2024年《电磁学》期中考试试题解答

1. (25分) 一个半径为 R 的均匀介质球，相对介电常数为ε_r， 球内均匀分布有总电量为 Q_0 的自由电荷，球外为真空。 求：（1）球体内的极化电荷和球面的极化电荷；（2）球内的静电能、球外的静电能和总静电能。（3）该系统的宏观静电能为多少？极化能为多少？（4）如果该介质球的电导率为σ，求任意时刻 t 球内 r 处的电场强度、电流密度；（5）整个漏电过程的球内产生的总焦耳热为多少？

【解】（1）由高斯定理，球内的电场强度为：

$$\vec{E}=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\vec{r}$$

极化强度为：

$$\vec{P}=\varepsilon_0\left(\varepsilon_r-1\right)\vec{E}=\frac{\left(\varepsilon_r-1\right)\rho_0}{3\varepsilon_r}\vec{r}$$

极化电荷体密度为：

$$\rho'=-\nabla\cdot\vec{P}=-\frac{\left(\varepsilon_r-1\right)\rho_0}{3\varepsilon_r}\nabla\cdot\vec{r}$$

因为 $\nabla\cdot\vec{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$ ， 所以：

$$\rho'=-\frac{\left(\varepsilon_r-1\right)\rho_0}{\varepsilon_r}$$

球内总极化电荷为：

$$Q'_V=\frac{4}{3}\pi R^3\rho'=-\frac{4\pi R^3\left(\varepsilon_r-1\right)\rho_0}{3\varepsilon_r}=-\frac{\left(\varepsilon_r-1\right)}{\varepsilon_r}Q_0$$

球表面极化电荷面密度：

$$\sigma'=P_n=\frac{\left(\varepsilon_r-1\right)\rho_0}{3\varepsilon_r}R$$

球面面极化电荷

$$Q'_S=4\pi R^2\sigma'=\frac{4\pi R^3\left(\varepsilon_r-1\right)\rho_0}{3\varepsilon_r}=\frac{\left(\varepsilon_r-1\right)}{\varepsilon_r}Q_0$$

球的总极化电荷

$$Q'=Q'_V+Q'_S=0$$

（2）球内的静电能为：

$$W_{静球内}=\iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 dV=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r 4\pi\int_0^R\left(\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}r\right)^2 r^2 dr=\frac{2\pi\rho_0^2}{9\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{5}R^5=\frac{Q_0^2}{40\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$$

球外任一点的电场强度为：

$$\vec{E}=\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

球外的静电能为：

$$W_{静球外}=\iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV=\frac{1}{2}\varepsilon_0 4\pi\int_R^\infty\left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 r^2 dr=\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty\frac{1}{r^2}dr=\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

总静电能为：

$$W_{静}=W_{静球内}+W_{静球外}=\frac{Q_0^2}{40\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}+\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1+\frac{1}{5\varepsilon_r}\right)$$

（3）宏观静电能密度为：

$$w_{e0}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

因为球外 D=ε₀E，因此球外的宏观静电能就是静电能；

$$W_{e0球外}=\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty\frac{1}{r^2}dr=\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

球内的宏观静电能为：

$$W_{e0球内}=\iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV=\frac{1}{2}\varepsilon_0 4\pi\int_0^R\left(\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}r\right)^2 r^2 dr=\frac{2\pi\rho_0^2}{9\varepsilon_0\varepsilon_r^2}\frac{1}{5}R^5=\frac{Q_0^2}{40\pi\varepsilon_0\varepsilon_r^2 R}$$

总宏观静电能为：

$$W_{e0}=W_{e0球内}+W_{e0球外}=\frac{Q_0^2}{40\pi\varepsilon_0\varepsilon_r^2 R}+\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1+\frac{1}{5\varepsilon_r^2}\right)$$

因为：

$$W_{静}=W_{e0}+W_{极}$$

所以极化能为：

$$W_{极}=W_{静}-W_{e0}=\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1+\frac{1}{5\varepsilon_r}\right)-\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1+\frac{1}{5\varepsilon_r^2}\right)=\frac{Q_0^2}{40\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)=\frac{Q_0^2(\varepsilon_r-1)}{40\pi\varepsilon_0\varepsilon_r^2 R}$$

