实分析(H), 第1次课

任广斌(中国科大)

2024-2-26

助教:　　王鼎涵13949093426，张文锦18336875130

- 周一：第3节、第4节、第5节.

  9:45–10:30,　　10:35–12:05

- 周三：第1节、第2节.

  7:50–8:35,　　8:40–9:25

教室：5404

- 教材：周民强《实变函数论》第三版 2016
- 参考文献:
  - Stein 《Real Analysis》2005
  - Simon 《Real Analysis》2015
  - Tao 《An Introduction to Measure Theory》2011
  - Rudin 《实分析与复分析》Ch 1-2，1990
  - Folland 《Real Analysis》1999
  - MacDonald and Weiss 《A Course in Real Analysis》2005
  - 严加安《测度论讲义》2004
  - 齐民友《重温微积分》Ch 4, 2004

- 数学的定位:

人类是宇宙的眼睛,　数学是人类的眼睛.

- 量子物理和相对论, 已成为数学的一部分:

量子物理	相对论
Banach空间上的谱理论	流形和纤维丛理论

从分析的角度看数学

- 分析:

数学分析	(导数和积分)
复分析	($\mathbb{C}$上数学分析)
实分析	(什么是积分, 积分定义的最广场所)
泛函分析	(无限维数学分析)
偏微分方程	(数学分析的应用)
概率论	(数学分析的拓展)

- 代数

线性代数	(数学分析线性化)
抽象代数	(什么是加减乘除)

- 几何

微分几何	(什么导数, 导数定义的最广场所)
点集拓扑	(什么是连续)

实分析是数学分析推广

- $C[a,b] \subset R[a,b] \subset L^1[a,b]$ (Lebesgue可积)
- $f \in R[a,b] \Longleftrightarrow f$有界且几乎处处连续
- Lebesgue 积分是Riemann积分的推广
- Lebesgue于1902年建立Lebesgue积分理论
- Schwartz于1952年建立广义函数理论理论
(好函数通过极限能达到的最远的地方)

$$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R} \qquad （双射）$$

$$L^1[a,b]/\sim \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} AC[a,b]/\mathbb{R} \qquad （双射）$$

- 实分析的抽象积分理论是积分理论推广的最广场所.
- 微分几何的流形和纤维丛理论是导数推广的最广场所.

数学框架结构, 打包处理, 将个体放到整体进行研究:

$(\mathbb{R}^n, \lvert\cdot\rvert)$	$(R[a,b], \lVert\cdot\rVert)$	$(L^1[a,b], \lVert\cdot\rVert)$
$\lvert x\rvert = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i\rvert^2}$	$\lVert f\rVert = \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$	$\lVert f\rVert = \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$
完备	不完备	完备

$R[a,b]$非完备

分析理论需要建立在完备的集合上. 处理极限框架需要足够的大.

$$R[a,b] \subsetneqq \overline{R[a,b]} = L^1[a,b]$$

下列赋范线性空间不完备

$$(R[a,b], \|\cdot\|_{L^1}).$$

Lebesgue积分起源: 对于y轴分割

- 有界非负函数$f : [a, b] \longrightarrow [0, M)$, 对于$y$轴分割

$$\pi : \qquad 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M.$$

- $[a, b] = \bigsqcup_{i=1}^{n} f^{-1}[y_{i-1}, y_i), \qquad [0, M) = \bigsqcup_{i=1}^{n} [y_{i-1}, y_i)$

$$f|_{f^{-1}[y_{i-1}, y_i)} : f^{-1}[y_{i-1}, y_i) \longrightarrow [y_{i-1}, y_i) \tag{1}$$

- 考察长度非常非常小的区间$[y_{i-1}, y_i)$:
  - 该区间上, 函数值认为完全相同, 都等于$y_{i-1} \simeq y_i$.
  - (1)视为常值函数, 其相应的曲边梯形面积为

$$m(f^{-1}[y_{i-1}, y_i))\ y_{i-1}.$$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} m(f^{-1}[y_{i-1}, y_i))y_{i-1} \\
&= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} \Big(m(f^{-1}[y_{i-1}, +\infty)) - m(f^{-1}[y_i, +\infty))\Big)y_{i-1} \\
&= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} m(f^{-1}[y_i, +\infty))(y_i - y_{i-1}) \\
&= \int_0^M m(f^{-1}[y, +\infty))dy
\end{aligned}
$$

由微元法看蛋糕表示

Lebesgue积分=Riemann积分+测度论(续)

- 上述积分是单调函数的Riemann积分.
- 问题：如何定义任意集合的Lebesgue测度？

存在Lebesgue不可测集合.

- Lebesgue可积的必要条件:

$$m(f^{-1}[y,+\infty))\text{有意义}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall y, \quad \{x \in [a,b] : f(x) > y\}\text{是Lebesgue可测集}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{开集的原像是Lebesgue可测集}$$

$$\Longleftrightarrow \quad f\text{是Lebesgue可测函数}$$

实分析的内容

- 实分析————测度论+积分论
- 测度论 $\|$ 积分论

测度论核心：Littlewood三原理

实分析和数学分析的血缘关系：

可测集	可测函数	收敛可测函数列
开集	连续函数	一致收敛函数列
测度正则性	Lusin定理	Egorov定理

Lebesgue测度论: 外测度

- 用可列个开矩体覆盖给定集合$E \subset \mathbb{R}^n$

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \qquad I_k = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

- 可列个开矩体的体积近似代替E的外测度:

$$m^*(E) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|, \qquad |I_k| = I_k\text{的体积}.$$

- 该粗糙值给出的最小可能,就是精确值

$$m^*(E) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

$$(\text{有限求和} \Longrightarrow m([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 1)$$

- A是Lebesgue可测集$\overset{E\subset\mathbb{R}^n}{\underset{A\subset\mathbb{R}^n}{\Longleftrightarrow}}$ A将任意集合E 很好地一剖为二:

$$\begin{aligned} E &= (E\cap A)\bigsqcup(E\cap A^c) \\ m^*(E) &= m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A^c). \end{aligned} \tag{2}$$

  - 假设$A\subset I$, I是有界开矩体.

    $$A\text{的内测度} := |I| - A^c\text{的外测度}$$

    (取余集是集合论中最重要的对合变换: 内外，开闭，有界无界)

  - 在(2)中, 取$E=I$, 则

    $$\text{内测度} = \text{外测度}.$$

- 若A是Lebesgue可测集, 则

$$A\text{的Lebesgue测度} = m(A) := m^*(A).$$

集合论		函数论
A	$=$	χ_A
$m(A)$	$=$	$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)dm(x)$
测度		积分

- 测度论是特征函数的积分论.
- 积分论是测度论的升华, 是关于绝对连续测度的测度理论
- 积分是一个测度(积分是面积).

$$f \in L^+(E) \Longrightarrow \int_E f dm = m(\underline{G}(f))$$

其中$\underline{G}(f) = \left\{(x, y) : x \in E, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\} =$ f的下方图形.

测度空间(Ω, Σ, μ)

- Ω是非空集合.
- $\Sigma \subset 2^{\Omega}$ 是σ-代数.
- $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$是测度:
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$.

例子: Harr测度, Radon测度, Hausdorff测度, Dirac测度.

抽象积分论: 可测函数的积分

- 可测函数 $= \chi_A + (+, \quad \cdot, \quad \lim)$
  $=$ 可测特征函数通过代数运算和极限运算生成

- 可测函数重要特性：对于极限运算封闭.

- $$\int_\Omega f\, d\mu = \text{特征函数的积分+代数运算+极限运算}$$

  - $f_n = \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n} \chi_{f^{-1}[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})} + 2^n \chi_{f^{-1}[2^n, +\infty)} \nearrow f$

  - $\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu$

抽象积分论的核心内容: 交换积分次序的等价定理

- 单调收敛定理:

$$f_k \in L^+(\Omega), \quad f_k \nearrow f \Longrightarrow \int_\Omega f_k \, d\mu \nearrow \int_\Omega f \, d\mu$$

- Lebesgue控制收敛定理:

$$f_k \in L(\Omega), \quad |f_k| \leqslant g \in L^1(\Omega, d\mu), \quad f_k \to f$$

$$\Longrightarrow \quad f_k \xrightarrow{L^1} f, \quad \int_\Omega f_k \, d\mu \longrightarrow \int_\Omega f \, d\mu$$

- Fatou引理:

$$f_k \in L^+(\Omega) \Longrightarrow \int_\Omega \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k \, d\mu \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \, d\mu$$

交换积分次序的等价定理(续)

- Fubini定理:

$$(\Omega_i,\Sigma_i,\mu_i)\text{是}\sigma\text{有限测度空间}, i=1,2.$$

$$f\in L^+(\Omega_1\times\Omega_2)\cup L^1(\Omega_1\times\Omega_2).\quad \text{则}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\,d\mu_1\times\mu_2 &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x)\\ &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)\end{aligned}$$

- 测度σ可加性:

$$\int_\Omega\sum_{k=1}^\infty \chi_{A_k}d\mu \xlongequal{A_k\text{互不相交}} \sum_{k=1}^\infty\int_\Omega \chi_{A_k}d\mu$$

极限=级数，级数是一种积分

- 离散测度空间 $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$
- 计数测度

$$\mu(A) = \begin{cases} A\text{的元素个数}, & A\text{是有限集} \\ +\infty, & A\text{是无限集}. \end{cases}$$

- 任意函数$f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty)$ 必可测.

级数是关于计数测度的积分

假设$f \geqslant 0$, 则

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} f(x)\,d\mu(x) &= \int_{\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} f(x)\chi_{\{k\}}(x)\,d\mu(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f(x)\chi_{\{k\}}(x)\,d\mu(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f(k)\chi_{\{k\}}(x)\,d\mu(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\mu(\{k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k
\end{aligned}
$$

实分析是现代分析基石

- 实分析:　具体Banach空间$L^1(\Omega)$, 积分和测度工具
- 概率论:　实分析+相关性和无关性结构。
- 泛函分析:　抽象Banach空间, 谱理论是量子物理的出发点
- 偏微分方程:　广义解和古典解.
  函数是测度，测度是正的广义函数.

$$\text{函数} \xrightarrow{\text{测度}} \text{广义函数}$$

分析是极限的艺术

- 实分析充满了极限过程:

$$\text{规则情形} \xrightarrow[\text{Littlewood三原理, 测度和积分的构造}]{\text{极限过程}} \text{不规则情形}$$

实分析(H), 第2次课

任广斌(中国科大)

2024-2-28

本章内容: 集合论—测度论的基础.

本讲要点:

- 集合的极限
- 推广的数学归纳法
- 两个无穷集合, 哪一个元素更多?

集合论公理体系的重要性

- 近代数学为何没有在中国建立起来？

外因	内因
数学被视为旁门	缺少符号系统
周易占统治地位	

Theorem 1

哥德尔不完备性定理:

不存在万能的公理体系: 利用该体系能证明任何数学真理.

数学：宗教———逻辑：直觉———局限：无限

- 数学不是万能的, 没有数学是万万不能的。

- 集合论是一切数学的基础:

  所有数学概念都需要直接或间接地利用集合来定义.

集合概念(描述)	集合论公理
地心	地壳

集合论和函数论的统一

- 集合X, 视为宇宙. $A \subset X$

- 特征函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

- 集合视为函数

$$A = \chi_A(x), \qquad A = \chi_A^{-1}\{1\}$$

集合论和函数论的统一(续)

A	$=$	$\chi_A(x)$
集合论		函数论
并、交、差、极限运算		加、减、乘、除、极限运算
$A \subset B$		$\chi_A \leqslant \chi_B$
$A \cap B$	$=$	$\chi_A \chi_B$
$A \sqcup B$	$=$	$\lvert\chi_A - \chi_B\rvert$

集合的上极限

$$\begin{aligned}
\overline{\lim} A_k &= \overline{\lim_{k\to\infty}} \chi_{A_k}(x) \quad (\text{只取0,1的特征函数=集合}) \\
&= \begin{cases} 1, & \text{无穷多项} \chi_{A_k}(x) = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\
&= \left\{ x \in X : \quad x \in \text{无穷多个} A_k \right\} \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k
\end{aligned}$$

集合的下极限

$$
\begin{aligned}
\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k &= \underline{\lim_{k\to\infty}} \chi_{A_k}(x) \quad (\text{只取0,1的特征函数=集合}) \\
&= \begin{cases} 1, & x \in \text{所有} A_k \ (\text{只允许有限个例外}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\
&= \left\{ x \in X : \quad x \in \text{所有} A_k \ (\text{只允许有限个例外}) \right\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k
\end{aligned}
$$

集合的极限

$$\lim A_k := \varliminf_{k\to\infty} A_k \xlongequal{\text{在该等式成立条件下}} \varlimsup_{k\to\infty} A_k$$

单调集合列极限存在

$$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}\uparrow \quad\Longrightarrow\quad A_1\subset A_2\subset\cdots\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\lim_{k\to\infty}A_k$$

$$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}\downarrow \quad\Longrightarrow\quad A_1\supset A_2\supset\cdots\supset\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=\lim_{k\to\infty}A_k$$

集合的极限

$$\overline{\lim} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\underline{\lim} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \underline{\lim}_{k\to\infty} A_k \subset \overline{\lim}_{k\to\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

集合的极限

$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k$	$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$
$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k$	$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geqslant n} A_k$

例题

$$\left\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \to f(x)\right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \varliminf_{n\to\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| < 1/k\right\}$$

ϵ	N
$\bigcap_{k=1}^{\infty}$	$\varliminf_{n\to\infty}$

$$\left\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \nrightarrow f(x)\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geqslant 1/k\right\}$$

归纳法	Zorn引理
可数	不可数
一步一脚印	一步登天膨胀法

Zorn引理特点: 命题从小到大扩充, 扩充到极大元.
用反证法证明极大元即为所求.

Zorn引理: 若偏序集合X的每一个全序子集合都具有上界, 则X具有极大元.

- X上的关系$R \Longleftrightarrow R \subset X \times X$. $(x, y) \in R \xLeftrightarrow{\text{记为}} xRy$.

- 例如: $X = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \leqslant y\}$

$$(x, y) \in R \xLeftrightarrow{\leqslant\text{关系}} x \leqslant y.$$

偏序关系和全序关系

- 偏序集合$(X,\leqslant)$:　X上关系满足

  (1) 自身性:　$\forall\ x\in X \Longrightarrow x\leqslant x$

  (2) 反对称性:　$x\leqslant y,\quad y\leqslant x \xrightarrow{\forall x,y\in X} x=y$

  (3) 传递性:　$x\leqslant y,\quad y\leqslant z \xrightarrow{\forall x,y,z\in X} x\leqslant z$

- 全序集合$(X,\leqslant)$: 还满足

  (4) 全序性:　$\forall\ x,\ y\in X \Longrightarrow x\leqslant y$　或　$y\leqslant x.$

极大元和上界

- 极大元(没有更大): 设$(X, \leqslant)$是偏序集, $x_0 \in X$.

  如果$x_0 \leqslant y \in X \Longrightarrow y = x_0$, 那么称$x_0$是$X$的一个极大元.

- 上界: 设$(X, \leqslant)$是偏序集, $E \subset X$, $x_0 \in X$.

  如果 $\forall\, y \in E \Longrightarrow y \leqslant x_0$, 那么称x_0是E的一个上界.

选择公理

- 选择公理:

$$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \quad A \neq \phi, \quad X_\alpha \neq \phi \quad \Longrightarrow \quad \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \neq \phi.$$

其中

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha := \left\{ f : A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : \quad f(\alpha) \in X_\alpha, \ \ \forall\, \alpha \in A \right\}.$$

- 选择公理与Zorn引理等价.

- 选择公理:

$$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A},\quad A\neq\phi,\quad X_\alpha\neq\phi\quad X_\alpha\text{互不相交}$$

$$\Longrightarrow\qquad \text{存在}Y\subset\bigsqcup_{\alpha\in A}X_\alpha:\quad Y\cap X_\alpha\text{是独点集},\quad \forall\alpha\in A.$$

集合	等价类	代表元
学校	班级	班长
$\bigsqcup_{\alpha\in A}X_\alpha$	X_α	Y

势(基数, Cardinality)

- $X = \{a_1, \cdots, a_n\} \Longrightarrow X$的势 $= \bar{\bar{X}} = n$

Def

$$\bar{\bar{X}} \leqslant \bar{\bar{Y}} \Longleftrightarrow \exists 单射 f : X \to Y.$$

$$\bar{\bar{X}} \geqslant \bar{\bar{Y}} \Longleftrightarrow \exists 满射 f : X \to Y.$$

$$\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{Y}} \Longleftrightarrow \exists 双射 f : X \to Y.$$

- $$\bar{\bar{X}} \leqslant \bar{\bar{Y}} \Longleftrightarrow \bar{\bar{Y}} \geqslant \bar{\bar{X}}$$

$\Longrightarrow$: 设$\exists$单射$f: X \to Y$, 需要构造满射$g: Y \to X$

定义 $$g|_{f(X)} = f^{-1}, \qquad g|_{Y\setminus f(X)} = x_0.$$

$\Longleftarrow$: 设$\exists$满射$g: Y \to X$, 需要构造单射$f: X \to Y$.

(选择公理)$\exists$ $Z \subset \bigsqcup_{x\in X} g^{-1}(x)$, $Z \cap g^{-1}(x)$是独点集

定义
$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto Z \cap g^{-1}(x)\text{中的独点} \end{aligned}$$

势是全序关系

- $(2^X, \subset)$是偏序集

$$2^X := X\text{的所有子集合全体}$$

势是全序关系

- 函数视为集合:　　$f = \text{Graph } f$

$$f : X \longrightarrow Y, \qquad \text{Graph } f = \{(x, f(x)) \subset X \times Y\}$$

集合论	函数论
A	χ_A
Graph$f$	f
集合的包含关系(偏序)	函数的延拓

- $\forall$ 集合$X, Y \Longrightarrow \bar{\bar{X}} \leqslant \bar{\bar{Y}}$ 或者 $\bar{\bar{Y}} \leqslant \bar{\bar{X}}$.

Zorn引理使用范例：稳扎稳打、得寸进尺、一步登天三步骤。

步骤一：构造偏序集。

$$\Gamma := \left\{ f : A \longrightarrow Y \mid f\text{是单射}, A \subset X \right\} \subset 2^{X \times Y}$$

$$\xrightarrow[\Gamma \neq \emptyset, (\Gamma, \subset)\text{是偏序集}]{\text{Zorn引理}} \quad \Gamma\text{具有极大元} \quad f : A \longrightarrow f(A) \quad \text{双射}.$$

势是全序关系(续)

步骤二： 断言极大元使得结论成立。

$$\text{断言}: A = X \quad \text{或者} \quad f(A) = Y.$$

由断言可导出$f: X \longrightarrow Y$ 是单射或$f: A \longrightarrow Y$是满射.

步骤三： 利用反证法证明断言。

反证法: 假设断言不成立, 则存在映照

$$\begin{aligned} f: A \sqcup \{x_0\} &\longrightarrow f(A) \sqcup \{y_0\} \\ x_0 &\longmapsto y_0 \end{aligned}$$

与f是极大元矛盾

作业

P.13　第1, 2, 3题

实分析(H), 第3次课

任广斌(中国科大)

2024-3-4

上次内容:

- 集合论可披挂上的外衣
  - 集合具有结构:　势、包含、并、交、叉、极限;
  - 集合视为函数具有结构:　加、减、乘、除、极限.

(极限=级数=积分=导数)

注记

$$\text{集合论} \xrightarrow{\text{添加各种数学结构}} \text{数学各学科}$$

数学结构:

- 代数结构: 向量空间结构, 模结构, 乘法结构
- 序结构
- 内积结构, 范数结构
- 拓扑结构
- 积分结构
- 微分结构

本次内容:

- 集合的势是全序关系.
  - 最大势和最小势
  - 势的运算
  - 两个最重要的势$\aleph_0$和$\aleph$ (ℵ读“阿列夫”)
- 存在不可测集合

序的结构

- 偏序集合$(X, \leqslant)$: X上关系满足

  (1) 自身性: $\forall\ x \in X \Longrightarrow x \leqslant x$

  (2) 反对称性: $x \leqslant y, \quad y \leqslant x \xrightarrow{\forall x,y \in X} x = y$

  (3) 传递性: $x \leqslant y, \quad y \leqslant z \xrightarrow{\forall x,y,z \in X} x \leqslant z$

- 全序集合$(X, \leqslant)$: 还满足

  (4) 全序性: $\forall\ x,\ y \in X \Longrightarrow x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$.

势是全序

Theorem 1

Cantor-Bernstein定理: $\bar{\bar{X}} \leqslant \bar{\bar{Y}}, \quad \bar{\bar{Y}} \leqslant \bar{\bar{X}} \Longrightarrow \bar{\bar{X}} = \bar{\bar{Y}}$

势是全序

证: 存在单射$f : X \longrightarrow Y$ 和$g : Y \longrightarrow X$.

$$\forall x \in X \xRightarrow{\text{利用}f^{-1}\text{和}g^{-1}\text{拉回}} x \xrightarrow{g^{-1}} g^{-1}(x) \xrightarrow{f^{-1}} \cdots$$

(情形1) 一直继续下去, 称$x \in X_\infty$ (乒乓和局)

(情形2) 终止到X中, 称$x \in X_X$ (X负)

(情形3) 终止到Y中, 称$x \in X_Y$ (Y负)

$$\xRightarrow{\text{由此导出X的剖分}} X = X_\infty \sqcup X_X \sqcup X_Y.$$

$$Y = Y_\infty \sqcup Y_X \sqcup Y_Y \quad \text{(对称结果)}.$$

注记：两人f, g对垒，拉回好处：区分胜负。

势是全序(续)

断言： $f(X_\infty) = Y_\infty$.

(1). $\forall\ y \in f(X_\infty) \xRightarrow[\exists x \in X_\infty]{\exists\text{拉回}} y := f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{g^{-1}} \cdots$一直持续

$\Longrightarrow\ y \in Y_\infty$

(2). $\forall\ y \in Y_\infty \xRightarrow{\exists\text{拉回}} y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{g^{-1}} \cdots$

$\Longrightarrow\ y = f(x), \quad x \in X_\infty$

$\Longrightarrow\ y \in f(X_\infty).$

断言: $f(X_X) = Y_X$

(1). $\forall\ y \in f(X_X) \xRightarrow[\exists x \in X_X]{\exists 拉回} y := f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{g^{-1}} \cdots$ 终止到X

$\Longrightarrow y \in Y_X$

(2). $\forall\ y \in Y_X \xRightarrow{\exists 拉回} y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{g^{-1}} \cdots$ 终止到X

$\Longrightarrow y = f(x), \quad x \in X_X$

$\Longrightarrow y \in f(X_X).$

$$\xRightarrow[\text{f是单射}]{\text{由构造}} \quad f: X_\infty \longrightarrow Y_\infty, \qquad f: X_X \longrightarrow Y_X\text{必是双射}.$$

$$g: Y_Y \longrightarrow X_Y\text{双射}. \qquad (\text{对称结果}).$$

$$\Longrightarrow \quad h: X \longrightarrow Y \text{ 双射:}$$

$$h|_{X_\infty \sqcup X_X} = f, \qquad h|_{X_Y} = g^{-1}.$$

- 无最大势定理: $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{2^X}} \qquad (X \neq \phi).$

证明: 反证法: 存在满射$f : X \longrightarrow 2^X$.

$$\Longrightarrow \quad \left\{x \in X : \ x \notin f(x)\right\} \in 2^X = f(X)$$

$$\Longrightarrow \quad \text{存在} x_0 \in X : \qquad f(x_0) = \left\{x \in X : \ x \notin f(x)\right\}$$

(1) $\quad x_0 \in f(x_0) \Longrightarrow x_0 \notin f(x_0)$

(2) $\quad x_0 \notin f(x_0) \Longrightarrow x_0 \in f(x_0)$

- 最小势定理: 无限集合中最小势为可数无限集合的势

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\mathbb{N}}}.$$

证明: 任意无限集合包含可列子集.

连续统的势

- 连续统的势定义为实数集合的势:

$$c := \aleph := \overline{\overline{\mathbb{R}}}.$$

- $\aleph_0 < \aleph, \qquad \overline{\overline{2^{\mathbb{N}}}} = \aleph$

Cantor连续统假设

- Cantor连续统假设:

$$\aleph_0 \leqslant \overline{\overline{X}} \leqslant \aleph \quad \Longrightarrow \quad \overline{\overline{X}} = \aleph_0\text{或者}\aleph.$$

- Zermelo – Fraenkel公理体系 $\not\Rightarrow$ Cantor连续统假设为真或非真.

- 注记:

选择公理	Cantor连续统假设
集合论	势理论

势的运算

- 势作为运算与加法、乘法、幂运算可交换(有限情形的推广):

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}} &:= \overline{\overline{A_1 \sqcup A_2}} \\
\overline{\overline{A_1}} \cdot \overline{\overline{A_2}} &:= \overline{\overline{A_1 \times A_2}} \\
\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} &:= \overline{\overline{A^B}}
\end{aligned}$$

记号: $A^B = \{f : B \longrightarrow A$单值映照$\}$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\{1,2,\cdots,n\}}$$

- 定理: $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$

证: $2^{\overline{\overline{A}}} \overset{\text{def}}{=\!=} \overline{\overline{\{0,1\}^A}} \overset{\text{特征函数=集合}}{=\!=\!=\!=\!=} \overline{\overline{2^A}}$

注记：记号A^B来源于势的运算.

记号2^A来源于$\{0,1\}^A \equiv 2^A$.

势的增长序列

$$0 < 1 < 2 < \cdots < \aleph_0 < c < 2^c < 2^{2^c} < \cdots$$

p进制表示定理: $p=2,3,\cdots$.

- $\forall\, x\in(0,1)$, $\exists\,!\; a_n\in\{0,1,\cdots,p-1\}$, 有无穷多项$a_n$非零,

$$\xRightarrow{\text{唯一表示}} x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{p^n}=0.a_1a_2\cdots(p),$$

- 当且仅当x 是p进制下的有穷小数, 表示唯二:

$$x \overset{a_n\neq 0}{=\!=\!=} 0.a_1a_2\cdots a_n(p)=0.a_1\cdots a_{n-1}(a_n-1)(p-1)(p-1)\cdots(p).$$

(唯二表示特点: 各项全为0或全为p-1, 仅有限项例外)

- 定理: $c^{\aleph_0} = c$.

证: 单射 (数列视为实数)

$$\begin{aligned}\varphi : (0,1)^{\mathbb{N}} &\longrightarrow (0,1] \\ \{x_1, x_2, \cdots\} &\longmapsto 0.\underbrace{x_{11}}\,\underbrace{x_{21}x_{12}}\,\underbrace{x_{31}x_{22}x_{13}}_{\text{对角线方法}}\cdots\end{aligned}$$

采用十进制表示(无穷项非零):

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.x_{11}x_{12}x_{13}\cdots \\ x_2 &= 0.x_{21}x_{22}x_{23}\cdots \\ x_3 &= 0.x_{31}x_{32}x_{33}\cdots \\ \cdots\end{aligned}$$

注记: 数列视为数.

$\aleph_0$和$\aleph$(续)

- 定理:　$c^c = 2^c$.

  证: 构造

$$\begin{array}{rrcl} \text{单射} & \text{Graph} : [0,1]^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & 2^{\mathbb{R}^2} \\ & f & \longmapsto & \text{Graph } f \end{array}$$

$$c^{\aleph_0} = c \Longrightarrow c^2 = c \Longrightarrow \overline{\overline{\mathbb{R}^2}} = \overline{\overline{\mathbb{R}^{\{1,2\}}}} = c^2 = \overline{\overline{\mathbb{R}}}.$$

- 定理: $2^{\aleph_0} = c$.

证: 满射 $\psi : 2^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\psi(A) = \begin{cases} \sum\limits_{n\in A} \dfrac{1}{2^n}, & \text{if } A\text{有下界} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(将整数集合$A \subset \mathbb{Z}$视为二进制数).

$$2^{\aleph_0} \geqslant c = c^{\aleph_0} \geqslant 2^{\aleph_0}.$$

- $$\overline{\overline{X_n}} = \aleph_0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}} = \aleph_0.$$

- $$\overline{\overline{X_n}} = c, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}} = c.$$

例题

- 凸函数$f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$除去一个可数集可微.

例题续

证明：构造单射 $\{x \in (a,b) : f'_-(x) < f'_+(x)\} \longrightarrow \mathbb{Q}^3$

$$x \longmapsto (r_x, s_x, t_x)$$

- $r_x \in (f'_-(x), \quad f'_+(x)), \qquad x \in (s_x, t_x) \subset [s_x, t_x] \subset (a,b)$

$$\xRightarrow[\forall\ v\in(s_x,x),u\in(x,t_x)]{\text{极限保号性}} \frac{f(v)-f(x)}{v-x} < r_x < \frac{f(u)-f(x)}{u-x}.$$

$$\xRightarrow[\text{支撑线}]{} f(z)-f(x) > r_x(z-x), \qquad \forall\ z \in (s_x, t_x) \setminus \{x\}.$$

- 单射$(r_x, s_x, t_x) = (r_y, s_y, t_y) \Longrightarrow x = y$. 否则

$$\xRightarrow{\text{上式}} f(y)-f(x) > r_x(y-x), \qquad f(x)-f(y) > r_y(x-y),\text{与}r_x = r_y\text{矛盾}$$

(严格凸支撑线不同)

不存在万能的尺子，测度论由此应运而生

- 不存在$\mu : 2^{\mathbb{R}} \longrightarrow [0, +\infty]$满足
  - $\mu(\phi) = 0.$
  - $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k), \qquad \forall E_k \subset \mathbb{R}.$
  - $\mu(E) = \mu(x + E), \qquad \forall E \subset \mathbb{R}.$
  - $\mu([0, s]) = s, \qquad \forall s > 0.$

不可测集存在性的证明（反证法）

- 取代表元集合K(选择公理)

$$[0,1]/\mathbb{Q} \xlongequal{\text{双射}} K.$$

- 相似集合的可列并介于两个区间：

$$[0,1] \subset \bigsqcup_{\color{red}{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}}} (K+r) \subset [-1,2].$$

  - 考虑$[-1,1]\cap\mathbb{Q}$的原因:

$$\forall x \in [0,1] \Longrightarrow \begin{aligned} & x = k + r_0 \quad (\exists k \in K,\ \ r_0 \in \mathbb{Q}) \\ & r_0 = x - k \in [0,1] - [0,1] = [-1,1]. \end{aligned}$$

  - $K + [-1,1] \subset [0,1] + [-1,1] = [-1,2]$

  - $k_1 + r_1 = k_2 + r_2 \xRightarrow[\text{代表元唯一性}]{\text{两边在同一等价类}} k_1 = k_2,\ \ r_1 = r_2.$

- 代表元集合的平移可记为K_j, 它们相似且互不相交

$$[0,1] \subset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} K_j \subset [-1,2].$$

- 这与下列事实矛盾

$$1 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(K_j) \leqslant 3$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(K_j) \xlongequal{\mu(K_j)=\mu(K)} 0\text{或} +\infty.$$

- 任意正测集包含不可测子集.

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap [-n, n])$$

$$\xrightarrow{\text{不妨设}A\text{有界}} \quad \text{不妨设正测集}A \subset [0, 1].$$

取代表元集合W:

$$W \subset A, \qquad A/\mathbb{Q} \overset{\text{双射}}{=\!=\!=} W.$$

$$A \subset \bigsqcup_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (r + W) \subset [-1, 2] \Longrightarrow \text{W是不可测集合.}$$

作业

P54 第4题

实分析(H), 第4次课

任广斌(中国科大)

2024-3-6

本讲内容

- Cantor集
- Cantor 函数

反直观, 逻辑起着关键作用

- Cantor集

Cantor集	有理数集	推广的Cantor集	无理数集
零测集	零测集	正测集	正测集
不可数集	可数集	不可数集	不可数集
第一纲集	第一纲集	第一纲集	第二纲集
奇异	中规中矩	奇异	中规中矩

- Cantor 函数
  - $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1] \uparrow$ 连续
  - 将零测集映照为正测集.
  - 导函数几乎处处为零.

- 一尺之锤, 日截其半, 万世不竭.

—-庄子

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[0,\frac{1}{2^n}]=\{0\}.$$

三等分Cantor集

- $C_0 = [0, 1].$
- $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \sqcup [\frac{2}{3}, 1].$ 被挖去集合$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
- $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \sqcup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \sqcup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \sqcup [\frac{8}{9}, 1].$ 被挖$(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \sqcup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$
- $\vdots$
- C_n是2^n个区间的并, 每个区间长度均为$\frac{1}{3^n}$.
  C_n是由C_{n-1}挖去是2^{n-1}个区间得到.

集合的个数如细胞分裂, 指数增长.

Cantor集续

	区间长度	个数	去掉长度	个数
C_0	1	1	0	0
C_1	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	1
C_2	$\frac{1}{3^2}$	2^2	$\frac{1}{3^2}$	2
$\vdots$				
C_n	$\frac{1}{3^n}$	2^n	$\frac{1}{3^n}$	2^{n-1}
$\vdots$				

- $$C_{n-1} \xrightarrow[\text{去掉中间的开区间}]{\text{三等分}} C_n.$$
- $$C_n = C_{n-1} \setminus \bigsqcup_{2^{n-1}\text{个开区间}} \text{长度为}\tfrac{1}{3^n}$$
- $$C_n = \bigsqcup_{2^n\text{个闭区间}} \text{长度为}\tfrac{1}{3^n}$$

Cantor集续2

- Cantor三分集

$$C=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n \xlongequal{C_n\downarrow} \lim_{n\to\infty}C_n.$$

C_n是有限个闭区间的并, C是C_n的极限, 其性质来源于C_n.

Cantor集是

- 紧集 $\quad (C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n, \quad C_n$紧)

- 零测集 $\quad (|C| \leqslant |C_n| \leqslant \frac{2^n}{3^n} \to 0.$ 无内点)

- 连续统的势 $\quad$ (见Cantor函数)

- 完全集(无孤立点的闭集)

$$(\forall x \in C \xrightarrow[x \in C_n]{C_n\text{的端点}\in C} x\text{是}C\text{的极限点})$$

- 第一刚集 $\quad$ (C是无处稠密集合, 即其闭包无内点, 第一刚集是可列个无处稠密集合的并)

	集合论	测度论	拓扑学
	势	测度	开集
小集合	可数集	零测集	第一纲集

- $A \subset \mathbb{R}$无处稠密集合 (A的闭包无内点).
- 第一纲集$= \bigcup\limits_{\text{可列}}$ 无处稠密集合.
- Baire纲定理: 完备度量空间是第二纲集.

p进制表示定理: $p = 2, 3, \cdots$.

- $\forall\, x \in (0,1)$, $\exists\,!\; a_n \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, 有无穷多项$a_n$非零,

$$\xRightarrow{\text{唯一表示}} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = 0.a_1 a_2 \cdots (p),$$

- 当且仅当x 是p进制下的有穷小数, 表示唯二:

$$x \xlongequal{x_n \neq 0} 0.a_1 a_2 \cdots a_n(p) = 0.a_1 \cdots a_{n-1}(a_n - 1)(p-1)(p-1)\cdots(p).$$

(唯二表示特点: 各项全为0或全为p-1, 仅有限项例外)

厘米尺子的制作

取1米长度的无刻度的尺子

- 将尺子$[0,1]$十等分, 若x位于第a_1+1个区间，则

$$x=0.a_1\cdots \quad (10)$$

- 再将第a_1+1个区间十等分, 若x位于第a_2+1个区间，则

$$x=0.a_1a_2\cdots \quad (10)$$

- 再将第a_2+1个区间十等分, 若x位于第a_3+1个区间，则

$$x=0.a_1a_2a_3\cdots \quad (10)$$

Cantor集的三进制表示

- $$C = \{x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \quad a_n = 0, 2\}$$

证: 取三进制唯一表示

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots (3)$$

Cantor集的构造过程$\xRightarrow{\text{被去掉点的特征}}$三进制表示包含1.

第一次去掉$a_1 = 1$的项,

端点$\frac{1}{3} = 0.02222\cdots(3) \in C$, 端点$\frac{2}{3} = 0.2(3) \in C$

第二次去掉$a_2 = 1$的项,

$\vdots$

Cantor函数

- Cantor函数$f : C \longrightarrow [0,1] \uparrow$ 满射

  $$f(0.(2c_1)(2c_2)\cdots(3)) = 0.c_1c_2\cdots(2), \qquad c_k = 0,1.$$

  即 $$f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\right) \xlongequal{x_n=0,2} \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}.$$

- 单调增加: $c_{n+1} = 0, \quad d_{n+1} = 1$

  $$0.(2c_1)\cdots(2c_n)(2c_{n+1})\cdots(3) < 0.(2c_1)\cdots(2c_n)(2d_{n+1})\cdots(3)$$

  $$\Longrightarrow 0.c_1\cdots c_nc_{n+1}\cdots(2) \leqslant 0.c_1\cdots c_nd_{n+1}\cdots(2).$$

Cantor函数的局部常值扩充

- 设(a,b)是Cantor三分集构造过程中去掉的区间. 则

$$\begin{aligned} a &= 0.(2c_1)\cdots(2c_{n-1})100\cdots(3) \\ b &= 0.(2c_1)\cdots(2c_{n-1})200\cdots(3) \end{aligned}$$

- $f(a) = 0.c_1\cdots c_{n-1}0111\cdots(2) = 0.c_1\cdots c_{n-1}1(2) = f(b)$

- 局部常值扩充

$$f|_{(a,b)} = f(a) = f(b)$$

- $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ $\uparrow$满射

- $f\in C[0,1]$ (f不具有跳跃点, 否则利用单调性f非满射)

Cantor函数图形

- $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$连续
- $f(0)=0,\quad f(1)=1$
- $f|_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}=\frac{1}{2}$.
- $f|_{[\frac{1}{9},\frac{2}{9}]}=\frac{1}{4},\qquad f|_{[\frac{7}{9},\frac{8}{9}]}=\frac{3}{4}$.

$$\vdots$$

Cantor函数性质

- Cantor函数$f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ↑满射, 连续.
- f将零测集映为正测集
$$f(C) = [0,1].$$
- f 在$(0,1) \setminus C$上局部为常数.
$$f'\big|_{(0,1)\setminus C} = 0, \qquad f' \xlongequal{a.e.} 0.$$
- 微积分基本定理失效: $\quad 0 = \int_0^1 f'(x)dx < f(x)\big|_0^1 = 1.$

由微积分基本定理看Cantor函数

$$L^1[a,b]/\sim \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} AC[a,b]/\mathbb{R}$$ （双射）

- Cantor函数$f \notin AC[0,1]$.

