复习 4

例 1 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调递减的连续函数, 证明: (1) 对任意 $\alpha \in (0,1)$, 有

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \geqslant \alpha \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{1}$$

(2) 仅假设 $f(x)$ 单调递减, 证明上式仍成立.

证明 (1) 因为 $f(x)$ 连续且单调递减, 所以

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \alpha \int_0^1 f(\alpha x)\,dx \geqslant \alpha \int_0^1 f(x)\,dx.$$

(2) 为了证明 (1) 式对单调递减函数仍成立, 只需证明下面的结果.

例 2 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数. 证明: 存在 $[a,b]$ 上的一列连续函数 $f_k(x)$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b |f_k(x)-f(x)|\,dx=0,$$

因而对于任意 $[c,d]\subset[a,b]$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_c^d f_k(x)\,dx=\int_c^d f(x)\,dx.$$

证明 由于 $f(x)$ 可积, 对于自然数 $k\geqslant 1$. 存在 $[a,b]$ 的分割

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\frac{1}{k},$$

其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,M_i,m_i $(i=0,1,2,\cdots,n)$ 分别是在 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最大值和最小值.

记 $f_k(x)$ 是连接 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n))$ 的折线对应的连续函数. 即,

$$f_k(x) = \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x_i} f(x_i) + \frac{x_i - x}{\Delta x_i} f(x_{i-1}),\ x \in [x_{i-1}, x_i].$$

因而对 $x \in [x_{i-1}, x_i]$, 有

$$f_k(x) - f(x) = \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x_i}\big(f(x_i) - f(x)\big) + \frac{x_i - x}{\Delta x_i}\big(f(x_{i-1}) - f(x)\big).$$

故,

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant M_i - m_i,\ x \in [x_{i-1}, x_i].$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_k(x)-f(x)|\,dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left|f_k(x)-f(x)\right| dx \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (M_i - m_i)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b |f_k(x)-f(x)|\,dx = 0.$$

注　当 $f(x)$ 是单调递增(减)时, $f_k(x)$ 也是单调递增(减)的.

例 3 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $|f'(x)| \leqslant M$ (对任意 $x \in [a,b]$).
证明:

(1) 若 $f(a)=0$, 则有 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \frac{M}{2}(b-a)^2$;

(2) 若 $f(a)=f(b)=0$, 则有 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \frac{M}{4}(b-a)^2$.

证明 (1) 因为 $f(a)=0$, $|f'(x)| \leqslant M$, 所以

$$\begin{aligned}|f(x)| = |f(x)-f(a)| &= \left|\int_a^x f'(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^x |f'(t)|\,dt \\ &\leqslant M\int_a^b dx = M(x-a). \qquad (1)\end{aligned}$$

于是

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant M\int_a^b (x-a)\,dx = \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

(2) 对 (1) 式在 $[a, \frac{a+b}{2}]$ 上积分, 得

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\,dx \leqslant M \int_a^{\frac{a+b}{2}} dx = \frac{M}{8}(b-a)^2. \tag{2}$$

因为 $f(b)=0$, $|f'(x)| \leqslant M$, 所以

$$|f(x)| = |f(b)-f(x)| = \left|\int_x^b f'(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^b |f'(t)|\,dt$$

$$\leqslant M \int_x^b dx = M(b-x).$$

于是

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\,dx \leqslant M \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\,dx = \frac{M}{8}(b-a)^2. \tag{3}$$

(2) 式与 (3) 式相加, 即得

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \frac{M}{4}(b-a)^2.$$

例 4 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 令 $g(x,y)=\int_0^x \big(f(t+y)-f(t)\big)\,dt$, 求证: $g(x,y)=g(y,x)$.

证明

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= \int_0^x \Big(f(t+y)-f(t)\Big)\,dt \\
&= \int_0^x f(t+y)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \\
&= \int_y^{x+y} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt \\
&= \int_x^{x+y} f(t)\,dt - \int_0^y f(t)\,dt \\
&= \int_0^y f(t+x)\,dt - \int_0^y f(t)\,dt \\
&= \int_0^y \Big(f(t+x)-f(t)\Big)\,dt \\
&= g(y,x).
\end{aligned}
$$

例 5 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x|\sin t|\,dt=\dfrac{2}{\pi}$.

证明 记 $m_x=x-[x]$, 因为 $|\sin x|$ 是以 π 为周期的函数, 所以

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x\pi}\int_0^{x\pi}|\sin t|\,dt &= \frac{1}{x\pi}\int_0^{[x]\pi}|\sin t|\,dt+\frac{1}{x\pi}\int_{[x]\pi}^{x\pi}|\sin t|\,dt\\
&= \frac{1}{x\pi}\sum_{i=1}^{[x]}\int_{(i-1)\pi}^{i\pi}|\sin t|\,dt+\frac{1}{x\pi}\int_0^{m_x\pi}|\sin(t+[x]\pi)|\,dt\\
&= \frac{1}{x\pi}\sum_{i=1}^{[x]}\int_0^{\pi}|\sin(t+(i-1)\pi)|\,dt+\frac{1}{x\pi}\int_0^{m_x\pi}|\sin t|\,dt\\
&= \frac{1}{x\pi}\sum_{i=1}^{[x]}\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt+\frac{1}{x\pi}\int_0^{m_x\pi}|\sin t|\,dt\\
&= \frac{2[x]}{x\pi}+\frac{1}{x\pi}\int_0^{m_x\pi}|\sin t|\,dt
\end{aligned}$$