验算(非必须)：

$$W_{极}=\frac{1}{2}\iiint_V \vec{P}\cdot\vec{E}dV=\frac{1}{2}\frac{(\varepsilon_r-1)\rho_0}{3\varepsilon_r}\cdot\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_0^R r^2 4\pi r^2 dr=\frac{2\pi(\varepsilon_r-1)\rho_0^2}{9\varepsilon_0\varepsilon_r^2}\frac{1}{5}R^5$$

$$=\frac{2\pi(\varepsilon_r-1)9Q_0^2}{9\varepsilon_0\varepsilon_r^2\left(4\pi R^3\right)^2}\frac{1}{5}R^5=\frac{(\varepsilon_r-1)Q_0^2}{40\pi\varepsilon_0\varepsilon_r^2 R}$$

（4）设任意时刻球内的自由电荷密度的为ρ(t)，则由斯定理得到电场强度为：

$$\vec{E}(t)=\frac{\rho(t)}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\vec{r}$$

半径为 r 的球内的自由电荷总量为：

$$Q_r(t)=\frac{4}{3}\pi r^3\rho(t)\quad .$$

由电荷守恒方程，有：

$$4\pi r^2 j(t)=-\frac{dQ_r}{dt}=-\frac{4}{3}\pi r^3\frac{d\rho}{dt}$$

$$4\pi r^2\sigma E=-\frac{4\pi r^3}{3}\frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}dt$$

积分得到（利用初始条件，$t=0$ 时，$\rho=\rho_0$）：

$$\rho=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t}=\frac{3Q_0}{4\pi R^3}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t}$$

因此球内任意时刻的电场强度为：

$$\vec{E}(t)=\frac{\rho(t)}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\vec{r}=\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t}\vec{r}$$

电流体密度为：

$$\vec{j}(t)=\sigma\vec{E}(t)=\frac{\sigma Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t}\vec{r}$$

（5）球内自由电荷最后全部流到外球面上，焦耳功率密度为：

$$p=\sigma E^2=\frac{\sigma Q_0^2}{\left(4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3\right)^2}e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t}r^2$$

总焦耳热为：

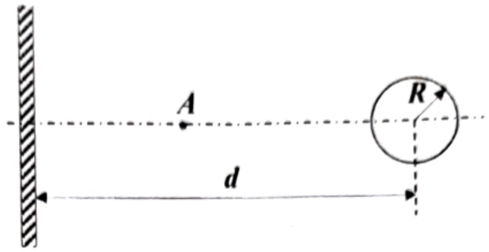
$$W=\int_0^\infty dt\iiint_V p\,dV=\frac{\sigma Q_0^2}{\left(4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3\right)^2}\int_0^\infty e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t}dt\int_0^R r^2 4\pi r^2 dr$$

$$=\frac{\sigma Q_0^2}{\left(4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3\right)^2}\left(-\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{2\sigma}\right)e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t}\Bigg|_0^\infty\frac{4\pi}{5}r^5\Bigg|_0^R$$

$$=\frac{\sigma Q_0^2}{\left(4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3\right)^2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{2\sigma}\frac{4\pi}{5}R^5=\frac{Q_0^2}{40\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$$

焦耳热正好等于初始时刻球内的静电能。

2.(25 分) 在扫描隧道显微镜（STM）实验测量中，可以近似地把 STM 探头看成一半径为 a（nm 量级）的导体球，待测样品（mm 量级）可以看成是一块无限大接地导体平面，设球心与样品相距为 d，并设 $d>>a$.



求：

（1）探头和样品之间电容的零阶近似值；

（2）探头和样品之间电容的一阶近似值(点电荷模型)；这时探头受到的作用力为多大？

（3）探头和样品之间电容的二阶近似值（电偶极子模型，已知导体球在外场 E_0 中感应电偶极矩为 $p=4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0$)；

（4）在（3）近似下，探头受到作用力为多大？（电偶极子受力用 $\vec{F}=(\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}$ 计算）

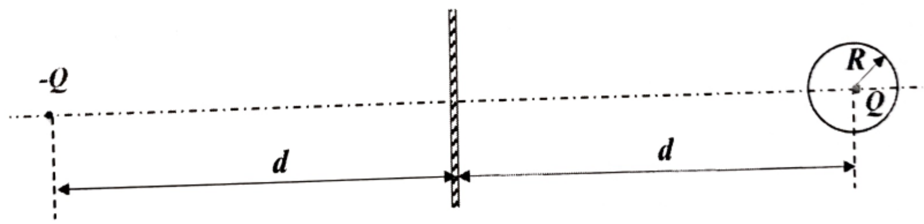
（5）当探头带电量为 Q 时，在（3）的近似下，将探头与样品完全分离需提供多少的能量？