问题：Cantor 函数是否是Lipschitz函数？

Cantor集的性质

- Cantor集合C:

$$\mathring{C} = \emptyset, \qquad \partial C = C' = \overline{C} = C.$$

Cantor函数在Cantor集中的点不可导

- $\forall\, x \in C \Longrightarrow f'(x)$不存在.

$$C \ni x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \qquad 取 \quad C \ni x_n = \begin{cases} x + \frac{2}{3^n}, & \text{if } a_n = 0; \\ x - \frac{2}{3^n}, & \text{if } a_n = 2. \end{cases}$$

$$则 \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

(1) $a_n = 0$:

$$f(x_n) - f(x) = \frac{1}{2^n}, \qquad x_n - x = \frac{2}{3^n}.$$

(2) $a_n = 2$:

$$f(x_n) - f(x) = -\frac{1}{2^n}, \qquad x_n - x = -\frac{2}{3^n}.$$

综上, 两种情形下都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = +\infty.$$

- $K_0=[0,1]$, $\qquad K_{n-1} \xrightarrow[\text{去掉中间的同心开区间}]{\text{剩余每个区间长度为}\lambda_n} K_n.$
- λ_k满足

$$1>2\lambda_1>4\lambda_2>\cdots>2^n\lambda_n>2^{n+1}\lambda_{n+1}>\cdots$$

- 任给$\theta\in[0,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, 取λ_n满足

$$2^n\lambda_n=\frac{n\theta+1}{n+1}\downarrow, \qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=0.$$

- 推广的Cantor集

$$K:=\lim_{n\to\infty}K_n, \qquad m(K)=\lim_{n\to\infty}m(K_n)=\lim_{n\to\infty}2^n\lambda_n=\theta.$$

- K是连续统势，测度是$\theta\in[0,1)$, 第一纲集($\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0.$, 紧集$K$的闭包无内点)

推广的Cantor集的大小

	集合论	测度论	拓扑学
推广的Cantor集	大	可大可小	小

- 欧氏空间维数

$$\mathbb{R}^2\text{的维数} \xlongequal[\text{将标准立方体扩大3倍再分解}]{3E=E_1\sqcup\cdots\sqcup E_{3^2}} \frac{\log 3^2}{\log 3}.$$

- Cantor集的Hausdorff 维数

$$\text{Cantor集的维数} \xlongequal[\text{将标准Cantor集扩大3倍再分解}]{3C=C_1\sqcup C_2} \frac{\log 2}{\log 3}.$$

- Cantor 集合:
  - Cantor 集是一个矛盾统一体, 在某种意义下是很大的集合, 在某种意义下是小的集合.
  - 它是分数维集合, 在分形理论中起着重要作用.
  - Cantor 集是实分析的夜明珠, 照彻直观思维的死角.
  - 在人类对世界的认识中, 有理数集、Cantor集、推广的Cantor集、无理数集具有同等的重要性.
  - 有理数集和无理数集在人类直观的范围内. Cantor集和推广的Cantor集在人类直观的范围之外. 这也证实了数学是人类的眼睛.
- Cantor 函数:
  - Cantor函数是$[0,1]$区间单调增加的连续满函数.
  - 与直观情形不同, 该连续函数将零测集映照为正测集.
  - 与直观情形不同, 该单调满射的导函数几乎处处为零.

作业

P50第1, 2题

P38 第3, 4题(Stein)

实分析(H), 第5次课

任广斌(中国科大)

2024-3-11

本讲要点

- 开集， Borel集， Lebesgue可测集
- 连续函数， Lebesgue可测函数

- 开集$\xRightarrow[\text{代数和极限过程}]{\text{扩充}\sigma\text{代数}}$ *Borel*集 $\xRightarrow[+\text{零测集}]{\text{完备化}}$ *Lebesgue*可测集

开集, Borel集, Lebesgue可测集的关系

开集	Borel集	Lebesgue可测集
邻近程度	规则程度	规则程度
连续函数	可测函数	可测、可积函数
拓扑学	测度论 拓扑学和积分论的桥梁	积分论

$\mathbb{R}^n$中的开集

- $E \subset \mathbb{R}^n$.

$\mathring{E}$	∂E	E'	$\overline{E}$
内核	边界	极限集	闭包

- $\mathring{E} = E$中最大开子集
- $\overline{E} =$ 包含E的最小闭集

续

$$\text{开球}\qquad B(a,\delta)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-a|<\delta\}.$$

- $x\in\mathring{E} \Longleftrightarrow \exists\, B(x,\delta)\subset E.$
- $x\in E' \Longleftrightarrow \forall\, B(x,\delta)\setminus\{x\}$ 含有E中的点.
- $E\setminus E' =\!=\!=\!=$ E中孤立点的全体.
- $\overline{E}\setminus\mathring{E} =\!=\!=\!= \partial E.$

- 取余集的运算是集合中最重要的对合映照:

$$\begin{array}{ccc} 2^X & \longrightarrow & 2^X \\ E & \longmapsto & E^c \end{array}$$

- 开集、闭集在取余集的映照下对应:

开集的余集是闭集, 闭集的余集是开集.

- 在余集映照下对应:

$$\text{取核的运算} \xRightarrow{\text{余集映照}} \text{取闭包的运算}$$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\text{取余}"] \arrow[d, "\text{取核}"'] & E^c \arrow[d, "\text{取闭包}"] \\
\mathring{E} \arrow[r, "\text{取余}"'] & \overline{E^c}
\end{tikzcd}$$

$$(\mathring{E})^c = \overline{(E^c)}, \qquad \overline{E}^c = (E^c)^\circ.$$

F	G	σ	δ
闭集	开集	可列并 (大写Σ)	可列交

$$F_\sigma = \text{可列个闭集的并}$$

$$G_\delta = \text{可列个开集的交}$$

F_σ, G_δ的例子

有理数集	无理数集
F_σ：闭集推广(闭集极限)	G_δ：开集推广(开集极限)
$\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$	$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathbb{R}\setminus\{x_1,\cdots,x_n\})$
第一纲集	第二纲集
非G_δ	非F_σ

$\mathbb{R}^n$中Baire纲定理:

- 稠密开集的可列交是稠密的(稠密性在G_δ运算下保持):

$$\underbrace{\text{稠密性}}_{\text{大集合}} \xrightarrow[\text{任意并}]{G_\delta\text{运算}} \text{稠密性}$$

- 无内点闭集的可列并是无内点的(无内点在F_σ运算下保持):

$$\underbrace{\text{无内点}}_{\text{小集合}} \xrightarrow[\text{任意交}]{F_\sigma\text{运算}} \text{无内点}$$

- 在G_δ, F_σ层次:

  大集合可列交是大集合，小集合可列并是小集合

- 第一纲集 $=$ 闭包无内点的集合的可列并

- $\mathbb{R}^n$是第二纲集

$\mathbb{R}^n$不是无处稠密集合的可列并.

(无处稠密集=闭包的内部为空集)

下列集合是第二纲集:

- 完备度量空间
- 局部紧T_2空间

$\mathbb{R}^n$完备性等价刻画

- $\mathbb{R}^n$是完备空间:　Cauchy序列必收敛.
- Bolzano-Weierstrass定理:　任意有界集合存在收敛子列.
- Cantor 紧集套定理:　任意非空$\downarrow$紧集列, 其极限非空.
- Heine-Borel有限覆盖定理:　$\mathbb{R}^n$中的紧集=有界闭集.

$\mathbb{R}^n$上连续函数的等价刻画

- (A). 函数$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$连续　　(连续是逐点概念、局部概念)

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \quad f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\epsilon)$$

即　$B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0),\epsilon))$

即　$f|_{B(x_0,\delta)} \overset{\cdot}{\underset{\epsilon\text{容忍度}}{=\!=\!=\!=}}$ 常数$f(x_0)$

- (B). $\forall$ 开集$G \Longrightarrow f^{-1}(G)$开

$(A) \Longrightarrow (B)$: $\forall\, x_0 \in f^{-1}(G)$

$$\Longrightarrow \quad f(x_0) \in G\text{开}$$

$$\Longrightarrow \quad B(f(x_0),\epsilon) \subset G$$

$$\Longrightarrow \quad \exists B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0),\epsilon)) \subset f^{-1}(G)$$

$(B) \Longrightarrow (A)$: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0),\epsilon))\text{开} \Longrightarrow \exists B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0),\epsilon)).$$

- 拓扑空间(X,τ)

$$X \neq \emptyset, \quad \tau \subset 2^X, \quad \tau = \{X\text{中开集}\}$$

(1) $\phi, X \in \tau$

(2) $\forall\ G_\alpha \in \tau \quad (\alpha \in I) \Longrightarrow \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha \in \tau.$

(3) $\forall\ G_1, \dots, G_s \in \tau \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{s} G_k \in \tau.$

- 开集对任意并、有限交封闭.

- (X,τ)是拓扑空间, $E\subset X \Longrightarrow (E,\tau|_E)$是拓扑空间.

$$f: E \longrightarrow \mathbb{R}\text{连续} \Longleftrightarrow \text{开集的原像是开集}.$$

- 可测空间(X, Γ)

$$X \neq \phi, \quad \Gamma \subset 2^X, \quad \Gamma = \{X\text{中可测集}\}$$

(1) $\phi, X \in \Gamma$

(2) $A \in \Gamma \Longrightarrow A^c \in \Gamma.$

(3) $\forall\ A_k \in \Gamma \quad (k \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Gamma.$

- Γ称为σ代数.

Γ对可列并、可列交、差运算封闭(对极限封闭).

- 最大σ代数2^X, 最小σ代数$\{\phi, X\}$

- 由Σ生成的σ代数:

$$\sigma(\Sigma) \xlongequal{\Sigma\subset 2^X} \text{包含}\Sigma\text{的最小的}\sigma\text{代数} \xlongequal{\quad} \bigcap_{\sigma\text{代数}\Gamma\supset\Sigma} \Gamma$$

- Borel σ代数$\mathcal{B}$= 开集全体生成的σ代数.

Lebesgue 可测集

- $\exists!$测度空间 $(\mathbb{R}^n, \ \Gamma, \ m)$:

$$\begin{aligned} &\Gamma = \text{Lebesgue}\sigma\text{代数} = \text{Lebesgue可测集全体}, \\ &m = \text{Lebesgue测度}. \end{aligned}$$

  - $\Gamma \supset \mathbb{R}^n$中开集全体 (Borel集可测)
  - $\forall\ A \subset B \in \Gamma, \quad m(B) = 0 \Longrightarrow A \in \Gamma.$ (完备测度)
  - 所有闭矩体 $\in \Gamma$, 其测度 $=$ 其体积 (体积推广)
  - $m(A) = m(x + A), \quad \forall\ A \in \Gamma.$ (平移不变)

- Lebesgue σ代数$=\!=\!=$ $\big\langle$Borel σ代数 + 所有的零测集$\big\rangle$.

Borel集的势

- 开集$\xlongequal{\exists A\subset\mathbb{Q}^n}\bigcup_{\text{端点全体}=A}$端点的坐标全是有理数的开矩体

- 开集全体的势=$2^{\aleph_0}=c$

- Borel集全体是下列集合的可列并和可列交：

$$\underbrace{\text{有理端点开矩体及其余集}}_{\text{其势为}c^{\aleph_0}}\times\underbrace{\text{并交叉组成的所有有限序列}}_{\text{其势为}\aleph_0}$$

注：右端构成σ代数，包含所有开集。运算规定从左至右。

- Borel集全体的势为$(c^{\aleph_0}\times\aleph_0)^{\aleph_0}=c$.

- Lebesgue可测集的势为2^c

$$2^{\text{Cantor集}} \subset \text{Lebesgue可测集全体} \subset 2^{\mathbb{R}}$$

- Lebesgue不可测集合的势为2^c.

$$\left\{(K+2) \sqcup A : A \in 2^{C}\right\}\text{的势} \xlongequal[\text{C是Cantor集}]{\text{K是不可测集}} 2^c.$$

函数连续点的结构

- 任意函数$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$的连续点集是$G_\delta$集.

证明: f的连续点集
$$
\begin{aligned}
&= \{x\in\mathbb{R}:\omega_f(x)=0\}\\
&= \bigcap_{k=1}^{\infty}\underbrace{\{x\in\mathbb{R}:\omega_f(x)<1/k\}}_{\text{开集}}.
\end{aligned}
$$

注记: f 在x点处振幅(上半连续):

$$\omega_f(x)=\lim_{\delta\searrow 0}\sup_{z,w\in B(x,\delta)}|f(z)-f(w)|.$$

例: $f=\chi_{[0,+\infty)}\Longrightarrow\omega_f(x)=\chi_{\{0\}}$

- 任意函数$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$的不连续点集是$F_\sigma$集.

连续函数可微点的结构

- 任意连续函数$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$的可微点集是$F_{\sigma\delta}$, 不可微点集是$G_{\delta\sigma}$

$$D^+f(a) := \overline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad D^-f(a) := \underline{\lim_{x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

$$A_r := \{a : D^-f(a) \leqslant r\} \qquad B_R := \{a : R \leqslant D^+f(a)\}.$$

$$\text{不可微点集} = \bigcup_{\substack{r,R\in\mathbb{Q}\\ r<R}}(A_r\cap B_R)\cup\bigcap_{R\in\mathbb{Q}}B_R\cup\bigcap_{r\in\mathbb{Q}}A_r.$$

连续函数可微点的结构(续)

- A_r, B_R是G_δ集.

$$A_r = \bigcap_{n,k=1}^{\infty} \underbrace{\left\{a : \exists x \in (a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}) \setminus \{a\}, 使得 \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < r+\frac{1}{k}\right\}}_{开集(因为f连续)}$$

注记: $F(a) := \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $\forall a \in (x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n})\setminus\{x\}$, x固定.

有理数集不是G_δ集

- 有理数集不是G_δ集.　　反证法: 假设

$$\mathbb{Q}=\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k, \qquad G_k \text{开集}$$

$$\Longrightarrow G_k \text{稠密开集} \qquad (G_k \supset \mathbb{Q}\text{稠密})$$

$$\Longrightarrow G_k^c \text{闭集, 无内点}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{R}=\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k^c \bigsqcup \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \{x\}=\text{第一纲集}, \qquad \text{矛盾}$$

- 无理数集不是F_σ集

下半连续函数的有界性

- 下半连续函数$f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$在某个非空开集“有上界”.

证明: 反证法. 否则f在任意开集上都没有上界:

$$G_\lambda\cap O \neq \emptyset, \quad \forall \text{ 开集} O \Longrightarrow G_\lambda \text{稠密}$$

$$\text{其中} \quad G_\lambda := \{x\in\mathbb{R}^n:\ f(x)>\lambda\}\text{是开集}$$

$$\Longrightarrow \quad \emptyset=\bigcap_{\lambda\in\mathbb{Z}} G_\lambda \overset{Baire}{=\!=\!=} \text{稠密}. \quad \text{矛盾}.$$

特征函数性质

A	可测集	开集	闭集
χ_A	可测函数	下半连续	上半连续

总结

- 开集: 刻画邻近程度, 定义连续函数
- Borel集: 典型例子$G_\delta, F_\sigma, G_{\delta\sigma}, F_{\sigma\delta}$.

  Borel集是拓扑学和积分学的桥梁.
- Lebesgue集: 刻画规则程度.

函数的Lebesgue可测性是Lebesgue可积性的必要条件.

作业

P25 第14题

P43 第2题

P55 第19, 30题

第一章集合论结束

实分析(H), 第6次课

任广斌(中国科大)

2024-3-13

本讲内容

- Lebesgue测度
- 抽象测度
- Borel集是Lebesgue可测集.

实分析和数学分析的血缘关系：

可测集	可测函数	收敛可测函数列
开集	连续函数	一致收敛函数列
测度正则性	Lusin定理	Egoroff定理

Ch2 内容

- Lebesgue测度（Ch2）

  - 开矩体体积$\xRightarrow{+,\cdot,\lim}$Lebesgue测度

  - $\tau(\mathbb{R}^n) \xRightarrow{\text{可列并交差}} \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \xRightarrow{\text{添加零测集完备化}} \mathscr{L}(\mathbb{R}^n).$

  - Lebesgue σ代数$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), m)$

- Lebesgue可测函数（Ch3）
    - $(\chi_A, +, \cdot, \lim)$

- 用可列个开矩体覆盖给定集合$E \subset \mathbb{R}^n$

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \qquad I_k = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

- 可列个开矩体的体积近似代替E的外测度：

$$m^*(E) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|, \qquad |I_k| = I_k\text{的体积}.$$

- 该粗糙值给出的最小可能,就是精确值

$$m^*(E) = \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \Big\}.$$

注记: 取可列覆盖原因

- 取有限开区间覆盖不合适.

否则, 覆盖$(a,b)\cap\mathbb{Q}$的有限个开区间长度之和$\geqslant b-a$; 与$m((a,b)\cap\mathbb{Q})=0$矛盾.

注记: 覆盖$(a,b)\cap\mathbb{Q}=:\{r_1,r_2,\cdots\}$的可列开覆盖

$$(a,b)\cap\mathbb{Q}\quad\subset\quad\bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n-\frac{\epsilon}{2^n},r_n+\frac{\epsilon}{2^n})$$

- 可数覆盖存在: Linderlöf 可数覆盖定理.

测度由极限产生. 极限精髓:从规则到不规则

舍得之法:　　舍(给定精度)得(精确化)

	粗糙	精确	
给定ϵ	$\|A-B\|<\epsilon$	$A=B$	$\epsilon\to 0^+$
给定ϵ	$\|f(x)-f(x_0)\|<\epsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$	$\epsilon\to 0^+$
给定h	$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$f'(x_0)$	$h\to 0^+$
给定π	$\sum\limits_{i=0}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$	$\int_a^b f(x)dx$	$\|\pi\|\to 0$
粗糙值	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|I_k\|$	$m^*(A)=\inf\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|I_k\|$	inf

- A是Lebesgue可测集$\overset{E\subset\mathbb{R}^n}{\underset{A\subset\mathbb{R}^n}{\Longleftrightarrow}}$ A将任意集合E 很好地一剖为二:

$$E=(E\cap A)\bigsqcup(E\cap A^c)$$

$$\boxed{m^*(E)\xlongequal{\forall\ E}m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A^c)}$$

(Caratheodory条件)

Caratheodory条件的注释

- 假设$A \subset I$, I是有界开矩体, $A^c = I \setminus A$.

$$A\text{的内测度} := |I| - A^c\text{的外测度}$$

(取余集是集合论中最重要的对合变换: 内外，开闭，有界无界)

- 在Caratheodory条件中, 取$E = I$, 则

$$\underbrace{|I| - m^*(A^c)}_{\text{内测度}} = m^*(E) - m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap A) = \underbrace{m^*(A)}_{\text{外测度}}$$

- Caratheodory条件

$$\|$$

加强版本的“内测度=外测度”

Lebesgue测度

- 若A是Lebesgue可测集, 则

$$A\text{的Lebesgue测度} = m(A) := m^*(A).$$

- $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), m)$是完备测度空间.

评注

数列极限可能不存在	集合测度可能不存在
上极限、下极限	外测度、内测度
	“外测度=内测度”的加强版本: Caratheodory条件

- $m(a,b) \xlongequal{\quad} |(a,b)|$

$$\text{证明:}\quad m(a,b) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| : (a,b)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right\}$$
$$\leqslant |(a,b)| \qquad (\text{取}I_1=(a,b),\text{其它为空集})$$

$\forall\epsilon>0,\quad \exists\{I_k\}:$

$$(a,b)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k,\qquad m(a,b)+\epsilon\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\geqslant|(a,b)|.$$

(两个相交的开区间可粘接为一个大的开区间)

测度的抽象理论

- 外测度:　$X \neq \emptyset$　(例如$X = \mathbb{R}$)

$$\mu^* : 2^X \longrightarrow [0, +\infty] \quad \text{满足}$$

  - $\mu^*(\emptyset) = 0.$
  - $A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$
  - $\mu^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k). \qquad \forall\ A_k \subset X$

测度空间(X, Σ, μ)

- X是非空集合.
- $\Sigma \subset 2^X$ 是σ-代数.
- $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$是测度：
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k), \qquad \forall\, A_k \in \Sigma$

- 设μ^*是X上外测度,

$$\Gamma := \left\{A \subset X : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \forall\, E \subset X\right\}$$

则$(X, \Gamma, \mu^*|_\Gamma)$是测度空间.

注记:

- 仅需验证不等式“$1 \geqslant 2$”：

$$A \in \Gamma \Longleftrightarrow \qquad \mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c),$$

$$\forall\, E \subset X, \quad \mu^*(E) < \infty.$$

Caratheodory定理的证明

(1) $A \in \Gamma \xRightarrow{A和A^c地位相同} A^c \in \Gamma$

(2) $A, B \in \Gamma \Longrightarrow A \cup B \in \Gamma$

$$\mu^*(E) \xlongequal[A\in\Gamma]{\forall\ E\subset X} \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c)$$

$$右端第一项 \xlongequal[B\in\Gamma]{} \mu^*(E\cap A\cap B) + \mu^*(E\cap A\cap B^c)$$

$$右端第二项 \xlongequal[B\in\Gamma]{} \mu^*(E\cap A^c\cap B) + \mu^*(E\cap A^c\cap B^c)$$

$$A\cup B = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$$

$$\Longrightarrow \mu^*(E) \geqslant \mu^*(E\cap(A\cup B)) + \mu^*(E\cap(A\cup B)^c)$$

定理证明(续)

(3) $\forall\ A_k \in \Gamma$互不相交 $\Longrightarrow \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_K \in \Gamma$, 而且具有$\sigma$可加性:

$$
\begin{aligned}
\mu^*(E) &\xlongequal[A_1\in\Gamma]{\forall\ E\subset X} \mu^*(E\cap A_1)+\mu^*(E\cap A_1^c) \\
&\xlongequal[A_2\in\Gamma]{} \mu^*(E\cap A_1)+\mu^*(E\cap A_2)+\mu^*(E\cap (A_1\cup A_2)^c) \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{n}\mu^*(E\cap A_k)+\mu^*(E\cap (\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k)^c) \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n}\mu^*(E\cap A_k)+\mu^*(E\cap (\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c)
\end{aligned}
$$

定理证明(续2)

$$
\begin{aligned}
\xRightarrow{n\to\infty} \mu^*(E) &\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap (\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c) \\
&\geqslant \mu^*(E \cap \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k) + \mu^*(E \cap (\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c) \\
&\geqslant \mu^*(E)
\end{aligned}
$$

$$
\xRightarrow{n\to\infty} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Gamma, \qquad \mu^*(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k) \xlongequal[A_k \in \Gamma]{\text{取} E=\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)
$$

定理证明(续3)

(4) $\forall\ A_k \in \Gamma \Longrightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \Gamma$, 而且具有$\sigma$可加性:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Big\{ A_k \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}) \Big\} \in \Gamma$$

$$(\quad E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c \quad)$$

Caratheodory 定理(Hausdorff测度的入门口)

- 设$X \neq \emptyset$,　$\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{F} \subset 2^X$.

$$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty], \qquad \mu(\emptyset) = 0.$$

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \in \mathcal{F} \Big\}.$$

$$\Gamma = \Big\{ A \subset X : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \forall\, E \subset X \Big\}$$

$\Longrightarrow (X, \Gamma, \mu^*|_\Gamma)$是完备的测度空间.

证明:

(1) $\mu^*(\emptyset) \xlongequal{\text{取} I_k=\emptyset} 0.$

(2) $A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) = \inf_{T_A} \overset{T_A \supset T_B}{\leqslant} \inf_{T_B} = \mu^*(B)$

注记: $T_A := A$的所有可列开矩体覆盖全体

(3) 完备性：$\mu^*(A) = 0 \Longrightarrow A \in \Gamma$

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \overset{\forall E \subset X}{\leqslant} \mu^*(A) + \mu^*(E) = \mu^*(E).$$

(3) σ次可加性：

$$\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k). \qquad \text{可设}\mu^*(A_k) < +\infty.$$

$$A_k \overset{\exists\ I_{kj}\in\mathcal{F}}{\subset} \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{kj}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_{k,j}) \overset{\forall\ \epsilon>0}{\leqslant} \mu^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k,j=1}^{\infty} I_{k,j}$$

$$\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leqslant \sum_{k,j=1}^{\infty} \mu(I_{k,j}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \epsilon.$$

由边长一致有界的开矩体构造的外测度

- 外测度m_δ^*:

$$m_\delta^*(E) \xlongequal[\forall\ \delta>0]{\forall\ E\subset\mathbb{R}^n} \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| : E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \text{开矩体} I_k \text{边长} < \delta\right\}.$$

- 开矩体I_k可以用闭矩体J_k代替.

外测度的等价刻画

- 外测度的等价刻画：

$$m^*(E) \xlongequal[\forall\ \delta>0]{\forall\ E\subset\mathbb{R}^n} m_\delta^*(E).$$

证明: 只要证明$m^*(E) \geqslant m_\delta^*(E)$　　(可设$m^*(E) < \infty$)

$$E \overset{\exists\ J_k}{\subset} \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |J_k| \overset{\forall\ \epsilon>0}{\leqslant} m^*(E) + \epsilon$$

$$J_k \xlongequal[J_{k,j}\text{边长}<\delta]{\text{剖分}} \mathop{\overset{\circ}{\bigsqcup}}_{j\text{可数}} J_{k,j}. \qquad (\text{这里}\overset{\circ}{\bigsqcup}\text{是指并, 但内部不相交})$$

$$m_\delta^*(E) \leqslant \sum_{k,j} |J_{k,j}| = \sum_k |J_k| \leqslant m^*(E) + \epsilon.$$

Lebesgue测度是距离外测度

- 距离外测度:

外测度对于充分分离的集合具有可加性.

$$\operatorname{dist}(A,B)>0 \xlongequal{\forall\ A,B\subset\mathbb{R}^n} m^*(A\sqcup B)=m^*(A)+m^*(B).$$

证明: 只要证明

$$m^*(A \sqcup B) \geqslant m^*(A) + m^*(B) \qquad (\text{可设} m^*(A \sqcup B) < \infty).$$

$$A \sqcup B \quad \underset{\delta = \text{dist}(A,B)}{\overset{\forall \epsilon, \exists\ I_k \text{边长} < \delta/4}{\subset}} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leqslant m^*(A \sqcup B) + \epsilon$$

$$\{I_k\} = \{I_k'\} \sqcup \{I_k''\}, \quad A \subset \cup I_k', \quad B \subset \cup I_k'' \quad (\text{可设} I_k \text{与} A \sqcup B \text{相交}).$$

$$m^*(A) + m^*(B) \leqslant \sum |I_k'| + \sum |I_k''| = \sum |I_k| \leqslant m^*(A \sqcup B) + \epsilon.$$

Lindelöf可数覆盖定理

- 集合$E \subset \mathbb{R}^n$的任意开覆盖, 必存在可列子覆盖.

证明: 假设E有开覆盖

$$E \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha.$$

$$E \subset \bigcup_{x \in E} \{x\} \subset \bigcup_{\text{可列}} \underbrace{\text{有理端点的小开矩体}}_{\subset G_\alpha} \subset \bigcup_{\text{可列}} G_\alpha$$

$\Longrightarrow$ 构成可列子覆盖.

Borel集是Lebesgue可测集

Theorem 1

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{L}(\mathbb{R}^n).$$

证明：(1) 有界开矩体I是Lebesgue可测集:

设I_k是I的同心相似收缩

$$\mathrm{dist}(I_k, I^c) = \frac{1}{k} \Longrightarrow \mathrm{dist}(E \cap I_k, E \cap I^c) \overset{\forall E \subset \mathbb{R}^n}{\geq} \frac{1}{k}.$$

$$\xRightarrow{\text{距离外测度}} m^*(E \cap I_k) + m^*(E \cap I^c) = m^*((E \cap I_k) \sqcup (E \cap I^c)) \leqslant m^*(E).$$

上式取极限(利用下列事实)

$$0 \leqslant m^*(E \cap I) - m^*(E \cap I_k) \leqslant m^*(E \cap (I \setminus I_k)) \leqslant m^*(I \setminus I_k) = O(\frac{1}{k}).$$

(2) 开集和Borel集是Lebesgue可测集:

$$\text{开集} \xlongequal{Lindelof} \bigcup_{\text{可列}} \text{有界开矩体},$$

$$\text{Borel}\sigma\text{代数} \subset \text{Lebesgue}\sigma\text{代数}$$

例题

- (X,Γ,μ)是概率测度空间, $A_n\in\Gamma$, $\mu(A_n)=1$. 则$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=1$

作业

P. 94 第1, 2, 7, 8题

实分析(H), 第7次课

任广斌(中国科大)

2023-3-25

本节主要内容

- 测度的性质
  - σ可加性的极限形式和积分形式
  - 正则性
  - 完备性

$$\text{具体} \quad \Longrightarrow \quad \text{抽象}$$

$$\text{计算} \quad \Longrightarrow \quad \text{结构}$$

测度空间(X, Γ, μ):　　X是非空集合,　　$\Gamma \subset 2^X$ 是σ-代数.

- $\mu : \Gamma \longrightarrow [0, +\infty]$是测度:
    - $\mu(\emptyset) = 0$
    - $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k), \qquad \forall\ A_k \in \Gamma$

测度特点

- 测度值域$[0,+\infty]$代数性质　(对减法不封闭)

$$\Longrightarrow \text{影响到测度的分析性质.}$$

- 测度论中的陷阱:

$(+\infty)-(+\infty)$ 无意义, 可以取$[-\infty,+\infty]$中的任意值.

(做测度减法的运算需要避开的陷阱)

- (X, Γ, μ)是测度空间，$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \Gamma$.

(1) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \xRightarrow{\text{从下连续}} \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(\lim\limits_{k\to\infty} A_k)$.

(2) $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \xRightarrow[\text{从上连续}]{\mu(A_1)<\infty} \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(\lim\limits_{k\to\infty} A_k)$.

(条件为了避开陷阱，$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [k, +\infty) = \emptyset$.)

(3) $\mu(\varliminf\limits_{n\to\infty} A_k) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \mu(A_k)$. 测度下半连续

(4) $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) < +\infty$

$$\Longrightarrow \mu(\underline{\lim}_{k\to\infty} A_k) \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \mu(A_k) \leqslant \overline{\lim}_{k\to\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu(\overline{\lim}_{k\to\infty} A_k).$$

测度σ可加性的极限形式

- 概率测度连续: 保极限.

测度的积分解读(初步体验交换次序五个等价定理)

集合论		函数论
A	$=$	χ_A
$\mu(A)$	$=$	$\int_X \chi_A(x)d\mu(x)$
测度		积分

(1) 测度的从下连续性是单调收敛定理的雏形:

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \chi_{A_n}(x)d\mu(x) \xlongequal{\chi_{A_n}\uparrow} \int_X \lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)d\mu(x).$$

(2) 测度的从上连续性是Lebesgue控制收敛定理的雏形:

$$|\chi_{A_n}| \leqslant |\chi_{A_1}| \in L^1(X)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_X \chi_{A_n}(x)d\mu(x) = \int_X \lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)d\mu(x).$$

测度性质的积分解读续

(3) 测度下半连续是Fatou引理的雏形:

$$\int_X \underline{\lim}_{n\to\infty} \chi_{A_n} d\mu(x) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X \chi_{A_n} d\mu(x).$$

(4) (X,Γ,μ), $(Y,\sum,\nu)$是σ有限测度空间, 则对$\forall\, E\in\Gamma, F\in\sum$

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y}\chi_{E\times F}(x,y)d\mu(x)d\nu(y) &= \int_X\left(\int_Y \chi_{E\times F}(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)\\ &= \int_Y\left(\int_X \chi_{E\times F}(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)\end{aligned}$$

测度性质的证明

(1) $$\lim_{n\to\infty} A_k \xlongequal{A_k\uparrow} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \xlongequal{A_0:=\emptyset} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k-1}).$$

$$\xRightarrow[\forall\ k]{\text{可设}\mu(A_k)<\infty} \mu(\lim_{k\to\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

(2) $$\mu(\lim_{k\to\infty} A_k^c) \xlongequal{A_k^c:=A_1\setminus A_k\uparrow} \mu(A_1) - \mu(\lim_{k\to\infty} A_k)$$

$$\|$$

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k^c) = \lim_{k\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_k)) = \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

(3) $$\begin{aligned} \mu(\varliminf_{n\to\infty} A_n) &= \varliminf_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) \qquad (\varliminf_{n\to\infty} A_n = \lim \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \uparrow) \\ &= \varliminf_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) \\ &\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

Borel-Cantelli引理: 集合极限论中最重要引理

- 设(X, Γ, μ)是测度空间, $A_n \in \Gamma$ $(\forall\ n)$. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0$$

证明:

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) &\geqslant \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \downarrow)(\geqslant \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)) \\ &= \mu(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \quad (\text{由假设} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{测度有限}) \\ &= \mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) \end{aligned}$$

注记: 对于外测度类似结果成立.

例题1

- 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n} < +\infty, \quad \lambda_n > 0, \quad a_n \in \mathbb{R}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{|x-a_n|} < \infty, \quad a.e. \quad x \in \mathbb{R}.$$

证明: $A_n = B(a_n, \sqrt{\lambda_n}), \quad$ 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|A_n| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\sqrt{\lambda_n} < +\infty.$

$$\mathbb{R} \xlongequal{Borel-Cantelli} \underbrace{\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n}_{\text{零测集}} \bigsqcup \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c$$

$$x \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c \xRightarrow{\exists N(x)} x \in A_n^c \qquad \text{即} |x-a_n| \geqslant \sqrt{\lambda_n} \quad (\forall\ n > N(x))$$

$$\Longrightarrow \frac{\lambda_n}{|x-a_n|} \leqslant \sqrt{\lambda_n} \qquad (\forall\ n > N(x))$$

例题2

- 设$\alpha > 2$. 记$p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$.

$$E = \{x \in [0,1] : \exists \text{ 无穷个有理数} \frac{p}{q} \in [0,1] \text{满足} |x - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^\alpha}\}.$$

证明: $m(E) = 0$.

证明: 固定$p, q \in \mathbb{N}$, 记$A_{p,q} = \{x \in [0,1] : |x - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^\alpha}\}$.

$$A_q := \bigcup_{p=1}^{q} A_{p,q}, \qquad m(A_{p,q}) \leqslant \frac{2}{q^\alpha}$$

$$\Longrightarrow \qquad E \subset A = \varlimsup_{q\to\infty} A_q, \qquad \sum_{q=1}^{\infty} m(A_q) < \infty$$

$$\xrightarrow{\text{Borel–Cantelli}} \qquad m(A) = 0$$

- Lebesgue测度是正则:

$$m(A) \xlongequal[\text{收缩}]{A\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)} \inf_{A\subset G\text{开集}} m(G)$$

$$\xlongequal[\text{膨胀}]{\text{相当于内测度}} \sup_{K\subset A\text{紧集}} m(K)$$

- Littlewood 三原理之一: 可测集差不多是开集.

证明

$$m(A) \xlongequal{A\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)} \inf\left\{m(G) : A \subset G\text{开集}\right\}$$

(1a) $m(A) = \infty$: 取$G = \mathbb{R}^n$.

(1b) $m(A) < \infty$: $\forall\epsilon > 0$, $\exists$ 开矩体I_k:

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(A) + \epsilon.$$

$$\text{取}G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \Longrightarrow m(A) \leqslant m(G) \leqslant m(A) + \epsilon.$$

$$m(A) = \sup\left\{m(K) : \text{紧集}K \subset A\right\}.$$

(2a) A有界:

取以原点为中心的有界开矩体$I \supset A$, 关于I取余集.

$$\xrightarrow[\forall\ \epsilon>0]{(1b)} \quad A^c \subset G_\epsilon \cap I = G_\epsilon \subset I, \quad m(G_\epsilon \setminus A^c) < \epsilon.$$

$$\xrightarrow{\text{取}K=G_\epsilon^c\subset A} \quad m(A \setminus K) = m(G_\epsilon \setminus A^c) = m(A \cap G_\epsilon) < \epsilon.$$

续3

紧集	有界可测集	有界可测集	开集
$K = G^c$	A	A^c	$G = K^c$

$$A \subset I, \qquad A^c = I \setminus A.$$

$$K \subset A \xrightarrow{\text{取余对合}} G \supset A^c$$

(2b) A无界:

$$m(A)=\lim_{k\to\infty} m(A_k),\quad (A_k:=A\cap\overline{B(0,k)}\uparrow A).$$

(2b-1) $m(A)<\infty$:

$$\xrightarrow[\exists\text{紧集}K\subset A_{k_0}]{\forall\epsilon>0} m(K)\leqslant m(A)\leqslant m(A_{k_0})+\frac{\epsilon}{2}\leqslant m(K)+\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}.$$

(2b-2) $m(A)=\infty$:

$\forall M>0$, 取紧集$K\subset A_{k_0}$:

$$2M<m(A_{k_0})<m(K)+M\Longrightarrow m(K)>M.$$

技术性工具

集合	有界	无界	内，外
测度	有限	无限	inf，sup

$$m(A) = \lim_{k\to\infty} m(A_k), \qquad A_k = A \cap B(0,k)\text{有界}.$$

完备化定理

- Lebesgue可测集是Borel集的完备化:

$$A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \xRightarrow{\exists B_1, B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)} B_1 \subset A \subset B_2, \quad m(B_2 \setminus B_1) = 0.$$

- 等测核和等测包

B_1	B_2
F_σ （弱化的紧集）	G_δ （弱化的开集）
等测核	等测包

Littlewood三原理之一:

开集	小测度集
强	弱
G_δ 集	零测集
弱	强

- Lebesgue 可测集刻画:

Lebesgue可测集 $=$ Borel集 $\pm$ 零测集.

