\mathbb{R}^n$, f在x处的Hesse 方阵$Hf(x)$都正定. 定义$\mathbb{R}^n$ 到自身的映射$\Phi(x):=\big(D_1f(x),\cdots,D_nf(x)\big)$.

1. 证明$\Phi\big(\mathbb{R}^n\big)$为$\mathbb{R}^n$的开集.

2. 证明Φ为单射.

六*、(15分)

得分	

设$F:B\to\mathbb{R}^3$为$\mathbb{R}^3$中的有界闭长方体B上的C^2映射, i.e. F是某个包含长方体B 的开集$U\subset\mathbb{R}^3$上的C^2映射. 记$K=\{x\in B:\det JF(x)=0\}$, 其中$JF(x)$是$F$ 在x 处的Jacobi 矩阵. 按照如下思路或否, 证明: $F(K)\subset\mathbb{R}^3$为零体积集合.

1. 存在$m>0$, 存在函数$\lambda:(0,+\infty)\to[0,\infty)$使得:

   - $\lim_{t\to0^+}\lambda(t)=0$;
   - 任给$a\in K$, 任给$\epsilon>0$, 任给满足$\|x-a\|\le\epsilon$的$x\in B$, $F(x)$包含于以$\Phi(a)$为心, 以$m\epsilon$为半径的闭球, 并且$F(x)$到某个过$F(a)$的平面$L_a\subset\mathbb{R}^3$的距离不超过$\epsilon\lambda(\epsilon)$.

2. $F\big(\{x\in B:\|x-a\|\le\epsilon\}\big)$的体积不超过$(2m\epsilon)^2\times2\epsilon\lambda(\epsilon)$. 这句话意思是$F\big(\{x\in B:\|x-a\|\le\epsilon\}\big)$ 包含于一个$\mathbb{R}^3$中有体积且体积不超过$(2m\epsilon)^2\times2\epsilon\lambda(\epsilon)$的集合, 下同.

3. 存在正常数$C=C(n,B)$, 对于任意充分小的正数ϵ, 存在不超过C/ϵ^3个以K中的点为心, 以ϵ 为半径的闭球, 使得这些闭球之并包含K. 从而$F(K)$的体积不超过$8Cm^2\lambda(\epsilon)$.