【解】(1) 零阶近似，即可以认为球与导体平面相距无限远，即为孤立导体球的电容：

$$C_0 = 4\pi\varepsilon_0 a$$

（2）一阶近似，设导体球带电量为 Q，在导体平面的感应电荷当成一个像，电量 $q'=-Q$，位置 $d'=-d$，导体球面的电势为：

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 2d}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2d}\right)$$



电容值为：

$$C_1=\frac{Q}{U}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2d}\right)}=\frac{8\pi\varepsilon_0 ad}{(2d-a)}$$

因为 $d>>a$，也可以简化为（这一步非必须）：

$$C_1=\frac{8\pi\varepsilon_0 ad}{2d(1-a/2d)}=4\pi\varepsilon_0 a(1+a/2d)=4\pi\varepsilon_0 a+2\pi\varepsilon_0 a^2/d=C_0+\Delta C_1$$

$$\Delta C_1 = 2\pi\varepsilon_0 a^2/d$$

探头的作用力为：

$$F=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4d^2}=-\frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}$$

负号表示吸引力。

（3）二阶近似，采用电偶极子模型；即像电荷-Q 在导体球周围产生的电场视为均匀电场：

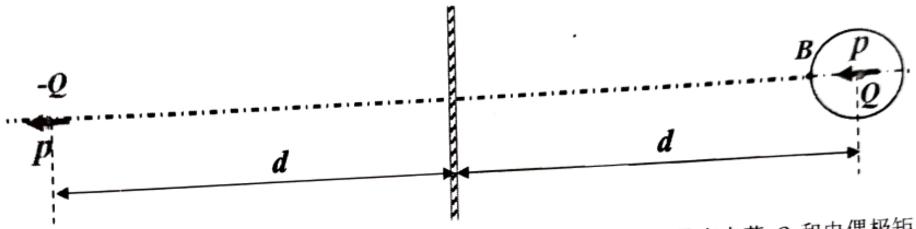
$$E_0=\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 d^2}$$

导体球面的感应电荷等效于一个放置在球心的电偶极矩，大小为：

$$p=4\pi\varepsilon_0 a^3E_0=\frac{Qa^3}{4d^2}$$

该电偶极子进一步在无限大导体左侧成一个像，像电偶极矩大小为：

$$p'=p$$



最终，导体球等效一个球心处的点电荷 Q 和电偶极矩 p，像电荷也是点电荷-Q 和电偶极矩 p'，如图所示。球面的总电势为：

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 2d}+\frac{p\cos\theta_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}+\frac{p'\cos\theta_2}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2}$$

作为近似，取球面 B 点计算电势（等同于取球心计算，因为 $d>>a$），即有：

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 2d}+\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^2}-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2}$$

$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 ad}(2d-a)+\frac{p}{16\pi\varepsilon_0 a^2d^2}(4d^2-a^2)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 ad}(2d-a)+\frac{Qa}{64\pi\varepsilon_0 d^4}(4d^2-a^2)$$

球心，$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon a}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon 2d}-\frac{p}{4\pi\varepsilon 4d^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}-\frac{Q}{8\pi\varepsilon d}\left(1+\frac{a^3}{8d^3}\right)$

电容值为：

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{1}{\frac{1}{8\pi\varepsilon_0 ad}(2d-a)+\frac{a}{64\pi\varepsilon_0 d^4}(2d-a)(2d+a)}=\frac{8\pi\varepsilon_0 ad}{(2d-a)\left[1+\frac{a^2}{8d^3}(2d+a)\right]}$$

也可以进一步简化为（非必须）：

内侧 $U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon a}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(2d-a)}+\frac{p}{4\pi\varepsilon a^2}-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 4d^2}$

$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon a}-\frac{Q}{8\pi\varepsilon d}\left[1-\frac{a^2}{4d^2}+\frac{a^3}{4d^3}\right]$

$\Rightarrow C=4\pi\varepsilon a\left[1+\frac{a}{2d}+\frac{a^2}{4d^2}+\frac{a^3}{8d^3}+\frac{a^4}{8d^4}\right]$

点电荷：球心，$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon a}-\frac{Q}{8\pi\varepsilon d}\left(1+\frac{a^3}{8d^3}\right)$