Lebesgue可测集 $= F_\sigma +$ 零测集 $= G_\delta -$ 零测集.

Lebesgue可测=开集+可列交-零测集=闭集+可列并+零测集.

Lebesgue可测集 $\xlongequal{\text{正则性}}$ 紧集 $+$ 小测度集.

Lebesgue可测集 $\xlongequal{\text{正则性}}$ 开集 $-$ 小测度集.

Lebesgue可测集两层次

- Lebesgue可测集两层次:

  (1) Caratheodory条件.

  (2) Borel集$\pm$零测集.

完备化定理的证明

$$A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \xRightarrow{\exists B_1, B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)} B_1 \subset A \subset B_2, \quad m(B_2 \setminus B_1) = 0.$$

(1) $A_k = A \cap B(0, k).$ (有界化)

(2) $K_{k,j} \subset A_k \subset G_{kj}, \qquad m(G_{k,j} \setminus K_{k,j}) < \frac{1}{2^{k+j}}.$ ($\frac{\epsilon}{2^k}$技巧)

(3) $\bigcup_k K_{k,j} \subset A \subset \bigcup_k G_{kj}, \quad \forall j$

(4) $B_1 := \bigcup_j \bigcup_k K_{k,j} \subset A \subset \bigcap_j \bigcup_k G_{kj} =: B_2.$ (收缩、膨胀)

(5) $B_2 \setminus B_1 \subset \bigcup_k G_{k,j} \setminus B_1 \subset \bigcup_k (G_{k,j} \setminus K_{k,j}) \Longrightarrow m(B_2 \setminus B_1) \leqslant \frac{1}{2^j} \to 0.$

注记

ϵ – room的精细化： $\frac{\epsilon}{2^k}$技巧:

- 涉及一次逼近:

$$\epsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k}$$

- 涉及二次逼近:

$$A \Longleftarrow\!\!= \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \Longleftarrow\!\!= \{G_{k,j}, K_{k,j}\}_{k,j\in\mathbb{N}}.$$

$$\epsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+j}}$$

测度空间完备化

- 设(X,Γ,μ)是测度空间, 则其完备化$(X,\overline{\Gamma},\overline{\mu})$是完备测度空间, 其中

$$
\begin{aligned}
\overline{\Gamma} &:= \left\{A\cup Z:\ A\in\Gamma,\ \ Z\in\mathscr{N}\right\}\\
\mathscr{N} &= \left\{Z\subset X:\ \exists\, N\in\Gamma,\ \ Z\subset N,\ \ \mu(N)=0\right\}\\
\overline{\mu}(A\cup Z) &:= \mu(A).
\end{aligned}
$$

Lebesgue测度完备

- Lebesgue测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), m)$

  $$\|$$

  Borel测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), m)$的完备化.

  证明: 完备化定理$\Longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)}$.

  Lebesgue测度测度是体积推广, 是完备化测度

  $\Longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)} \supset \overline{\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)}$.

例题1

- $\forall$不可测集合$K_0 \subset \mathbb{R}$, 存在$K_1 \subset K_0$, K_1中的Lebesgue可测集必为零测集。
  - 不妨设$m^*(K_0) < \infty$.
  - 不妨设$\lambda > 0$:

$$\lambda := \sup_{E \in \Gamma} m(E), \qquad \Gamma := \left\{ E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : E \subset K_0 \right\}$$

  - 上确界可达到:

$$\text{取} \lim_{k\to\infty} m(E_k) \xlongequal{E_k \in \Gamma} \lambda$$

$$\Longrightarrow \qquad \lambda \leqslant m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \leqslant \sup_{E\in\Gamma} m(E) = \lambda$$

  - $K_0 = K_1 \sqcup \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad K_1$满足要求.

例题2

- $E \notin \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \xLeftrightarrow{\exists \epsilon_0 > 0} m^*(E \setminus A) \geqslant \epsilon_0, \qquad \forall\, A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n).$
  - 必要性: 反证法：假设存在$A_k \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$

$$m^*(E \setminus A_k) \leqslant \frac{1}{k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \sqcup Z \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n).$$

这是因为$m(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leqslant m^*(E \setminus A_k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

  - 充分性: 反证法：假设$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

$$\xRightarrow{\text{测度正则性}} \forall\, \epsilon > 0, \exists \text{ 闭} F \subset E: \quad m(E \setminus F) < \epsilon.$$

例题3

- $E \notin \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \xLeftrightarrow{\exists \epsilon_0 > 0} m^*(G \setminus E) \geqslant \epsilon_0, \qquad \forall\, E \subset G \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n).$
  - 不可测集无法用可测集合收缩或膨胀逼近.
- $E \notin \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \xRightarrow{\exists \epsilon_0 > 0} m(A \cap B) \geqslant \epsilon_0$, $\forall\, A, B$是包含E的可测集.
  - 证明: $m(A \cap B) \geqslant m^*((A \cap B) \setminus E) \geqslant \epsilon_0$.
  - 不可测集与其余集无法用可测集厘清, 它们无休止地纠缠在一起.

总结

- 测度σ可加性的极限表述

- Lebesgue测度的正则性: (可测集和开集、紧集的关系)

  Lebesgue测度与Lebesgue可测集相伴而生, Lebesgue测度的正则性由可测集和开集、紧集的关系体现.

  Littlewood 三原理之一

- Lebesgue测度的完备性: (可测集=Borel集+零测集)

Lebesgue 可测集

- $\exists!$测度空间 $(\mathbb{R}^n, \Gamma, m)$:

$$\Gamma = \text{Lebesgue}\sigma\text{代数} = \text{Lebesgue可测集全体},$$
$$m = \text{Lebesgue测度}.$$

  - $\Gamma \supset \mathbb{R}^n$中开集全体 (Borel集可测)
  - $\forall\, A \subset B \in \Gamma, \quad m(B) = 0 \Longrightarrow A \in \Gamma.$ (完备测度)
  - 所有闭矩体 $\in \Gamma$, 其测度 $=$ 其体积 (体积推广)
  - $m(A) = m(x + A), \quad \forall\, A \in \Gamma.$ (平移不变)

- Lebesgue σ代数$=\!=\!=$ $\langle$Borel σ代数 + 所有的零测集$\rangle$.

作业

P78 第1, 2, 5题

P94 第9 题

实分析(H), 第8次课

任广斌(中国科大)

2023-3-28

本节主要内容

- Littlewood 三原理之一:　可测集与开集、闭集的关系

- 外测度的性质

- 正测集的性质:　测度的密度

  Steinhaus 定理　(联系测度论和拓扑学)

下列等价:

- A是$\mathbb{R}^n$中Lebesgue可测集
- $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \mathbb{R}^n$中闭集F和开集G :

$$F \subset A \subset G, \qquad m^*(A \setminus F) < \epsilon, \qquad m^*(G \setminus A) < \epsilon.$$

注记

- Littlewood 三原理之一:

$$\text{可测集=闭集+小测度集=开集-小测度集.}$$

$$\text{有界可测集=紧集+小测度集=开集-小测度集.}$$

- 与测度正则性不同:

$$A = \mathbb{R}^n, \quad F\text{不能取紧集}$$

$$m(F) \gg 1, \qquad m^*(A \setminus F) = +\infty.$$

Littlewood三原理之一:

开集	+	小测度集	G_δ 集	+	零测集
强		弱	弱		强

测度论需要处理 inf, 这是极限的另一面目

- 若用闭矩体覆盖再收缩定义外测度, 则

  等测包可取为F_σ集.

- 记$\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \cdots\}$

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \frac{\epsilon}{2^n}, r_n + \frac{\epsilon}{2^n}), \quad \overline{G} \supset \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

$$m(G) \leqslant 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = 2\epsilon, \qquad m(\overline{G}) = +\infty.$$

等价刻画的证明

- $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \xRightarrow[F\subset A\subset G]{\forall\epsilon>0,\exists \text{ 闭}F\text{开}G} m^*(A \setminus F) < \epsilon, \qquad m^*(G \setminus A) < \epsilon.$

$$
\begin{aligned}
A_k &:= A \cap B(0,k) \uparrow A, \\
A_k &\subset G_k, \\
m(G_k \setminus A_k) &< \frac{\epsilon}{2^k} \\
\text{取}G &:= \bigcup_k G_k
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow G \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k \setminus A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k \setminus A_k) \Longrightarrow m^*(G \setminus A) < \epsilon.$$

利用取余集将外收缩变为内膨胀:

对于A^c, 存在开集$\widetilde{G}$:

$$A^c \subset \widetilde{G}, \quad m^*(\widetilde{G} \setminus A^c) < \epsilon.$$

取$F := \widetilde{G}^c$, 则

$$A \setminus F = A \cap \widetilde{G} = \widetilde{G} \setminus A^c.$$

- $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \xLeftarrow[F \subset A \subset G]{\forall \epsilon>0, \exists \text{ 闭} F \text{开} G} m^*(A \setminus F) < \epsilon, \qquad m^*(G \setminus A) < \epsilon.$

(1) $K_k \subset A \subset G_k, \qquad m(G_k \setminus K_k) < \frac{\epsilon}{2^k}.$ $\qquad$ ($\frac{\epsilon}{2^k}$技巧)

(2) $B_1 := \bigcup_k K_k \subset A \subset \bigcap_k G_k =: B_2. \qquad m(B_2 \setminus B_1) = 0$

(3) $A = G_\delta \setminus Z = F_\sigma \cup Z \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n).$

测度平移不变性

开矩体体积平移不变性$\xrightarrow[\text{遗传}]{\text{提升}}$外测度.

- $m^*(x_0+E)=m^*(E)$.

证明: $\forall \bigcup_k I_k \supset E \Longrightarrow m^*(x_0+E) \leqslant \sum_k |x_0+I_k| = \sum_k |I_k|$

$$\Longrightarrow m^*(x_0+E) \leqslant m^*(E)$$

$$m^*(E) \leqslant m^*((-x_0)+(x_0+E)) \leqslant m^*(x_0+E).$$

- 若A可测, 则x_0+A可测, 且测度相同.

证明:

$$A=\bigcap_k G_k\setminus Z \Longrightarrow x_0+A=\bigcap_k(x_0+G_k)\setminus(x_0+Z)\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n).$$

其中

$$m^*(x_0+Z)=m^*(Z)=0.$$

- E的等测包H:

$$H \supset E, \qquad H\text{是}G_\delta\text{集}, \qquad m^*(H) = m^*(E).$$

- 注记：$H \setminus E$ 可能不是零测集, 否则E可测.

- 注记：测度性质 $\xrightarrow{\text{等测包}}$ 外测度性质.

注记: $m^*(E) = \inf\Big\{m(G) : 开G \supset E\Big\}.$

证明: (1) $m^*(E) = \infty$:

$$G \supset E \Longrightarrow m^*(G) \geqslant m^*(E) = \infty$$

(2) $m^*(E) < \infty$:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, I_k开矩体 : \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq m^*(E) + \epsilon$$

$$\Longrightarrow G := \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad 开G \supset E, \quad m(G) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq m^*(E) + \epsilon.$$

等测包存在性的证明:

(1) $m^*(E)=\infty$:

$$H=\mathbb{R}^n$$

(2) $m^*(E)<\infty$:

$$\text{取开集} G_k \supset E, \quad m(G_k) \leqslant m^*(E)+\tfrac{1}{k}.$$

$$\begin{aligned} H := \bigcap_k G_k \quad &\Longrightarrow \quad m^*(E) \leqslant m(H) \leqslant m(G_k) \leqslant m^*(E)+\frac{1}{k} \\ &\Longrightarrow \quad m^*(E)=m(H). \end{aligned}$$

外测度性质

- 下半连续性 (Fatou引理的另一面目)

$$m^*(\varliminf E_k) \leqslant \varliminf m^*(E_k).$$

- 单调收敛定理的另一面目

$$m^*(\lim E_k) \xlongequal{E_k \uparrow} \lim m^*(E_k)$$

证明: (1) 设H_k 是E_k的等测包, 则

$$\begin{aligned} m^*(\underline{\lim}\, E_k) &\leqslant m(\underline{\lim}\, H_k) \\ &\leqslant \underline{\lim}\, m(H_k) && (Fatou\text{引理}) \\ &= \underline{\lim}\, m^*(E_k). \end{aligned}$$

(2) 设$E_k \uparrow$, 则

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) \overset{E_k\uparrow}{\leqslant} m^*(\lim_{k\to\infty} E_k) \overset{(1)}{\leqslant} \varliminf_{k\to\infty} m^*(E_k) = \lim_{k\to\infty} m^*(E_k).$$

Theorem 1

$$\sup_{\text{非退化矩体}I} \frac{m(I\cap E)}{m(I)} \xlongequal{E\subset\mathbb{R}^n\text{可测}} \begin{cases} 1, & m(E)>0 \\ 0, & m(E)=0. \end{cases}$$

证明：

- 不妨设E是有界正测集: 这是因为$m(E\cap B(0,n_0))\uparrow m(E)$.
- 只要证明第一种情形。反证法: 假设

$$\sup_{I\text{矩体}} \frac{m(I\cap E)}{m(I)} = \lambda \in (0,1).$$

$\forall\ \epsilon > 0$, 取开矩体I_k:

$$E \subset \bigcup_k I_k, \qquad \sum_k |I_k| < m(E) + \epsilon.$$

$$\Longrightarrow m(E) \ \leqslant\ m(\bigcup_k (I_k \cap E)) \leqslant \sum_k \lambda m(I_k) < \lambda(m(E)+\epsilon) \quad \text{矛盾}$$

Theorem 2 (Steinhaus)

$$\underset{(\text{测度论})}{m(E) > 0} \xrightarrow{E\subset\mathbb{R}^n} \underset{(\text{拓扑学})}{0 \in (E-E)^\circ}$$

$$\underbrace{E}_{\substack{\text{大集合(正测集)}\\ \text{测度论}}} \xrightarrow{\text{集合减法}} \underbrace{E-E}_{\substack{\text{大集合(含内点)}\\ \text{拓扑学}}}$$

$$E - E \overset{}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{cases} \text{拓扑学中的大集合(含内点)}, & m(E) > 0 \\ \\ \text{待定}, & m(E) = 0. \end{cases}$$

$$\mathbb{N} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}, \qquad\qquad C - C = [-1, 1].$$

- $C - C \xlongequal{C\text{是Cantor集}} [-1,1]. \qquad C + C = [0,2].$

证明: $\forall x \in (0,1] \xlongequal{\exists\, I \sqcup J \subset \mathbb{N}} \sum_{n\in I} \frac{1}{3^n} + \sum_{n\in J} \frac{2}{3^n}$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(a+b), \quad a = \sum_{n\in I} \frac{2}{3^n} + \sum_{n\in J} \frac{2}{3^n}, \quad b = \sum_{n\in J} \frac{2}{3^n}$$

$$\Longrightarrow \quad [0,1] = \frac{1}{2}(C+C), \qquad C = \lim C_n = \lim(1 - C_n) = 1 - C$$

$$\Longrightarrow \quad C - C = C - (1 - C) = C + C - 1 = 2[0,1] - 1 = [-1,1].$$

续

方法：

$$\text{从E出发} \xrightarrow[\text{添加I, 再去掉E}]{\text{通过交运算}} \text{到达I.}$$

- 取开矩体I

$$\frac{m(I\cap E)}{m(I)}=\lambda \xRightarrow[\lambda>1-\frac{1}{2^{n+1}}]{\delta=\text{I的最小边长}} (\frac{-\delta}{2},\frac{\delta}{2})^n\subset E-E.$$

续2

反证法:　存在$x_0 \in (\frac{-\delta}{2}, \frac{\delta}{2})^n$　($\delta =$ I的最小边长).

$$x_0 \notin E - E \quad \Longrightarrow x_0 + E与E不相交$$

$$\Longrightarrow x_0 + I \cap E与I \cap E不相交$$

$$\Longrightarrow m((x_0 + I \cap E) \sqcup (I \cap E)) \leqslant m((x_0 + I) \cup I)$$

$$左边 \quad = \quad 2m(I \cap E) = 2\lambda m(I)$$

$$右边 \quad = \quad m(x_0 + I) + m(I) - m((x_0 + I) \cap I)) \leqslant (2 - \frac{1}{2^n})m(I).$$

由此得到矛盾.　我们利用了以下事实：$x_0 + I$是I的扰动,

$$(x_0 + I) \cap I \supset 方体，其体积 \geqslant (\frac{1}{2})^n |I|.$$

例题

- $m(E) > 0 \xrightarrow{E\subset\mathbb{R}} (E+E)^\circ \neq \emptyset.$

  - E把某个开区间差不多充满, 不妨设该开区间为$(0,1)$, 而且

$$m(A) > \frac{3}{4}, \qquad A := E\cap(0,1).$$

  - 假设$E+E$无内点. 取

$$x_0 \in (1, \frac{3}{2}) \setminus (E+E).$$

  - 两个互不相交的子集:

$$A \subset (0,1), \qquad x_0 - A \subset (1, \frac{3}{2}) - (0,1) \subset (0, \frac{3}{2})$$

$$\Longrightarrow m((x_0 - A)\sqcup A)) > \frac{3}{2}. \quad \text{矛盾}$$

例题

- 若$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$在一个正测集上有界(例如局部有界), 具有可加性, 则它具有线性性.

证明: 我们要证$f(x)=f(1)x$.

$$f\text{在正测集}E\text{有界}\xrightarrow[{[-\delta,\delta]\subset E-E}]{\text{Steinhaus定理}} f\text{在原点附近}[-\delta,\delta]\text{有界}.$$

由线性性

$$nf(\frac{m}{n})=f(m)=mf(1)\Longrightarrow f(\frac{m}{n})=\frac{m}{n}f(1).$$

$$\begin{aligned}|f(x)-f(1)x| \xlongequal[\text{取 } r\in\mathbb{Q}:\ |x-r|<\delta/n]{\forall\ \text{固定}x,n} & \left|\frac{1}{n}f(n(x-r))+(r-x)f(1)\right|\\ \leqslant\ & \frac{M}{n}+\frac{\delta}{n}|f(1)|\to 0\end{aligned}$$

例题

- 设$T:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$是可逆线性变换, E是$\mathbb{R}^n$中可测集. 则

$$m(TE)=|\det T|m(E).$$

证明: $T=$ 初等变换的复合. 这包括伸缩、换序、仿射变换。

续

(1) $E=[0,1)^n$.

对于仿射变换, $n=2$情形:

$$y_1 := Tx_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 := Tx_2 = x_2.$$

$x_2 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 1$	$x_1 = 0$
$y_2 = 0$	$y_1 - y_2 = 1$	$y_2 = 1$	$y_1 = y_2$

T将标准正方形$[0,1)\times[0,1)$映照为平行四边形, 底边为$[0,1)$区间, 高为1.

$$\Longrightarrow \quad m(TE) \xlongequal{E=[0,1)^n} |\det T| m(E).$$

(2) $\quad E =$ 开集.

对$\mathbb{R}^n$进行二进制加密剖分, G的每个点必落在某个二进制方体.

$$\Longrightarrow \quad G = \bigsqcup_{\text{可列}} ([0,1)^n\text{伸缩平移}).$$

归结于情形(1).

$$m(TG) = |\det T| m(G).$$

(3) E可测.

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus Z \Longrightarrow TE = \bigcup_{k=1}^{\infty} TG_k \setminus TZ$$

$$\begin{aligned} m^*(TZ) &= \inf\{m(\tilde{G}) : \text{开集}\tilde{G} \supset TZ\} \\ &= \inf\{m(TG) : \text{开集}G \supset E\} \qquad (T\text{是同胚}, G := T^{-1}\tilde{G}) \\ &= |\det T| \inf\{m(G) : \text{开集}G \supset Z\} \\ &= |\det T|\, m(Z) = 0. \end{aligned}$$

$$E\text{可测} \Longrightarrow TE\text{可测}$$

$$\begin{aligned} m(TE) &= \inf\{m(\tilde{G}) : \text{开集}\tilde{G} \supset TE\} \\ &= \inf\{m(TG) : \text{开集}G \supset E\} \qquad (T\text{是同胚}, G := T^{-1}\tilde{G}) \\ &= |\det T| \ \inf\{m(G) : \text{开集}G \supset E\} \\ &= |\det T| \ m(E). \end{aligned}$$

例题

$$\mathbb{R}^n \neq \bigcup_{\text{可列}} \text{超平面}$$

作业

P84 第2题

P95 第12, 13, 14题

实分析(H), 第9次课

任广斌(中国科大)

2024-4-1

本节主要内容

Ch3 可测函数

- 可测函数
- 可测函数关于运算的封闭性

Ch2和Ch3关系: 提升

集合论		特征函数的函数论	函数论
A	$=$	χ_A	$f = (\chi_A, +, \cdot, \lim)$
可测集	$=$	可测函数	可测函数
$m(A)$	$=$	$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\, dm(x)$	$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dm(x)$
测度		积分	积分
Ch2			Ch3

实分析中的陷阱：来自测度值域的代数性质

- 测度论中的陷阱:

$$m(E_1) - m(E_2) = (+\infty) - (+\infty) \text{ 无意义.}$$

(做测度减法的运算需要避开的陷阱)

- 积分论中的陷阱:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_1}(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_2}(x)dx = (+\infty) - (+\infty) \text{ 无意义.}$$

(可测函数=(χ_A, +, ·, lim))可能不可积, 需要剔除陷阱, 产生可积子类)

可测函数起源

- 曲边梯形面积的推广中, 对y轴进行分割, 非负有界函数围成的曲边梯形面积有定义的前提条件是函数可测. 这源于没有一把万能的尺子来定义测度.
- 曲边梯形面积是带有符号的面积, 在实轴上方为正, 否则为负. 为了避开$+\infty-(+\infty)$陷阱, 需要将可测函数类缩小到可积函数类.
- 在抽象理论中, 可测函数是与连续函数地位相同的函数类, 分别隶属于实分析和点集拓扑. 广义实值可测函数类对于代数和极限运算封闭. 可积函数全体构成Banach空间.

- 抽象可测函数

$$f:(X,\Gamma_X)\longrightarrow(Y,\Gamma_Y)\text{可测}\quad\overset{def}{\Longleftrightarrow}\quad f^{-1}(\Gamma_Y)\subset\Gamma_X$$

(可测集的原像是可测集)

- 抽象连续函数

$$f:(X,\tau(X))\longrightarrow(Y,\tau(Y))\text{连续}\quad\overset{def}{\Longleftrightarrow}\quad f^{-1}(\tau(Y))\subset\tau(X)$$

(开集的原像是开集)

可测函数等价刻画

- 可测函数利用生成元刻画

$$f:(X,\Gamma_X)\longrightarrow(Y,\Gamma_Y)\text{可测}\iff f^{-1}(\mathcal{F})\subset\Gamma_X,\ \ \sigma(\mathcal{F})=\Gamma_Y.$$

(生成元集合$\mathcal{F}$中可测集的原像可测)

证明: $\Gamma:=\{E\in\Gamma_Y: f^{-1}(E)\subset\Gamma_X\}$

$$\mathcal{F}\subset\Gamma,\qquad \Gamma\text{是}\sigma\text{代数}\Longrightarrow\Gamma_Y\subset\Gamma$$

例题

- 存在$[0,1]$区间的同胚, 不满足: 可测集的原像是可测集.

  - 取$[0,1]$严格单调的同胚:
  $$f := \frac{1}{2}(\text{Cantor函数+恒等函数}).$$
  - $[0,1]$的剖分:
  $$\begin{aligned} [0,1] &= C \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}, \qquad |I_{n,k}| = \frac{1}{3^n} \\ f[0,1] &= f(C) \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} f(I_{n,k}), \qquad f[0,1] = [0,1]. \end{aligned}$$

续

- 在开区间$I_{n,k}$上:

$$f|_{I_{n,k}} \xlongequal[\text{限制于}I_{n,k}]{\text{Cantor 函数为常数}} \frac{1}{2}\text{常数} + \frac{1}{2}\text{恒等}\Big|_{I_{n,k}} = \text{平移}+\frac{1}{2}\text{伸缩}.$$

$$\Longrightarrow m(f(I_{n,k})) = \frac{1}{2}m(I_{n,k}), \qquad m(f(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k})) = \frac{1}{2}.$$

$$\Longrightarrow m(f(C)) = \frac{1}{2}.$$

$$m(f(C)) > 0 \Longrightarrow \text{存在不可测集} W \subset f(C)$$

- $g := f^{-1}, \qquad Z := g(W) \subset g(f(C)) = C.$
- Lebesgue可测集Z的原像$g^{-1}(Z) = W$不是Lebesgue集.

注记： 零测集Z不是Borel集. (否则$W = g^{-1}(Z) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$)

Lebesgue可测函数

- 设E是$\mathbb{R}^n$ 上可测集.

$$\mathscr{L}(E) := \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \cap E = E\text{上Lebegue } \sigma\text{代数}.$$

- $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue 可测:

$$f : (E, \mathscr{L}(E)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))\text{可测}.$$

- 值域$\mathbb{R}$中, 默认的σ代数是Borelσ代数$\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

- Borel σ代数是拓扑学和测度论的桥梁, 兼顾连续和可测.
  - 连续必可测
  - 集合的可测和函数的可测相容$A = \chi_A$.

Borel σ代数生成元

- Borel σ代数的生成

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\tau(\mathbb{R})) \\
&= \sigma\Big\{(a,+\infty): \quad a \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= \sigma\Big\{[a,+\infty): \quad a \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= \sigma\Big\{[a,b): \quad a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\Big\}.
\end{aligned}
$$

注意: $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus (b - \frac{1}{n}, +\infty)) \cap (a, +\infty)$.

- Lebesgue可测函数判别准则.

$$
\begin{aligned}
& f : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue可测} \\
= \quad & \text{开集的原像可测} \\
= \quad & \text{右半开直线}(a, +\infty)\text{的原像可测} \\
= \quad & \text{半开半闭有界区间}[a, b)\text{的原像可测.}
\end{aligned}
$$

- Lebesgue可测函数的积分

$$\int_a^b f(x)dm(x) \xlongequal{0\leqslant f<M} \int_0^M m(f^{-1}[y,+\infty)) \downarrow dy.$$

$\overline{\mathbb{R}}$值Lebesgue可测函数

扩充实轴$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

$$\mathscr{L}(E, \mathbb{R}) := \text{可测集E上Lebesgue可测函数全体}$$

$$\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) := \text{可测集E上}\overline{\mathbb{R}}\text{值Lebesgue可测函数全体}.$$

$\overline{\mathbb{R}}$值Lebesgue可测函数(续)

- 研究$\overline{\mathbb{R}}$值Lebesgue可测函数的理由.
  - $\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}})$关于上、下极限运算封闭, 比$\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$具有优越性.
  - 将a.e.相等视为恒等时

$$L^1(E,\mathbb{R}) = L^1(E,\overline{\mathbb{R}}).$$

扩充实轴可视为闭区间

- 扩充实轴与闭区间的双射对应:

$$\begin{aligned} \Phi : \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x &\longmapsto \arctan x \end{aligned}$$

- 类似单点紧化

扩充实轴的距离

- $\overline{\mathbb{R}}$是度量空间:

距离拉回(Φ是等距)

$$\mathrm{dist}(x, y) := |\Phi(x) - \Phi(y)|.$$

扩充实轴的拓扑

- $\overline{\mathbb{R}}$是度量空间：开集拉回(Φ是同胚),
  - $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$取子空间拓扑
$$(X,\tau)\text{是拓扑空间} \xRightarrow[\text{子空间拓扑}]{E\subset X} (E, \tau|_E)\text{是拓扑空间}.$$
  - $\overline{\mathbb{R}}$是紧集, 类似单点紧化.
  - $\overline{\mathbb{R}}$中的拓扑:
$$\tau(\overline{\mathbb{R}}) = \text{由}(a,b),\ (a,+\infty],\ [-\infty,b)\text{生成}.$$

- 扩充实数的Borel σ 代数.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) &= \sigma(\tau(\overline{\mathbb{R}})) \\
&= \sigma\{(a,+\infty] : a \in \mathbb{R}\} \\
&= \sigma\{[a,+\infty] : a \in \mathbb{R}\} \\
&= \{A \sqcup B : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\quad B = \emptyset, \{+\infty\}, \{-\infty\}, \{+\infty,-\infty\}\}
\end{aligned}
$$

扩充实值的Lebesgue可测函数

- 扩充实值Lebesgue可测函数判别准则.

$$f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ Lebesgue可测}$$

$$\Longleftrightarrow \quad f : (E, \mathscr{L}(E)) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})) \text{ Lebesgue可测}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{开集的原像可测}, \{+\infty\}, \{-\infty\}\text{的原像可测}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{右半开直线的原像可测}, \{+\infty\}, \{-\infty\}\text{的原像可测}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{半开半闭有界区间的原像可测}, \{+\infty\}, \{-\infty\}\text{的原像可测}$$

良定性:

- 良定性:

  实值函数$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$可自然地视为扩充实值函数$f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

  两者可测性一致.

可测关于复合运算的封闭性

- 复合运算:

$$f \in C(\mathbb{R}^n), \quad g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n\text{可测} \Longrightarrow f \circ g\text{可测}.$$

证: $\forall$ 开集$G \subset \mathbb{R}^n \Longrightarrow (f \circ g)^{-1}(G) = g^{-1}(f^{-1}(G))$可测.

可测关于代数运算的封闭性

- 直乘积:

$$f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \Longrightarrow (f, g) : E \longrightarrow \mathbb{R}^2\text{可测}$$

证: 记$F = (f, g)$, 则

$$F^{-1}([a_1, b_1) \times [a_2, b_2)) = f^{-1}([a_1, b_1)) \cap g^{-1}([a_2, b_2))\text{可测}.$$

- 加法、数乘: $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$可测 $\Longrightarrow f+g, \quad \lambda f \quad f \cdot g$可测.

证: 令

$$F : E \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad F = (f, g)$$

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, y) = x + y$$

$$\Longrightarrow \qquad h \circ F(x) = f(x) + g(x) \text{ 可测.}$$

可测关于极限运算的封闭性

- 极限运算:

$$f_k \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \quad \Longrightarrow \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} f_k, \quad \underline{\lim_{k\to\infty}} f_k \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}).$$

证: 令$g = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$, 则

$$g^{-1}(a, +\infty] = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}(a, +\infty] \Longrightarrow g\text{可测}.$$

- $f, g \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \Longrightarrow \max\{f, g\},\ \min\{f, g\},\ f^+, f^-,\ |f| \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}).$

零测集的作用

- 零测集在集合论中起作完备化的作用:

  Lebesgue可测集=Borel集±零测集.

- 零测集在函数论中不影响可测性、可积性、积分值.

$$f \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xLeftrightarrow{f \overset{a.e.}{=} g} g \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}).$$

- 积分论中无法区别零测集:

  两个函数在任意集合上积分相同$\Longleftrightarrow$ 它们几乎处处相等.

- 积分论中涉及的相等是几乎处处相等.

  某性质a.e.成立$\Longleftrightarrow$除去一个零测集成立.

- $\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}})$关于a.e.收敛封闭.

证明: 设$f_k \in \mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}})$, $f_k \xrightarrow{a.e.} f$.

$$\Longrightarrow m(Z)=0, \quad 其中 E\setminus Z=\{x\in E: \lim f_k(x)=f(x)\}$$

$$\Longrightarrow f_k \in \mathscr{L}(E\setminus Z,\overline{\mathbb{R}}) \qquad f_k \in \mathscr{L}(Z,\overline{\mathbb{R}})$$

$$\Longrightarrow f \in \mathscr{L}(E\setminus Z,\overline{\mathbb{R}}), \qquad f \in \mathscr{L}(Z,\overline{\mathbb{R}})$$

$$\Longrightarrow f \in \mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}).$$

可测性是局部性质(作为连续性的推广)

- 可测是局部性质

$$f \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xLeftrightarrow{E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,\ E_k\text{可测}} f|_{E_k} \in \mathscr{L}(E_k, \overline{\mathbb{R}}), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

证明: $f^{-1}(a, \infty] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (f|_{E_k})^{-1}(a, \infty].$

不可测函数

- 绝对可测$\not\Rightarrow$ 可测

  例如: $\chi_W - \chi_{W^c}$,　W不可测.

- 可测关于不可数取上确界不再封闭.

  例如: $\chi_W = \sup\limits_{x\in W} \chi_{\{x\}}$,　W不可测.

  (原因: 可测仅对可列并交叉封闭)

- 可测关于复合运算不封闭.

$$g^{-1} = f = \frac{1}{2}(Cantor + \text{恒等}), \quad \text{不可测} W \subset f(C), \quad g(W) = Z\text{零测集}$$

则 $\chi_Z \circ g$ 不可测:　$(\chi_Z \circ g)^{-1}(\{1\}) = g^{-1} \circ \chi_Z^{-1}(\{1\}) = W$

作业

P107　第1，6题

P126　第2，3题

实分析(H), 第10次课

任广斌(中国科大)

2024-4-3

本节主要内容

- 可测函数结构

- 三种收敛性

(几乎处处收敛， 几乎一致收敛， 以测度收敛)

内容一: 可测函数结构

- 回顾记号: $E \subset \mathbb{R}^n$可测.

$\mathscr{L}(E)$	可测	$\overline{\mathbb{R}}$值
$\mathscr{L}^+(E)$	非负可测	$\overline{\mathbb{R}}$
$S(E)$	简单可测	$\mathbb{R}$
$S^+(E)$	非负简单可测	$\mathbb{R}$

简单可测函数结构

体现对y轴分割: 与Lebesgue积分相伴而生的函数.

- 简单可测函数结构:

$$
\begin{aligned}
S(E) &= \{f: E \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \mid \text{Range } f\text{是有限集}\} \\
&= \langle \chi_A, +, \cdot \rangle
\end{aligned}
$$

简单可测函数标准表示

- $f \in S(E)$标准表示:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}(x).$$

其中

$$\begin{aligned} \mathrm{Range} f &= \{a_1, \cdots, a_m\}, \\ E &= \bigsqcup_{k=1}^{m} E_k, \qquad E_k = f^{-1}(a_k). \end{aligned}$$

- 标准表示中, 在每点处, 求和项最多只有一项非零
- 非标准表示例子: $\chi_{[0,1]} = \chi_{[0,1/2]} + \chi_{(1/2,1]}$.

可测函数和简单函数的联系

- 如何将可测函数表达为简单函数列的极限:
  $\chi_A + (+, \cdot, \lim)$?

  答案: 简单函数的特点是值域有限. 为此需要如下手段:

  对y轴二进制分解, 精细化+逼近

  Strategy: 剖分=逼近=化整为零=极限思想=同Riemann

- 简单可测函数结构: $f \in \mathscr{L}^+(E)$

$$[0,+\infty] \xlongequal[\text{值域剖分长度}2^{-k}]{\text{y轴第k次二进制剖分}} \bigsqcup_{j=1}^{2^{2k}} [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}) \bigsqcup [2^k,+\infty].$$

$$E = f^{-1}[0,+\infty] \xlongequal[\text{定义域剖分}]{} \bigsqcup_{j=1}^{2^{2k}} f^{-1}[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}) \bigsqcup f^{-1}[2^k,+\infty].$$

非负可测函数结构续

- 在y轴的每个二进制区间

$$\frac{j-1}{2^k} \leqslant y < \frac{j}{2^k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2^{2k})$$

  - 第0次二进制剖分: 区间长度=1
  - 第1次二进制剖分: 区间长度= 前一次的一半=$\frac{1}{2}$
  - 第2次二进制剖分: 区间长度= 前一次的一半=$\frac{1}{2^2}$ etc.

- 在y轴的二进制剩余区间

$$2^k \leqslant y \leqslant \infty.$$

- 函数常值化, 取为最小值.

有效的有限区间膨胀，小区间长度收缩

- 简单函数列

$$f_k(x)=\begin{cases}\dfrac{j-1}{2^k}, & \text{if} \quad \dfrac{j-1}{2^k}\leqslant f(x)<\dfrac{j}{2^k} \quad (j=1,2,\ldots,2^{2k})\\ 2^k, & \text{if} \quad f(x)\geqslant 2^k.\end{cases}$$

- 一致收敛的根源:

在$\{x\in E: 0\leqslant f(x)<2^k\}$上:

$$0\leqslant f(x)-f_k(x)<\frac{1}{2^k}.$$

非负可测函数结构续

Theorem 1 (值域局部常值化产生的简单函数列)

$$f_k = \sum_{j=1}^{2^{2k}} \frac{j-1}{2^k}\chi_{f^{-1}[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})} + 2^k\chi_{f^{-1}[2^k,+\infty]} \qquad \nearrow \qquad f$$

$$S^+(E) \qquad\qquad \mathscr{L}^+(E)$$

具体例子

$$f(x) = x, \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \in [0,1) \\ 1, & \text{if} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \in [0,\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}, & \text{if} \quad x \in [\frac{1}{2},1) \\ 1, & \text{if} \quad x \in [1,\frac{3}{2}) \\ \frac{3}{2}, & \text{if} \quad x \in [\frac{3}{2},2) \\ 2, & \text{if} \quad x \geqslant 2. \end{cases}$$

- 第k次二进制剖分:　区间长度= 前一次的一半=$\frac{1}{2^k}$
- 消去半直线$[2^k, +\infty]$

函数与非负函数关系

函数的研究归结于非负函数, 非负函数研究是研究函数的桥梁.

$$f = \frac{1}{2}(|f| + f) - \frac{1}{2}(|f| - f) = f^+ - f^-, \qquad f^\pm \geqslant 0$$

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{(每点处, 求和项最多只有一项非零)}$$

$$|f| = f^+ + f^-$$

$$f^+ = f\text{的正部} = \max\{f, 0\} = \text{小于零的部分零化, 其它不变}$$

$$f^- = f\text{的负部} = \max\{-f, 0\} = \text{大于零的部分零化, 其它关于实轴反演}$$

- 可测函数结构定理:

$$f \in \mathscr{L}^+(E) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, f_k \in S^+(E), \quad f_k \uparrow f$$

$$f \in \mathscr{L}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, \varphi_k \in S(E), \quad \varphi_k \longrightarrow f, \quad |\varphi_k| \uparrow |f|.$$

证明: 设$f \in \mathscr{L}(E)$, 则$f^{\pm} \in \mathscr{L}(E)$,

$$\exists\, u_k, v_k \in S^+(E) \implies u_k \uparrow f^+, \quad v_k \uparrow f^-$$

$$\implies \varphi_k := u_k - v_k \in S(E), \quad \varphi_k \to f$$

$$\forall x \in E \implies \text{要么} u_k = 0 \text{要么} v_k = 0$$

$$\implies |\varphi_k| = u_k + v_k \ \uparrow\ f^+ + f^- = |f|$$

- 可测函数的原子分解:　　(类似于初等函数的Taylor展开)

$$\mathscr{L}(E) = \langle \chi_A, +, \cdot, \lim \rangle_{A\text{可测}}$$

- 可测函数研究的四部曲

$$\chi_A \xrightarrow[+,\cdot,\lim]{S^+,\mathscr{L}^+} \mathscr{L}(E).$$

可测函数研究的两个层次

- 可测函数：开集的原像是可测集
- 可测函数：原子方法 χ_A+代数运算+极限运算.