注意到

$$0 \leqslant \frac{1}{x\pi}\int_0^{m_x\pi} |\sin t|\, dt \leqslant \frac{m_x}{x} \to 0,\ (x \to +\infty).$$

故,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\pi}\int_0^{x\pi} |\sin t|\, dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{2[x]}{x\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^{x} |\sin t|\, dt = \frac{2}{\pi}.$$

例 6 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x) \geqslant 0$ (对 $x \in [a,b]$). 记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

证明 记 $I_n = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$. 只需证明 I_n 收敛于 M. 根据 Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\,dx &\leqslant \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b 1^{n+1}\,dx\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\int_a^b (f^n(x))^{\frac{n+1}{n}}\,dx\right)^{\frac{n}{n+1}}\\ &= \frac{1}{(b-a)^{\frac{n}{n+1}}}\left(\int_a^b (f^n(x))^{\frac{n+1}{n}}\,dx\right)^{\frac{n}{n+1}}\end{aligned}$$

因此, $I_n \leqslant I_{n+1}$. 显然 $I_n \leqslant M$. 故, I_n 收敛.

因为 $f(x)$ 连续, 不妨设 $M = f(x_0)$, 所以对于任意正数 ε, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon,\ (x \in U = [a,b] \cap (x_0-\delta, x_0+\delta).)$$

记 $U=[c,d]$, 则

$$\begin{aligned} I_n^n &= \int_a^b f^n(x)\,dx = \int_U f^n(x)\,dx + \int_{[a,b]\setminus U} f^n(x)\,dx \\ &\geqslant \int_U f^n(x)\,dx \geqslant \int_c^d \Big(f(x_0)-\varepsilon\Big)^n dx \\ &= (M-\varepsilon)^n(d-c) \end{aligned}$$

于是

$$I_n \geqslant (M-\varepsilon)(d-c)^{\frac{1}{n}}.$$

于是

$$M \geqslant I_n \geqslant (M-\varepsilon)(d-c)^{\frac{1}{n}}.$$

有两边夹定理得,

$$M \geqslant \lim_{n\to\infty} I_n = M-\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的正数. 故, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = M$

例 7 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, 证明: 对任意 $a \in [0,1]$, 有

$$|f(a)| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f'(x)|\,dx.$$

证明 根据 Newton-Leibniz 公式,

$$f(a) = f(x) + \int_x^a f'(t)\,dt.$$

故,

$$\begin{aligned} |f(a)| &\leqslant |f(x)| + \left|\int_x^a f'(t)\,dt\right| \\ &\leqslant |f(x)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt. \end{aligned}$$

对上式在 $[0,1]$ 上积分, 得

$$|f(a)| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f'(x)|\,dx.$$

例 8 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可微, 且 $|f'(x)| \leqslant M$. 证明: 对任意正整数 n, 有

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}.$$

证明

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k}{n})\,dx\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f(\frac{k}{n})\right)dx\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(x_k)\left(x - \frac{k}{n}\right)dx\right| \\
&\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right)dx \\
&= \frac{M}{2n}.
\end{aligned}$$

例 9 设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|. \tag{1}$$

求证: 对所有 $x\in\mathbb{R}$, 有 $\left(f'(x)\right)^2<2f(x)$.

证明 对固定的 $x\in\mathbb{R}$, 若 $f'(x)=0$, 则结论成立.

若 $f'(x)<0$, 则 $h=-f'(x)>0$. 根据 Newton-Leibniz 公式和条件 (1), 得

$$\begin{aligned}
0<f(x+h)&=f(x)+\int_x^{x+h}f'(t)\,dt\\
&=f(x)+\int_x^{x+h}\left(f'(t)-f'(x)\right)dt+f'(x)h\\
&\leqslant f(x)+\int_x^{x+h}(t-x)\,dt+f'(x)h\\
&=f(x)+\frac{1}{2}h^2+f'(x)h.
\end{aligned}$$

故,

$$\frac{1}{2}h^2 + f'(x)h + f(x) > 0. \tag{2}$$

将 $h = -f'(x)$ 代入上式, 即得

$$\big(f'(x)\big)^2 < 2f(x).$$

若 $f'(x) > 0$, 则记 $h = f'(x)$. 根据 Newton-Leibniz 公式和条件 (1), 得

$$\begin{aligned}
0 < f(x-h) &= -\int_{x-h}^{x} f'(t)\,dt + f(x) \\
&= \int_{x-h}^{x} \big(f'(x) - f'(t)\big)\,dt - f'(x)h + f(x) \\
&\leqslant \int_{x-h}^{x} (x-t)\,dt - f'(x)h + f(x) \\
&= \frac{1}{2}h^2 - f'(x)h + f(x).
\end{aligned}$$

将 $h = f'(x)$ 代入上式, 仍得

$$\big(f'(x)\big)^2 < 2f(x).$$

总之, 始终有 $\left(f'(x)\right)^2 < 2f(x)$. 证毕.

注 1　结论中右端系数 2 是最佳的. 可以考虑函数 $f(x) = (1+x^2)/2$ 来说明.

注 2　结论可以推广如下:

设 $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是一可微函数, 且存在常数 $L > 0$ 使得对所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant L|x-y|^{\alpha}.$$

其中 $\alpha \in (0, 1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\left|f'(x)\right|^{\alpha+1} < \frac{\alpha+1}{\alpha} L^{\alpha} \cdot f(x).$$