内侧：$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}-\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 d}\left(1+\frac{a^3}{8d^3}\right)$

$$C=\frac{8\pi\varepsilon_0 ad}{(2d-a)}\left[1-\frac{a^2}{8d^3}(2d+a)\right]=4\pi\varepsilon_0 a(1+\frac{a}{2d})\left[1-\frac{a^2}{8d^3}(2d+a)\right]$$
$$=4\pi\varepsilon_0 a+2\pi\varepsilon_0\frac{a^2}{d}-\pi\varepsilon_0\frac{a^3}{d^2}-\frac{1}{2}\pi\varepsilon_0\frac{a^4}{d^3}-\frac{1}{2}\pi\varepsilon_0\frac{a^4}{d^3}-\frac{1}{4}\pi\varepsilon_0\frac{a^5}{d^4}$$
$$=4\pi\varepsilon_0 a+2\pi\varepsilon_0\frac{a^2}{d}-\pi\varepsilon_0\frac{a^3}{d^2}-\pi\varepsilon_0\frac{a^4}{d^3}-\frac{1}{4}\pi\varepsilon_0\frac{a^5}{d^4}$$

4'

（4）探头作用力为四项：

点电荷之间作用力：

$$F_0=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4d^2}=-\frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}$$

点电荷与电偶极子之间作用力(2 项：右边电偶极子受到左边点电荷作用力，右边点电荷受到左边电偶极子的作用力)用梯度力计算：

$$F_1=2(\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}'_{q'}=2\left(p\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2}\right)_{x=2d}=-\frac{p}{\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(2d)^3}=-\frac{1}{32\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2a^3}{d^5}$$

电偶极子与电偶极子之间作用力用梯度力计算：

$$F_2=(\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}'_{p'}=\left(p\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p'}{x^3}\right)_{x=2d}=\left(p\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Qa^3}{x^5}\right)_{x=2d}$$
$$=-p\frac{5}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Qa^3}{(2d)^6}=-\frac{5}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2a^6}{(2d)^8}=-\frac{5}{512\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2a^6}{d^8}$$

合力为：

$$F=-\frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}-\frac{1}{32\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2a^3}{d^5}-\frac{5}{512\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2a^6}{d^8}=-\frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}\left(1+\frac{a^3}{2d^3}+\frac{5}{32}\frac{a^6}{d^6}\right)$$

4'

（5）初态静电能为（静电能的多极子展开）：

$$W_0=\frac{1}{2}QU-\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{E}'=\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 ad}(2d-a)+\frac{Q^2a}{128\pi\varepsilon_0 d^4}(4d^2-a^2)-\frac{1}{2}\frac{p^2}{2\pi\varepsilon_0(2d)^3}$$
$$=\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 ad}(2d-a)+\frac{Q^2a}{128\pi\varepsilon_0 d^4}(4d^2-a^2)-\frac{Q^2a^6}{256\pi\varepsilon_0 d^7}$$

末态静电能为导体球的自能，即：

$$W=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

外力做功为：

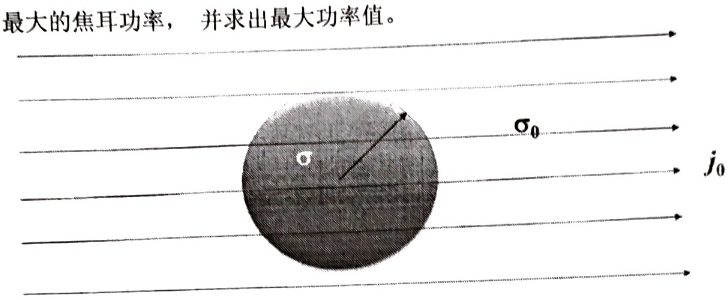
$$A=W-W_0=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}-\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 ad}(2d-a)-\frac{Q^2a}{128\pi\varepsilon_0 d^4}(4d^2-a^2)+\frac{Q^2a^6}{256\pi\varepsilon_0 d^7}$$

或者简化为（非必须）：

$$A=\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}-\frac{Q^2a}{128\pi\varepsilon_0 d^4}(4d^2-a^2)+\frac{Q^2a^6}{256\pi\varepsilon_0 d^7}\approx\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}-\frac{Q^2a}{32\pi\varepsilon_0 d^2}=\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}\left(1-\frac{a}{2d}\right)$$

$$\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}\left(1+\frac{1}{8}\frac{a^3}{d^3}\right)$$