方法一	抽象	建立可测和连续的关系
方法二	具体	问题简化到原子

测度论和积分理论关系

黄河源头	黄河入海口
测度论	积分理论
集合论	函数论
特征函数	可测函数(以特征函数为积木)
σ代数	可测函数关于运算封闭
测度可列可加性	交换次序等价定理

一致收敛性

- 简单函数一致逼近“非负有界”可测函数. (记号$\mathscr{L}^\infty$=有界)

$$f \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^\infty(E) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, f_k \in S^+(E), \quad f_k \uparrow f, \quad f_k \rightrightarrows f.$$

- “紧支撑”简单函数紧一致逼近“非负有界”可测函数

$$g_k := f_k \chi_{B(0,k)}$$

$$f \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^\infty(E) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, g_k \in S_c^+(E), \quad g_k \uparrow f, \quad g_k \overset{\text{紧一致}}{\rightrightarrows} f.$$

$$f \in \mathscr{L}(E) \cap \mathscr{L}^\infty(E) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, h_k \in S_c(E), \quad |h_k| \uparrow |f|, \quad h_k \overset{\text{紧一致}}{\rightrightarrows} f.$$

- 三种收敛性

a.e.	almost everywhere	几乎处处收敛
a.un.	almost uniformly convergence	几乎一致收敛
m	measure	以测度收敛

记号:

$$[|f_n - f| \geqslant \epsilon] \xlongequal{def} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \epsilon\}$$

- 设$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $f_n, f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \iff m[f_n \nrightarrow f] = 0;$$

$$f_n \xrightarrow{a.un} f \iff \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists \text{可测} E_\epsilon \subset E: \quad m(E_\epsilon) < \epsilon, \quad f_n \overset{on E \setminus E_\epsilon}{\rightrightarrows} f;$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \iff \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k \to \infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

(测度刻画小集合)

三种收敛性的直观含义

- 几乎处处收敛是除去一个零测集的点态收敛.

- 几乎一致收敛说明挖去一个任意小测度集后一致收敛.

- 以测度收敛不是点态收敛, 它说明f_k 远离f的点集是小测度集, 但不论该集合的位置.

用不收敛点集的大小，给出收敛准则

- 用ϵ表示远离程度

$$a, b\text{远离} \quad \Longleftrightarrow \quad |a-b| \geqslant \epsilon$$

三种收敛的依测度收敛型的刻画

- 无穷多项远离f的是零测集.

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \quad m(\varlimsup_{k\to\infty}[|f_k - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- (允许有限项例外的)一致远离f的点集是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{a.un} f \quad \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty}[|f_j - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- 依测度意义远离f是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

记忆方法

a.e.	无穷多项远离	零测集
a.un.	除有限项全部一致远离	小集合
m	依测度远离	小集合

续

证明: (1) 不收敛点$\Longleftrightarrow$无穷多项远离f.

$$\text{不收敛点集}=\bigcup_{\epsilon>0}\varlimsup_{k\to\infty}[|f_k-f|\geqslant\epsilon].$$

(2a) $f_k \xrightarrow{a.un} f \Longrightarrow$ $\forall\ \theta>0,\ \ \exists\ E_\theta: m(E_\theta)<\theta,$使得

$\forall\ \epsilon>0,\ \exists\ j\in\mathbb{N},$ 当$k\geqslant j,$

$$\sup_{x\in E\setminus E_\theta}|f_k(x)-f(x)|<\epsilon$$

$\Longrightarrow$ $\bigcup_{k=j}^{\infty}[|f_k-f|\geqslant\epsilon]\subset E_\theta$ 一致远离是小集合

$$\Longrightarrow\ \lim_{j\to\infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty}[|f_k-f|\geqslant\epsilon])\leqslant\theta$$

续2

$$(2b):\quad \forall\text{ 固定}k\in\mathbb{N},\quad \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{j=n}^{\infty}[|f_j-f|\geqslant\frac{1}{2^k}])=0$$

$$\Longrightarrow \forall\ \theta>0,\ \ \exists\ n=n(k)\in\mathbb{N}:\ \ m(\bigcup_{j=n(k)}^{\infty}[|f_i-f|\geqslant\frac{1}{2^k}])\leqslant\frac{\theta}{2^k}$$

$$\Longrightarrow \text{令}E_\theta^c:=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=n(k)}^{\infty}[|f_i-f|\geqslant\frac{1}{2^k}],\qquad m(E_\theta^c)<\theta$$

$$\Longrightarrow \text{在}E_\theta=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=n(k)}^{\infty}[|f_i-f|<\frac{1}{2^k}]\text{上},\qquad f_i\rightrightarrows f.$$

三种收敛的关系

- $f_k \xrightarrow{a.un} f \quad \Longrightarrow f_k \xrightarrow{a.e.} f, \quad f_k \xrightarrow{m} f.$

- $f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \xLeftrightarrow{m(E)<+\infty} f_k \xrightarrow{a.un} f.$

- $f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \forall$子列$, \exists$子列$f_{n_k} \xrightarrow{a.un} f.$

Theorem 2 (Egorov定理)

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \qquad \overset{m(E)<+\infty}{\Longleftrightarrow} \qquad f_k \xrightarrow{a.un} f.$$

Littlewood 三原理之一：

$[a,b]$区间上函数列收敛$\Longrightarrow$差不多一致收敛.

Theorem 3 (Riesz 定理)

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longrightarrow \exists \text{子列} f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f.$$

注记1: 依测度收敛, 极限必唯一.

(几乎处处相等视为恒等, 测度无法分辨零测集)

注记2: 在有限测度集上, 在有子列a.e.收敛意义下, 三种收敛等价.

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longrightarrow \quad \forall\ k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{j\to\infty} m[|f_j - f| \geqslant \frac{\epsilon}{2^k}] = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \text{对于任意子列}, \exists\ \text{子列}: m[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{\epsilon}{2^k}] \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

$$\xRightarrow[\text{BC测度有限}]{Borel-Cantelli} \quad \lim_{s\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=s}^{\infty}[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{\epsilon}{2^k}]\Big) = 0$$

$$\xRightarrow{\forall\ \epsilon>0, \exists\ s_0} \quad E_\epsilon^c := \bigcup_{k=s_0}^{\infty}[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{\epsilon}{2^k}], \qquad m(E_\epsilon^c) < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad f_{n_k} \rightrightarrows f \quad \text{in} \quad E_\epsilon = \bigcap_{k=s_0}^{\infty}[|f_{n_k} - f| < \frac{1}{2^k}]$$

$$\Longrightarrow \quad f_{n_k} \xrightarrow{a.\ un.} f$$

证明:

$$f_k \overset{m}{\nrightarrow} f \quad \Longrightarrow \quad \exists\ \epsilon_0 > 0, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\ m[|f_k - f| \geqslant \epsilon_0] = \delta_0 > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\text{子列}\{f_{k_n}\}: \quad m[|f_{k_n} - f| \geqslant \epsilon_0] > \frac{\delta_0}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \{f_{k_n}\}\text{不包含a.un 收敛子列.}$$

几乎处处收敛和依测度收敛是独立概念

- 几乎处处收敛, 非依测度收敛.

$$E = (0, +\infty)$$

$$\chi_{(n,n+1)} \xrightarrow{a.e.} 0$$

$$\chi_{(n,n+1)} \overset{m}{\nrightarrow} 0$$

几乎处处收敛和依测度收敛是独立概念续

- 依测度收敛, 非几乎处处收敛.

$$E = [0,1]$$

$$f_{kr} = \chi_{[\frac{r-1}{k},\frac{r}{k})}, \qquad r = 1,\dots k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\{g_k\} := \{f_{11}, f_{21}, f_{22}, \dots\}$$

$$g_k \xrightarrow{m} 0$$

$$g_k \overset{a.e.}{\nrightarrow} 0$$

几乎处处收敛v.s.依测度收敛

$a.e.$	几乎处处收敛	点态	零测集
m	以测度收敛	非点态	小测度集

Borel-Cantelli引理

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < +\infty \Longrightarrow m(\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{a.un} 0$$

$$\Longleftrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{a.e.} 0$$

$$\Longrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{m} 0$$

注记: $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0 \Longleftrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{m} 0$

作业

P119　第1, 4题

P127　第12题

P109　第6, 7题

实分析(H), 第11次课

任广斌(中国科大)

2024-4-8

期中考试

- 考试时间：2024年4月27日(星期六)　　晚上7:30-9:30
- 内容：PPT 1–14
- 地点：待定

本节主要内容

- 以测度Cauchy
- Lusin定理　(Littlewood 三原理之一)

- 设$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $f_n, f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \iff m[f_n \nrightarrow f] = 0;$$

$$f_n \xrightarrow{a.un} f \iff \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists \text{可测} E_\epsilon \subset E: \quad m(E_\epsilon) < \epsilon, \quad f_n \overset{on E \setminus E_\epsilon}{\rightrightarrows} f;$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \iff \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k \to \infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

- 无穷多项远离f的是零测集.

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \quad m(\overline{\lim_{k\to\infty}}[|f_k - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- 除有限项外一致远离f的是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{a.un} f \quad \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty}[|f_j - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- 依测度意义远离f是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

续

证明: (1) 不收敛点$\Longleftrightarrow$无穷多项远离f.

$$\text{不收敛点集}=\bigcup_{\epsilon>0}\overline{\lim_{k\to\infty}}[|f_k-f|\geqslant\epsilon].$$

(2a) $f_k \xrightarrow{a.un} f \Longrightarrow \forall\ \theta>0,\ \ \exists\ E_\theta : m(E_\theta)<\theta,$ 使得 $\forall\ \epsilon>0,\ \exists\ j\in\mathbb{N},$ 当$k\geqslant j,$

$$\sup_{x\in E\setminus E_\theta}|f_k(x)-f(x)|<\epsilon$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{k=j}^{\infty}[|f_k-f|\geqslant\epsilon]\subset E_\theta$$ 一致远离是小集合

$$\Longrightarrow \lim_{j\to\infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty}[|f_k-f|\geqslant\epsilon])\leqslant\theta$$

续2

$$(2b): \quad \forall \text{ 固定} k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{j=n}^{\infty}[|f_j - f| \geqslant \frac{1}{2^k}]) = 0$$

$$\Longrightarrow \forall\ \theta > 0,\ \exists\ n = n(k) \in \mathbb{N}: \quad m(\bigcup_{j=n(k)}^{\infty}[|f_i - f| \geqslant \frac{1}{2^k}]) \leqslant \frac{\theta}{2^k}$$

$$\Longrightarrow \text{令} E_\theta^c := \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=n(k)}^{\infty}[|f_i - f| \geqslant \frac{1}{2^k}], \qquad m(E_\theta^c) < \theta$$

$$\Longrightarrow \text{在} E_\theta = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=n(k)}^{\infty}[|f_i - f| < \frac{1}{2^k}] \text{上}, \qquad f_i \rightrightarrows f.$$

Theorem 1 (Riesz 定理)

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longrightarrow \exists \text{子列} f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f.$$

注记1: 依测度收敛, 极限必唯一.

(几乎处处相等视为恒等, 测度无法分辨零测集)

注记2: 在有限测度集上, 在有子列a.e.收敛意义下, 三种收敛等价.

(续)，证明: $f_k \xrightarrow{m} f \Longrightarrow \forall$子列, $\exists$子列$f_{n_k} \xrightarrow{a.un} f$..

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longrightarrow \quad \forall\ k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{j\to\infty} m[|f_j - f| \geqslant \frac{1}{2^k}] = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \text{对于任意子列}, \exists\ \text{子列}: m[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k}] \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

$$\xrightarrow[\text{BC测度有限}]{Borel-Cantelli} \quad \lim_{s\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=s}^{\infty}[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k}]\Big) = 0$$

$$\xrightarrow{\forall\ \epsilon>0, \exists\ s_0} \quad E_\epsilon^c := \bigcup_{k=s_0}^{\infty}[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k}], \qquad m(E_\epsilon^c) < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad f_{n_k} \rightrightarrows f \quad \text{in} \quad E_\epsilon = \bigcap_{k=s_0}^{\infty}[|f_{n_k} - f| < \frac{1}{2^k}]$$

$$\Longrightarrow \quad f_{n_k} \xrightarrow{a.\ un.} f$$

证明:

$$f_k \overset{m}{\nrightarrow} f \quad \Longrightarrow \quad \exists\ \epsilon_0 > 0, \qquad \overline{\lim_{k\to\infty}}\ m[|f_k - f| \geqslant \epsilon_0] = \delta_0 > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\text{子列}\{f_{k_n}\}: \quad m[|f_{k_n} - f| \geqslant \epsilon_0] > \frac{\delta_0}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \{f_{k_n}\}\text{不包含a.un 收敛子列.}$$

依测度Cauchy

- $E \subset \mathbb{R}^n$可测. $f_k \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\text{依测度Cauchy} \iff \{f_k\}_{k=1}^{\infty}\text{依测度收敛.}$$

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$依测度Cauchy, 即

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{i,k\to\infty} m[|f_i - f_k| \geqslant \epsilon] = 0.$$

证明: $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$依测度Cauchy, 即

$$\forall\ \epsilon > 0, \qquad \lim_{i,k\to\infty} m[|f_i - f_k| \geqslant \epsilon] = 0.$$

归纳选取子列$g_j = f_{n_j}$:

$$m[|g_j - g_{j+1}| \geqslant \frac{1}{2^j}] \leqslant \frac{1}{2^j}, \qquad \forall\ j \in \mathbb{N}.$$

$j = 1$时, 可选取g_1, g_2, 其中g_1取定, g_2 有无穷候选.

$j = 2$时, 可选取g_2, g_3, 其中g_2取定, g_3 有无穷候选,

如此构造下去.

续

$$E_j := [|g_j - g_{j+1}| \geqslant \frac{1}{2^j}], \qquad F_k := \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$$

$$\xrightarrow[m(E_j)\leqslant\frac{1}{2^j}]{Borel-Cantelli} \qquad m(\lim_{k\to\infty} F_k) = \lim_{k\to\infty} m(F_k) = 0.$$

续

$$\forall x \in F_k^c = \bigcap_{j=k}^{\infty} E_j^c = \bigcap_{j=k}^{\infty}[|g_j - g_{j+1}| < \frac{1}{2^j}]$$

$$\xRightarrow{\forall\ i>j>k} \quad |g_j(x) - g_i(x)| \leqslant \sum_{s=j}^{i-1} |g_{s+1}(x) - g_s(x)| \leqslant \frac{1}{2^{j-1}}$$

$\Longrightarrow$ 在F_k^c上,$\{g_j\}$逐点Cauchy, 几乎一致收敛

$\Longrightarrow$ 从而依测度收敛, 故$\{f_j\}$依测度收敛

- Lusin定理:

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists\text{闭集}F \subset E:$$

$$m(E \setminus F) < \epsilon, \quad f|_F\ \text{连续}.$$

注记

- 当$m(E) < \infty$时, 可取闭集F为紧集K.

- 当$m(E) = \infty$时, 不可取闭集F为紧集K.

$$\text{例如} \quad E = \mathbb{R}^n, \quad m(K) < \infty.$$

- ϵ一般不能取为0.　例如推广的Cantor集合的特征函数

- 结论中的连续函数一般不能修改为多项式.

  例如$\chi_{[0,1/2]}$只取两个值, 挖去$[0,1]$的小测集合, 不可能与一个非常值多项式相同.

Lusin定理的充分性

充分性证明:　可测性是局部性质:

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\sqcup Z,\qquad f|_{F_n}\text{ 连续}$$

$$m(E\setminus F_n)<\frac{1}{n},\qquad \text{闭}F_n\subset E,\qquad m(Z)=0$$

必要性证明: 分四种情况.

(1) $f = \chi_A$:

由测度的正则性, 可取闭集$F_1 \subset A$, $F_2 \subset A^c$满足:

$$m(A \setminus F_1) < \epsilon/2, \qquad m(A^c \setminus F_2) < \epsilon/2,$$

$\chi_A|_{F_1 \bigsqcup F_2}$ 连续 (利用连续的定义证明).

续

(2) f简单:

$$f=\sum_{j=1}^{m} c_j\chi_{E_j},\quad E_j=f^{-1}(c_j),\quad c_j\text{互不相同}.$$

取闭集$F_j\subset E_j$, $\qquad m(E_j\setminus F_j)<\frac{\epsilon}{2^j}$, $\quad f|_{F_j}$ 连续.

闭集$F=\bigsqcup_j F_j$, $\qquad m(E\setminus F)<\epsilon$, $\quad f|_F$ 连续.

(3) f有界:

$$\exists \varphi_k \in S(E), \quad \varphi_k \rightrightarrows f.$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\text{闭集} F_k \subset E: \quad \varphi_k|_{F_k} \text{ 连续}, \quad m(F_k^c) < \frac{\epsilon}{2^k}$$

$$\Longrightarrow \quad F := \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k, \quad m(F^c) < \epsilon, \quad \varphi_k|_F \rightrightarrows f|_F \text{ 连续}.$$

(4) f无界:

$$g(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}\Longrightarrow(1-|g(x)|)(1+|f(x)|)=1$$

$$f(x)=\frac{g(x)}{1-|g(x)|}$$

$\exists$ 闭集F, $g|_F$ 连续 $\Longrightarrow$ $f|_F$ 连续.

注记

- 可测函数可转化为有界函数研究:

$$T : \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{L}^{\infty}(E) \quad \text{双射}$$

$$Tf(x) = \frac{f(x)}{1+|f(x)|} \qquad T^{-1}g(x) = \frac{g(x)}{1-|g(x)|}$$

$$(1-|Tf(x)(x)|)(1+|f(x)|) = 1, \quad (1+|T^{-1}g(x)(x)|)(1-|g(x)|)$$

- $\mathscr{L}^{\infty}(E)$的特点: 特征函数生成$\mathscr{L}^{\infty}(E)$.

Urysohn引理:

$$K \subset G \subset \mathbb{R}^n, \quad K\text{紧}, \quad G\text{开}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, f \in C_c(\mathbb{R}^n): \quad \chi_K \leqslant f \leqslant \chi_G.$$

Urysohn引理续

证明:　不妨设G有界 (否则考虑$G \cap B(0,k)$). 取

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, G^c)}{\operatorname{dist}(x, G^c) + \operatorname{dist}(x, K)}.$$

注记:　可取$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (利用卷积).

记号

下标c	下标b
紧支集(涉及定义域某种意义下有界)	值域有界

Tietze扩张定理:

$$K \overset{(\text{紧})}{\subset} \mathbb{R}^n \Longrightarrow C_c(K) \overset{(\text{等距})}{\subset} C_c(\mathbb{R}^n).$$

$$K \overset{(\text{闭})}{\subset} \mathbb{R}^n \Longrightarrow C_b(K) \overset{(\text{等距})}{\subset} C_b(\mathbb{R}^n)$$

$$C(K) \subset C(\mathbb{R}^n)$$

Lusin定理: 可测是连续的弱化

Theorem 2 (Lusin定理)

设$f: E \longrightarrow \mathbb{R}$可测, 则

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \ \exists\, g \in C(\mathbb{R}^n),\ \ \exists\ \text{闭集} F \subset E:$$

$$m(E \setminus F) < \epsilon, \quad f|_F = g|_F\,.$$

f定义域有界	$g \in C_c(\mathbb{R}^n)$	
f值域有界	$g \in C_b(\mathbb{R}^n)$	且L^∞范数不增加

注记：ϵ一般不能取为0. 推广的Cantor集合的特征函数+介值定理

可测函数是连续函数在几乎处处收敛意义下的极限

Theorem 3 (可测函数结构定理)

$$f \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \overset{f:E\longrightarrow\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \exists\, g_k \in C(\mathbb{R}^n):\quad g_k \xrightarrow[on\ E]{a.e.} f.$$

f定义域有界	$g_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$
f值域有界	$g_k \in C_b(\mathbb{R}^n)$

注记1: 当f值域有界时, g_k值域也有界, 且L^∞范数不增加.

注记2: 当f定义域有界时, g_k的支撑有界.

证明:

$$f\text{可测} \xrightarrow{Lusin} \exists\, g_k \in C(\mathbb{R}^n)$$

$$m[|f - g_k| > 0] < \frac{1}{k}.$$

$$\Longrightarrow \quad g_k \xrightarrow{m} f$$

$$\xrightarrow{Riesz} \exists\, g_{k_j} \xrightarrow{a.e.} f$$

注记

$$\mathscr{L}(E)=\overline{C(\mathbb{R}^n)\mid_E}^{a.e.\lim}$$

在紧集$[a,b]$上, 在a.e.收敛下, 多项式在$\mathscr{L}([a,b],\mathbb{R})$ 稠密.

测度论的解题思路

Littlewood 三原理	战略	战术
测度正则性	可测集	开集
Lusin定理	可测函数	连续函数
Egorov定理	收敛函数列	一致收敛函数列

- 可测集=开矩体$+\lim+Caratheodory=G_\delta\setminus Z=F_\sigma\cup Z$
- 可测函数$=\chi_A+(+,\cdot,\lim)=$连续$+a.e.\lim$

例题

- $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$可加+局部有界$\Longrightarrow$ 线性.

- $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$可加+可测$\Longrightarrow$ 线性.

- 若$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$在一个正测集上有界(例如局部有界), 具有可加性, 则它具有线性性.

证明: 我们要证$f(x)=f(1)x$.

$$f\text{在正测集}E\text{有界}\xrightarrow[{[-\delta,\delta]\subset E-E}]{\text{Steinhaus定理}} f\text{在原点附近}[-\delta,\delta]\text{有界}.$$

由可加性

$$nf(\frac{m}{n})=f(m)=mf(1)\Longrightarrow f(\frac{m}{n})=\frac{m}{n}f(1).$$

$$\begin{aligned}|f(x)-f(1)x| &\xlongequal[\text{取 } r\in\mathbb{Q}:\ |x-r|<\delta/n]{\forall\ \text{固定}x,n} \left|\frac{1}{n}f(n(x-r))+(r-x)f(1)\right| \\ &\leqslant \frac{M}{n}+\frac{\delta}{n}|f(1)|\to 0\end{aligned}$$

例题

证明: f可测 $\xRightarrow[f|_{[-1,1]}\text{可测}]{\textit{Lusin}}$ $\exists$ 紧$K \subset [-1,1]$: $m(K) > 0$, $f|_K$ 连续

$\xRightarrow{\textit{Tietze}}$ $f|_K$ 连续可连续扩张到$C_c(\mathbb{R})$, 一致连续.

$\xRightarrow{\textit{Steinhaus}}$ $\exists[-\delta_0, \delta_0] \subset K - K$:

$$|f(z)| \xlongequal[x,y\in K]{z=x-y} |f(x) - f(y)| \leqslant M.$$

$\xRightarrow{\text{局部有界}}$ f连续.

(1) $g \xlongequal{a.e.} f \in C(\mathbb{R}) \quad \not\Rightarrow \quad g$在$\mathbb{R}$上a.e.连续.

(例如: $g = \chi_{\mathbb{Q}}, \quad f = 0$)

(2) g在$\mathbb{R}$上a.e.连续 $\quad \not\Rightarrow \quad g \xlongequal{a.e.} f \in C(\mathbb{R})$

反证法: $\chi_{[0,+\infty)} = g \xlongequal{a.e.} f \in C(\mathbb{R})$

$$\text{range}\, f \supset \{0, 1\} \xrightarrow{f\text{连续}} \text{range}\, f \supset [0, 1] \Longrightarrow f^{-1}(0, 1)\text{非空开集}$$

- 设$\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$是全体有理多项式, $\varphi_0=0$, $f_k=\varphi_k-\varphi_{k-1}$. 则

$\forall\ f\in\mathscr{L}([a,b],\mathbb{R})$, 存在加括号的方法使得

$$f\xlongequal{a.e.}(f_1+\cdots f_{n_1})+(f_{n_1+1}+\cdots+f_{n_2})+\cdots.$$

证明: 取多项式列$p_k\longrightarrow f\ a.e.\quad \text{in}\quad [a,b]$.

取$\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$子列$\varphi_{n_k}:\ |p_k-\varphi_{n_k}|<\frac{1}{k}\quad \text{in}\ [a,b]$, 添加$\varphi_{n_0}=\varphi_0=0$.

$$\Longrightarrow f\xlongequal{a.e.}\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}=\sum_{k=0}^{\infty}(\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k})=(f_1+\cdots f_{n_1})+(f_{n_1+1}+\cdots+f_{n_2})+\cdots$$

- 设$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $m(E) < \infty$ $f_k, f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, $f_k \xrightarrow{a.e.} f$.

$$\Longrightarrow \exists\text{可测集}E_k \uparrow, \exists\text{零测集}Z : E = \lim_{k\to\infty} E_k \sqcup Z, \qquad f_k \rightrightarrows f \quad \text{in} \quad E_k$$

证明:

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \xRightarrow{Egorov} \quad \exists \text{ 可测集}A_k, \quad m(A_k^c) < \frac{1}{k}, \qquad f_k \rightrightarrows f \quad \text{in} \quad A_k$$

$$\Longrightarrow \quad E_k := \bigcup_{j=1}^{k} A_j \uparrow, \; Z = (\lim_{k\to\infty} E_k)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k^c \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c$$

$$m(Z) = 0, \qquad f_k \rightrightarrows f \quad \text{in} \quad E_k$$

- 例题

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \xrightarrow[]{\exists\ C_n>0} \frac{f_n(x)}{C_n} \xrightarrow{a.e.} 0.$$

例题

证明:
$$\lim_{k\to\infty} m[|f_n|>k] = m[f_n=\infty] = 0, \qquad \forall\ n\in\mathbb{N}$$

$$\xRightarrow{\exists k(n)\in\mathbb{N}} m[|f_n|>k(n)] < \frac{1}{2^n}$$

$$\xRightarrow{Borel-C} m\left(\overline{\lim}\left[\left|\frac{f_n(x)}{C_n}\right| > \frac{1}{n}\right]\right) = 0 \quad (C_n := nk(n))$$

$$\Longrightarrow \forall\ \epsilon>0, \quad m\left(\overline{\lim}\left[\left|\frac{f_n(x)}{C_n}\right| > \epsilon\right]\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{f_n(x)}{C_n} \xrightarrow{a.e.} 0.$$

Borel-Cantelli引理

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < +\infty \quad & \Longrightarrow \quad m(\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \chi_{A_n} \xrightarrow{a.un} 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \chi_{A_n} \xrightarrow{a.e.} 0 \\
& \Longrightarrow \quad \chi_{A_n} \xrightarrow{m} 0
\end{aligned}
$$

注记: $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0 \Longleftrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{m} 0$

作业

P119　第5, 6题

P123　第1, 2题

实分析(H), 第12次课

任广斌(中国科大)

2024-4-10

本节主要内容

- Ch3.回顾Littlewood 三原理

- Ch4. Lebesgue 积分.

§1. 积分定义

- $[a,b]$每一个可测集差不多是有限个区间的并.
- 每一个可测函数差不多是连续函数.
- 每一个逐点收敛的可测函数列差不多是一致收敛函数列.

Theorem 1

$\forall\ E \subset \mathbb{R}^n, m(E) < \infty$. 则 $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists$ 有限个开矩体$I_1, \ldots, I_s$:

$$m(E \setminus \bigcup_{k=1}^{s} I_k) < \epsilon, \qquad m(\bigcup_{k=1}^{s} I_k \setminus E) < \epsilon.$$

证明: 不妨设$E = G$是开集, 由测度正则性存在紧集$K \subset G$

$$m(G \setminus K) < \epsilon.$$

$$G = \bigcup \text{开矩体}, \qquad K \subset \bigcup_{\text{有限}} \text{开矩体} \subset G.$$

Lusin定理: 可测是连续的弱化

Theorem 2 (Lusin定理)

设$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$可测, 则

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \ \exists\ g \in C(\mathbb{R}^n),\ \ \exists\ \text{闭集} F \subset E :$$

$$m(E \setminus F) < \epsilon, \quad f|_F = g|_F\,.$$

f定义域有界	$g \in C_c(\mathbb{R}^n)$	
f值域有界	$g \in C_b(\mathbb{R}^n)$	且L^∞范数不增加

Theorem 3 (Egorov定理)

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f$$

$$\xLeftrightarrow{m(E)<+\infty} \quad f_k \xrightarrow{a.un} f$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\ \epsilon > 0, \exists E_\epsilon \subset E: \quad m(E_\epsilon) < \epsilon, \qquad f_n \overset{onE\setminus E_\epsilon}{\rightrightarrows} f;$$

回顾：记号

- $E \subset \mathbb{R}^n$可测.

S^+	$S^+(E)$	非负简单可测	$\mathbb{R}$值
$\mathscr{L}^+$	$\mathscr{L}^+(E)$	非负可测	$\overline{\mathbb{R}}$值
$\mathscr{L}^1$	$\mathscr{L}^1(E)$	可积	$\overline{\mathbb{R}}$值 (本质$\mathbb{R}$ 值)

积分定义

- 标准四步:　　从小框架(直观)扩充到大框架(洞察力)

$$\chi_A \xrightarrow[\text{代数结构、极限结构、序结构}]{S^+,\quad \mathscr{L}^+} \mathscr{L}^1$$

- Lebesgue 积分记号:

$$\int_E f(x)dx = \int_E f(x)dm(x) = \int_E f$$

- 三个层次

$$\mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R}^n \Longrightarrow (X, \Gamma, d\mu)$$

积分定义四部曲

(1): 面积=长×宽的推广:

$$\int_E \chi_A := m(A)$$

(2): 线性性的要求:

$$\int_E \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{E_j} \xlongequal[\text{标准表示}]{f=\sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{E_j} \in S^+} \sum_{j=1}^{k} c_j m(E_j).$$

注记1： 约定:

$$0\cdot\infty=0.$$

$$(\text{宽}=0\Longrightarrow\text{面积}=0)$$

注记2： Lebesgue 积分剖分值域$\Longrightarrow$ 第一步、第二步成立.

注记3： Lebesgue 积分几何意义$\xrightarrow[\text{高}=c_j,\text{宽}=m(E_j)]{\text{f下方图形面积}}$ 第二步良定.

(3) 单调收敛定理嵌入到积分定义:

$$\int_E f :\xlongequal{S^+ \ni \varphi_k \uparrow f \in \mathscr{L}^+} \lim_{k\to\infty} \int_E \varphi_k$$

续

注记: 该定义自然:

利用可测函数的四部曲, 通过线性性和单调收敛定义积分

$$\chi_A \xrightarrow{+,\cdot,\lim} \mathscr{L}^1$$

$$\Longrightarrow \int_E f = \int_E \chi_A + (+,\cdot,\lim)$$

续

注记:　需要证明良定性:

$$\int_E f \xlongequal{\text{待证}} \sup_{S^+ \ni \varphi \leqslant f} \int_E \varphi.$$

续

(4) 一般情形:

$$\int_E f :\xlongequal[\text{f可测}]{f=f^+-f^-} \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

注记: 陷阱:

$$+\infty - (+\infty)$$

续

$$f \in \mathscr{L}^1(E) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f^{\pm} \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow \int_E |f| < +\infty$$

$$f\text{在E上积分存在(有定义)} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f^{\pm}\text{之一} \in \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow \int_E f \in \overline{\mathbb{R}}$$

注记

- 不是所有集合都能定义测度:

只对可测集.

- 不是所有函数都能定义积分:

只对可测特征函数的代数和极限运算得到的函数

- 不是所有可测函数都能定义积分:

需要避开$(+\infty)-(+\infty)$陷阱.

- 不是所有可定义积分的函数都可积

两种积分的差别

Riemann积分	Lebesgue积分
非绝对收敛的积分理论	绝对收敛的积分理论
不适用于高维	适用于高维
交换次序条件苛刻	交换次序条件较弱
非完备	完备
局限性	释放了积分的手脚, 统一了离散和连续

积分良定性: 不依赖于φ_k的选取

S^+性质: 本节总是假设$f, g, f_k, g_k \in S^+$.

(1) 线性: 积分作为映照是线性映照

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

(只要对特征函数验证: 归结于积分的定义和测度论)

积分良定性: 不依赖于φ_k的选取

(2) 单调性: 积分作为映照保序

$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_E f \leqslant \int_E g.$$

(只要对特征函数验证: 归结于测度的单调性)

积分良定性: 不依赖于φ_k的选取

(3) 可积性判别: $f \in \mathscr{L}^1 \overset{f\in S^+}{\Longleftrightarrow} m[f>0] < +\infty.$

证明: 假设$f \in S^+$取的非零值:

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k.$$

$$\Longrightarrow \quad a_1\chi_{[f>0]} \leqslant f|_{[f>0]} \leqslant a_k\chi_{[f>0]}.$$

积分良定性(续)

(4) 单调收敛： (将测度命题由$A=\chi_A$推广到S^+)

(4a) $f_n \downarrow f, \quad f_1 \in \mathscr{L}^1 \xRightarrow{S^+\text{框架内}} \int_E f_n \downarrow \int_E f.$

(4b) $f_n \uparrow f \xRightarrow{S^+\text{框架内}} \int_E f_n \uparrow \int_E f.$

(4c) $f_n \uparrow, g_n \uparrow, \quad \lim f_n \leqslant \lim g_n \xRightarrow{S^+\text{框架内}} \lim \int_E f_n \leqslant \lim \int_E g_n.$

证明: (4a) $S^+ \cap \mathscr{L}^1 \ni f_n \downarrow 0.$

$$\forall\, \epsilon > 0, \qquad f_n \leqslant M\chi_{[f_n \geqslant \epsilon]} + \epsilon\chi_{[0<f_n\leqslant\epsilon]}$$

$$M = \max f_1, \qquad [0 < f_n \leqslant \epsilon] \subset [f_1 > 0]$$

$$0 \leqslant \overline{\lim} \int_E f_n \leqslant \epsilon m[f_1 > 0].$$

证明: (4b)　情形1　$f \in \mathscr{L}^1$:

$$f - f_n \downarrow 0 \xRightarrow{(4a)} \int_E f - f_n \downarrow 0.$$

情形2　$f \notin \mathscr{L}^1$:

$$f \notin \mathscr{L}^1 \xRightarrow[f \in S^+]{(3)} \exists a > 0, \quad m[f \geqslant a] = +\infty$$

$$f_n \geqslant \frac{a}{2}\chi_{[f_n \geqslant \frac{a}{2}]} \xRightarrow{(2)} \int_E f_n \geqslant \frac{a}{2} m[f_n \geqslant \frac{a}{2}] = +\infty.$$

(4c) $f_n \uparrow, g_n \uparrow, \quad \lim f_n \leqslant \lim g_n \xRightarrow{S^+\text{框架内}} \lim \int_E f_n \leqslant \lim \int_E g_n.$

(注意此时不要求$\lim f_n \in S^+$, $\lim g_n \in S^+$)

(4c) min 阀门: 处理双指标技巧

$\forall$固定m, $\min\{g_n, f_m\} \uparrow f_m.$

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \int_E \min\{g_n, f_m\} \overset{(4b)}{=\!=} \int_E f_m.$$

注记: 积分的良定性来自于(4c).

积分的等价定义

- $$f \in \mathscr{L}^+(E) \quad \Longrightarrow \quad \int_E f = \sup_{S^+ \ni \varphi \leqslant f} \int_E \varphi$$

证明:
$$
\begin{aligned}
\int_E f \quad & \xlongequal[\text{def}]{S^+\ni\varphi_k\uparrow f\in\mathscr{L}^+} \quad \lim_{k\to\infty}\int_E \varphi_k \\
& \leqslant \quad \sup_{S^+\ni\varphi\leqslant f}\int_E \varphi \\
& \xlongequal{\exists S^+\ni\psi_k\leqslant f} \quad \lim_{k\to\infty}\int_E \psi_k \\
& \overset{\text{取定}S^+\ni f_k\uparrow f}{\leqslant} \quad \lim_{k\to\infty}\int_E \underbrace{\max\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k,f_k\}}_{\in[f_k,f]}\uparrow \\
& \xlongequal{def} \quad \int_E f
\end{aligned}
$$

例题

- 设C是$[0,1]$区间三等分Cantor集,

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{if } x\in C\\ \dfrac{1}{n}, & \text{if } x\in \text{第}n\text{次去掉的长为}3^{-n}\text{的区间}.\end{cases}$$

计算$\int_0^1 f(x)dx$.

