2022 年春季学期 数学分析 (B2) 期中考试 参考解答与评分细则

刘炜昊[1], 余启帆, 严骐鸣

2022 年 5 月 13 日

第一题 (每小题 8 分, 共 24 分)

1. 求函数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $(0,0)$ 的 4 阶 Taylor 展开式.

1. 解: 利用一元函数的 Taylor 公式

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}t^2+o\left(t^2\right)$$
$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}=1-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{8}\left(x^2+y^2\right)^2+R_4$$

□

2. 设函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 曲面 $2z=x^2+y^2$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的单位外法向量为 $\vec{n}$, 求 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$.

2. 解: 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2-2z, \left(F_x',F_y',F_z'\right)=(2x,2y,-2), \vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M=\left.\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right|_M\cdot\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)=\frac{1}{3}$$

□

3. 在边长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, N 是 CC_1 的中点, O 是正方形 $ABCD$ 的中心, M 是 A_1D_1 的中点, 求点 M 到平面 OB_1N 的距离.

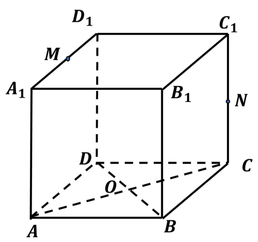

图 1: 第一题第 3 小题图

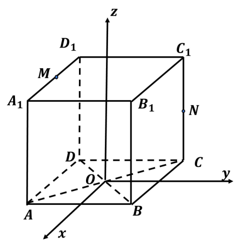

图 2: 第一题第 3 小题解答图示

3. 解: 如图建立坐标系, 则下列点的坐标:

$$B_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),O(0,0,0),N\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),M\left(0,-\frac{1}{2},1\right),$$

[1]闻道有先后, 解答有疏漏, 恳请读者来信指正: lwh1106@mail.ustc.edu.cn

过 O, B_1, N 三点的平面方程是

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{2}{4}z = 0$$

即 $x + 3y - 2z = 0$, 因此点 M 到平面的距离 $d = \dfrac{\left|3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\right|}{\sqrt{1+9+4}} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$. □

评卷人: 严骐鸣助教;

评分细则: 参考答案无给分细则, 改卷时采用的具体规则将在习题课上说明.

第二题 (10 分)

设 $y = \varphi(x)$ 是方程 $\sin y + e^x - xy - 1 = 0$ 在 $(0,0)$ 点某邻域内确定的隐函数, 求 $\varphi'(0), \varphi''(0)$.

解: 方程两边对 x 求导得

$$\cos y y'(x) + e^x - y - xy'(x) = 0 \implies y'(x) = \frac{y - e^x}{\cos y - x} \implies \varphi'(0) = -1$$

$$y''(x) = \frac{\left(y'(x) - e^x\right)\left(\cos y - x\right) - \left(y - e^x\right)\left(-\sin y y'(x) - 1\right)}{(\cos y - x)^2} \implies \varphi''(0) = -3.$$

□

评卷人: 严骐鸣助教;

评分细则: 算出 $y'(x)$ 得 3 分 (合计 3 分); 算出 $\varphi'(0)$ 得 2 分 (合计 5 分); 算出 $y''(x)$ 得 3 分 (合计 8 分); 算出 $\varphi''(0)$ 得 2 分 (合计 10 分).

第三题 (12 分)

求函数 $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ 在闭区域 $D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 6\}$ 上的最大值与最小值.

解: 先求区域内部极值点,

$$\begin{cases} f'_x = 2xy(4-x-y) - x^2y = xy(8-3x-2y) = 0 \\ f'_y = x^2(4-x-y) - x^2y = x^2(4-x-2y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases},$$

此时

$$\begin{cases} f'_{xx}(2,1) = -6 \\ f'_{xy}(2,1) = -4 \\ f'_{yy} = -8 \end{cases} \implies \boldsymbol{A} = Hf(2,1) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

由于 $a_1 = f'_{xx}(2,1) = -6 < 0$, $|\boldsymbol{A}| = 32 > 0$, 故在 $(2,1)$ 点出的 Hesse 矩阵是负定的, 因此有区域内极大值 $f(2,1) = 4$.

以下考虑在边界上的最值: 在边界点有 $f(0,y) = 0, f(x,0) = 0$;

在直线 $x+y=6$ 上 $z=f(x,6-x)=-12x^2+2x^3$,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=-24x+6x^2=0 \implies x_1=0,\ x_2=4 \implies f(0,6)=f(6,0)=0, f(4,2)=-64,$$

所以在边界 $x+y=6$ 上, 最大值是 0 , 最小值是 -64.

综上所述, 在区域 D 上, 最大值是 4 , 最小值是 -64. □

评卷人: 刘炜昊助教;

评分细则: 写出区域内驻点方程得 3 分, 求出驻点及函数值得 2 分, Hessian 得 1 分 (合计 6 分); 边界 $x=0$ 及 $y=0$ 各 1 分; 边界 $x+y=6$ 上求出驻点得 2 分, 代入求出最后结果得 2 分 (合计 12 分).