3（25 分）一个半径为 R、电导率为σ的导电球放置在电导率为σ_0的无限大空间中，该无限大空间有一个电流密度 j_0均匀分布的电流场，假设球面的电荷在球内产生的电场是均匀电场，在球外产生的电场等效于在球心处的电偶极子产生的电场。求：（1）球内外的电势分布；（2）球内外的电场强度分布；（3）等效电偶极矩和球面电荷分布；（4）当电导率σ为多少时导体球有最大的焦耳功率，并求出最大功率值。



【解】（1）设球内外的电势分布为：

$$\begin{cases}\varphi_1 = ar\cos\theta \\ \varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + \dfrac{b\cos\theta}{r^2}\end{cases}$$

稳定时，球面处的电场和电流满足边值关系：

$$\begin{cases}E_{1t} = E_{2t} \\ j_{1n} = j_{2n}\end{cases}, \quad \begin{cases}E_{1t} = E_{2t} \\ \sigma E_{1n} = \sigma_0 E_{2n}\end{cases}$$

由电势表达式得到球内外电场强度为：

$$\begin{cases}\vec{E}_1 = -\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\vec{e}_r - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}\vec{e}_\theta = -a\cos\theta\vec{e}_r + a\sin\theta\vec{e}_\theta \\ \vec{E}_2 = -\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\vec{e}_r - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\vec{e}_\theta = \left(E_0\cos\theta + \dfrac{2b\cos\theta}{r^3}\right)\vec{e}_r + \left(-E_0\sin\theta + \dfrac{b\sin\theta}{r^3}\right)\vec{e}_\theta\end{cases}$$

代入到球面 $r=R$ 处的边值关系中，有：

$$\begin{cases}a\sin\theta = -E_0\sin\theta + \dfrac{b\sin\theta}{R^3} \\ -\sigma a\cos\theta = \sigma_0\left(E_0\cos\theta + \dfrac{2b\cos\theta}{R^3}\right)\end{cases}$$

整理一下：

$$\begin{cases}a = -E_0 + \dfrac{b}{R^3} \\ a = -\dfrac{\sigma_0}{\sigma}\left(E_0 + \dfrac{2b}{R^3}\right)\end{cases}$$

$$-E_0 + \frac{b}{R^3} = -\frac{\sigma_0}{\sigma}\left(E_0 + \frac{2b}{R^3}\right)$$

解得：

$$=\frac{2\sigma+\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}\frac{2\varepsilon_0 j_0}{\sigma_0}\cos\theta-\frac{3\varepsilon_0}{\sigma+2\sigma_0}j_0\cos\theta=\left(\frac{4\sigma+2\sigma_0}{\sigma_0}-3\right)\frac{\varepsilon_0}{\sigma+2\sigma_0}j_0\cos\theta$$

$$=\frac{\left(4\sigma-\sigma_0\right)}{\sigma+2\sigma_0}\frac{\varepsilon_0 j_0}{\sigma_0}\cos\theta$$

（4）由于球内电场强度是均匀的，因此焦耳功率密度为：

$$p_{功}=\sigma E_1^2=\sigma\left(\frac{3}{\left(\sigma+2\sigma_0\right)}\right)^2 j_0^2$$

球内总功率为：

$$P_{功}=p_{功}\frac{4}{3}\pi R^3=\sigma\left(\frac{3}{\left(\sigma+2\sigma_0\right)}\right)^2 j_0^2\frac{4}{3}\pi R^3$$

为了使该球的功率取极值，必须：

$$\frac{dP_{功}}{d\sigma}=\frac{\left(\sigma+2\sigma_0\right)^2-2\sigma\left(\sigma+2\sigma_0\right)}{\left(\sigma+2\sigma_0\right)^4}j_0^2 12\pi R^3=\frac{2\sigma_0-\sigma}{\left(\sigma+2\sigma_0\right)^3}j_0^2 12\pi R^3=0$$

解得：

$$\sigma=2\sigma_0$$

$$\frac{d^2P_{功}}{d\sigma^2}=\frac{-\left(\sigma+2\sigma_0\right)^3-3\left(2\sigma_0-\sigma\right)\left(\sigma+2\sigma_0\right)^2}{\left(\sigma+2\sigma_0\right)^6}j_0^2 12\pi R^3$$