例题续

解:
$$[0,1] = C \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}, \qquad |I_{n,k}| = \frac{1}{3^n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{n} \chi_{I_{n,k}}(x)$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{n} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \ln \sqrt{3}$$

Lebesgue积分=Riemann积分+测度论

$$\int_E f(x)dx \xlongequal[E=[a,b]]{f\in L^+\cap L^\infty} \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n m(f^{-1}[y_{i-1},y_i))y_{i-1}$$

$$= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n \Big(m(f^{-1}[y_{i-1},+\infty)) - m(f^{-1}[y_i,+\infty))\Big)y_{i-1}$$

$$= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n m(f^{-1}[y_i,+\infty))(y_i - y_{i-1})$$

$$= \int_0^{+\infty} m(f^{-1}[y,+\infty))\downarrow dy$$

由微元法看积分的蛋糕表示

$$\int_E f(x)dx \xlongequal[f\text{非负有界可测}]{\text{积分的蛋糕表示}} \int_0^{+\infty} m(f^{-1}[t,+\infty)) \downarrow dt$$

由微元法看积分的蛋糕表示

- f图形下方的水平截面:

$$\{(x,t_0):\ \ x\in E,\ 0\leqslant t_0\leqslant f(x)\},\qquad 其中t_0\in[0,\infty)固定.$$

- 该集合的一维测度:

$$m(\{x:\ \ x\in E,\ 0\leqslant t_0\leqslant f(x)\})=m(f^{-1}[t_0,+\infty))$$

- f的图形的下方位于两条直线$y=t$和$y=t+dt$之间的面积

$$m(f^{-1}[t,+\infty))dt$$

- 利用微元法, f的图形的下方的面积为

$$\int_0^{+\infty}m(f^{-1}[t,+\infty))dt$$

例题

- 设$f \in \mathscr{L}^{+}([a,b],\mathbb{R})$ 则

$$f \in \mathscr{L}^{1}[a,b] \xLeftrightarrow{\text{单调减函数Riemann可积性}} \sum_{k=0}^{\infty} m[f \geqslant k] < +\infty.$$

作业

P189　第1题

实分析(H), 第13次课

任广斌(中国科大)

2024-4-15

本节主要内容

- 积分的性质:

(与Riemann积分相似)

- 关于绝对连续测度的积分

(积分的测度论面目)

- 交换次序的四个等价定理

(交换次序定理是实分析伸向其它学科的重要触角)

- $E \subset \mathbb{R}^n$可测.

$S^+ = S^+(E, \mathbb{R})$	非负简单可测
$\mathscr{L}^+ = \mathscr{L}^+(E, \overline{\mathbb{R}})$	非负可测
$\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(E, \overline{\mathbb{R}})$	可积

Lebesgue 积分定义回顾

- 测度论 || 积分论

测度论		积分论
χ_A	$\xleftarrow[\text{限制}]{\text{提升}} \xrightarrow{}$	$\mathscr{L}^1 \cup \mathscr{L}^+$
测度 σ 可加性		交换次序四大定理

- 测度论和积分论是一体两面, 不能分割对待.

续

注记: 从特征函数建造可积函数, 需要三种结构:

向量空间结构, 拓扑结构, 序结构.

$$\int_E \chi_A := m(A),$$

$$\int_E f :\xlongequal{S^+\ni\varphi_k\uparrow f\in\mathscr{L}^+} \lim_{k\to\infty}\int_E \varphi_k = \sup_{S^+\ni\varphi\leqslant f}\int_E \varphi.$$

$$\int_E f :\xlongequal[f^+ \text{ or } f^- \in \mathscr{L}^1]{f\in\mathscr{L}} \int_E f^+ - \int_E f^-, \quad f^\pm = \frac{|f| \pm f}{2}$$

$$f \in \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow f^\pm \in \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow \int_E |f| < \infty.$$

(1) 线性: $f, g \in \mathscr{L}^1(E), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

证明: $S^+(E)$性质 $\xrightarrow{\uparrow \lim}$ $\mathscr{L}^+(E)$性质.

$\mathscr{L}^+(E)$性质 $\xrightarrow{f=f^+-f^-}$ $\mathscr{L}^1(E)$性质.

$$-f = f^- - f^+ \xrightarrow{\text{积分定义}} \int_E -f = -\int_E f.$$

$$f^+ - f^- + g^+ - g^- = f + g = (f+g)^+ - (f+g)^-$$

$$\xRightarrow{\text{移项}} \quad f^+ + g^+ + (f+g)^- = f^- + g^- + (f+g)^+$$

$$\xRightarrow{\text{积分}} \quad \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E (f+g)^- = \int_E f^- + \int_E g^- + \int_E (f+g)^+$$

$$\xRightarrow{\text{移项}} \quad \int_E f + \int_E g = \int_E (f+g)$$

(2) 单调性: $f, g \in \mathscr{L}^1(E)$

$$f \leqslant g \xrightarrow{\text{不妨设f=0}} \int_E f \leqslant \int_E g.$$

(3) 三角不等式(积分统一了离散和连续):

$$\left|\int_E f\right| \leqslant \int_E |f|.$$

证明: $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, 积分即可.

绝对连续测度

- 绝对连续测度: $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), \mu)$

$$\mu(A) \xlongequal{f \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^1(E)} \int_A f dm, \qquad \forall\ A \subset E \text{ Lebesgue可测}$$

- 关于绝对连续测度的积分:

$$\int_E g d\mu = \int_E g f dm, \qquad \forall g \in \mathscr{L}^1(E, d\mu).$$

测度与积分关系

注记1： 绝对连续测度也记为

$$d\mu = fdm$$

注记2： 由测度产生积分的桥梁是特征函数:

$$\mu(A) = \int_A fdm \Longleftrightarrow \int_E gd\mu = \int_E gfdm \quad \text{其中} g = \chi_A$$

- 测度是特征函数的积分
- 积分作为曲边梯形的面积是测度

- $A \subset E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$积分存在. 则

$$\int_E \chi_A \, f dm = \int_A f dm.$$

证明: 四部曲:

(1) f是特征函数, 归结于测度论.

(2). 结论可以推广到$f \in S^+$情形.

(3). $f \in \mathscr{L}^+$情形可转化为$f \in S^+$情形.

(4). $\int_E f\exists$, 不妨设$f^+ \in \mathscr{L}^1(E)$, 则$f^+ \in \mathscr{L}^1(A)$.

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- \overset{(3)}{=} \int_E f^+\chi_A - \int_E f^-\chi_A = \int_E f\chi_A.$$

- 积分限的可加性.

$$\int_E f = \int_A f + \int_{E\setminus A} f$$

注记1:　证明来自于将积分全部化为E上积分.

注记2:　这实际上是连续测度的有限可加性.

注记2:　积分是集腋成裘、化零为整的手段。

积分限的剖分产生了化整为零的拆分技巧

零测集的作用

- 设$f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$积分存在, $A \subset E$ 是零测集. 则

$$\int_E f = \int_{E \setminus A} f, \qquad \int_A f = 0.$$

证明: $$\int_A f^{\pm} \leqslant \int_A |f| = \sup_{S^+ \ni \varphi \leqslant |f|} \int_A \varphi = 0.$$

零测集不影响积分存在性, 可积性, 积分值.

- 设$f, g \in \mathscr{L}(E)$, $f \xlongequal{a.e.} g$. 则

(1) $\displaystyle\int_E f\exists \Longleftrightarrow \int_E g\exists.$

(2) $f \in \mathscr{L}^1(E) \Longleftrightarrow g \in \mathscr{L}^1(E).$

(3) $\displaystyle\int_E f\exists \Longrightarrow \int_E f = \int_E g.$

可积函数几乎处处有限

- 设$f \in \mathscr{L}^1(E) \quad \Longrightarrow \quad |f| < \infty \quad a.e.\ in\ E.$

证明: $|f| \geqslant k\chi_{[|f|=+\infty]}, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad +\infty > \int_E |f| \geqslant k\ m[|f| = +\infty]$$

$$\Longrightarrow \quad m[|f| = +\infty] = 0$$

约定

- 空间$\mathscr{L}^1(E)$ 中的约定:　(Banach空间的需求)

a.e.相等视为恒等,

a.e. 收敛视为收敛.

因此可积函数视为恒取有限值.

- 在上述约定下, 将空间记为$L^1(E)$. $L^1(E)$是Banach 空间.

积分理论只能在a.e.相等层次分辨函数

- 设$f \in \mathscr{L}^+(E) \cup \mathscr{L}^1(E)$, 则

$$f \xlongequal{a.e.in\ E} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_A f = 0, \quad \forall A \subset E\text{可测}.$$

- 采用积分手段, 判别函数相等.

证明: 充分性. 反证法:

$$m[f \neq 0] > 0 \Longrightarrow 不妨设 m[f > 0] > 0$$

$$\xRightarrow{[f>0]=\bigcup_k [f>1/k]} \exists \epsilon_0 = \frac{1}{k_0},\ m[f > \epsilon_0] > 0$$

$$\Longrightarrow \int_{[f>\epsilon_0]} f \geqslant \epsilon_0 m[f > \epsilon_0] > 0$$

积分交换次序定理

下列等价:

- 测度σ可加性
- Levi单调收敛定理
- Fatou引理
- Lebesgue控制收敛定理
- Fubini定理

注记: 交换次序定理在$\mathscr{L}^+ \cup \mathscr{L}^1$的框架内.

Levi单调收敛定理↑

Theorem 1 (Levi单调收敛定理)

$$L^+(E) \ni f_n \uparrow f \Longrightarrow \int_E f_n \uparrow \int_E f.$$

单调收敛函数列相伴的单调简单函数列

$$\xrightarrow{\quad S^+ \text{ 单调增加} \quad}$$

$$\begin{array}{llllll}
\varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \cdots \longrightarrow & f_1 \\
\varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \cdots \longrightarrow & f_2 \\
\varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \cdots \longrightarrow & f_3 \\
\cdots & & & & \\
\varphi_{m1} & \varphi_{m2} & \varphi_{m3} & \cdots \longrightarrow & f_m \\
\cdots & & & & \vdots \\
 & & & & \downarrow (\text{单调增加}) \\
g_1 & g_2 & g_3 & \cdots \longrightarrow & f
\end{array}$$

$$\xrightarrow[\quad S^+ \text{ 单调增加} \quad]{}$$

$$g_j := \max\{\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \cdots, \varphi_{jj}\} \leqslant f_j, \qquad g_j \uparrow f$$

单调最大化函数列例子

$$\begin{array}{cccccl}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \longrightarrow 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \longrightarrow 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \longrightarrow 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \longrightarrow 1 \\
\cdots & & & & & \qquad\quad \vdots \\
 & & & & & \qquad\quad \downarrow \\
 & & & & & \qquad\quad 1
\end{array}$$

重要性质:

$$g_j := \max\{\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \cdots, \varphi_{jj}\} \uparrow f$$

证明: 固定x, 只考虑$f(x) \in \mathbb{R}$情形. 固定ϵ, 选取$k_0 > m_0$:

$$f(x) - \epsilon < \varphi_{m_0 k_0}(x) \leqslant f_{m_0}(x) \leqslant f(x)$$

$$\Longrightarrow \qquad f(x) - \epsilon < \varphi_{m_0 k_0} \leqslant g_{k_0} \leqslant f_{k_0} \leqslant f$$

证明

- $L^+(E) \ni f_n \uparrow f \Longrightarrow \int_E f_n \uparrow \int_E f.$

证明: 取$S^+ \ni \varphi_{kj} \uparrow f_k$, $g_j := \max\{\varphi_{1j}, \varphi_{1j}, \cdots, \varphi_{jj}\} \leqslant f_j$, $g_j \uparrow f$

$$\int_E f = \lim \int_E g_j \leqslant \lim \int_E f_j \leqslant \int_E f.$$

Theorem 2 (Levi单调收敛定理)

$$\mathscr{L}^{+}(E) \cap \mathscr{L}^{1}(E) \ni f_n \downarrow f \Longrightarrow \int_E f_n \downarrow \int_E f.$$

证明: 不妨设f_1 恒取有限值.

$$\begin{aligned} f_1 - f_n \uparrow f_1 - f \quad &\Longrightarrow \quad \int_E f_1 - f_n \uparrow \int_E f_1 - f \\ &\xRightarrow{f_n \in L^1} \quad \int_E f_n \downarrow \int_E f. \end{aligned}$$

Theorem 3 (Fatou引理)

$$f_n \in \mathscr{L}^+(E) \Longrightarrow \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

反例:

$$f_n(x) = \frac{|x|}{n}, \quad \chi_{(n,n+1)}(x), \quad n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Theorem 4 (Lebesgue控制收敛定理)

设$f_n \in \mathscr{L}(E)$, $|f_n| \leqslant g \in L^1$. 则

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{L^1} f, \quad \int_E f_n \longrightarrow \int_E f.$$

反例: 无控制收敛条件下的面积逃逸:

- 面积沿着x轴逃逸:

$$f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

- 面积沿着y轴逃逸:

$$f_n(x) = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

- 连续版本的面积逃逸

$$f_n(x) = \frac{|x|}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

等价定理的证明

- *Levi*单调收敛定理 $\Longrightarrow$ *Fatou*引理:

$$\int_E \underline{\lim} f_n = \int_E \lim_{k\to+\infty} \inf_{n\geqslant k} f_n \xlongequal{Levi} \lim_{k\to+\infty} \int_E \inf_{n\geqslant k} f_n \leqslant \underline{\lim}_{k\to+\infty} \int_E f_k.$$

续

- *Fatou*引理 $\Longrightarrow$ *Lebesgue*控制收敛定理:

$$
\begin{aligned}
|f_n| \leqslant g \quad & \Longrightarrow \quad 2g - |f_n - f| \in \mathscr{L}^+ \\
& \Longrightarrow \quad \int_E \varliminf_{n\to+\infty} (2g - |f_n - f|) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \int_E (2g - |f_n - f|) \\
& \Longrightarrow \quad \varlimsup_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

不等式如何产生等式?

等价证明续

- *Lebesgue*控制收敛定理 $\Longrightarrow$ *Levi*单调收敛定理:

  只要考虑$f \in \mathscr{L}^+ \setminus \mathscr{L}^1$情形:

  $$取S^+ \ni \varphi_{kj} \uparrow f_k, \quad g_j := \max\{\varphi_{1j}, \varphi_{1j}, \cdots, \varphi_{jj}\} \leqslant f_j, \quad g_j \uparrow f$$

  $$\lim \int_E f_j \geqslant \lim \int_E g_j = \int_E f = +\infty.$$

作业

P143　第9题

P149　第3题

P159　第4题

P189　第9题

实分析(H), 第14次课

任广斌(中国科大)

2024-4-17

本节主要内容

- 逐项积分定理
- 含参变量积分

回顾积分理论

- 积分理论的精髓:
  - 对y轴分割$\Longrightarrow$ Lebesgue积分$\Longrightarrow$抽象积分理论(值域推广).
  - $\chi_A \xrightarrow{+,\cdot,\lim} L^+ \cup L^1.$ (强调测度和积分是一体两面)
- 积分理论在可测集、可测函数框架内.
- 交换次序定理$L^+ \cup L^1$在框架内.

计算v.s.结构

Riemann积分	Lebesgue积分
侧重计算	侧重结构
古典理论特色	当代数学特色

由微元法看积分的蛋糕表示

Layer cake reprersentation: $f \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^\infty(E)$.

$$\int_E f(x)dx \;=\!=\!=\!=\!=\!=\; \int_0^{+\infty} m(f^{-1}[t, +\infty)) \downarrow dt$$

曲边梯形的水平集

固定$t_0 \geqslant 0$.

$$
\begin{aligned}
& (x, t_0) \in \text{曲边梯形}(f\text{的图形的下方})\text{的水平截面} \\
\Longleftrightarrow \quad & t_0 \leqslant f(x) \\
\Longleftrightarrow \quad & x \in f^{-1}[t_0, +\infty)
\end{aligned}
$$

由微元法看积分的蛋糕表示续

- f的图形的下方位于两条直线$y=t$和$y=t+dt$之间的面积
$$m(f^{-1}[t,+\infty))dt$$

- 利用微元法, f的图形的下方的面积为
$$\int_0^{+\infty} m(f^{-1}[t,+\infty))dt$$

注记

Riemann积分	Lebesgue积分
切片面包	层状蛋糕

注记

- $L^1(E)$是Banach空间,
- $L^1(E)$中收敛是a.e.收敛, L^1收敛.
- 可积函数不妨设恒取有限值.

交换积分次序的五个等价定理

测度的σ可加性等价于:

Levi	L^+	$f_n \uparrow f \xrightarrow{f_n \in L^+} \int f_n \uparrow \int f$
Fatou	L^+	$\int \underline{\lim} f_n \overset{f_n \in L^+}{\leqslant} \underline{\lim} \int f_n$
Lebesgue	L^1	$f_n \xrightarrow{a.e.} f \xRightarrow[f_n\text{可测}]{\lvert f_n\rvert \leqslant g \in L^1} f_n \xrightarrow{L^1} f, \int f_n \longrightarrow \int f$
Fubini	$L^+ \cup L^1$	$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \overset{f \in L^+ \cup L^1}{=\!=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm(y) \Big) dm(x).$

- 交换次序的等价定理在$L^+ \cup L^1$框架内

Levi	$f \in L^+$
Lebesgue	$f \in L^1$
Fatou	$f \in L^+$
Fubini	$f \in L^+ \cup L^1$

反例:

$$f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x), \quad n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x), \quad \frac{|x|}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

- Fatou引理“ $<$ ”可取到(面积可能逃逸到无穷).
- Lebesgue控制收敛定理(面积不会逃逸到无穷)

逐项积分定理

- Fubini定理的级数形式:

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx \xlongequal{f(n,x)\in L^+\cup L^1(\mathbb{N}\times E)} \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

- $f_n(x) =: f(n,x) \in L^1(\mathbb{N}\times E) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f(n,x)|dx < \infty.$

逐项积分定理注记

- L^+情形, 来自单调收敛定理.
- L^1情形, 来自控制收敛定理.
- L^+情形:
  - 单调收敛定理的级数形式.
  - 测度σ可加性由特征函数到非负可测函数的推广
  - Fubini定理的级数形式.

- 积分关于积分限的σ可加性.

$$\int_E f \xlongequal[E=\sqcup E_k, E_k \text{可测}]{f\in L^+(E)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f.$$

注记

- 积分关于积分限的σ可加性.
- Fubini定理的级数形式
- 关于绝对连续测度$f\,dm$的σ可加性.

绝对连续测度

- 测度空间$(E, \mathscr{L}(E), d\mu)$测度空间

$$f \in \mathscr{L}^{+} \cap \mathscr{L}^{1}, \qquad d\mu = fdm.$$

$$\mu(E) = \int_E d\mu = \int_E fdm.$$

$$\int_E gd\mu = \int_E gfdm, \qquad \forall g \in \mathscr{L}^{1}(E, d\mu).$$

- 注记: 积分是测度(绝对连续测度).

其雏形: Riemann积分是曲边梯形的面积.

- 含参量积分

$$\text{初等函数} \xrightarrow{\text{含参量积分}} \text{非初等函数}$$

- 注记:

Riemann框架下的含参量积分 $\Longrightarrow$ Lebesgue框架下的含参量积分

含参量积分理论: 连续性

- 含参量积分的连续性:

$$|f(\cdot,t)|\leqslant g\in L^1(E)\ \xRightarrow[\text{关于}x\in E\text{可积}]{f\text{关于}t\in[a,b]\text{连续}}\ \int_E f(x,t)dx\in C[a,b].$$

- 含参量积分保持连续性:

只要可积性加强为控制可积性

含参量积分连续性的证明

证:
$$\lim_{t\to t_0}\int_E f(x,t)dx=\int_E f(x,t_0)dx$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_E f(x,t_n)dx \xlongequal{\text{控制收敛}} \int_E f(x,t_0)dx,\quad \forall\, t_n\to t_0.$$

连续版本的Lebesgue控制收敛定理

Theorem 1 (连续版本的Lebesgue控制收敛定理)

假设$f(x,t)$关于x在E上可测, 关于t在$[a,b]$连续, 而且

$$|f(\cdot,t)| \leqslant g \in L^1(E), \qquad \forall t \in [a,b]$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to t_0} \int_E f(x,t)dx = \int_E \lim_{t\to t_0} f(x,t)dx, \qquad \forall\, t_0 \in [a,b].$$

Theorem 2 (导数和积分交换次序)

$$\left|\frac{\partial f(\cdot,t)}{\partial t}\right| \leqslant g \in L^1(E)$$

$$\xrightarrow[f_t\text{存在}]{f,\, f_t\text{关于}x\text{可积}} \frac{d}{dt}\int_E f(x,t)dx = \int_E \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx.$$

注记

只要函数及其导数可积, 而且关于导数的可积性加强为控制可积性.

- 含参量积分保持可导性
- 求导和积分可以交换次序.

证明:

$$\text{右边}\Big|_{t=t_0} \xlongequal[\text{中值定理}]{\forall\ t_0\neq t_n\to t_0} \int_E \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}}_{=f'(x,\xi_n)} dx$$

$$\xlongequal{\text{控制收敛}} \lim_{n\to\infty} \frac{\int_E f(x,t_n)dx - \int_E f(x,t_0)dx}{t_n-t_0}$$

$$\xlongequal{\qquad} \text{左边}\Big|_{t=t_0}.$$

Borel-Cantelli引理:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1(E)} < +\infty \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{a.e.} 0.$$

注记:

$$f(n,x) := f_n(x) \in L^1(\mathbb{N} \times \mu) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1(E)} < +\infty$$

注记

- a.e.收敛性的证明转化为L^1收敛性(积分理论)处理.
- (加强)L^1收敛蕴含a.e.收敛
- 取f为特征函数, 得到古典的测度论结果.

问题: 单调收敛定理的条件下是否能推出L^1收敛性?

证明: $$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1(E)} = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \, dm$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \in L^1(E)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \overset{a.e.}{<} +\infty.$$

$$\Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{a.e.} 0.$$

例题1

设$f:[0,1]^2\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & \text{if } xy\in\mathbb{Q}\\ \\ 1, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

计算

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy$$

解:

$$[xy \in \mathbb{Q}] = \bigcup_n [xy = r_n] = \mathbb{R}^2\text{中零测集}$$

$$\Longrightarrow \qquad f \xlongequal{a.e.} 1$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy = \int_{[0,1]^2} 1dxdy = 1.$$

例题2

设$f \in L^1(E)$, $f > 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$可测. 证明:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f(x)^{1/k} dx = m(E).$$

续

证明: 只要证明极限和积分可交换次序, 为此将积分限剖分成两部分

$$E = [f \geqslant 1] \sqcup [f < 1].$$

在$[f \geqslant 1]$上: $f(x)^{1/k} \leqslant f(x)$, 可利用Lebesgue控制收敛定理.

在$[f < 1]$上: $f(x)^{1/k} \uparrow 1$, 可利用Levi单调收敛定理.

例题3

证明下述结论:

$$f \in L^1[0,1] \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n \log(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}) dx = 0$$

证明:

$$\forall x > 0, \quad \log(1+x^2) \le x \xRightarrow{\text{控制收敛定理}} \text{极限和积分可交换次序}$$

$$\log(1+x^2) \le x^2 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n\log(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}) = 0$$

作业

P159　第3, 6题

P190　第10, 12题

实分析(H), 第15次课

任广斌(中国科大)

2024-4-22

期中考试

- 考试时间：2024年4月27日(星期六)　　晚上7:30-9:30
- 内容：PPT 1–14
- 地点：5102

本讲内容

- 推广的交换次序的定理
  - 非负性条件的弱化
  - 控制性条件的弱化

测度的σ可加性等价于:

Levi	L^+	$f_n \uparrow f \xrightarrow{f_n \in L^+} \int f_n \uparrow \int f$
Fatou	L^+	$\int \underline{\lim}\, f_n \overset{f_n \in L^+}{\leqslant} \underline{\lim} \int f_n$
Lebesgue	L^1	$f_n \xrightarrow{a.e.} f \xRightarrow[f_n\text{可测}]{\lvert f_n\rvert \leqslant g \in L^1} f_n \xrightarrow{L^1} f, \int f_n \longrightarrow \int f$
Fubini	$L^+ \cup L^1$	$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \overset{f \in L^+ \cup L^1}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dm(y) \Big) dm(x).$

- 交换次序的等价定理在$L^+ \cup L^1$框架内

Levi	$f \in L^+$
Lebesgue	$f \in L^1$
Fatou	$f \in L^+$
Fubini	$f \in L^+ \cup L^1$

推广1

- 弱化的非负性

推广的Levi单调收敛定理

- 推广的法则:

$$f \in \mathscr{L}^{+} \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-} \equiv 0 \quad \xrightarrow{\text{推广}} \quad f^{-} \in \mathscr{L}^{+} \cap \mathscr{L}^{1}$$

推广的Levi单调收敛定理↑

Theorem 1 (推广的Levi单调收敛定理)

$$\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}) \ni f_n \uparrow f \quad \xRightarrow{\quad f_1^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1 \quad} \quad \int_E f_n \uparrow \int_E f.$$

注记

序结构:

$$f^+ = \frac{|f|+f}{2} = \max\{f,0\}, \qquad f^- = \frac{|f|-f}{2} = \max\{-f,0\} = (-f)^+$$

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \max\{f,0\} \leqslant \max\{g,0\} \quad \Longrightarrow \quad f^+ \leqslant g^+$$

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \min\{f,0\} \leqslant \min\{g,0\} \quad \Longrightarrow \quad f^- \geqslant g^-$$

续

$$f_n \uparrow f \quad \Longrightarrow \quad f_n^- \downarrow f^-, \qquad \forall n$$

$$f_1^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1 \quad \overset{f_n \uparrow f}{\Longleftrightarrow} \quad f_n^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1, \qquad \forall n$$

证明:　情形1: $f_1^+ \notin \mathscr{L}^1$

$$\int_E f_1 = \int_E f_1^+ - \int_E f_1^- = +\infty \Longrightarrow \int_E f_n = +\infty$$

续

情形2:　$f_1^+ \in \mathscr{L}^1$

$$f_1^\pm \in \mathscr{L}^1 \implies f_1 \in \mathscr{L}^1 \qquad (\text{不妨设} f_1 \text{恒取有限值})$$

$$\implies 0 \leqslant f_n - f_1 \uparrow f - f_1 \implies \int_E (f_n - f_1) \uparrow \int_E (f - f_1)$$

$$\implies \int_E f_n \uparrow \int_E f$$

Theorem 2 (推广的Levi单调收敛定理)

$$\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}) \ni f_n \downarrow f \xrightarrow{f_1^+ \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1} \int_E f_n \downarrow \int_E f.$$

续

证明: 利用序结构中乘以−1的对合即可.

$$f_n \downarrow f, \qquad f_1^+ \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1$$

$$\xRightarrow{f^- = \frac{|f|-f}{2}} \quad -f_n \uparrow -f, \qquad (-f_1)^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E (-f_n) \uparrow \int_E (-f)$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E f_n \downarrow \int_E f$$

推广的Fatou引理

Theorem 3 (推广的Fatou引理)

$$f_n \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xRightarrow{(\inf\limits_n f_n)^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1} \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

$$(\inf_n f_n)^- \geqslant f_k^-, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \xRightarrow{(\inf\limits_n f_n)^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1} f_k^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1$$

反之不成立例如$f_n = -n$.

续

证明:

$$f_n \geqslant \inf_{k\geqslant n} f_k \uparrow \varliminf_{n\to\infty} f_n$$

$$\xRightarrow{\text{推广的单调收敛定理}} \int_E f_n \geqslant \int_E \inf_{k\geqslant n} f_k \uparrow \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n$$

$$\Longrightarrow \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \int_E \inf_{k\geqslant n} f_k = \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n$$

推广的Fatou引理

Theorem 4 (推广的Fatou引理)

$$f_n \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\quad (\sup\limits_n f_n)^+ \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1 \quad} \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

推广的交换积分次序定理

测度的σ可加性等价于:

Levi $\uparrow$	f^-好	$f_n \uparrow f \Longrightarrow \int f_n \uparrow \int f$
Levi $\downarrow$	f^+好	$f_n \downarrow f \Longrightarrow \int f_n \downarrow \int f$
Fatou	$(\inf\limits_n f_n)^-$好	$\int \underline{\lim}\, f_n \leqslant \underline{\lim} \int f_n$
Fatou	$(\sup\limits_n f_n)^+$好	$\int \overline{\lim}\, f_n \geqslant \overline{\lim} \int f_n$

推广2

- 控制收敛条件弱化为控制收敛序列条件

推广的Lebesgue控制收敛定理

- 推广的Lebesgue控制收敛定理

控制条件:

$$\text{由一个函数控制} \xRightarrow{\text{减弱}} \text{用函数列控制}$$

$$\text{一致控制} \xRightarrow{\text{减弱}} \text{非一致控制}$$

L^1收敛和交换积分次序的等价性

- 假设

(1) $f_n \xrightarrow{a.e.} f$

(2) $f_n, f \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^1(E)$.

则

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n.$$

证明:“ $\Longrightarrow$ ” : $\quad \overline{\lim}\left|\int_E f_n - \int_E f\right| \leqslant \overline{\lim}\int_E |f_n - f| = 0.$

续

$$\text{“}\Longleftarrow\text{”}:\quad (f_n+f)-|f_n-f|\in L^+(E)$$

$$\xrightarrow{Fatou}\int_E \underline{\lim}((f_n+f)-|f_n-f|)\leqslant \underline{\lim}\int_E((f_n+f)-|f_n-f|)$$

$$\text{左边}=\int_E 2f$$

$$\text{右边}=\lim\int_E(f_n+f)-\overline{\lim}\int_E|f_n-f|)=\int_E 2f-\overline{\lim}\int_E|f_n-f|)$$

$$\Longrightarrow \overline{\lim}\int_E|f_n-f|\leqslant 0.$$

注记

Fatou引理能产生等式的根本原因:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_E |f_n - f| \leqslant 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| = 0.$$

推广的Lebesgue控制收敛定理

Theorem 5 (推广的Lebesgue控制收敛定理)

设$f_n \in \mathscr{L}(E)$, $\quad |f_n| \leqslant g \in L^1$. 则

$$f_n \xrightarrow{m} f \iff f_n \xrightarrow{L^1} f.$$

证明:

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当} n > N \text{时}, \text{有} \|f_n - f\|_{L^1} < \epsilon.$$

$$f_n \overset{L^1}{\nrightarrow} f \quad \xRightarrow{\text{可利用子列判别法}} \quad \exists \epsilon_0 > 0, \quad \exists \text{子列} f_{k_n}: \quad \|f_{k_n} - f\|_{L^1} \geqslant \epsilon_0$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \quad \xRightarrow{Riesz} \quad \exists f_{k_n} \text{子列} f_{k_n'} \xrightarrow{a,e} f$$

$$\xRightarrow{Lebesgue\text{控制收敛}} \quad f_{k_n'} \xrightarrow{L^1} f \qquad \text{矛盾}$$

弱化控制收敛定理

Theorem 6 (Lebesgue控制收敛定理, 比较判别法)

设$f_n \in \mathscr{L}(E)$,

$$|f_n| \leqslant g_n \xrightarrow[a.e.]{L^1} g$$

则

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{L^1} f, \quad \int_E f_n \longrightarrow \int_E f.$$

弱化控制收敛定理续

证明:
$$(g_n+g)-|f_n-f| \in L^+(E)$$

$$\xrightarrow{Fatou} \int_E \underline{\lim}((g_n+g)-|f_n-f|) \leqslant \underline{\lim}\int_E((g_n+g)-|f_n-f|)$$

$$\Longrightarrow \overline{\lim}\int_E |f_n-f| \leqslant 0.$$

Theorem 7 (利用函数列控制的Lebesgue定理)

设$f_n \in L(E)$, $f_n \xrightarrow{a.e.} f$,

$$|f_n| \leqslant g_n \xrightarrow[a.e.]{L^1} g$$

则

(1) 控制函数列满足

$$g_n \xrightarrow{a.e.} g, \quad g_n \xrightarrow{L^1} g, \quad \int_E g_n \longrightarrow \int_E g.$$

(2) 被控制的函数列满足

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f, \quad f_n \xrightarrow{L^1} f, \quad \int_E f_n \longrightarrow \int_E f.$$

利用函数列控制的Lebesgue定理注记

条件:

	$a.e.$收敛	L^1收敛	积分和极限换序
函数列$\{f_n\}$	$\surd$		
控制函数列$\{g_n\}$	$\surd$	$\surd$	

结论:

	$a.e.$收敛	L^1收敛	积分和极限换序
函数列$\{f_n\}$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
控制函数列$\{g_n\}$	$\surd$	$\surd$	$\surd$

- 设$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $f_n, f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \iff m[f_n \nrightarrow f] = 0;$$

$$f_n \xrightarrow{a.un} f \iff \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists \text{可测} E_\epsilon \subset E: \quad m(E_\epsilon) < \epsilon, \quad f_n \overset{on E\setminus E_\epsilon}{\rightrightarrows} f;$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \iff \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

(测度刻画小集合)

三种收敛性的直观含义

- 几乎处处收敛是除去一个零测集的点态收敛.
- 几乎一致收敛说明挖去一个任意小测度集后一致收敛.
- 以测度收敛不是点态收敛, 它说明f_k 远离f的点集是小测度集, 但不论该集合的位置.

三种收敛的依测度收敛型的刻画

- 无穷多项远离f的是零测集.

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \iff \forall\ \epsilon > 0, \quad m(\varlimsup_{k\to\infty} [|f_k - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- (允许有限项例外的)一致远离f的点集是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{a.un} f \iff \forall\ \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty} [|f_j - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- 依测度意义远离f是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{m} f \iff \forall\ \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

几乎处处收敛v.s.依测度收敛

$a.e.$	几乎处处收敛	点态	零测集
m	以测度收敛	非点态	小测度集

几乎处处收敛和依测度收敛是独立概念

- 几乎处处收敛, 非依测度收敛.

$$E = (0, +\infty)$$

$$\chi_{(n,n+1)} \xrightarrow{a.e.} 0$$

$$\chi_{(n,n+1)} \overset{m}{\nrightarrow} 0$$

几乎处处收敛和依测度收敛是独立概念续

- 依测度收敛, 非几乎处处收敛.

$$E = [0, 1]$$

$$f_{kr} = \chi_{[\frac{r-1}{k}, \frac{r}{k})}, \qquad r = 1, \ldots k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\{g_k\} := \{f_{11}, f_{21}, f_{22}, \ldots\}$$

$$g_k \xrightarrow{m} 0$$

$$g_k \overset{a.e.}{\nrightarrow} 0$$

作业

P191　第13, 14, 15, 16, 17 题

实分析(H), 第16次课

任广斌(中国科大)

2024-4-24

- 积分号下取极限的充要条件:

一致可积　　(防止面积逃逸)

  - 推广的Fatou引理
  - 推广的Lebesgue控制收敛定理
  - Vitali收敛定理　　(L^1, m收敛之间关系)

推广的Levi单调收敛定理↑

Theorem 1 (推广的Levi单调收敛定理)

$$\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}) \ni f_n \uparrow f \xRightarrow{\quad f_1^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1 \quad} \int_E f_n \uparrow \int_E f.$$

推广的Fatou引理

Theorem 2 (推广的Fatou引理)

$$f_n \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xRightarrow{(\inf_n f_n)^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1} \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

- 一致可积性

积分在无穷点处差不多为零

- 积分在无穷点处差不多为零:

$$f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{R\to+\infty} \int_{[|x|>R]} |f(x)|dx = 0.$$

积分在无穷点处差不多为零

证明：

$$左 = \lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,\chi_{[|x|>R]}(x)\,dx \xlongequal[\text{离散化}]{\text{控制收敛}} 0.$$

积分在有限点处差不多为零

$$f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \lim_{m(A)\to 0} \int_A |f| dm = 0$$

极限的$\epsilon - \delta$语言：

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{当}A\text{可测}, \quad m(A) < \delta\text{时}, \quad \text{有}$$

$$\int_A |f| dm < \epsilon.$$

注记：这是下列结果的推广

$$m(A) = 0 \xrightarrow{f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)} \int_A |f| dm = 0.$$

证明: 反证法:

$$\exists \epsilon_0 > 0, \quad \exists A_n \subset \mathbb{R}^n \text{可测}, \quad m(A_n) < \frac{1}{2^n}, \quad \int_{A_n} |f| \geqslant \epsilon_0$$

$$\xRightarrow{Borel-Cantelli} \qquad A := \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n, \quad m(A) = 0$$

$$0 \xlongequal{m(A)=0} \int_A |f| \xlongequal[Lebesgue]{f\in L^1} \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} |f| \geqslant \epsilon_0.$$

可积性$\Longrightarrow$绝对连续性

设$E \subset \mathbb{R}^n$是Lebesgue可测集.

$$f \in \mathscr{L}^1(E) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{m(A)\to 0} \int_A |f| = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{R\to\infty} \int_{[|f|>R]} |f| = 0$$

注记： 函数$|f(x)|$相应曲边梯形水平集：

$$\Big\{(x, R) : |f(x)| > R\Big\}$$

证明用到Chebyshev不等式

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \xRightarrow{\text{Chebyshev}} \quad m[|f| > R] \leqslant \frac{1}{R}\int_{\mathbb{R}^n} |f|$$

证明： $$m[|f| > R] = \int_{[|f|>R]} 1 \leqslant \int_{[|f|>R]} \frac{|f(x)|}{R}$$

几何意义：

$|f(x)|$的曲边梯形水平集产生的曲边梯形 $\subset$ $|f(x)|$的曲边梯形.

证明1(适用于抽象积分理论)

零扩充 $\Longrightarrow$ 可不妨设$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

取 $\quad R > \dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_E |f| \quad \xRightarrow{\text{Chebyshev}} \quad m[|f| > R] \leqslant \dfrac{1}{R}\displaystyle\int_E |f| < \delta, \qquad R \gg 1$

$$\xRightarrow{\text{积分在小集合上差不多为零}} \quad \int_{[|f|>R]} |f| < \epsilon.$$

证明2

$$\lim_{R\to\infty}[|f|>R]=[|f|=\infty] \quad \text{零测集}$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{[|f|>R]}|f| \xlongequal{Lebesgue} 0$$

Def

设$f_n \in \mathscr{L}^1(E)$, $\quad m(E) < \infty$, $\quad E \subset \mathbb{R}^n$ 可测.

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{一致可积} \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{R\to\infty} \sup_n \int_{[|f_n|>R]} |f_n| = 0$$

一致的秘密:　　无穷个差不多是一个.