第四题 (12 分)

给定正整数 n, 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^n\ln\left(x^2+y^2\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 讨论 n 为何值时, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处:

(1) 连续; (2) 可微.

解: $\boxed{(1)}$ 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

$$\left|(x+y)^n\ln\left(x^2+y^2\right)\right|=|2r^n(\cos\theta+\sin\theta)^n\ln r|<2^{n+1}r^n|\ln r|$$

$\lim\limits_{r\to0^+}2^nr^n\ln r=0=f(0,0)$ 对任意正整数 n 成立, 所以对任意正整数 $n, f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续.

$\boxed{(2)}$

$$\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|2r^{n-1}(\cos\theta+\sin\theta)^n\ln r\right|\leqslant 2^{n+1}r^{n-1}|\ln r|$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=0$ 对 $n>1$ 成立,

当 $n\geqslant2$ 时,

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}x^{n-1}\ln x^2=0,$$

同理可得 $f_y'(0,0)=0$, 因此得到 $f(x,y)-f(0,0)=0\cdot x+0\cdot y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微; 但当 $n=1$ 时

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\ln x^2=-\infty,$$

偏导数不存在, 所以不可微.

综上, 当正整数 $n\geqslant2$ 时函数 $f(x,y)$ 可微. □

评卷人: 刘炜昊助教;

评分细则: 第 $\boxed{(1)}$ 问共 6 分: 需要正确放缩及文字说明, 若只写出取 $y=kx$ 路径将至少被扣 1 分; 第 $\boxed{(2)}$ 问给 6 分: 写出判断是否可微的式子可得 2 分, 此外需要用定义讨论 f_x' 及 f_y' 在原点处是否存在, 该步骤占 2 分; 随后判断 $n\geqslant2$ 时可微, 可再得 2 分 (若直接带过且没有对以下内容展开论述: f_x' 及 f_y' 在原点处以及用极限判断是否可微, 将会被扣至少 3 分).

第五题 (每小题 8 分, 共 24 分)

1. 计算 $\iint_D y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0)$ 及 $y = 0$ 围成的闭区域.

1. **解:** 设参数方程确定了函数 $y = y(x)$, $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi a)$, 因此

$$
\begin{aligned}
\iint_D y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi a} \mathrm{d}x \int_0^{y(x)} y^2 \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi a} y^3(x) \frac{1}{3} y \,\mathrm{d}x \xlongequal{x=a(t-\sin t)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} a^3 (1-\cos t)^3 \,\mathrm{d}a(t-\sin t) \\
&= \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^4 \,\mathrm{d}t = \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} \left(2\sin^2 \frac{t}{2}\right)^4 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{64a^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u \,\mathrm{d}u = \frac{35}{12} \pi a^4
\end{aligned}
$$

□

评卷人: 余启帆助教;

评分细则: 以上计算, 写至第一行合计得 2 分, 写至第三行合计得 6 分, 写至第四行合计得 8 分.

2. 计算 $\iiint_{\Sigma} |xyz| \,\mathrm{d}S$, Σ 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 位于平面 $z = 0$, $z = 1$ 之间的部分.

2. **解:** 根据对称性, 只需计算第一卦限部分曲面上的积分再乘以 4 .

设 $\Sigma_1 : z = \sqrt{x^2+y^2}, D : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1$; 作极坐标代换, D 转化为 $D' : \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], r \in [0,1]$, 由此

$$
z_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \iint_{\Sigma} |xyz| \mathrm{d}S = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz \,\mathrm{d}S = 4\sqrt{2} \iint_D xy\sqrt{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
= 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3 \cos\theta \sin\theta r \,\mathrm{d}r = \frac{2\sqrt{2}}{5}.
\end{aligned}
$$

□

评卷人: 余启帆助教;

评分细则: 写出由对称性转化为第一卦限的积分的 4 倍, 可合计得 2 分; 计算出 $\mathrm{d}S = \sqrt{2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 可合计得 4 分; 计算至最后合计得 8 分.

3. 计算 $\iiint_V |z| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 V 是曲面 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^2\left(x^2+y^2-z^2\right)^2$ 所围成的闭区域 $(a > 0)$.

3. **解:** 积分区域关于三个坐标面对称, 被积函数关于 x, y, z 都是偶函数, 只需计算第一卦限部分的积分, 令 $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$, 边界曲面化为

$$
r^4 = a^2\left(r^2\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta\right) = -a^2r^2\cos 2\theta \Longrightarrow r^2 = -a^2\cos 2\theta,
$$

第一卦限部分 $V': \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], r \in [0, a\sqrt{-\cos 2\theta}]$, 故

$$\begin{aligned}\iiint_V |z| \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}\theta \int_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}} r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta\ \mathrm{d}r \\ &= 8 \cdot \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} a^4 (-\cos 2\theta)^2 \cos\theta \sin\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{12} a^4.\end{aligned}$$

□

评卷人: 余启帆助教;

评分细则: 写出 θ 的范围合计得 2 分, 写出 r 的范围合计得 3 分; 以上计算, 写至第一行合计得 5 分, 写至第二行合计得 8 分.