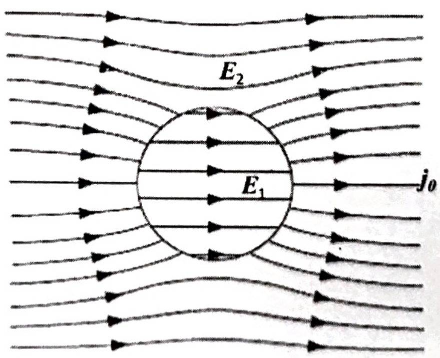
$$=\frac{-\sigma-2\sigma_0-6\sigma_0+3\sigma}{\left(\sigma+2\sigma_0\right)^4}j_0^2 12\pi R^3=\frac{2\sigma-8\sigma_0}{\left(\sigma+2\sigma_0\right)^4}j_0^2 12\pi R^3$$

$$\left.\frac{d^2P_{功}}{d\sigma^2}\right|_{\sigma=2\sigma_0}=\frac{4\sigma_0-8\sigma_0}{\left(2\sigma_0+2\sigma_0\right)^4}j_0^2 12\pi R^3=-\frac{3}{4\sigma_0^3}j_0^2\pi R^3<0$$

所以$\sigma=2\sigma_0$，球的功率取极大值。

最大功率为：

$$P_{功}=2\sigma_0\left(\frac{3}{4\sigma_0}\right)^2 j_0^2\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{3}{2\sigma_0}j_0^2\pi R^3$$



$$b=\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}E_0R^3$$

同理有：

$$a=-E_0+\frac{b}{R^3}=-E_0+\frac{(\sigma-\sigma_0)}{\sigma+2\sigma_0}E_0=-\frac{3\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}E_0$$

代入到电势中，由于 $\vec{E}_0=\vec{j}_0/\sigma_0$，得到：

$$\begin{cases}\varphi_1=-\dfrac{3\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}E_0r\cos\theta=-\dfrac{3}{\sigma+2\sigma_0}j_0r\cos\theta\\ \varphi_2=-\dfrac{j_0}{\sigma_0}r\cos\theta+\dfrac{\sigma-\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}\dfrac{R^3}{r^2}\dfrac{j_0}{\sigma_0}\cos\theta\end{cases}$$

7'（2）球内电场为：

$$\vec{E}_1=\frac{3\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}E_0\cos\theta\vec{e}_r-\frac{3\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}E_0\sin\theta\vec{e}_\theta$$
$$=\frac{3\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}\left(E_0\cos\theta\vec{e}_r-E_0\sin\theta\vec{e}_\theta\right)=\frac{3\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}\vec{E}_0=\frac{3}{\sigma+2\sigma_0}\vec{j}_0$$

球外电场强度为：

$$\vec{E}_2=\left(1+\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}\frac{2R^3}{r^3}\right)E_0\cos\theta\vec{e}_r+\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}\frac{R^3}{r^3}-1\right)E_0\sin\theta\vec{e}_\theta$$
$$=\left(1+\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}\frac{2R^3}{r^3}\right)\frac{j_0}{\sigma_0}\cos\theta\vec{e}_r+\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}\frac{R^3}{r^3}-1\right)\frac{j_0}{\sigma_0}\sin\theta\vec{e}_\theta$$

5'（3）求等效电偶极矩，只需比较球外电势的第二项与标准的电偶极矩电势表达式，即：

$$\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}\frac{R^3}{r^2}\frac{j_0}{\sigma_0}\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

得到：

3' $$p=\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}4\pi\varepsilon_0R^3\frac{j_0}{\sigma_0}$$

球面的电荷密度为：

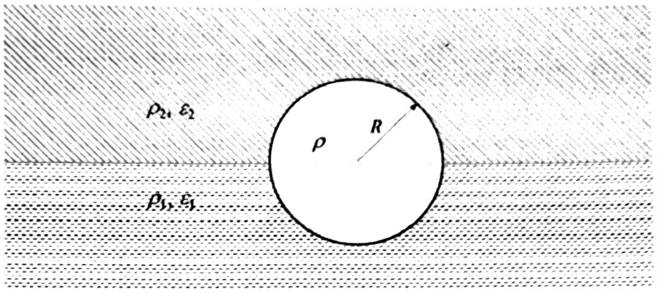
2' $$\sigma_e=\varepsilon_0\left(E_{2n}-E_{1n}\right)=\left(1+\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}\frac{2R^3}{R^3}\right)\frac{\varepsilon_0j_0}{\sigma_0}\cos\theta-\frac{3\varepsilon_0}{\sigma+2\sigma_0}j_0\cos\theta$$

$$=\left(1+\frac{2\sigma-2\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}-\frac{3\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}\right)\frac{\varepsilon_0j_0}{\sigma_0}\cos\theta$$

$$=\frac{\sigma+2\sigma_0+2\sigma-2\sigma_0-3\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}\frac{\varepsilon_0j_0}{\sigma_0}\cos\theta$$

$$=\frac{3\sigma-3\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}\frac{\varepsilon_0j_0}{\sigma_0}\cos\theta=\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma+2\sigma_0}3\frac{\varepsilon_0j_0}{\sigma_0}\cos\theta.$$