一致可积等价定义

设$f_n \in \mathscr{L}^1(E)$, $\quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n$, 则

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{一致可积} \iff \begin{cases} \sup\limits_n \int_E |f_n| < \infty & (\mathscr{L}^1\text{中有界集合}) \\ \lim\limits_{m(A)\to 0} \sup\limits_n \int_A |f_n| = 0. \end{cases}$$

第二个条件等同于：

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{当} m(A) < \delta \text{时, 成立}$$

$$\sup_n \int_A |f_n| < \epsilon$$

必要性:

$$\int_E |f_n| = \int_{[|f_n|\geqslant R]} |f_n| + \int_{[|f_n|<R]} |f_n| < \epsilon + Rm(E)$$

$$\int_A |f_n| = \int_{A\cap[|f_n|\geqslant R]} |f_n| + \int_{A\cap[|f_n|<R]} |f_n| < \frac{\epsilon}{2} + Rm(A) < \epsilon, \qquad \delta := \frac{\epsilon}{2R}$$

充分性证明

充分性:

$$\text{取} \quad R > \frac{1}{\delta} \sup_n \int_E |f_n|$$

$$\xRightarrow{\text{Chebyshev}} \quad m[|f_n| \geqslant R] \leqslant \int_{[|f_n| \geqslant R]} \frac{|f_n|}{R} \leqslant \int_E \frac{|f_n|}{R} < \delta$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_n \int_{[|f_n| \geqslant R]} |f_n| < \epsilon.$$

控制可积蕴含一致可积

设$f_n \in \mathscr{L}^1(E), \quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n$, 则

$$|f_n| \leqslant g \in L^1(E) \Longrightarrow \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{一致可积}$$

证明

证明:

$$\text{控制可积} \xRightarrow[\text{无穷个用一个代替}]{\text{一致可积的等价定义}} \text{一致可积}$$

具有一致可积条件的推广的Fatou引理

Theorem 3 (推广的Fatou引理)

设$f_n \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}), \quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n,$

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{一致可积}$$

$$\Longrightarrow \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n \leqslant \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n$$

注记： Fatou引理中，在一致可积的条件下，无需非负条件。

续

证明: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致可积 : $\lim\limits_{R\to\infty}\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\int_{[|f_n|>R]}|f_n| = 0$

$$\Longrightarrow \quad \forall\epsilon>0,\quad \exists R>0: \quad \left|\int_{[f_n<-R]} f_n\right| < \epsilon, \quad \forall n$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E f_n = \int_{[f_n\geqslant -R]} f_n + \int_{[f_n<-R]} f_n$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E f_n > \int_{[f_n\geqslant -R]} f_n - \epsilon$$

$$f_n\chi_{[f_n\geqslant -R]}\geqslant -R$$

$$\Longrightarrow \quad (\inf_n f_n\chi_{[f_n\geqslant -R]})^-\leqslant (-R)^-=R\in L^1(E)$$

$$\xrightarrow[f_n\chi_{[f_n\geqslant -R]}\geqslant f_n]{\text{Fatou引理}} \quad \underline{\lim}\int_{[f_n\geqslant -R]}f_n\geqslant \int_E \underline{\lim}(f_n\chi_{[f_n\geqslant -R]})\geqslant \int_E \underline{\lim}\, f_n$$

续

综上所述:

$$\Longrightarrow \underline{\lim} \int_E f_n \geqslant \underline{\lim} \int_{[f_n \geqslant -R]} f_n - \epsilon \geqslant \int_E \underline{\lim}\, f_n - \epsilon$$

$$\xrightarrow{\epsilon \to 0} \underline{\lim} \int_E f_n \geqslant \int_E \underline{\lim}\, f_n$$

Theorem 4 (推广的Lebesgue控制收敛定理)

设$f, f_n \in \mathscr{L}^1(E), \quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n.$ 则

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \iff f_n \xrightarrow{m} f, \quad \{f_n\}\text{一致可积}$$

必要性证明

必要性:

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \quad \Longrightarrow \quad \sup_n \int_E |f_n - f| < \infty$$

$$\begin{aligned}
\sup_n \int_A |f_n| &\leqslant \sum_{n=1}^{N} \int_A |f_n - f| + \sup_{n>N} \int_A |f_n - f| + \int_A |f| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\epsilon}{N} + \epsilon + \epsilon \qquad\qquad (m(A) \ll 1).
\end{aligned}$$

证明

充分性:

$$f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f \quad \xRightarrow{\quad f_{n_k}\text{一致可积}\quad} \quad f_{n_k} \xrightarrow{L^1} f$$

利用反证法.

证明:

$$f_n \overset{L^1}{\nrightarrow} f \Longrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, \quad \exists 子列 f_{k_n}: \quad \|f_{k_n} - f\|_{L^1} \geqslant \epsilon_0$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \xRightarrow{Riesz} \exists f_{k_n} 子列 f_{k_n'} \xrightarrow{a,e} f$$

$\Longrightarrow \quad f_{k_n'} \xrightarrow{L^1} f$ (推广Fatou 导出Lebesgue). 矛盾

推广的Lebesgue控制收敛定理

Theorem 5 (推广的Lebesgue控制收敛定理)

设$f, f_n \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^1(E), \quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n, \quad f_n \xrightarrow{a.e.} f$, 则

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{f_n\}\text{一致可积}$$

注记: 在测度有限条件下, $a.e. = a.un \Longrightarrow m.$

交换次序的充要条件

Theorem 6 (交换次序的充要条件)

设 $f, f_n \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^1(E), \quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n, \quad f_n \xrightarrow{a.e.} f$, 则

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n dx \quad \Longleftrightarrow \quad \{f_n\}\text{一致可积}$$

Vitali 收敛定理

设$f_k, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$f_k \xrightarrow{L^1} f \Longleftrightarrow \begin{cases} f_k \xrightarrow{m} f \\ \lim\limits_{m(A)\to 0} \sup\limits_n \|f_n\|_{L^1(A)} = 0. \\ \lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_n \|f_n\|_{L^1(B(0,R)^c)} = 0. \end{cases}$$

两个极限为零的等价解读：

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists R > 0 : \quad \sup_k \|f_k\|_{L^1(B(0,R)^c)} < \epsilon.$$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall m(A) < \delta : \quad \sup_k \|f_k\|_{L^1(A)} < \epsilon$$

必要性:　Chebyshev不等式

$$m[|f_n - f| \geqslant \epsilon] \leqslant \int_{[|f_n - f| \geqslant \epsilon]} \frac{|f_n - f|}{\epsilon} \leqslant \frac{1}{\epsilon} \|f_n - f\|_{L^1}$$

$$\int_{B(0,R)^c} |f_k| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f| + \int_{B(0,R)^c} |f|.$$

$$\int_{E_\delta} |f_k| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f| + \int_{E_\delta} |f|.$$

Vitali收敛定理的证明

充分性: 情形1: $f_k \xrightarrow{a.e.} f$

取$R \gg 1$, 当k充分大时:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|$$

$$\leqslant \int_{B(0,R)^c} (|f_k| + |f|) + \int_{B(0,R)\setminus E_\delta} |f_k - f| + \int_{B(0,R)\cap E_\delta} (|f_k| + |f|)$$

$< \epsilon$ (Egorov定理)

一般情形

充分性: 情形2: $f_k \xrightarrow{m} f$

反证法: 假设$f_k \xrightarrow{L^1} f$不成立.

$$\Longrightarrow \quad \exists\ \epsilon_0 > 0, \quad \exists 子列 f_{n_k}$$

$$\|f_{n_k} - f\|_{L^1} > \epsilon_0, \qquad \forall k, \qquad f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$$

$$\xRightarrow{情形1} \quad \|f_{n_k} - f\|_{L^1} \to 0. \qquad 矛盾$$

注记

- 交换积分次序定理可以解读为各种收敛性之间的关系.
- 我们梳理了各种收敛性之间关系. $(a.e., a.un, m, L^1)$

作业

P191　第18, 19, 20, 21题

实分析(H), 第17次课

任广斌(中国科大)

2024-4-29

本讲内容

- 抽象的测度论
- 抽象的积分理论

目的: Lebesgue积分理论 $\xRightarrow[\text{关键提升}]{\text{举一反三}}$ 抽象的积分理论

注记

- 抽象的测度论:
    - Hausdorff测度 (几何函数论)
    - 谱测度 (泛函分析)
    - Wiener测度 (概率论)
    - Haar测度 (李群理论)

- 抽象的积分论:

释放了积分论的手脚, 统一了极限、离散求和、连续积分.

函数=广义函数=测度=积分=级数=极限

抽象测度论: 测度

测度空间(X, Γ, μ): X是非空集合, $\Gamma \subset 2^X$ 是σ-代数.

- $\mu : \Gamma \longrightarrow [0, +\infty]$是测度:
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$.

续

Lebesgue测度空间　　　　抽象测度空间

$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), m)$　　　　(X, Γ, μ)

具体 $\xrightarrow{\text{提升,进化}}$ 抽象

续:

- 可测函数 $= \chi_A + (+, \quad \cdot, \quad \lim)$

  $=$ 可测特征函数通过代数运算和极限运算生成

- $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$可测

  $=$ 开集的原像可测

  $= [a, +\infty]$的原像可测, $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$

- 可测函数柔韧特性：对于极限运算封闭.

- Littlewood 三原理

Radon测度

正则Borel测度μ:

(1) 紧集的测度有限

(2) 任意可测集的测度可以由开集的测度收缩得到

(3) 任意可测集的测度可以由紧集的测度膨胀得到

Lusin定理

- 设X =局部紧空间, μ =是X上的正则Borel测度.

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ 可测}, \quad \exists\, E \subset X, \quad m(E) < \infty : \qquad f|_{E^c} = 0$$

$$\Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \quad \exists \varphi \in C_c(X) : \qquad m(\{x \in X : f(x) \neq \varphi(x)\}) < \epsilon.$$

- 若$f \in L^\infty(X, d\mu)$, 则可选取φ:

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

Egorov定理

设测度空间(X,Σ,μ), $\mu(X)<\infty$,

$$\mathscr{L}(X)\ni f_n \xrightarrow{a.e.\ \ \mu} f$$

$$\Longrightarrow \quad \forall\epsilon>0,\quad \exists E\in\Gamma:\quad \mu(E)<\epsilon,\quad f_n\rightrightarrows f \quad on \quad X\setminus E$$

积分理论

- (X,Γ,μ)可测空间.

S^+	$S^+(X,\mu)$	非负简单可测	$\mathbb{R}$值
L^+	$L^+(X,\mu)$	非负可测	$\overline{\mathbb{R}}$值
L^1	$L^1(X,\mu)$	可积	$\overline{\mathbb{R}}$值

标准四步

- 标准四步:

$$\text{测度论} \underset{\text{限制}}{\overset{\text{提升 }(S^+\text{代数}, L^+\text{极限})}{\rightleftharpoons}} \text{积分论}$$

$$\chi_A \underset{\text{绝对连续测度}}{\overset{\text{桥梁: }\mu(A)=\int_X \chi_A d\mu}{\rightleftharpoons}} f \in L^+ \cup L^1$$

积分定义四部曲

$$(1)\quad \int_X \chi_A d\mu \xlongequal{f=\chi_A} \mu(A)$$

$$(2)\quad \int_X \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{A_j} d\mu \xlongequal[\text{标准表示}]{f\in S^+} \sum_{j=1}^{k} c_j \int_X \chi_{A_j} d\mu.$$

$$(3)\quad \int_X f d\mu \xlongequal[S^+\ni\varphi_k\uparrow f]{f\in L^+} \lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_k d\mu = \sup_{S^+\ni\varphi\leqslant f} \int_X \varphi d\mu.$$

$$(4)\quad \int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu = \begin{cases} \text{可定义}, & f^{\pm}\text{之一} \in L^1(X, d\mu) \\ \text{无定义}, & \text{其它}. \end{cases}$$

- 函数可积:

$$f \in \mathscr{L}^1(X) \Longleftrightarrow \int_X |f| < \infty.$$

- 函数可积等价刻画:

$$f \in \mathscr{L}^1(X) \Longleftrightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(X) \Longleftrightarrow f^{\pm} \in \mathscr{L}^1(X)$$

- $$\int_X f\, d\mu = \text{特征函数的积分+代数运算+极限运算}$$

- $$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$$

$$f_n = \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k-1}{2^n} \chi_{f^{-1}[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})} + 2^n \chi_{f^{-1}[2^n, +\infty)} \nearrow f \in \mathscr{L}^+$$

- 抽象积分论的核心内容:　　交换积分次序的等价定理

- 单调收敛定理:

$$f_k \in L^+(X), \quad f_k \nearrow f \Longrightarrow \int_X f_k \, d\mu \nearrow \int_X f \, d\mu$$

Fatou引理

- Fatou引理:

$$f_k \in L^+(X) \Longrightarrow \int_X \underline{\lim} f_k \, d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_X f_k \, d\mu$$

- Lebesgue控制收敛定理:

$$f_k \in L(X), \quad |f_k| \leqslant g \in L^1(X, d\mu), \quad f_k \to f. \quad \text{则}$$

$$f_k \xrightarrow{L^1} f, \qquad \int_X f_k \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu$$

连续版本的Lebesgue控制收敛定理

Theorem 1 (连续版本的Lebesgue控制收敛定理)

假设$f(x,t)$关于x在X上可测, 关于t在$[a,b]$连续, 而且

$$|f(\cdot,t)| \leqslant g \in L^1(X,d\mu), \qquad \forall t \in [a,b]$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to t_0}\int_X f(x,t)d\mu(x) = \int_X \lim_{t\to t_0} f(x,t)d\mu(x), \qquad \forall\ t_0 \in [a,b].$$

含参量积分理论: 连续性

- 含参量积分的连续性:

$$|f(\cdot,t)| \leqslant g \in L^1(X,d\mu) \xrightarrow[\text{关于}x\text{可积}]{f\text{关于}t\text{连续}} \int_X f(x,t)d\mu(x) \in C[a,b].$$

含参量积分理论: 可导性

Theorem 2 (导数和积分交换次序)

$$\left|\frac{\partial f(\cdot,t)}{\partial t}\right| \leqslant g \in L^1(X, d\mu)$$

$$\xrightarrow[f_t\text{存在}]{f, f_t\text{关于}x\text{可积}} \frac{d}{dt}\int_X f(x,t)d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}d\mu(x).$$

- Fubini定理:

$$\text{设}(X_i,\Sigma_i,\mu_i)\text{是}\sigma\text{有限测度空间}, \quad i=1,2.$$

$$f\in L^+(X_1\times X_2)\bigcup L^1(X_1\times X_2, d\mu_1 d\mu_2)$$

$$\Longrightarrow \int_{X_1\times X_2} f\, d\mu_1 d\mu_2 = \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x)$$

$$= \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)$$

测度的σ可加性的积分描述

- 测度σ可加性:

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k} d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \chi_{A_k} d\mu$$

Fubini定理一统天下

$$\text{单调收敛定理} \xlongequal[\text{极限=级数=积分}]{L^+\text{框架}} \textit{Fubini}\text{定理}$$

$$\text{控制收敛定理} \xlongequal[\text{极限=级数=积分}]{L^1\text{框架}} \textit{Fubini}\text{定理}$$

$$\text{测度的}\sigma\text{可加性} \xlongequal[\text{级数=积分}]{\text{集合测度=特征函数积分}} \textit{Fubini}\text{定理}$$

- 抽象测度和抽象积分的例子

Dirac测度的积分:　函数=积分

- Dirac测度空间(X, Γ, δ_x):

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

- Dirac测度的积分

$$\int_X f d\delta_x = f(x), \quad \forall f \in \mathscr{L}(X).$$

证明四步：$\chi_A \Longrightarrow S^+(X) \Longrightarrow \mathscr{L}^+(X) \Longrightarrow \mathscr{L}(X)$

$$\int_X f d\delta_x = \sup_{S^+(X) \ni \varphi \leqslant f} \int_X \varphi d\delta_x = f(x)$$

计数测度的积分: 极限=积分

- 测度空间 $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$

$$\mu(A)=\begin{cases} A\text{的元素个数}, & A\text{是有限集} \\ +\infty, & A\text{是无限集}. \end{cases}$$

- 任意函数$f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty)$ 必可测.

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{k\}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\int_{\mathbb{N}} |f| \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

- 绝对收敛的级数是关于计数测度的积分.

绝对连续测度的积分

- 设$(X, \Gamma, d\mu)$是测度空间.
- 绝对连续测度$d\nu = f d\mu, \qquad f \in L^1(X, \mu) \cap L^+(X)$.
- 绝对连续测度空间$(X, \Gamma, d\nu)$

- 关于绝对连续测度的积分:

$$\nu(A) = \int_A d\nu = \int_A f d\mu.$$

$$\int_X g d\nu = \int_X g f d\mu, \qquad \forall g \in L^+(X,\mu) \cup L^1(X,\mu).$$

证明：对于$g = \chi_A$验证.

实分析大楼

推广值域的抽象测度论	推广值域的抽象积分论
抽象测度论	抽象积分论
Lebesgue 测度论	Lebesgue积分论

实分析(H), 第18次课

任广斌(中国科大)

2024-5-6

本讲内容

- 测度的绝对连续性
  - 测度和函数相差多少？(测度分解)
  - 积分的绝对连续性(测度视为积分)
- 加权计数测度
- 函数的重整

内容1

- 测度的绝对连续性

测度的绝对连续性

- 设$(X, \Gamma, \mu), (X, \Gamma, \nu)$是测度空间.

  ν 是有限测度, 即$\nu(X) < \infty$.

- ν 关于μ绝对连续 $(\nu \ll \mu)$:

$$\mu(A) \xlongequal{\forall A \in \Gamma} 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(A) = 0.$$

- ν 关于μ绝对连续判别法:

$$\nu \ll \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\mu(A)\to 0} \nu(A) = 0.$$

极限的等价描述：

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{当} A \in \Gamma,\ \mu(A) < \delta \text{时},\ \text{有} \nu(A) < \epsilon.$$

测度的绝对连续性续

证明: “$\Longleftarrow$” $\mu(A) \xlongequal{A\in\Gamma} 0 \Longrightarrow \nu(A) < \epsilon \quad (\forall \epsilon > 0)$.

“$\Longrightarrow$” 反证法: $\exists \epsilon_0, \quad \exists A_n \in \Gamma, \quad \mu(A_n) < \frac{1}{2^n}, \quad \nu(A_n) \geqslant \epsilon_0$.

$$\xRightarrow{Borel-C} A := \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n, \quad \mu(A) = 0, \quad \nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \geqslant \epsilon_0.$$

Radon-Nikodym定理: 测度论顶峰

Theorem 1 (Radon-Nikodym定理)

设μ是有限测度, 则

$$\mu \ll m \xLeftrightarrow{\exists\,!\ f \in L^+(E) \cap L^1(E)} d\mu = f dm.$$

注记: 积分论意义下唯一

$m(E) < \infty$.

$$0 \in \Gamma := \left\{ g \in L^+(E) \cap L^1(E) : \int_A g\, dm \leqslant \mu(A),\ \ \forall A \subset E\text{可测} \right\}.$$

$$\lambda := \sup_{g \in \Gamma} \int_E g\, dm \xlongequal[\text{待证}]{\exists! f \in \Gamma} \int_E f\, dm$$

$$\text{取}\{g_n\}_{n\geqslant 1}\subset\Gamma:\quad \int_E g_n dm\to\lambda$$

$$\Longrightarrow\quad h_n:=\max_{1\leqslant k\leqslant n} g_k\in\Gamma \xRightarrow[A=\bigsqcup_{k=1}^{n}E_k,\quad h_n|_{E_k}=g_k]{E_k=(h_n-g_k)^{-1}(0)\text{再调整}} \int_A h_n dm\leqslant\mu(A)$$

$$\Longrightarrow\quad \text{令}h_n\uparrow f:\quad \int_E fdm\xlongequal{Levi}\lim\int_E h_n dm\xlongequal{h_n\in\Gamma}\lambda\leqslant\mu(E)$$

$$\Longrightarrow\quad \int_A fdm\xlongequal{Levi}\lim\int_A h_n dm\leqslant\mu(A)$$

$$\Longrightarrow\quad f\in\Gamma,\qquad \int_E fdm=\max_{g\in\Gamma}\int_E gdm$$

续

$$\nu(A) := \mu(A) - \int_A f dm \quad \Longrightarrow \quad \nu\text{是一个测度}$$

$$\Longrightarrow \quad \nu = 0$$

反证法: $\exists \epsilon_0 > 0: \quad \epsilon_0 m(E) < \nu(E)$

$\nu - \epsilon_0 m$是符号测度, 具有Hahn分解(E_+, E_-)

$$\Longrightarrow \quad \forall\text{可测集}A \subset E: \quad \epsilon_0 m(A \cap E_+) < \nu(A \cap E_+)$$

$$\Longrightarrow \int_A (f + \epsilon_0 \chi_{E_+}) dm \leqslant \int_A f dm + \nu(A \cap E_+) \leqslant \mu(A)$$

$$\Longrightarrow f + \epsilon_0 \chi_{E_+} \in \Gamma \qquad \int_E (f + \epsilon_0 \chi_{E_+}) dm > \int_E f dm, \quad \text{矛盾}$$

补充证明$m(E_+) > 0$:

$$m(E_+) = 0 \xrightarrow{\mu \ll m} \mu(E_+) = 0 \xrightarrow{\nu(A) := \mu(A) - \int_A f dm} \nu(E_+) = 0$$

$$\Longrightarrow 0 < (\nu - \epsilon_0 m)(E) = (\nu - \epsilon_0 m)(E_-) \leqslant 0.$$

内容2

- 积分的绝对连续性

积分的绝对连续性

$$f \in L^1(E) \rightleftharpoons |f|dm \ll dm \quad (Radon - Nikodym\text{定理})$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{m(A)\to 0} \int_A |f|dm = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{当} A \in \Gamma, \quad m(A) < \delta \text{时}, \quad \text{有}$$

$$\int_A |f|dm < \epsilon.$$

积分在有限点处差不多为零

- $$m(A) = 0 \xRightarrow{f \in L^1(E)} \int_A |f| dm = 0.$$

积分在无穷点处差不多为零

- 积分在无穷点处差不多为零:

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \int_{|x|>k} |f(x)| dx = 0.$$

证明: $$\text{左} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \chi_{[|x|>k]}(x)\, dx \overset{\text{控制收敛}}{=\!=\!=\!=} 0.$$

内容3

- 加权计数测度

加权计数测度

- 加权计数测度空间

$$(\mathbb{Z}_n, \quad 2^{\mathbb{Z}_n}, \quad \mu) \qquad \mathbb{Z}_n := \{1, 2, \ldots, n\}.$$

- 加权计数测度:

$$\mu(\{j\}) = \lambda_j, \qquad j = 1, \ldots n$$

1的分解: $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1, \quad \lambda_j \geqslant 0.$

- 任意函数$f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ 必可测.

加权平均是一种积分

- 加权平均是关于加权计数测度的积分

$$\int_{\mathbb{Z}_n} f\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{\{k\}} f\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$$

$$\int_{\mathbb{N}} |f|\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |a_k|.$$

凸函数积分刻画

- 凸函数$\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\varphi(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi(a_j).$$

$$\forall\ a_j \in (a, b),\ \ \lambda_j \geqslant 0,\ \ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

凸函数积分刻画续

- 加权计数测度:

$$\mu_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}(\{j\}) = \lambda_j.$$

- 凸函数积分刻画

$$\varphi\text{凸} \quad \overset{f\in L^1}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi\left(\int_{\mathbb{Z}_n} f\, d\mu_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}\right) \leqslant \int_{\mathbb{Z}_n} \varphi\circ f\, d\mu_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} \quad \forall\, n, \lambda_j.$$

- Jensen不等式:

$$\varphi:(a,b)\xrightarrow{\text{凸}}\mathbb{R}\iff\varphi\left(\int_X fd\mu\right)\leqslant\int_X\varphi\circ fd\mu,$$

对$\forall\ f:X\xrightarrow{f\in L^1(X,\mu)}(a,b)$成立.

其中(X,Γ,μ)是任意概率测度空间.

Jensen不等式续

- Jensen不等式:

设(X,Γ,μ)是测度空间, $\mu(X)\in(0,+\infty)$. 则

$$\varphi:(a,b)\xrightarrow{\text{凸}}\mathbb{R}\iff\varphi\left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\,d\mu\right)\leqslant\frac{1}{\mu(X)}\int_X\varphi\circ f\,d\mu,$$

对$\forall\, f:X\xrightarrow{f\in L^1(X,\mu)}(a,b)$成立.

其中(X,Γ,μ)是任意测度空间: $\mu(X)\in(0,+\infty)$.

注记

$$\varphi\left(\int_{\mathbb{Z}_n} f\, d\mu_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}\right) \leqslant \int_{\mathbb{Z}_n} \varphi\circ f\, d\mu_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$$

$$\xLongrightarrow[\text{数学的洞察力}]{\text{见微知著}} \quad \varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leqslant \int_X \varphi\circ f d\mu$$

证明:

$$\alpha :\xlongequal{\mu(X)=1} \int_X f\, d\mu \in (a, b).$$

$$(\alpha = a \implies \int_X (f - a) d\mu = 0$$

$$\implies f - a \overset{a.e.}{=} 0\text{与}\mu(X) = 1\text{矛盾.})$$

续

设$(\alpha,\varphi(\alpha))$处的支撑线为

$$\varphi(\alpha)+k(x-\alpha).$$

$$\xrightarrow{\varphi\text{凸}} \quad \varphi(\alpha)+k(x-\alpha)\leqslant\varphi(x)$$

$$\xrightarrow[x:=f(t)]{\text{积分}} \quad \varphi(\alpha)\leqslant\int_X\varphi\circ f\,d\mu.$$

内容4

- 函数的重整

函数的蛋糕表示Layer cake reprersentation:

$$f(x) \xlongequal[f\text{非负有界可测}]{\text{函数的蛋糕表示}} \int_0^{+\infty} \chi_{f^{-1}(t,+\infty)}(x)dt$$

- 特征函数$\chi_{f^{-1}(t,+\infty)}(x) \Longrightarrow$ 可测函数$f(x)$
- 固定横坐标x, 则f图形下方垂直集的特征的两种表示:

$$\chi_{f^{-1}(t,+\infty)}(x) = \chi_{[0,f(x))}(t)$$

- $f(x)$下方的第t层$\xRightarrow[\text{上方无贡献}]{\text{曲边梯形视为蛋糕}}$对$f(x)$有贡献

蛋糕表示的作用

- $$\text{特征函数} \xrightarrow[\text{蛋糕表示}]{\text{直接联系}} \text{可测函数}$$

- $$\text{函数的蛋糕表示} \xrightarrow[\text{两边积分}]{\textit{Fubini}} \text{积分的蛋糕表示}$$

积分的蛋糕表示

$$\int_E f(x)d\mu(x) \xlongequal[f\text{非负有界可测}]{\text{积分的蛋糕表示}} \int_0^{+\infty} \underbrace{\mu(f^{-1}(t,+\infty))}_{\text{f图形下方水平集的测度}} \downarrow dt$$

- 函数的重整:

$$\text{不规则} \xRightarrow{\text{重整}} \text{规则} \qquad (\text{极值往往在规则情形达到})$$

函数重整: Rearrangement

- 集合的重整

$$A \xRightarrow[m(A)<\infty]{m(A)=m(A^*)} A^* = B(0,r)$$

- 特征函数的重整

$$\chi_A \xRightarrow{\chi_A^*=(\chi_A)^*:=A^*=\chi_{A^*}} \chi_{A^*}$$

- 非负可测函数的重整

$$\mathscr{L}^+(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n) \ni f \xRightarrow[f(x)=\int_0^\infty \chi_{f^{-1}[t,+\infty)}(x)dt]{f^*(x):=\int_0^\infty \chi^*_{f^{-1}[t,+\infty)}(x)dt} f^*$$

函数重整的性质

- 单调性: 径向函数 $\chi_A^* \downarrow \Longrightarrow f^* \downarrow$

- 保序性: $f \leqslant g \Longrightarrow f^* \leqslant g^*$

  f的图形下方 $\subset$ g的图形下方

- 保范性: $\|f\|_1 \xlongequal{\text{积分的蛋糕表示}} \|f^*\|_1$

- 距离不增: $\|f^* - g^*\|_1 \leqslant \|f - g\|_1$

  (参见Lieb 《Analysis》)

作业

P189　第3, 4, 5, 8题

实分析(H), 第19次课

任广斌(中国科大)

2024-5-8

本讲内容:　测度论的升华

- 测度的推广:　实分析的触角

  - 符号测度

  - 复测度

物理意义

正测度	符号测度	复测度
质量分布	电荷分布	向量值测度

推广的立足点

- 函数是测度: $f \equiv fdm$

起点	f	f^+	f^-	$\|f\|$	$\mathrm{Re}f$	$\mathrm{Im}f$
终点	ν	ν^+	ν^-	$\|\nu\|$	$\mathrm{Re}\nu$	$\mathrm{Im}\nu$

函数的Hahn-Jordan分解

Lebesgue测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), m)$, $\quad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

- Jordan分解: $\quad f = f^+ - f^- \equiv f^+ dm - f^- dm =: \nu^+ - \nu^-$
- Hahn分解: $\quad \mathbb{R}^n = [f \geq 0] \bigsqcup [f < 0] =: A^+ \bigsqcup A^-$
- 两者联系:

$$\nu^+ \perp \nu^- \Longleftrightarrow \begin{cases} \nu^+(A^-) = \int_{A^-} d\nu^+ = \int_{[f<0]} f^+ dm = 0, \\ \\ \nu^-(A^+) = \int_{A^+} d\nu^- = \int_{[f \geqslant 0]} f^- dm = 0 \end{cases}$$

- 符号测度

可测空间(X,Γ): X是非空集合, $\Gamma\subset 2^X$ 是σ-代数.

- 符号测度

$$\mu:\Gamma \longrightarrow [-\infty,\infty)\text{或}(-\infty,+\infty]$$

  - $\mu(\emptyset)=\emptyset$
  - $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mu(A_k).$

符号测度的例子1

可测空间(X, Γ):

$$\mu, \nu\text{是正测度, 其中之一是有限测度} \Longrightarrow \mu - \nu\text{是符号测度}$$

符号测度的例子2

Lebesgue测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), m)$.

- 积分$\int_{\mathbb{R}^n} fdm$ 有定义$\xLongrightarrow{f^{\pm}\text{之一}\in \mathscr{L}^1} \nu = fdm$是符号测度

- $f = f^+ - f^- \Longrightarrow \nu = \nu^+ - \nu^- = f^+dm - f^-dm$

- $\mathbb{R}^n = A_+ \bigsqcup A_- = [f \geqslant 0] \bigsqcup [f < 0]$

$$\nu^+ \perp \nu^- \Longleftrightarrow \quad \nu^+(A_-) = 0, \qquad \nu^-(A_+) = 0$$

- 全变差测度: $\quad |\nu| = \nu^+ + \nu^- = |f|dm$

符号测度的正部和负部

可测空间(X,Γ): ν是符号测度.

- Jordan分解: $\nu=\nu^+-\nu^-$, $\nu^+\perp\nu^-$, $\nu^\pm$是正测度.

- Hahn分解: $X=X_+\bigsqcup X_-$, $\nu^+(X_-)=0$, $\nu^-(X_+)=0$

- 全变差测度: $|\nu|=\nu^++\nu^-$

- 符号测度的正部和负部:

$$\nu^+(E)=\nu(E\cap X_+)=\sup_{P\subset E}\nu(P),\quad \nu^-(E)=-\nu(E\cap X_-)=-\inf_{P\subset E}\nu(P)$$

Hahn分解和Jordan分解的唯一性

测度空间(X,Γ,ν): ν是符号测度.

- Jordan分解: $\exists!$分解

$$\nu = \nu^+ - \nu^-, \qquad \nu^+ \perp \nu^-, \qquad \nu^\pm\text{是正测度}$$

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-$$

- Hahn分解:

$$X = X_+ \bigsqcup X_-, \quad \nu^+(X_-) = 0, \quad \nu^-(X_+) = 0$$

X_+, X_-相差$|\nu|$-零测集唯一

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| : \quad E = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k \right\}$$

关于符号测度的积分

$$\int_X f\, d\nu := \int_X f\, d\nu^+ - \int_X f\, d\nu^-, \qquad f \in L^1(X, d|\nu|)$$

测度的绝对连续

测度空间(X, Γ, m):　ν是符号测度.

$$\nu \ll m \iff \text{“}\forall E \in \Gamma, \quad m(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0\text{”}$$

$$\iff \lim_{m(E)\to 0} \nu(E) = 0, \quad \forall E \in \Gamma$$

$$\iff |\nu| \ll m$$

可测空间(X,Γ): ν是符号测度.

$$\nu\text{是有限测度} \overset{def}{\Longleftrightarrow} |\nu(X)| < \infty \Longleftrightarrow |\nu(A)| < \infty, \qquad \forall A \in \Gamma.$$

证明: $\nu(X) = \nu(A) + \nu(A^c)$.

$$|\nu(A)| = \infty \Longrightarrow |\nu(X)| = \infty.$$

内容2

- 复测度

复测度

测度空间(X, Γ, μ),　　X是非空集合,　　$\Gamma \subset 2^X$ 是σ-代数.

- $\mu : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$是复测度:
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$　　绝对收敛

测度空间(X, Γ), ν是复测度

$$\nu_r(A) := \mathrm{Re}(\nu(A)), \qquad \nu_i(A) := \mathrm{Im}(\nu(A))$$

$$\nu = \nu_r + i\nu_i = (\nu_r^+ - \nu_r^-) + i(\nu_i^+ - \nu_i^-)$$

$$\overline{\nu} = \nu_r - i\nu_i$$

$$\nu_n \longrightarrow \nu \overset{def}{\Longleftrightarrow} \nu_n(A) \longrightarrow \nu(A), \qquad \forall A \in \Gamma$$

复测度在极限运算下封闭

复测度的全变差测度

可测空间(X, Γ), $\quad \nu$ 是复测度

全变差测度$|\nu|$:

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| : \quad E = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\right\}$$

绝对连续测度的全变差测度, 实部, 虚部

测度空间(X, Γ, m), $\quad h \in \mathscr{L}^1(X, m; \mathbb{C})$

$$d\nu := h\, dm \Longrightarrow d|\nu| = |h|\, dm$$

$$\nu(E) = \int_E h\, dm, \qquad |\nu|(E) = \int_E |h|\, dm$$

$$\mathrm{Re}\nu(E) = \int_E \mathrm{Re}h\, dm, \qquad \mathrm{Im}\nu(E) = \int_E \mathrm{Im}h\, dm$$

奇异测度定义

可测空间(X,Γ), μ,ν 是复测度

$$\nu \perp \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \text{剖分} X = X_+ \bigsqcup X_- : \quad \mu(X_-) = 0, \quad \nu(X_+) = 0$$

注记: $\mu(E) = \mu(E \cap X_+), \quad \nu(E) = \nu(E \cap X_-), \quad \forall\ E \in \Gamma$

绝对连续测度定义

可测空间(X,Γ)，　m 是正测度，　ν是复测度

$$\nu \ll m \quad \Longleftrightarrow \text{“}m(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0\text{”}$$

绝对连续测度和奇异测度位于两个极端

测度空间(X, Γ, m),　m 是正测度,　ν是复测度

$$\nu \ll m, \qquad \nu \perp m \quad \Longleftrightarrow \quad \nu = 0$$

奇异测度例子:

$$\text{Lebesgue测度} \perp \textit{Dirac}\text{测度},$$

从整体的角度看待复测度

- 可测空间(X, Γ)上复测度全体构成Banach空间
  - 测度空间(X, Γ, m)上复测度的范数:
  $$\|\nu\| = |\nu|(X) < \infty$$
  - 特例: $d\nu = h\, dm, \quad h \in \mathscr{L}^1(X, dm),$
  $$\|\nu\| = \|h\|_{L^1} < \infty$$

Hahn分解定理

可测空间(X,Γ), ν是实测度

$\exists!$(相差零测集)剖分$X = X_+ \bigsqcup X_-$:

$$\nu(E) \begin{cases} \geqslant 0, & \text{if } E \subset X_+ \\ \\ \leqslant 0, & \text{if } E \subset X_-. \end{cases}$$

Hahn分解定理的例子

测度空间(X, Γ, m), $\quad h \in \mathscr{L}^1(X, dm, \mathbb{R})$

对于实测度$d\nu = h\ dm$, $\qquad \exists!$(相差零测集)剖分$X = A_+ \bigsqcup A_-$:

$$A_+ = \{x \in X : h(x) \geqslant 0\}, \qquad A_- = \{x \in X : h(x) < 0\}$$

$$\nu(E) \quad \begin{cases} \geqslant 0, & \text{if } E \subset A_+ \\ \\ \leqslant 0, & \text{if } E \subset A_-. \end{cases}$$

Jordan分解定理

可测空间(X,Γ) 上实测度μ,　　$\exists!$有限正测度 $\mu^{\pm}$:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu^{+} - \mu^{-}, \qquad \mu^{+} \perp \mu^{-} \\ |\mu| &= \mu^{+} + \mu^{-} \end{aligned}$$

Jordan分解具体表达式

可测空间(X, Γ)上实测度μ

实测度μ的Hahn分解： $X = X_+ \bigsqcup X_-$

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap X_+), \qquad \mu^-(E) = \mu(E \cap X_-)$$

Radon-Nikodym定理

σ有限测度空间(X,Γ,m),　ν是有限符号测度或复测度

$$\nu \ll m \quad \overset{\exists ! h\in L^1(X,m)}{\Longleftrightarrow} \quad d\nu = h\, dm.$$

注记:　ν是有限正测度 $\Longrightarrow h \in L^+ \cap L^1(X,m)$

注记:　h称为测度ν关于测度m的Radon-Nikodym导数, 记为

$$h = \frac{d\nu}{dm}$$

Lebesgue分解定理

可测空间(X, Γ, m), ν是复(符号)测度, $m, |\nu|$是σ有限测度

$\exists !$复(符号)测度ν_a, ν_s :

$a =$ *absolutely continuous measure*, $s =$ *singular measure*

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_a + \nu_s \\ \nu_a &\ll m, \qquad |\nu_s| \perp m \\ d\nu_a &= hdm \qquad (h^{\pm}\text{之一} \in L^1(X, dm)) \end{aligned}$$

注记: 当ν是正测度时, ν_a, ν_s也是正测度.

测度分解

σ有限测度空间(X, Γ, m).　　$\forall\ x \in X \Longrightarrow \{x\} \in \Gamma$.