第六题 (10 分)

已知曲线 $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 6x + 2y - 4 = 0$ 是椭圆, 利用拉格朗日乘数法求该椭圆的面积.

解: 设椭圆中心点坐标为 (m, n), 令 $u = x - m, v = y - n$, 则 (u, v) 满足的方程应不含一次项, 则

$$\begin{aligned}&5(u+m)^2 - 6(u+m)(v+n) + 5(v+n)^2 - 6(u+m) + 2(v+n) - 4 \\ =&5u^2 - 6uv + 5v^2 + (10m - 6n - 6)u + (10n - 6m + 2)v + \left(5m^2 - 6mn + 5n^2 - 6m + 2n - 4\right) \\ =&0,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} 10m - 6n - 6 = 0 \\ 10n - 6m + 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ n = \frac{1}{4} \end{cases} \Longrightarrow 5m^2 - 6mn + 5n^2 - 6m + 2n - 4 = -6.$$

以下考虑椭圆上的点到中心距离的最大最小值, 构造函数

$$F(u, v, \lambda) = u^2 + v^2 + \lambda\left(5u^2 - 6uv + 5v^2 - 6\right)$$

条件驻点满足

$$\begin{cases} F_u' = 2(u + 5\lambda u - 3\lambda v) = 0 \\ F_v' = 2(v - 3\lambda u + 5\lambda v) = 0 \\ F_\lambda' = 5u^2 - 6uv + 5v^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

已知最大, 最小值点不在坐标轴上, $u \neq 0, v \neq 0$, 由 $F_u' = 0$ 及 $F_v' = 0$ 两式得

$$\frac{u}{v} = \frac{3\lambda}{1 + 5\lambda} = \frac{1 + 5\lambda}{3\lambda}$$

整理得 $16\lambda^2 + 10\lambda + 1 = 0$, 所以 $\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{8}$.

$\lambda = -\frac{1}{2}$ 代回 $F_u' = 0$, 得 $u = v$, 代入 $F_\lambda' = 0$ 得 $5u^2 - 6u^2 + 5u^2 - 6 = 0, u^2 = \frac{3}{2}$;

$\lambda=-\frac{1}{8}$ 代回 $F_u'=0$, 得 $u=-v$, 代入 $F_\lambda'=0$ 得 $5u^2+6u^2+5u^2-6=0, u^2=\frac{3}{8}$;
从而可得椭圆长短半轴分别为 $\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}$, 椭圆面积是 $S=\pi\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\pi$. □

评卷人: 余启帆助教;

评分细则: 计算得到椭圆中心点合计得 2 分; 写出合理的拉格朗日函数合计得 4 分; 写出驻点方程组合计得 6 分; 最后计算出椭圆面积合计得 10 分. 若没有使用拉格朗日乘数法最高得 8 分; 若进行变量代换但并非正交变换, 且最后没有乘伸缩系数, 需要扣 2 分.

第七题 (8 分)

证明: 积分方程

$$f(x,y)=1+\int_0^x\,\mathrm{d}u\int_0^y f(u,v)\,\mathrm{d}v$$

在 $D:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$ 上至多有一个连续解.

证明: （反证法）假设 $f(x,y), f_1(x,y)$ 是积分方程两个不同的连续解. 令

$$g(x,y)=f(x,y)-f_1(x,y)$$
$$\Longrightarrow g(x,y)=\int_0^x\,\mathrm{d}u\int_0^y f(u,v)\mathrm{d}v-\int_0^x\,\mathrm{d}u\int_0^y f_1(u,v)\mathrm{d}v=\int_0^x\,\mathrm{d}u\int_0^y g(u,v)\mathrm{d}v.$$

由于 $g(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 连续, 故有界, 设 $|g(x,y)|<M$, 由积分方程可得.

$$|g(x,y)|\leqslant\int_0^x\,\mathrm{d}u\int_0^y M\,\mathrm{d}v=Mxy$$

由此结论, 利用积分不等式又可得

$$|g(x,y)|\leqslant\int_0^x\,\mathrm{d}u\int_0^y|g(u,v)|\mathrm{d}v\leqslant M\int_0^x\,\mathrm{d}u\int_0^y uv\,\mathrm{d}v=M\frac{x^2}{2}\frac{y^2}{2}.$$

归纳可得到

$$|g(x,y)|\leqslant\frac{Mx^ny^n}{(n!)^2}\leqslant\frac{M}{(n!)^2}$$

对任意自然数 n 成立, 令 $n\to\infty$, 可得 $g(x,y)=0$, 因此积分方程只有一个连续解. □

评卷人: 刘炜昊助教;

评分细则: 写出反证法及两个解相减得到的方程, 合计得 3 分; 写出积分不等式递归得到的结果, 合计得 6 分; 最后令 $n\to\infty$ 得到结论, 合计得 8 分. 若从方程角度出发写出 $f(x,y)$ 满足的微分方程, 并进一步进行推导, 可酌情得 $1\sim 2$ 分 (但纯属交换积分变量、写一下 $f(0,0)$ 的值等等, 均不给分).