4.（25分）一个半径为R，质量密度为ρ的导体球的一半悬浮在密度为ρ_1，($\rho_1>2\rho$)的液体中，液体的相对介电常数为ε_1，球的上半部分是另一种液体，质量密度为ρ_2（$\rho_2<<\rho$），相对介电常数为ε_2，且$\varepsilon_2<\varepsilon_1$．（1）给导体球带电量$Q$为多少时，系统达到平衡；（2）平衡时上半球面和下半球面的自由电荷量、极化电荷的量和总电荷量；（3）系统的电容值；（4）若介质均为导电介质，电导率分别为σ_1和σ_2，则球面上自由电荷Q最终会到无限远处（设漏电过程中球的位置不变），则该漏电过程中消耗的总能量为多少？(5)漏电电阻为多少？漏电时间常数τ为多少？



【解】(1) 介质分界面为垂直于等势面情况，两种介质中的电场强度相同，设导体球带电量为Q，利用高斯定理，有：

$$2\pi r^2 D_1 + 2\pi r^2 D_2 = Q$$

因为：$D_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_1$，$D_2 = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_2$，且$E_1 = E_2 = E$

$$2\pi R^2\varepsilon_0\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)E = Q$$

$$E = \frac{Q}{2\pi r^2\varepsilon_0\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}$$

因此得：

$$D_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi r^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)},\quad D_2 = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_2 = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi r^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}$$

下半球球面的静电压强为：

$$p_1 = \frac{1}{2}\vec{E}_1\cdot\vec{D}_1 = \frac{1}{2}E_1 D_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{2\pi r^2\varepsilon_0\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}\cdot\frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi r^2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}$$

$$= \frac{\varepsilon_1 Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 R^4\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)^2}$$

方向沿径向向外。同理，上半球球面的静电压强为：

$$p_2 = \frac{\varepsilon_2 Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 R^4\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)^2}$$

方向沿径向向外。

上下半球总静电压力为：

$$F_E = p_1\pi R^2 - p_2\pi R^2 = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}$$

方向向下。

导体球在两种液体界面处的浮力为：

$$F_H = \frac{2}{3}\pi R^3(\rho_1+\rho_2)g$$

导体球的总重量为：

$$F_G = \frac{4}{3}\pi R^3\rho g$$

根据平衡条件，得：

$$\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}+\frac{4}{3}\pi R^3\rho g=\frac{2}{3}\pi R^3(\rho_1+\rho_2)g$$

$$Q^2=\frac{16}{3}\varepsilon_0\pi^2R^5\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}(\rho_1+\rho_2\text{-}2\rho)g$$

$$Q=4\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{\frac{\varepsilon_0 R}{3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}(\rho_1+\rho_2\text{-}2\rho)g}$$

(2) 上下半球面的自由电荷面密度分布为：

$$\sigma_1=D_1\big|_{r=R}=\frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}=2\varepsilon_1\sqrt{\frac{\varepsilon_0 R}{3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}(\rho_1+\rho_2\text{-}2\rho)g}$$

$$\sigma_2=D_2\big|_{r=R}=\frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}=2\varepsilon_2\sqrt{\frac{\varepsilon_0 R}{3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}(\rho_1+\rho_2\text{-}2\rho)g}$$

上下半球面的总自由电荷量分别为：

$$Q_1=\sigma_1 2\pi R^2=\frac{\varepsilon_1 Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}=4\pi R^2\varepsilon_1\sqrt{\frac{\varepsilon_0 R}{3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}(\rho_1+\rho_2\text{-}2\rho)g}$$

$$Q_2=\sigma_2 2\pi R^2=\frac{\varepsilon_2 Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}=4\pi R^2\varepsilon_2\sqrt{\frac{\varepsilon_0 R}{3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}(\rho_1+\rho_2\text{-}2\rho)g}$$