ν是σ有限测度　　$\Longrightarrow$　　$\exists!$分解：

$$\nu = \nu_c + \nu_d = \nu_{ac} + \nu_{sc} + \nu_d$$

$$\nu_{ac} \ll m, \qquad \nu_{sc} \perp m, \qquad \nu_d \perp m$$

注记:　ν_d是离散测度:　$\exists$可数集K,　$\nu_d(K^c) = 0$.

ν_c是连续测度:　$\forall\ x \in X \Longrightarrow \nu(\{x\}) = 0$.

d=discrete,　　c=continuous

例如: Lebesgue测度, 计数测度.

关于复测度的积分

$$f \in L^1(X, d|\nu|)$$

$$\int_X f\, d\nu := \left(\int_X f\, d\nu_r^+ - \int_X f\, d\nu_r^-\right) + i\left(\int_X f\, d\nu_i^+ - \int_X f\, d\nu_i^-\right)$$

$$\left|\int_X f\, d\nu\right| \leqslant \int_X |f|\, d|\nu|, \qquad \overline{\int_X f\, d\nu} = \int_X \bar{f}\, d\bar{\nu}$$

Lebesgue控制收敛定理对于符号测度和复测度成立

(符号测度和复测度可分解为正测度)

设X是局部紧Hausdorff空间. 对于$C_c(X)$上任意正有界线性泛函

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(|I(f)| \leq M\|f\|, \qquad f \geqslant 0 \Longrightarrow I(f) \geqslant 0)$$

存在唯一X上Radon正测度μ:

$$I(f) = \int_X f \, d\mu.$$

注记: Riesz表示定理表明由积分造测度$\xrightarrow{\text{推广}}$ Daniell积分

复测度是广义函数

设X是局部紧Hausdorff空间.

$C_c(X)$是X上具有紧支集的连续函数全体.

$\mathcal{M}(X)$是X上复测度全体.

$$\Longrightarrow \mathcal{M}(X) \cong C_c(X)^* \qquad \text{等距同构}$$

作业

P184　第1, 2 题

P193　第29, 30, 31题

实分析(H), 第20次课

任广斌(中国科大)

2024-5-12

本讲内容

- 可积函数的逼近
- Lebesgue 积分与Riemann积分的关系

逼近的精髓: 从规则到不规则, 从简单到复杂.

实数理论	$\mathbb{Q}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{R}$
极限理论	常值数列	$\longrightarrow$	差不多常值数列
连续函数	常值函数	$\longrightarrow$	差不多常值函数
可导函数	线性函数	$\longrightarrow$	差不多线性函数
微分学	多项式	$\longrightarrow$	初等函数
积分学	阶梯函数	$\longrightarrow$	Riemann可积函数
实分析	简单函数	$\longrightarrow$	Lebesgue可积函数
泛函分析	光滑函数	$\longrightarrow$	广义函数

框架结构———核心(主要矛盾)+运算(代数、分析)

问题简化

- 一般情形归结于特殊情形:

$$f \in L^1(E) \xLeftrightarrow{\text{零扩充}} f\chi_E \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Theorem 1

具有紧支撑的光滑函数在$L^1(\mathbb{R}^n)$稠密.

- $\mathbb{Q} : \mathbb{R} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : L^1(\mathbb{R}^n)$.

光滑函数的稠密性定理

- 稠密性的三种等价描述:

$$L^1(\mathbb{R}^n) \xlongequal{\text{拓扑表达}} \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^1}$$

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \xLeftrightarrow{\text{极限表达}} \exists\text{具有紧支撑的光滑函数列}g_k \xrightarrow[a.e.]{L^1} f$$

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \xLeftrightarrow[\text{好+小}]{\text{逼近表达}} \forall\ \epsilon > 0, \exists\text{分解}$$

$$f = g + h, \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

续

证明: (1) $L^1(\mathbb{R}^n) \xRightarrow[K\text{是闭球，} f = f\chi_K + f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus K}]{\text{无穷远点处积分绝对连续性}}$ 归结于$L^1(K)$.

(2) $L^1(K)$归结于紧集上简单函数.

$$\varphi_k \to f, \quad |\varphi_k| \leqslant |f| \xRightarrow{\text{控制收敛}} \varphi_k \xrightarrow{L^1} f.$$

(3) 紧集上简单函数$\in L^\infty(K) \xRightarrow{Lusin}$ 具有紧支撑的光滑函数.

$$\exists K_\epsilon, \quad \exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n): \qquad m(K \setminus K_\epsilon) < \epsilon, \quad f = g \ \text{ on } \ K_\epsilon.$$

续

(4) 具有紧支撑的光滑函数$\Longrightarrow$一致连续$\Longrightarrow$ 差不多阶梯函数.

(5) 依L^1收敛$\xRightarrow{\text{Chebyshev不等式}}$ 依测度收敛

$\xRightarrow{\text{Riesz定理}}$ $\exists$ 子列a.e. 收敛

- Chebyshev不等式

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \geqslant \int_{[|f| \geqslant \epsilon]} |f(x)| dx \geqslant \epsilon m([|f| \geqslant \epsilon]).$$

$$m([|f| \geqslant \epsilon]) = \int_{[|f| \geqslant \epsilon]} dx \leqslant \int_{[|f| \geqslant \epsilon]} \frac{|f(x)|}{\epsilon} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\epsilon} dx = \frac{1}{\epsilon} ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

两种收敛性关系

- L^1收敛蕴含依测度收敛:

$$f_k \xrightarrow{L^1} f$$

$$\xRightarrow{\text{Chebyshev}} \quad m([|f_k - f| \geqslant \epsilon]) \leqslant \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x) - f(x)| dx \xrightarrow[\epsilon \text{ fixed}]{k \to \infty} 0$$

$$\Longrightarrow \quad f_k \xrightarrow{m} f$$

稠密性的应用: 积分的平均连续性

- 可积函数在L^1范数下连续

$$\lim_{h\to 0}\left\|f(x+h)-f(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xlongequal{f\in L^1(\mathbb{R}^n)} 0.$$

续

证明: $\forall \epsilon > 0, \exists$ 好+小分解,

$$f = f_1 + f_2, \qquad f_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{4}.$$

$$\Longrightarrow \|f(x+h) - f(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{2} + 2\|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

阶梯函数的稠密性定理

Theorem 2

具有紧支撑的阶梯函数在$L^1(\mathbb{R}^n)$稠密.

Riemann-Lebesgue引理

- 设$\|g_n\|_{L^\infty[a,b]} \leqslant 1$. 则下列等价:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) g_n(x) dx = 0, \quad f \in L^1[a,b];$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) g_n(x) dx = 0, \quad f \in \chi_{[a,c]}, \forall c \in [a,b].$$

证明: $$\Gamma := \left\{ f \in L^1[a,b] : \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) g_n(x) dx = 0 \right\}$$

$$\Gamma \supset \{\text{阶梯函数}\} \Longrightarrow \Gamma \supset L^1[a,b]$$

Riemann-Lebesgue引理续

$$\Gamma \ni f = f_1 + f_2, \quad f_1\text{阶梯函数}, \quad f_2\text{小(积分意义下)}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f g_n = \int_a^b f_1 g_n + \int_a^b f_2 g_n$$

$$\Longrightarrow \quad \text{右}1 \xrightarrow{\text{假设}} 0, \qquad \text{右}2 \xlongequal{g_n\text{一致有界}, f_2\text{小}} o(1).$$

- 古典的Riemann-Lebesgue引理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \xlongequal{f\in L^1[0,2\pi]} 0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \xlongequal{f\in L^1[0,2\pi]} 0.$$

- 例题:

$$\lim_{h\to 0} m(E\cap(h+E)) \xlongequal{E\subset\mathbb{R}^n\text{可测}} m(E).$$

例题续

证明: 情形1: $\underline{m(E) < +\infty.}$ $\quad (\Longrightarrow \chi_E \in L^1)$.

$$
\begin{aligned}
|m(E \cap (h+E)) - m(E)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E\cap(h+E)} dm - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E dm \right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left| \chi_E \chi_{h+E} - \chi_E \chi_E \right| dm \\
&\leqslant \|\chi_{h+E} - \chi_E\|_{L^1} \\
&\longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

例题续

<u>情形2: $m(E)=+\infty$:</u> 令$E_k=E\cap B(0,k)$

$$\begin{aligned}
\varliminf_{h\to 0} m(E\cap(h+E)) &\geqslant \varliminf_{h\to 0} m(E_k\cap(h+E_k)) \\
&= m(E_k) \qquad (\text{情形1}) \\
&\longrightarrow m(E)=\infty.
\end{aligned}$$

- Lebesgue 积分是Riemann积分的推广:

$$R[a,b] \subset L^1[a,b], \qquad \text{且积分值相同:}$$

$$(R)\int_a^b f(x)dx \xlongequal{\forall f \in R[a,b]} \int_{[a,b]} f(x)dm(x).$$

续

证明: $$f\in R[a,b]\ \xrightarrow[f\text{有界}\implies f\in L^{\infty}[a,b]]{f\ a.e.\text{连续}\implies f\text{可测}}\ f\in L^{1}[a,b].$$

证明: 取单调趋于零的分割:

$$\pi^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b,$$

$M_i^{(n)}, m_i^{(n)}$分别是f在区间$[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$的上确界和下确界

续

$$\int_{[a,b]} f(x)dm(x) = \sum_{i=1}^{k_n} \int_{[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]} f(x)dm(x)$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \leqslant \int_{[a,b]} f(x)dm(x) \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

$$\xRightarrow{n\to\infty} \underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \int_{[a,b]} f(x)dm(x) \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

$$\xRightarrow{f\in R[a,b]}$$ 三者相同.

- 设$E_k \nearrow E, \quad f \in L^1(E_k)$, 则

$$f \in L^1(E) \iff \lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|dx\text{存在且有限}$$

$$\Longrightarrow \int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)dx.$$

证明: f在E_k $(\forall k)$ 可测$\Longrightarrow$ f可测$\Longrightarrow$ $|f|$ 在E上积分有定义, 而且

$$\int_E |f(x)|dx \xlongequal{\text{单调收敛}} \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} |f(x)|dx.$$

$$\Longrightarrow \quad \text{结论1成立.}$$

结论2是Lebesgue控制收敛定理的直接推论.

注记

单调收敛定理, 控制收敛定理联合使用

- 单调收敛定理$\Longrightarrow$ 可积性
- 控制收敛定理$\Longrightarrow$ 计算积分

广义Riemann积分

- 设$f \in R[0,b] \quad (\forall b > 0)$, 则

$$f \in L^1[0,+\infty) \iff \lim_{b\to+\infty}\int_0^b |f(x)|dx\text{存在且有限}$$

$$\iff |f| \in R[0,+\infty)$$

$$\iff f \in R[0,+\infty), \quad |f| \in R[0,+\infty)$$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} f(x)dm(x) \quad = \quad (R)\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

Lebesgue积分 　　　　 广义Riemann积分

证明：$f \in L^1[0,+\infty) \xrightarrow{\text{Cauchy准则}} |f| \in R[0,+\infty)$

$\xrightarrow{f\ a.e.\text{连续}} f \in R[0,+\infty)$.

- 绝对收敛的广义Riemann积分可视为Lebesgue积分.

- 广义Riemann可积$\not\Rightarrow$ Lebesgue可积

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\chi_{(n,n+1]}\in R[0,+\infty)\setminus L^1[0,+\infty).$$

作业

P162　第7, 8, 9, 10题

实分析(H), 第21次课

任广斌(中国科大)

2024-5-13

本讲内容

- Fubini定理的证明

- Tonelli 定理 (重积分化为累次积分):

$$f \in L^+(\mathbb{R}^{n+m}) \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy \Big) dx.$$

- 注记1:

$$f \in L^+(\mathbb{R}^{n+m}) \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy \in L^+(\mathbb{R}^n)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x,\cdot) \in L^+(\mathbb{R}^m) \qquad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n.$$

注记续

- Tonelli定理对于下列函数成立:
  - $f|_{\mathbb{R}^{n+m}\setminus(\{0\}\times\mathbb{R}^m)} = 0$
  - $f(0,\cdot)$ 在$\mathbb{R}^m$上不可测
- Tonelli定理成立的函数, 其在垂直截面上的性质可能很差.

构造集合

$$\Gamma = \left\{ f \in L(\mathbb{R}^{n+m}) : f\text{满足三条性质} \right\}$$

性质1. $$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy \right) dx.$$

性质2. $$\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy \in L(\mathbb{R}^n)$$

性质3. $f(x,\cdot) \in L(\mathbb{R}^m) \qquad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n.$

预备引理

下列性质成立:

$\Gamma \cap L^+$是锥 (对加法和关于非负数的乘法封闭)

$\Gamma \cap L^1$是向量空间 (Γ是向量空间)

$$\Gamma \ni f_n \nearrow f \xrightarrow{f_n, f \in L^+} f \in \Gamma$$

$$\Gamma \ni f_n \searrow f \xrightarrow{f_n, f \in L^1} f \in \Gamma$$

预备引理图示

$\Gamma \cap L^+$	锥	关于$\nearrow$ lim封闭(在L^+的框架内)
$\Gamma \cap L^1$	向量空间	关于$\searrow$ lim封闭(在L^1的框架内)

证明:

$$\Gamma \text{ 非空:} \quad 0 \in \Gamma.$$

Γ 关于代数运算的封闭性显然.

Γ 关于极限运算的封闭性:

(1) 来自单调收敛定理.

(2) 意味着

$$\Gamma \cap L^1 \ni f_n \searrow f \in L^1 \Longrightarrow f \in \Gamma \cap L^1.$$

转化为情形一: $f_1 - f_n \nearrow f_1 - f$

利用标准四步骤:

$$\chi_E \xrightarrow[+,\cdot,\lim]{S^+} L^+$$

$$\chi_E \in \Gamma \quad \xRightarrow[(\forall E\subset\mathbb{R}^{n+m}\text{可测})]{\text{预备引理}} L^+(\mathbb{R}^{n+m}) \subset \Gamma$$

- 矩体:

$$E = I \times J, \quad I \subset \mathbb{R}^n, \quad J \subset \mathbb{R}^m, \quad I, J\text{是矩体}.$$

$$\text{性质(1)中的积分相等} = |I|\,|J|.$$

- 开集:

$$E \xlongequal{\text{二进制剖分}} \bigsqcup_{\text{可列}} I_k, \qquad I_k \text{ 是矩体}.$$

$$\chi_E = \sum_{\text{可列}} \chi_{I_k} \in \Gamma \cap L^+ \subset \Gamma.$$

- 紧集:

$$B(0,R) = E \bigsqcup \overbrace{(E^c \cap B(0,R))}^{\text{开集}}, \qquad R \gg 1$$

$$\xRightarrow{\text{预备引理}} \chi_E = \chi_{B(0,R)} - \chi_{E^c \cap B(0,R)} \in \Gamma \cap L^1 \subset \Gamma.$$

- 零测集E:

$$\exists\text{开集}G_k \supset E: \qquad \lim_{k\to\infty} m(G_k) = m(E) = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \text{可设}G_k \downarrow, \qquad m(G_1) < +\infty$$

$$\Longrightarrow \qquad H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\text{是}E\text{的等测包}$$

$$\xrightarrow[G_k \in \Gamma\cap L^1]{\text{预备引理}} \qquad \chi_H \in \Gamma \cap L^1 \subset \Gamma.$$

五种情形(续)

$$0 = m(E) = m(H) \xlongequal{\chi_H \in \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_H(x,y)dy \Big) dx$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}^m} \chi_H(x,y)dy \xlongequal{a.e.} 0$$

$$\chi_H \xlongequal{a.e.} 0$$

五种情形(续)

$$\chi_H \in \Gamma, \qquad \chi_H \overset{a.e.}{=\!=} 0 \Longrightarrow \qquad \chi_E \in \Gamma$$

- 可测集E:

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\bigsqcup Z,\quad 紧集F_k\uparrow\subset\mathbb{R}^{n+m},\ m(Z)=0.$$

$$\Longrightarrow\chi_E=\chi_Z+\lim_{k\to\infty}\chi_{F_k}\subset\Gamma\cap L^+\subset\Gamma.$$

Fubini-Tonelli定理

Theorem 1 (Fubini-Tonelli 定理)

设$f \in L^+(\mathbb{R}^{n+m}) \cup L^1(\mathbb{R}^{n+m})$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy\Big)dx.$$

Fubini-Tonelli定理续

- 注记

$$f \in L^1(\mathbb{R}^{n+m}) \implies f(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m) \qquad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$\implies f(x,\cdot)\ \ a.e.\text{可测，}\ \ a.e.\text{有限.}$$

$$f \in L^+(\mathbb{R}^{n+m}) \implies f(x,\cdot) \in L^+(\mathbb{R}^m) \qquad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$\implies f(x,\cdot)\ \ a.e.\text{可测.}$$

Fubini-Tonelli定理续

证明: $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+m}) \xrightarrow{\textit{Tonelli}} f = f^+ - f^-, \quad f^\pm \in \Gamma \cap L^1$

$\xrightarrow{\text{预备引理}} f \in \Gamma \cap L^1 \subset \Gamma.$

Fubini-Tonelli定理应用的两部曲:

- Tonelli定理验证f可积性.

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)|dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|dy \Big) dx < +\infty \Longrightarrow f \in L^1.$$

- Fubini定理计算f积分值.

$$f \in L^1 \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy \Big) dx.$$

Fubini定理对于下列函数不成立:

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad (x,y)\in(0,1]\times(0,1].$$

证明:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{x}{x^2+a^2}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{2x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$$

$$\xRightarrow{\text{移项通分}} \quad \int_0^1 \frac{x^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}dx = -\frac{1}{1+a^2}$$

例题续

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \Big) dy = \int_0^1 -\frac{1}{1 + y^2} dy = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \Big) dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

例题续

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \Big) dy \neq \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \Big) dx$$

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| dxdx = +\infty.$$

交换积分次序的五个等价定理

测度的σ可加性等价于:

Levi	L^+	$f_n \uparrow f \xRightarrow{f_n \in L^+} \int f_n \uparrow \int f$
Fatou	L^+	$\int \underline{\lim} f_n \overset{f_n \in L^+}{\leqslant} \underline{\lim} \int f_n$
Lebesgue	L^1	$f_n \xrightarrow{a.e.} f \xRightarrow[f_n\text{可测}]{\lvert f_n\rvert \leqslant g \in L^1} f_n \xrightarrow{L^1} f, \int f_n \longrightarrow \int f$
Fubini	$L^+ \cup L^1$	$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \overset{f \in L^+ \cup L^1}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dm(y) \Big) dm(x).$

例题

设$f \in L^1(\mathbb{R})$, 且

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = 0, \qquad \forall\, \varphi(x) \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

证明: $\quad f \xlongequal{a.e.} 0$

证明

$$\int_E f(x)dx = 0, \qquad \forall\ m(E) < \infty.$$

$$取E = [-R, R] \cap [f \geqslant 0] \Longrightarrow f|_{[-R,R]\cap[f\geqslant 0]} \xlongequal{a.e.} 0$$

$$取E = [-R, R] \cap [f < 0] \Longrightarrow f|_{[-R,R]\cap[f<0]} \xlongequal{a.e.} 0$$

作业

P193　第32, 33, 34题

实分析(H), 第22次课

任广斌(中国科大)

2024-5-15

本节主要内容

- 抽象积分理论中的Fubini定理
- Vitali覆盖定理

Theorem 1 (Fubini 定理)

设(X,Γ_X,μ), (X,Γ_Y,ν)是σ有限正测度空间,

$$f\in L^+(X\times Y)\cup L^1(X\times Y,\mu\times\nu).$$

则

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\, d\mu\times\nu &= \int_X\Big(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\Big)d\mu(x)\\ &= \int_Y\Big(\int_X f(x,y)d\mu(x)\Big)d\nu(y).\end{aligned}$$

Fubini-Tonelli定理续

- 注记

$$f \in L^1(X \times Y, \mu \times \nu)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x,\cdot) \in L^1(Y) \qquad (\mu - a.e.\ \ x \in X)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x,\cdot)\ \ \text{可测} \qquad (\mu - a.e.\ \ x \in X)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x,y)\ \ \text{有限} \qquad (\mu - a.e.\ \ x \in X, \quad \nu - a.e.\ \ y \in Y)$$

Fubini-Tonelli定理续

- 注记

$$f \in L^+(X \times Y, \mu \times \nu) \implies f(x, \cdot) \in L^+(Y) \qquad \mu - a.e.\ x \in X$$

- 乘积测度空间

$$(X \times Y, \quad \Gamma_{X\times Y}, \quad \mu \times \nu)$$

乘积测度空间σ代数

- $\Gamma_{X\times Y}$ 是$\Gamma_x \times \Gamma_Y$生成的最小σ代数.

- 乘积测度是由Caratheodory构造出的测度, 它的出发点是

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B),$$

- 它的定义域$\hat{\Gamma}_{X\times Y}$:

$$\hat{\Gamma}_{X\times Y} \supset \Gamma_{X\times Y}$$

乘积测度空间

- 乘积测度空间$(X \times Y, \hat{\Gamma}_{X \times Y}, \mu \times \nu)$是完备测度空间
- $(X \times Y, \Gamma_{X \times Y}, \mu \times \nu)$可能非完备.
- 若(X, Γ_X, μ), (X, Γ_Y, ν)是σ有限测度空间,

  则$(X \times Y, \Gamma_{X \times Y}, \mu \times \nu)$是$\sigma$有限测度空间.

逐项积分定理: 计数测度

- 取计数测度ν:

$$\text{Fubini 定理} \Longleftarrow \text{逐项积分定理} \Longleftarrow \text{测度}\sigma\text{可加性}$$

$$\Longleftarrow \text{Levi单调收敛定理}$$

$$\Longleftarrow \text{Lebesgue 控制收敛定理}$$

逐项积分定理的条件

(X, Γ_X, μ)是σ有限测度空间.

$$f(x,n) := f_n(x)$$

- $f(x,n) \in L^+(X \times \mathbb{N}) \Longleftrightarrow f_n \in L^+(E).$
- $f(x,n) \in L^1(X \times \mathbb{N}, \mu \times \nu) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n(x)| d\mu(x) < +\infty$

注记

数列 $=\!=\!=\!=$ 函数 (维数升高一维)

级数(极限) $=\!=\!=\!=$ 积分 (离散测度)

$Levi = Lebesgue = Fubini =$ 交换积分次序

逐项积分定理

Theorem 2 (逐项积分定理)

(X, Γ_X, μ)是σ有限测度空间.

$$f_n(x) =: f(x, n) \in L^+ \cup L^1(X \times \mathbb{N}, \mu \times \nu))$$

$$\Longrightarrow \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

交换积分次序的五个等价定理

测度的σ可加性等价于:

Levi	L^+	$f_n \uparrow f \xRightarrow{f_n\in L^+} \int f_n \uparrow \int f$
Fatou	L^+	$\int \underline{\lim} f_n \overset{f_n\in L^+}{\leqslant} \underline{\lim} \int f_n$
Lebesgue	L^1	$f_n \xrightarrow{a.e.} f \xRightarrow[f_n\text{可测}]{\lvert f_n\rvert\leqslant g\in L^1} f_n \xrightarrow{L^1} f, \int f_n \uparrow \int f$
Fubini	$L^+ \cup L^1$	$\int_{X\times Y} f \overset{f\in L^+\cup L^1}{=\!=\!=} \int_X \Big(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\Big) d\mu(x).$

绝对连续测度刻画

- Radon-Nikodym 定理

设ν, μ是可测空间(X,Γ)测度, ν有限, μ是σ有限, 则

$$\nu \ll \mu \iff d\nu = fd\mu \quad (\exists f \in L^+ \cap L^1(X,\mu))$$

$$\text{即}\nu(A) = \int_A d\nu = \int_A fd\mu, \quad \forall A \in \Gamma.$$

- Radon-Nikodym 定理刻画: 哪些测度本质上就是函数?

抽象积分是高维的测度

Theorem 3

$$m_{n+1}(U(f)) = \int_E f(x)dm(x) = \int_0^{\infty} m\{x \in E : t < f(x)\}dt$$

- $f \in \mathscr{L}^+(E)$, f的图形的下方

$$U(f) = \{(x,t) \in E \times [0,+\infty) : 0 \leqslant t < f(x)\}$$

- 积分是曲边梯形的面积.

$$\text{微元面积= 长} \times \text{ 宽} = \overbrace{m\{x \in E : t < f(x)\}}^{\text{图形下方长度}} dt$$

积分是高维的测度续

证明: 图形下方是可测集(f非负有界):

$$U(f)=\lim_{k\to\infty}\bigsqcup_{j=1}^{2^{2k}}\Big(f^{-1}[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})\times[0,\frac{j}{2^k})\Big).$$

蛋糕分层

积分是高维的测度续

$$
\begin{aligned}
m_{n+1}(U(f)) &= \int_{E\times(0,+\infty)} \chi_{U(f)}(x,t)dm_n(x)dt \\
&= \int_E \Big(\int_0^{+\infty} \chi_{U(f)}(x,t)dt \Big) dm_n(x) \\
&= \int_E \int_0^{f(x)} dtdm_n(x) \\
&= \int_E f(x)dm_n(x) \\
&= \int_0^{\infty} \Big(\int_E \chi_{U(f)}(x,t)dm_n(x) \Big) dt \\
&= \int_0^{\infty} m\big\{x \in E : t < f(x)\big\} dt
\end{aligned}
$$

积分是高维的测度

Theorem 4

$$(\mu \times m)(U(f)) = \int_X f(x)d\mu(x) = \int_0^\infty \mu\big\{x \in X : t < f(x)\big\}dm(t)$$

- 测度空间(X, Γ, μ), *Borel*测度空间$(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), m)$
- $f \in \mathscr{L}^+(X)$, f的图形的下方

$$U(f) = \big\{(x,t) \in X \times [0,+\infty) : t < f(x)\big\}$$

- 积分是曲边梯形的面积.

$$\text{微元面积} = \text{长} \times \text{宽} = \overbrace{\mu\big\{x \in X : t < f(x)\big\}}^{\text{图形下方水平集长度}}\, dt$$

- Vitali覆盖是分析的手术刀:

$$\text{无穷} \xrightarrow{\text{转化为}} \text{可列、有限}$$

- 应用:

$$\text{导数} \xrightarrow{\text{转化为}} \text{差商}$$

Vitali覆盖的定义

$E \subset \mathbb{R}$, $\quad \Gamma$是E的Vitali覆盖

- Γ是E 的覆盖
- $\Gamma =$ 非退化的闭区间族
- 每点处无穷小层次覆盖:

$$\forall\, x \in E, \quad \inf\left\{|I| : \quad x \in I \in \Gamma\right\} = 0$$

Theorem 5 (Vitali覆盖定理)

$E \subset \mathbb{R}$, $m^*(E) < \infty$, Γ 是E的Vitali覆盖.

$$\Longrightarrow E \subset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j \sqcup Z \qquad (\exists I_j \in \Gamma, m(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j) < \infty,\ m(Z) = 0)$$

$$\overset{\text{逐次收割}}{\Longleftrightarrow} \forall \epsilon > 0, \quad E \subset \bigsqcup_{j=1}^{n(\epsilon)} I_j \sqcup E_\epsilon \quad (\exists I_j \in \Gamma, \quad m(E_\epsilon) < \epsilon.)$$

- Vitali覆盖定理在$\mathbb{R}^n$中成立:

$$\text{闭区间} \quad \longrightarrow \quad \text{闭球}$$

$$|I| \quad \longrightarrow \quad \text{闭球直径}.$$

- 宇宙取为测度有限开集. 不妨设

$$E \subset G \subset \mathbb{R}, \qquad m(G) < +\infty, \qquad I \subset G(Vitali) \qquad (\forall\ I \in \Gamma).$$

续

- 归纳选取:

$$\text{设已选取}I_1,\ldots,I_n\in\Gamma\text{互不相交}$$

$$\Longrightarrow\qquad\text{选取}I_1,\ldots,I_{n+1}\in\Gamma\text{互不相交}$$

- 贪婪算法(每步择优):

$$\text{可设} E \setminus \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j \neq \emptyset$$

$$\delta_n = \sup\left\{|I| : \ I \in \Gamma, \ I\text{与} I_1, \ldots, I_n \text{互不相交}\right\}$$

$$\xRightarrow{|I| \leqslant m(G) < \infty} \quad \delta_n \in (0, +\infty)$$

$$\Longrightarrow \quad \text{选取} I_{n+1} : \quad |I_{n+1}| > \frac{\delta_n}{2}.$$

Vitali覆盖定理的证明续

- 假设上述过程一直继续下去:

$$\text{存在互不相交可列个} I_j \in \Gamma, \text{满足}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leqslant m(G) < +\infty \Longrightarrow |I_k| \to 0$$

Vitali覆盖定理的证明续

- 断言:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}:$$

$$E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} 5I_k \qquad \sum_{k=N+1}^{\infty} |I_k| < \frac{\epsilon}{5}.$$

- 记号: $5I$与I同心, $|5I| = 5|I|$

Vitali覆盖定理的证明续

- 利用断言证明定理:

$$m(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k) \leqslant m(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k) < \epsilon.$$

断言的证明:

$$\text{只要证明:}\quad E\setminus\bigsqcup_{k=1}^{N} I_k\subset\bigsqcup_{k=N+1}^{\infty} 5I_k,\qquad \forall N\in\mathbb{N}.$$

$$\forall\ x\in E\setminus\bigsqcup_{k=1}^{N} I_k \quad\stackrel{\exists I}{\Longrightarrow}\quad x\in I\in\Gamma,$$

$$I\cap\bigsqcup_{k=1}^{N} I_k=\emptyset$$

$$I\cap\bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k\neq\emptyset$$

否则$|I|\leqslant\delta_k\leqslant 2|I_{k+1}|\longrightarrow 0.$

续

- I与$I_1, \ldots I_N, \ldots I_{n_0-1}$不相交， I与$I_{n_0}$相交
- $n_0 > N, \quad |I| \leqslant \delta_{n_0-1} < 2|I_{n_0}|.$
- $x \in \Gamma \Longrightarrow x \in 5I_{n_0}, \quad$ 断言成立.

作业

P192　第22，23，24，25，26，27题

实分析(H), 第23次课

任广斌(中国科大)

2024-5-20

本节主要内容

- 分布函数
- 微分理论

分布函数

- $E \subset \mathbb{R}^n$Lebesgue可测.

$$f \in \mathscr{L}(E), \qquad g := |f|$$

- 图形下方的水平截面(水平截面落在曲边梯形的部分)

$$\{(x, t_0): \quad x \in E, \; t_0 < g(x)\}, \qquad \text{其中} t_0 \in [0, \infty)\text{固定}.$$

- 水平截面的测度

$$m(\{x \in E: \quad t_0 < g(x)\}) = m(g^{-1}(t_0, +\infty))$$

分布函数续

- f的分布函数

$$f_*(t) := m\{x \in E : \quad t < |f(x)|\} \xlongequal{g=|f|} m(g^{-1}(t, +\infty))$$

- 几何意义:

$|f|$图形下方的水平截面的测度就是分布函数$f_*(t)$

- 测度论中, 函数的地位被分布函数取代.

分布函数在积分中的作用： 蛋糕表示

$$\int_E |f(x)|dx \quad \xlongequal[\text{利用微元法}]{f\text{的图形的下方的面积}} \quad \int_0^{+\infty} f_*(t)dt$$

积分的蛋糕表示

$$\int_E |f(x)|^p \, dx \quad \xlongequal[p\in[1,\infty)]{f\in\mathscr{L}(E)} \quad \int_0^{+\infty} pt^{p-1} f_*(t) dt$$

分布函数的积分表示

- $|f|$的图形下方:

$$U(f) = \left\{(x,t) \in E \times [0,+\infty] : \quad t < |f(x)|\right\}$$

- 分布函数的积分表示

$$f_*(t) = \int_E \chi_{U(f)}(x,t)dx$$

积分的蛋糕表示证明

$$
\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^p \, dx &= \int_E dx \int_0^{|f(x)|} pt^{p-1} dt \\
&= \int_E dx \int_0^{+\infty} pt^{p-1} \chi_{U(f)}(x,t) dt \\
&\xlongequal{\text{Fubini}} \int_0^{+\infty} pt^{p-1} dt \int_E \chi_{U(f)}(x,t) dx \\
&= \int_0^{+\infty} pt^{p-1} f_*(t) dt
\end{aligned}
$$

分布函数总结

抽象积分	Riemann积分
抽象函数$f(x)$	具体函数$f_*(t)$

$$\text{抽象积分} \xrightarrow[\text{具体化的桥梁}]{\text{分布函数}} \text{Riemann积分}$$

- 第五章:　微分理论

本章核心内容：　微积分基本定理

$$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftharpoons}} C^1[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

$$L^1[a,b]/\sim \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftharpoons}} AC[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

- 实分析的抽象积分理论是积分理论推广的最广场所.
- 微分几何的流形和纤维丛理论是导数推广的最广场所.

Vitali覆盖的定义

$E \subset \mathbb{R}$, Γ是E的Vitali覆盖

- Γ是E 的覆盖
- $\Gamma =$ 非退化的闭区间族
- 每点处无穷小层次覆盖:

$$\forall\, x \in E, \quad \inf\left\{|I| : \quad x \in I \in \Gamma\right\} = 0$$

Theorem 1 (Vitali覆盖定理)

$E \subset \mathbb{R}$, $m^*(E) < \infty$, Γ 是E的Vitali覆盖.

$$\Longrightarrow E \subset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j \sqcup Z \qquad (\exists I_j \in \Gamma, m(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j) < \infty,\ m(Z) = 0)$$

$$\overset{逐次收割}{\Longleftrightarrow} \forall \epsilon > 0, \quad E \subset \bigsqcup_{j=1}^{n(\epsilon)} I_j \sqcup E_\epsilon \quad (\exists I_j \in \Gamma, \quad m(E_\epsilon) < \epsilon.)$$

- Vitali覆盖是分析的手术刀:

$$\text{无穷} \xrightarrow{\text{转化为}} \text{可列、有限}$$

- 应用:

$$\text{导数} \xrightarrow{\text{转化为}} \text{差商}$$

续

注记:　　分析的精髓是极限, 逼近(好+小).

具体操作:　磨去边角料, 回到大本营.

Lebesgue 微分定理

Theorem 2 (Lebesgue 微分定理)

单调函数几乎处处可导.

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \uparrow \Longrightarrow f' \ a.e.\text{存在且有限}.$$

续

证明: 证明思路: 总是记$h>0$. 我们只要证明

$$(1).\qquad \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\overset{a.e.}{\leqslant}\underline{\lim_{h\to 0}}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

$$(2).\qquad \underline{\lim_{h\to 0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\overset{a.e.}{\geqslant}\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

(3). f' a.e.不等于∞.

Lebesgue 微分定理的证明

- (1)$\Longrightarrow$ (2):

$$g(x)\uparrow = -f(t) \qquad (x+t=a+b, \quad x\in[a,b]).$$

$$(1) \quad \xRightarrow{\ g\uparrow\ } \quad \overline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \overset{a.e.}{\leqslant} \underline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{g(x)-g(x-h)}{h}$$

$$\xRightarrow{\ g(x)=-f(t)\ } \quad \overline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{-f(t-h)+f(t)}{h} \overset{a.e.}{\leqslant} \underline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{-f(t)+f(t+h)}{h}$$

$$\Longrightarrow \quad (2)\text{成立}.$$

- (3)的证明:

$$E := \{x \in (a,b) : f'(x) = \infty\} \qquad \text{固定} N > 0$$

$$\Gamma := \left\{ [x, x+h] \subset (a,b) : \quad x \in E, \ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > N \right\}$$

Γ是E的Vitali覆盖

续

$$\xRightarrow{\text{Vitali定理}} \quad E \subset I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_m \sqcup E_{\frac{1}{N}}, \qquad m(E_{\frac{1}{N}}) < \frac{1}{N},$$

$$\xRightarrow{I_j=[x_j,x_j+h_j]} \quad m^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{m} h_j + \frac{1}{N}$$

$$\leqslant \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m}(f(x_j+h_j) - f(x_j)) + \frac{1}{N}$$

$$\overset{f\uparrow}{\leqslant} \frac{1}{N}(f(b) - f(a) + 1) \longrightarrow 0 \quad (N \to \infty).$$

Lebesgue 微分定理的证明(续)

(1)的证明:

- (1)描述的是a.e.成立的不等式.
- 只要证明该不等式不成立的集合是零测集.
- 将该零测集表示为可列个集合的并.

- $\forall\ R, r \in \mathbb{Q}, \quad R > r,$ 记

$$E := \left\{ x \in (a,b) : \quad \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > R > r > \underline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \right\}$$

- 我们只要证明E是零测集.

右上导数>左下导数的点构成零测集

续

反证法:

- 设$m^*(E) \neq 0$.　(注意：$E \subset (a,b)$)
- 取开集$G \supset E$:

$$m(G) < \frac{R+r}{2r} m^*(E).$$

Lebesgue 微分定理的证明(续3)

- 出发点

$$r > \varliminf_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

- 构造Vitali覆盖

$$\Gamma_E = \left\{[x-h,x] \subset (a,b)\cap G : x\in E, \frac{f(x)-f(x-h)}{h} < r\right\}$$

$$\stackrel{\text{Vitali}}{\Longrightarrow} \qquad E \subset I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_p \sqcup E_\epsilon, \qquad I_j = [x_j-h_j, x_j] \in \Gamma_E, \quad m(E_\epsilon) < \epsilon$$

续

- 出发点

$$y \in E, \qquad \overline{\lim_{0<k\to 0}} \frac{f(y+k)-f(y)}{k} > R.$$

- 取E的去掉边角料的部分:

$$\begin{aligned} A &= E\text{中被Vitali有限项覆盖的部分} \\ &:= E \cap (\mathring{I}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathring{I}_p) \end{aligned}$$

- 注记: $\mathring{I} = I$的内部

- 构造Vitali覆盖

$$A = E \cap (\mathring{I}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathring{I}_p)$$

$$\Gamma_A = \left\{ [y, y+k] \subset \bigsqcup_{j=1}^{p} \mathring{I}_j : \quad y \in A, \quad \frac{f(y+k) - f(y)}{k} > R \right\}$$

$$\xRightarrow{Vitali} A \subset J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_q \sqcup A_\epsilon, \quad J_i = [y_i, y_i + k_i] \in \Gamma_A, \quad m(A_\epsilon) < \epsilon.$$

Lebesgue 微分定理的证明(续4)

- 综上,

$$E \subset J_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup J_q \bigsqcup A_\epsilon \cup E_\epsilon \cup \text{有限集}.$$

$$J_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup J_q \subset I_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup I_p \subset G.$$

续

- 考察f在J_i, I_j上跳跃度

$$\xRightarrow{f\uparrow} \quad \sum_{i=1}^{q}(f(y_i+k_i)-f(y_i)) \leqslant \sum_{j=1}^{p}(f(x_j)-f(x_j-h_j)).$$

续

- 利用构造中的伸缩率条件:

$$\text{上式左边}=\sum_{i=1}^{q}(f(y_i+k_i)-f(y_i))\geqslant R\sum_{i=1}^{q}k_i\geqslant R(m^*(E)-2\epsilon)$$

$$\text{上式右边}=\sum_{j=1}^{p}(f(x_j)-f(x_j-h_j))\leqslant rm(G)<\frac{R+r}{2}m^*(E).$$

矛盾

Vitali覆盖的构造

- 从关于导数的不等式或等式出发
- 脱去极限的外衣
- 提供Vitali覆盖.