导体球上的总自由电荷为（非必须）：

$$Q_1+Q_2=\frac{\varepsilon_1 Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}+\frac{\varepsilon_2 Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}=Q=4\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{\frac{\varepsilon_0 R}{3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}(\rho_1+\rho_2\text{-}2\rho)g}$$

（注：Q值可以代入，也可以不代入）

两种介质中的极化强度为：

$$P_1=\varepsilon_0(\varepsilon_1-1)E=\frac{(\varepsilon_1-1)Q}{2\pi r^2\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}，P_2=\varepsilon_0(\varepsilon_2-1)E=\frac{(\varepsilon_2-1)Q}{2\pi r^2\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

上下半球面的自由电荷面密度分布为：

$$\sigma'_1=-P_1\big|_{r=R}=\frac{(\varepsilon_1-1)Q}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)},\ \sigma'_2=-P_2\big|_{r=R}=\frac{(\varepsilon_2-1)Q}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

上下半球面的极化电荷量分别为：

$$Q'_1=2\pi R^2\sigma'_1=-\frac{(\varepsilon_1-1)Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)},\ Q'_2=2\pi R^2\sigma'_2=-\frac{(\varepsilon_2-1)Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

上下球面总极化电荷量为（非必须）：

$$Q'=Q'_1+Q'_2=-\frac{(\varepsilon_1-1)Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}-\frac{(\varepsilon_2-1)Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}=-\frac{(\varepsilon_1-1)+(\varepsilon_2-1)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}Q=-\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2-2)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}Q$$

上下半球面的总电荷量为：

$$Q_{上}=Q_1+Q'_1=\frac{\varepsilon_1 Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}-\frac{(\varepsilon_1-1)Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}=\frac{Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$Q_{下}=Q_2+Q'_2=\frac{\varepsilon_2 Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}-\frac{(\varepsilon_2-1)Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}=\frac{Q}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

式子Q为（1）中的电量（可以代入，也可以不代入）。

即球面总电荷或总电荷密度分布处处相同。

（3）导体球的电势为：

$$U=-\int_\infty^R E dr=\frac{Q}{2\pi r\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\bigg|_\infty^R=\frac{Q}{2\pi R\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

等效电容为：

$$C=\frac{Q}{U}=2\pi R\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

（4）解法I：初始时刻导体球带电产生的静电能为：

$$W=W_1+W_2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_1\iiint_{上}E^2dV+\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_2\iiint_{下}E^2dV$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\iiint_{上}E^2dV=\frac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\int_R^\infty\left[\frac{Q}{2\pi r^2\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\right]^2 2\pi r^2dr$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{Q^2}{\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\int_R^\infty\frac{1}{r^2}dr=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}=\frac{4}{3}\pi R^4\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}(\rho_1+\rho_2-2\rho)g$$

这部分静电能在电荷流到无限远时，变为零，即全部转化为焦耳热。

解法II：用电容器储能计算，即：

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{Q^2}{4\pi R\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}=\frac{4}{3}\pi R^4\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}(\rho_1+\rho_2-2\rho)g$$

两者算法答案相同。

（5）上下半球的电容和漏电电阻分别为：

$$C_1 = 2\pi R\varepsilon_0\varepsilon_1, \quad R_1C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{\sigma_{1导}}, \quad R_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{\sigma_{1导}C_1} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{\sigma_{1导}2\pi R\varepsilon_0\varepsilon_1} = \frac{1}{\sigma_{1导}2\pi R}$$

$$C_2 = 2\pi R\varepsilon_0\varepsilon_2, \quad R_2C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2}{\sigma_{2导}}, \quad R_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2}{\sigma_{2导}C_2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2}{\sigma_{2导}2\pi R\varepsilon_0\varepsilon_2} = \frac{1}{\sigma_{2导}2\pi R}$$

总电阻为上下两部分电阻并联，即：

$$R_{阻} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\frac{1}{\sigma_{1导}2\pi R}\cdot\frac{1}{\sigma_{2导}2\pi R}}{\frac{1}{\sigma_{1导}2\pi R} + \frac{1}{\sigma_{2导}2\pi R}} = \frac{1}{2\pi R\left(\sigma_{1导} + \sigma_{2导}\right)}$$

漏电时间常数τ为：

$$\tau = RC = \frac{1}{2\pi R\left(\sigma_{1导} + \sigma_{2导}\right)}2\pi R\varepsilon_0\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) = \frac{\varepsilon_0\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)}{\left(\sigma_{1导} + \sigma_{2导}\right)}$$