Vitali覆盖的方法总结

- Vitali覆盖 $\xlongequal[\text{扰动之法}]{\text{退一步海阔天空}}$ 处理极限的规则化方法

抽象集合	区间
导数	差商

集合、导数 $\xRightarrow[\text{去极限: 保留重要信息}]{\text{炼钢之法: 去粗存精}}$ 区间、差商

- Sobolev空间:

$$W^{1,1}[a,b] := \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \mid f' a.e.\text{存在}, \quad f, f' \in L^1[a,b] \right\}.$$

- 两个指标:

(导数指标, 积分指标)

- 与Sobolev理论相比: 这里对导数的要求更强.

Theorem 3 (Lebesgue定理)

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \uparrow \Longrightarrow f \in W^{1,1}[a, b], \qquad \int_a^b f'(x)dx \leqslant f(b) - f(a).$$

反例

- $f =$ Cantor函数 $\uparrow$,

$$\int_0^1 f'(x)dx < f(1) - f(0).$$

Lebesgue定理的证明

证明: 常值延拓$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\xRightarrow{f\uparrow} \quad f \;\; a.e.\text{连续}$$

$$\Longrightarrow \quad f\text{可测}, \quad f'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}\text{可测}, \overset{a.e.}{\geqslant} 0$$

Lebesgue定理的证明续

$$\xRightarrow[f'\in L^+]{\text{Fatou}} \int_a^b f'(x)dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_a^b \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}\,dx$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} n\left(\int_b^{b+1/n} f(x)dx - \int_a^{a+1/n} f(x)dx\right)$$

$$\leqslant f(b)-f(a)$$

作业

P211　第1, 2题

P241　第2, 3题

实分析(H), 第24次课

任广斌(中国科大)

2024-5-22

本节主要内容

- 逐项微分定理
- BV[a,b],   AC[a,b]

利用单调增加函数帮助研究绝对连续函数.

AC[a,b]在微积分基本定理中起着关键作用.

条件:

- 在L^+框架内: $f_n' \in L^+$加强为$f_n \uparrow$
- 两边有意义: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$收敛.

Theorem 1 (Fubini逐项微分定理)

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' \xlongequal{a.e.} \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

注记

- Fubini逐项微分定理与Fubini定理不同:

  它是a.e.成立的等式;　　求导和积分交换次序.

- Fubini逐项微分定理的条件:

  逐项求导后的加强版本的L^+框架内.

续

证明: $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{N} f_n + R_N, \qquad R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' \xlongequal{a.e.} \sum_{n=1}^{N} f_n' + R_N'$$

$$\xLongrightarrow[\text{若} \lim\limits_{N\to\infty} R_N' \exists]{N\to\infty} \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' \xlongequal{a.e.} \sum_{n=1}^{\infty} f_n' + \lim_{N\to\infty} R_N'.$$

续

补充证明:

$$f_n\text{关于}x\uparrow$$

$$\Longrightarrow \quad R_{N+1}\text{关于}x\uparrow$$

$$\Longrightarrow \quad R'_N \xlongequal{a.e.} f'_{N+1} + R'_{N+1} \overset{a.e.}{\geqslant} R'_{N+1} \overset{a.e.}{\geqslant} 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{N\to\infty} R'_N \exists$$

$$0 \overset{R_N\uparrow}{\leqslant} \int_a^b \lim_{N\to\infty} R_N' \overset{Fatou}{\leqslant} \underline{\lim}_{N\to\infty} \int_a^b R_N' \overset{R_N\uparrow}{\leqslant} \underline{\lim}_{N\to\infty} \left(R_N(b) - R_N(a)\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{N\to\infty} R_N' \overset{a.e.}{=\!=} 0.$$

例题

- $\exists\, f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$严格单调增加， $f' \xlongequal{a.e.} 0.$

例题

- 构造:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\chi_{[r_n,1]}(x),\quad \text{其中}(0,1)\cap\mathbb{Q}=\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

$$\Longrightarrow\quad f'(x)\xlongequal[\textit{Fubini}\text{逐项微分定理}]{a.e.}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\chi'_{[r_n,1]}(x)\xlongequal{a.e.}0$$

- $[a,b]$上有界变差函数全体$BV[a,b]$

$$
\begin{aligned}
BV[a,b] &= \left\{f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R} \mid V_a^b f < +\infty\right\} \\
&= \text{包含}[a,b]\text{上所有单调增加函数的最小的线性空间} \\
&= \text{由}[a,b]\text{上所有单调增加函数生成的线性空间}
\end{aligned}
$$

- 全变差

$$V_a^b f = \sup_{a=x_0<\cdots<x_n=b} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

曲线可求长

- $f \in BV[a,b] \Longleftrightarrow f$作为曲线可求长.

曲线可求长续

- 不可求长曲线:

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x} \in C[0,1] \setminus BV[0,1].$$

$$\text{剖分} 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n+1}$$

$$(\text{剖分点} x_{2k-1} = \frac{1}{((n-k+1)+\frac{1}{2})\pi} < \frac{1}{(n-k+1)\pi} = x_{2k})$$

$$V_0^1 f \geqslant \sum_{k=1}^{2n+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \geqslant c \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty \qquad .$$

全变差和积分的相似性

- 全变差和积分的相似性

全变差		积分
分割跳跃取极限		分割求和取极限
$V_a^b f$	$\xlongequal[\text{全变差的计算方法}]{f \in AC[a,b]}$	$\int_a^b \lvert f' \rvert$

- $f \uparrow \Longrightarrow V_a^b f = f(b) - f(a).$

全变差测度

- 全变差

$$dv = f'dm, \qquad d|v| = |f'|dm$$

$$V_a^b f = |v|([a,b]) = \int_a^b d|v| = \int_a^b |f'|dm$$

$$|v|(E) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |v(E_k)| : \quad E = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k\right\}$$

- 有界变差对积分限的可加性

$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f \qquad \forall\ c \in (a, b).$$

证明： (1). 对于$\forall\ a = x_0 < \cdots < x_n = b$

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant V_a^c f + V_c^b f.$$

(2). 对于$\forall\ a = x_0 < \cdots < x_m = c, \quad c = y_0 < \cdots < y_n = b$

$$V_a^b f \geqslant \sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{j=1}^{n} |f(y_j) - f(y_{j-1})|$$

- Jordan分解定理

$$f \in BV[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad f = f_1 - f_2 \quad (\exists f_1, f_2 \uparrow).$$

证明：“ $\Longleftarrow$ ”

$$f_1, f_2 \uparrow \quad \Longrightarrow \quad V_a^b f \leqslant V_a^b f_1 + V_a^b f_2 < +\infty.$$

Jordan分解定理续

“$\Longrightarrow$”

$$f_1(x) := V_a^x f, \qquad f_2 := f_1 - f$$

$$f_2(y) - f_2(x) \xlongequal{y>x} (V_a^y f - f(y)) - (V_a^x f - f(x))$$

$$= V_x^y f - (f(y) - f(x)) \geqslant 0.$$

有界变差是Sobolev

- $BV[a,b] \subset W^{1,1}[a,b]$.

(因为↑函数$\in W^{1,1}[a,b]$)

- Lebesgue框架下微积分基本定理:

$$L^1[a,b]/\sim \;\underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}}\; AC[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

注记

- 由微积分基本定理读出绝对连续函数的刻画性质:

反解

绝对连续函数定义: Motivation

$$f \in AC[a,b] \Longrightarrow \exists g \in L^1[a,b]: \quad f(x) = \int_a^x g + c$$

$$\xrightarrow{|g| \in L^1} \lim_{m\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)\right)\to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)|$$

$$\leqslant \lim \int_{\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)} |g| = 0$$

绝对连续函数的定义

$$f \in AC[a,b]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{m(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k))\to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : m\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)\Big) < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

绝对连续函数是连续的加强版本, C^1的弱化版本

$$C^1[a,b] \subset AC[a,b] \subset C[a,b]$$

绝对连续函数是有界变差函数

$$AC[a,b] \subset BV[a,b]$$

$$V_a^b f \xlongequal{\epsilon=1, \|\pi\|<\delta} \sum_{k=1}^{n} V_{c_{i-1}}^{c_i} f \leqslant n.$$

空间包含关系

$$C^1[a,b] \subset AC[a,b] \subset C[a,b] \cap BV[a,b] \subset BV[a,b] \subset W^{1,1}[a,b] \subset L^1$$

Cantor函数是单调增加连续函数, 但不是绝对连续函数

例题

$$f \in C[a,b] \quad \Longrightarrow \quad V_a^b f = V_a^b |f|$$

- 情形一　$f(x)f(y) \geqslant 0$:

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| = |f(x) - f(y)|$$

- 情形二　$f(x)f(y) < 0 \Longrightarrow \exists\, \xi : \quad f(\xi) = 0$:

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant \big||f(x)| - |f(\xi)|\big| + \big||f(\xi)| - |f(y)|\big|$$

$$\forall \text{ 分割}\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$\xRightarrow{\text{加入分割点}} \quad \forall \text{ 新分割}\pi' : a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b$$

满足

$$\sum_{k=1}^{n}\Big||f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big|f(x_k)-f(x_{k-1})\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{m}\Big||f(y_k)|-|f(y_{k-1})|\Big|$$

$$\Longrightarrow \qquad V_a^b f = V_a^b |f|$$

Stieltjes积分

$$\int_a^b \varphi(t)df(t) \quad \xlongequal[\varphi \in C[a,b]]{f \in BV[a,b]} \quad \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{j=1}^n \varphi(\xi_j)\big(f(t_j) - f(t_{j-1})\big)$$

$$\forall\, \pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \qquad \forall\, \xi \in [t_{j-1}, t_j].$$

$$f \in BV[a,b] \xRightarrow[\text{对Stieltjes积分无影响}]{\text{至多可数、第一类间断点}} \text{可设}f\text{右连续，} f(0) = 0.$$

有界变差函数作为广义函数

$$BV_0[a,b] := \{f \in BV[a,b],\quad f\text{右连续}，f(0)=0.\}$$

$$f \in BV_0[a,b] \text{ 视为测度} df(t) = f'(t)dt.$$

$$C[0,1]^* = BV_0[a,b].$$

作业

P.232　第1, 3题

实分析(H), 第25次课

任广斌(中国科大)

2024-5-27

本讲主要内容

- Lebesgue框架下微积分基本定理
- 加强版本

微积分基本定理

$$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

- 局部和整体溶于一炉.
- 分析的基石.

- Lebesgue框架下微积分基本定理:

$$L^1[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} AC[a,b] \qquad （双射）$$

(a.e. 相等视为恒等) (相差常数视为恒等)

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$\int_a^x$ 单射 $\frac{d}{dx}$ 单射

已知结果

- 求导:

$$AC[a,b] \subset BV[a,b] \subset W^{1,1}[a,b]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dx} : AC[a,b] \longrightarrow L^1[a,b].$$

- 积分: 引入绝对连续函数的Motivation

$$\int_a^x : L^1[a,b] \longrightarrow AC[a,b].$$

注记

- 证明分为三步.

- Lebesgue框架下微积分基本定理的内容丰富:

  其解读参见证明的三个步骤.

证明分为三步: 第一步

Theorem 1 (微积分基本定理的特殊情形)

$$f' \xlongequal{a.e.} 0 \xLeftrightarrow[\text{微积分基本定理}]{f\in AC[a,b]} f = \text{常数}.$$

续

回忆:

$$f \in AC[a,b] \iff \lim_{m(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k))\to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(b_k)-f(a_k)| = 0$$

证明: 任意固定$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$:

$$m\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)\right) < \delta \xrightarrow[]{f\in AC[a,b]} \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

续

- 固定$x_0 \in (a,b)$: $\quad f'(x_0)\exists$, 只要证明$f(x_0) = f(a)$.

- Vitali覆盖:

$$E := \{y \in (a, x_0) : \quad f'(y) = 0\}$$

$$\Gamma_E = \left\{[y, y+h] \subset (a, x_0) : \ y \in E, h > 0, \left|\frac{f(y+h) - f(y)}{h}\right| < \epsilon\right\}$$

续

$$\xRightarrow{Vitali} \quad E \subset \bigsqcup_{i=1}^{m} [y_i, y_i + h_i] \sqcup E_\delta, \qquad m(E_\delta) < \delta, \quad [y_i, y_i + h_i] \in \Gamma$$

$$\xRightarrow{m(Z)=0} \quad (a, x_0) = E \sqcup Z \subset \bigsqcup_{i=1}^{m} [y_i, y_i + h_i] \sqcup E_\delta \sqcup Z.$$

续

- $[a, x_0]$的剖分：

$$\bigsqcup_{i=1}^{m}[y_i, y_i + h_i]\text{的端点添加}(a, x_0)\text{的端点.}$$

- f在除去$\bigsqcup_{i=1}^{m}[y_i, y_i + h_i]$以后剩下的剖分区间的跳跃度 $< \epsilon$

$$\Longrightarrow \quad |f(x_0) - f(a)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(y_i + h_i) - f(y_i)| + \epsilon$$

$$< \epsilon(\sum_{i=1}^{n} h_i) + \epsilon \leqslant \epsilon(b - a + 1).$$

证明分为三步: 第二步

- $$f \in L^1[a,b] \Longrightarrow \int_a^x f \in AC[a,b]$$

$$\left(\int_a^x f\right)' \xlongequal{a.e.} f(x)$$

续

证明: 利用积分的绝对连续性

$$f \in L^1[a,b] \Longrightarrow \int_a^x f \in AC[a,b] \subset BV[a,b] \subset W^{1,1}[a,b].$$

续

下面只要证明:

$$F' \xlongequal{a.e.} f(x)$$

其中

$$F(x) := \int_a^x f \in W^{1,1}[a,b], \qquad f \in L^1(\mathbb{R})(\text{零扩充})$$

续

$$
\begin{aligned}
\|F' - f\|_{L^1[a,b]} &\overset{Fatou}{\leqslant} \underline{\lim}_{h\to 0} \left\| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) \right\|_{L^1[a,b]} \\
&= \underline{\lim}_{h\to 0} \int_a^b \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) \right| dx \\
&= \underline{\lim}_{h\to 0} \int_a^b \left| \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t)dt - f(x) \right| dx
\end{aligned}
$$

$$\|F' - f\|_{L^1[a,b]} \underset{\text{Fubini}}{\overset{\text{上式}}{\leqslant}} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \|f(x+t) - f(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} dt = 0.$$

续

补充证明:

- $$f \in L^1[a,b] \xRightarrow[f\in L^1(\mathbb{R})]{\text{零扩充}} \int_x^{x+h} f = \int_0^h f(\cdot + x).$$

(对χ_E成立(测度的平移不变性), 从而对L^1成立.)

续

补充证明:

- $\lim\limits_{t\to 0}\|f(x+t)-f(x))\|_{L^1(\mathbb{R})} \overset{f\in L^1(\mathbb{R})}{\underset{\text{平均连续性}}{=\!=\!=\!=}} 0.$

$$\Longrightarrow \forall\,\epsilon>0,\exists\,\delta>0,\text{当}|t|<\delta\text{时},\text{有}\|f(x+t)-f(x))\|_{L^1(\mathbb{R})}<\epsilon.$$

$$\Longrightarrow \text{当}0<h<\delta\text{时},\text{有}\frac{1}{h}\int_0^h \|f(x+t)-f(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}dt\leqslant\epsilon$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{h}\int_0^h \|f(x+t)-f(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}dt\longrightarrow 0.$$

证明分为三步: 第三步

- $$F \in AC[a,b] \Longrightarrow F' \in L^1[a,b]$$

$$\int_a^x F' = F(x) - F(a).$$

证明:

$$F \in AC[a,b] \subset W^{1,1}[a,b]$$

$$\xrightarrow[F' \in L^1[a,b]]{\text{第二步}} \quad \int_a^x F' \in AC[a,b]$$

$$\left(\int_a^x F'\right)' \xlongequal{a.e.} F'(x)$$

续

$$\xRightarrow{AC\text{线性空间}} \quad F(x) - \int_a^x F' \in AC[a,b]$$

$$\left(F(x) - \int_a^x F'\right)' \xlongequal{a.e.} 0.$$

$$\xRightarrow{\text{第一步}} \quad F(x) - \int_a^x F' = c = F(a)$$

- 微积分基本定理的加强版本

由积分恢复函数

- 已知积分可恢复函数

$$f \in L^1[a,b] \quad \Longrightarrow \quad f(x) \xlongequal{a.e.} \left(\int_a^x f\right)' \xlongequal{a.e.} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t) - f(x)dt \xlongequal{a.e.} 0$$

微积分基本定理加强版本

Theorem 2 (Lebesgue点定理)

$$\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt}_{\text{消没平均振荡}} \xlongequal[f\in L^1[a,b]]{a.e.} 0.$$

- 等式成立的点称为f的Lebesgue点.
- 已知积分可反解出函数的具体表达式:

$$f(x) \xlongequal[f\in L^1[a,b]]{a.e.} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f$$

续

证明: $f \in L^1[a,b]$

$\Longrightarrow$ $|f-r| \in L^1[a,b]$ (任意固定 $r \in \mathbb{Q}$)

$\Longrightarrow$ $|f(x)-r| \xlongequal{a.e.} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} |f-r|$

续

$$\Longrightarrow \quad \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|$$

$$\leqslant \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - r| + |r - f(x)| \qquad \text{(freezing技巧)}$$

$$\xlongequal{a.e.} 2|f(x) - r|$$

$$\xrightarrow{r\to f(x)} 0$$

$$f \in L^1[a,b], \qquad \int_a^b x^n f(x)dx = 0, \quad \forall n = 0,1,2,\cdots$$

$$\Longrightarrow \qquad f \xlongequal{a.e.} 0$$

- 由微积分基本定理, 只要证明$F=0$:

$$f(x) \xlongequal{a.e.} F'(x), \qquad F(x) := \int_a^x f(t)dt \in AC[a,b]$$

- 只要证明$F=0$.
- $F(a)=F(b)=0$

续

- 绝对连续函数$x^nF(x) \in AC[a,b]$:

$$G(x) = x^n \in C^1[a,b] \subset AC[a,b]$$

$$\Longrightarrow \quad |G(x)F(x) - G(y)F(y)| \leqslant M(|F(x) - F(y)| + |G(x) - G(X)|)$$

$$\Longrightarrow \quad x^nF(x) \in AC[a,b]$$

续

- 正交性:

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b (x^n F(x))' dx = (x^n F(x))\Big|_a^b$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b x^n f(x) + n x^{n-1} F(x) dx = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b x^{n-1} F(x) dx = 0, \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

续

- 逼近:

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists 多项式 P(x): \qquad \max_{x\in[a,b]} |F(x) - P(x)| < \epsilon$$

- $F = 0$:

$$\int_a^b F(x)^2 dx = \int_a^b F(x)(F(x) - P(x))dx \leqslant \epsilon \int_a^b |F(x)|dx$$

- 利用积分论处理函数:

$$f \xlongequal{a.e.} 0 \xLeftrightarrow{f\in L^1} \|f\|_{L^1} = 0.$$

- 利用基本定理处理函数: 坏函数直接转化为好函数处理.

$$f \xlongequal{a.e.} 0 \xLeftrightarrow[F(x)=\int_a^x f]{f\in L^1} F = 0.$$

作业

P.218　第8, 10题

P.222　第1, 2题

P.231　第1, 2题

实分析(H), 第26次课

任广斌(中国科大)

2024-5-29

本讲主要内容

- 全变差计算方法
- L^∞版本的微积分基本定理
- L^1版本的逐项求导

- 内容一：　全变差计算方法

全变差计算方法

Theorem 1

$$f \in AC[a,b] \overset{f \in W^{1,1}[a,b]}{\Longleftrightarrow} V_a^x f = \int_a^x |f'|$$

特例: 全变差是积分

$$f \in C^1[a,b] \Longrightarrow V_a^x f = \int_a^x |f'|$$

充分性:

$$f \in W^{1,1}[a,b] \Longrightarrow |f'| \in L^1[a,b] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^x |f'| \in AC[a,b]$$

$$\xRightarrow{V_a^x f = \int_a^x |f'|} \quad V_a^x f \in AC[a,b]$$

$$\Longrightarrow \quad f \in AC[a,b]$$

$$(\forall\, y > x \quad \Longrightarrow \quad |f(y) - f(x)| \leqslant V_a^y - V_a^x).$$

必要性： $$\left(\forall\, y > x \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant V_a^y - V_a^x\right)$$

$$\xRightarrow{f\in AC[a,b]} \quad |f'(x)| \overset{a.e.}{\leqslant} \frac{d}{dx} V_a^x f$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^x |f'| \leqslant V_a^x f \xlongequal{f(x)=f(a)+\int_a^x f'} V_a^x \int_a^x f'$$

$$\leqslant V_a^x \int_a^x (f')^+ \uparrow + V_a^x \int_a^x (f')^- \uparrow$$

$$= \int_a^x (f')^+ + \int_a^x (f')^- = \int_a^x |f'|$$

- 内容二：　L^∞版本的微积分基本定理

记号

- $L^\infty[a,b] = [a,b]$上几乎处处有界可测函数全体.
- Lipschitz函数$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$:

$$f\in Lip[a,b] \Longleftrightarrow \quad \exists M>0,\ \ \forall\, x,y\in[a,b]:$$

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$$

$L^\infty[a,b]$ 框架下微积分基本定理

- $L^\infty[a,b]$框架下微积分基本定理:

$$L^\infty[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} Lip[a,b] \qquad \text{（双射）}$$

(a.e. 相等视为恒等) (相差常数视为恒等)

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\int_a^x \text{单射} \qquad\qquad \frac{d}{dx}\text{单射}$$

证明: (1) $f \in L^{\infty}[a,b] \subset L^{1}[a,b]$

$$\Longrightarrow \int_a^x f \in AC[a,b].$$

$$\Longrightarrow \left|\int_a^y f - \int_a^x f\right| \leqslant \int_x^y |f| \leqslant M|y-x| \qquad (\forall\ x<y)$$

$$\Longrightarrow \int_a^x f \in Lip[a,b].$$

(2). $f \in Lip[a,b] \subset AC[a,b] \subset W^{1,1}[a,b]$.

$\Longrightarrow$ f'几乎处处存在, $|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$

$\Longrightarrow$ $|f'| \overset{a.e.}{\leqslant} M$

$\Longrightarrow$ $f' \in L^\infty[a,b]$.

具体实例

$$f(x) = x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}}, \quad x \in [0,1], \quad \alpha, \beta > 0.$$

$W^{1,1}[0,1]$	$\alpha > \beta$
$BV[0,1]$	$\alpha > \beta$
$AC[0,1]$	$\alpha > \beta$
$Lip[0,1]$	$\alpha \geqslant \beta + 1$
$C^1[0,1]$	$\alpha > \beta + 1$

例题1

$$\alpha > \beta > 0 \Longrightarrow f(x) = x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}} \in AC[0,1]$$

续

假设$\alpha > \beta > 0$, 则

$$f'(x) \xlongequal{a.e.} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^\beta}$$

$$\Longrightarrow \quad |f'(x)| \overset{a.e.}{\leqslant} \alpha x^{\alpha-1} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \in L^1[0,1]$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) - f(\epsilon) = \int_\epsilon^x f' \quad (\text{Riemann框架下基本定理})$$

$$\xrightarrow[\text{控制收敛}]{\epsilon\to 0^+} \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx \in AC[a,b]$$

例题2

$$0 < \alpha \leqslant \beta \Longrightarrow f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} \notin W^{1,1}[0,1].$$

续

假设$0 < \alpha \leqslant \beta$, 则

$$f'(x) \xlongequal{a.e.} \alpha x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x^{\beta}} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos\frac{1}{x^{\beta}} \notin L^1[0,1]$$

右边第一项 $\in L^1[0,1]$, 右边第二项 $\notin L^1[0,1]$,

续

$$0 < \alpha \leqslant \beta \Longrightarrow x^{\alpha-\beta-1}\left|\cos\frac{1}{x^\beta}\right| \notin L^1[0,1]$$

证明: 做变换$t = x^{-\beta}$, 利用$|\cos t| \geqslant |\cos t|^2 = \frac{1}{2}(\cos(2t)+1)$

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^1 x^{\alpha-\beta-1}\left|\cos\frac{1}{x^\beta}\right|dx &= \frac{1}{\beta}\int_1^{\epsilon^{-\beta}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}}|\cos t|dt \\
&\geqslant \frac{1}{2\beta}\Big(\int_1^{\epsilon^{-\beta}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}}\cos(2t)dt + \int_1^{\epsilon^{-\beta}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}}dt\Big) \\
&\to \frac{1}{2\beta}\Big(\int_1^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}}\cos(2t)dt + \int_1^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}}dt\Big) = \infty.
\end{aligned}$$

$$Dirichlet\text{判别法}: t^{-\frac{\alpha}{\beta}} \downarrow 0$$

$$\int_0^1 x^{\alpha-\beta-1}\left|\cos\frac{1}{x^\beta}\right|dx \geqslant \int_\epsilon^1 x^{\alpha-\beta-1}\left|\cos\frac{1}{x^\beta}\right|dx \to +\infty$$

例题2'

$$0 < \alpha \leqslant \beta \xRightarrow{\text{直接证明}} f(x) = x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}} \notin \mathrm{BV}[0,1].$$

证明: 取区间剖分

$$\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

$$\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\beta} = (n-1-i)\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

$$f(x_{i-1})f(x_i) < 0, \qquad |f(x)| \leqslant 1.$$

续

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| &\geqslant \sum_{i=2}^{n-1}|f(x_i)| \\
&\geqslant \sum_{i=2}^{n-1}|f(x_i)|^{\frac{\beta}{\alpha}} \\
&= \sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{(n-i)\pi+\frac{\pi}{2}} \\
&= \sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}} \to \infty
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow V_0^1 f = \infty.
$$

例题3

$$f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} \in \mathrm{Lip}[0,1] \xLeftrightarrow{\alpha,\beta>0} \alpha \geqslant \beta + 1.$$

证明:

$$f \in Lip[0,1] \xLeftrightarrow{\text{微积分基本定理}} f' \in L^{\infty}[0,\infty]$$

$$f'(x) \overset{a.e.}{=\!=} \alpha x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x^{\beta}} - \beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}}$$

$$\xRightarrow{\alpha,\beta>0} \quad f'(x) \in L^{\infty}[0,1] \text{当且仅当} \alpha \geqslant \beta + 1 > 1$$

例题4

$$f \in AC[-1,1], \quad g \in C^1[-1,1] \subset AC[-1,1], \qquad f\text{和}g\text{可复合}.$$

$$\not\Rightarrow \qquad f \circ g \in AC[-1,1].$$

续

证明:　取

$$
\begin{aligned}
f(y) &= y^{\frac{1}{3}} \in AC[-1,1] \setminus C^1[-1,1] \\
g(x) &= \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^3 \in C^1[-1,1] \\
f \circ g(x) &= x \sin \frac{1}{x} \in C[-1,1] \setminus AC[-1,1]
\end{aligned}
$$

注意:　可复合的条件要求在$[-1,1]$而不是$[0,1]$上考虑.

证明:　取

$$f(y)=\int_0^y f' \xRightarrow{f'\in L^1[-1,1]} f\in AC[-1,1].$$

$$g'(x)=3x^2\sin^3\frac{1}{x}-3x\sin^2\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\in C[-1,1] \xRightarrow{g'(0)=0} g\in C^1[-1,1]$$

$$f\circ g(x)=x\sin\frac{1}{x}\notin AC[-1,1]$$

例题5

$$f \in \mathrm{Lip}[0,1], \quad g \in AC[0,1], \qquad f\text{和}g\text{可复合}.$$

$$\Longrightarrow \qquad f \circ g \in AC[0,1].$$

续

证明: $$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|, \qquad x, y \in [0,1].$$

$$g \in AC[a,b]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : m\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)\Big) < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} |f \circ g(b_k) - f \circ g(a_k)| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| \leqslant M\epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad f \circ g \in AC[0,1]$$

- 内容三: L^1框架下逐项微分

逐项微分Fubini定理

$$(1)\quad f_k \in AC[a,b]$$

$$(2)\quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(c)\text{收敛}, \quad \exists c \in [a,b]$$

$$(3)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_k'(x)|dx < \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k \in AC[a,b] \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' \xlongequal{a.e.} \sum_{k=1}^{\infty} f_k'$$

注记：在L^1框架下的逐项微分Fubini定理

- L^1框架：逐项微分后的级数的L^1可积性.
- 逐项微分的C^1条件弱化为弱C^1条件，即绝对连续条件.
- 级数收敛的要求可简化为在一点处收敛
- 逐项微分的等式是几乎处处成立的等式

注记

- 逐项微分后的级数的L^1可积性.

$$f_k'(x) =: f'(x,k) \in L^1([a,b]\times\mathbb{N}) \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b |f_k'(x)|dx < \infty$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_k'(x)| \in L^1[a,b]$$

证明

$$\xrightarrow[L^1\text{框架}]{\text{条件(3)}} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x f_k'(t)dt \xlongequal{Fubuni} \int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)dt < \infty$$

$$\xrightarrow[f_k\in AC[a,b]]{\text{条件(2)}} \quad \int_c^x f_k'(t)dt = f_k(x) - f_k(c)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(c) + \int_c^x \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)}_{\in L^1[a,b]} \, dt \in AC[a,b]$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big)' \xlongequal{a.e.} \sum_{k=1}^{\infty} f_k'$$

作业

P.232 第3, 4题

P.242 第4, 5, 6题

实分析(H), 第27次课

任广斌(中国科大)

2024-6-3

本讲主要内容

- 习题课

例题1

$$\mathbb{R} \ni \lambda_n \to +\infty \Longrightarrow m\left\{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \sin \lambda_n x \exists\right\} = 0$$

证明: 令

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \sin \lambda_n x \exists \right\}$$

A可测: Cauchy 序列ϵ语言+可测函数关于一个区间的原像可测。

$$A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{i>j>N} f_{i,j}^{-1}(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}).$$

其中

$$f_{i,j}(x) :== |f_i(x) - f_j(x)| \quad \text{可测}.$$

自然地考虑函数

$$f(x) := \chi_A(x) \lim_{n\to\infty} \sin \lambda_n x \qquad \text{零扩充}$$

利用积分理论研究该函数:

$$\int_E f(x)dx \xlongequal[\forall\text{有界可测}E]{\text{控制收敛}} \lim \int_E \chi_A(x)\sin\lambda_n x dx \xlongequal{Lebesgue} 0$$

$$\xRightarrow{\text{Lebesgue点定理}} f(x) \xlongequal{a.e.} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = 0$$

$$0 = \int_E f^2(x)dx \xlongequal[\forall\text{有界可测}E]{\text{控制收敛}} \lim \int_{E\cap A} \sin^2 \lambda_n x dx = \frac{1}{2} m(E \cap A)$$

$$\Longrightarrow m(A) = 0.$$

注记

利用积分论处理测度论技巧:

$$\text{零测集} \xRightarrow{\text{自然构造}} \text{零函数} \xRightarrow{\text{Lebesgue点理论}} \text{积分理论}.$$

例题2

假设

(1) $f_k, f \in L^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$可测.

(2) $f_k \xrightarrow{a.e.} f$

则

$$f_k \xrightarrow{L^1} f \quad \Longleftrightarrow \quad \|f_k\|_{L^1(E)} \longrightarrow \|f\|_{L^1(E)}$$

证明

$$f \in L^1(E) \Longrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists\, A \subset E, \quad \exists\, \delta > 0 :$$

$$m(A) < \infty, \quad \int_{A^c} |f| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \int_C |f| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{if} \quad m(C) < \delta$$

$$\xrightarrow{\text{Egorov}} \quad \exists B_0 \subset A : \quad m(A \setminus B_0) < \delta, \qquad f_n \rightrightarrows f \quad \text{on} \quad B_0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E |f| = \int_{A^c} |f| + \int_{A \setminus B_0} |f| + \int_{B_0} |f| < \epsilon + \int_{B_0} |f|$$

$$
\begin{aligned}
\int_E |f| \quad &< \quad \epsilon + \varliminf_{k\to\infty} \int_{B_0} |f_k| \qquad \text{(Fatou引理)} \\
&= \quad \epsilon + \varliminf \left(\|f_k\|_{L^1(E)} - \int_{B_0^c} |f_k| \right)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \qquad \varlimsup \int_{B_0^c} |f_k| < \epsilon
$$

$$
\Longrightarrow \qquad \|f_k - f\|_{L^1(E)} \leqslant \int_{B_0^c} |f_k| + \int_{B_0^c} |f| + \sup_{B_0} |f_k - f| m(B_0)
$$

例题3

设$\forall\ f \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x + x_0)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx;$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(ax)dx = \frac{1}{|a|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx;$$

证明: 只要验证$f = \chi_A$情形, 这归结于测度论的性质.

例题4

$$f \in L^1[0,+\infty) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x+n) \xlongequal{a.e.} 0.$$

证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |f(x+n)|\, dx = \int_0^{\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x+n) \xlongequal{a.e. in [0,1]} 0.$$

例题5

设$a_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$.

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n x) \xlongequal{a.e.} 0.$$

证明:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(a_n x)|\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty.$$

例题6

- 假设$E \subset \mathbb{R}^n$, $m(E) < \infty$, $f_n \in \mathscr{L}^1(E)$, 则

$$f_n \rightrightarrows f \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathscr{L}^1(E), \quad \int_E f_n \longrightarrow \int_E f.$$

- $m(E) = \infty$结论不成立.

$$\text{反例} \quad f_n = \frac{1}{2^n}\chi_{(0,2^n]}.$$

例题7: 积分公式

- $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue可测,
- $f \in L^+(E)$,
- $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \uparrow$, 内闭绝对连续, $\varphi(0) = 0$.

$$\Longrightarrow \int_E \varphi(f(x))dx = \int_0^\infty m[x \in E : f(x) > t]\varphi'(t)dt.$$

证明

$$\varphi(a) = \int_0^a \varphi'(t)dt, \qquad \forall a \in [0,\infty)$$

$$\Longrightarrow \varphi(f(x)) = \int_0^{f(x)} \varphi'(t)dt = \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{[0,f(x)]}(t)\varphi'(t)dt.$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \int_E \varphi(f(x))dx &= \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^+} \chi_{[0,f(x)]}(t)\varphi'(t)dt\Big)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \varphi'(t)dt \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\chi_{[f(x)>t]}(x)dx \\ &= \int_0^\infty m[x \in E : f(x) > t]\varphi'(t)dt. \end{aligned}$$

例题8: 导数是伸缩率

- $E \subset [a, b]$,
- $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
- f在E上每一点可导, $|f'(x)| \leqslant M, \forall x \in E$.

$$\Longrightarrow m^*(f(E)) \leqslant Mm^*(E).$$

证明

固定$\epsilon > 0$.

$$E_n := \left\{x \in E : |f(y - f(x)| \leqslant (M + \epsilon)|y - x|, \forall y \in [a, b] \cap B(x, \frac{1}{n})\right\}.$$

$$\lim_{n\to\infty} m^*(E_n \uparrow) = m^*(E)$$

$$E_n \setminus \{a, b\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}, \qquad \text{开区间} I_{n,k} \subset (a, b):$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(I_{n,k}) < m^*(E) + \epsilon, \qquad m(I_{n,k}) < \frac{1}{n}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

证明续

$$s,t\in E_n\bigcap I_{n,k}\Longrightarrow |f(s)-f(t)|\leqslant (M+\epsilon)|s-t|\leqslant (M+\epsilon)m(I_{n,k})$$

$$\begin{aligned}
m^*(f(E_n)) &\leqslant m^*(f(E_n\cap\bigcup_k I_{n,k}))\\
&\leqslant \sum_k m^*(f(E_n\cap I_{n,k}))\\
&\leqslant \sum_k \operatorname{diam}(f(E_n\cap I_{n,k}))\\
&\leqslant (M+\epsilon)\sum_k m(I_{n,k}))\\
&\leqslant (M+\epsilon)(m^*(E_n)+\epsilon)
\end{aligned}$$

令$n\to\infty$, $\epsilon\to 0$即可.

- $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$可测
- $E \subset [a, b]$可测
- f在E上每一点可导

$$\Longrightarrow m^*(f(E)) \leqslant \int_E |f'(x)| dx.$$

证明

固定$\epsilon > 0$.

$$E_n := \left\{x \in E : (n-1)\epsilon \leqslant |f'(x)| < n\epsilon\right\}$$ 可测(差商可测从而导数可测).

$$\begin{aligned} m^*(f(E_n)) &\leqslant n\epsilon m^*(E_n) \\ &\leqslant \int_{E_n} |f'(x)|dx + \epsilon m^*(E_n) \end{aligned}$$

$$f(E) = f(\bigcup_n E_n) = \bigcup_n f(E_n)$$

$$m^*(f(E)) \leqslant \int_E |f'(x)|dx + \epsilon m^*(E)$$

例题10

- $f \in C[a,b] \cap W^{1,1}[a,b]$,
- 除了一个至多可数集外, f'存在而且有限

$$\Longrightarrow f \in AC[a,b]$$

证明

$$A := \left\{x \in [a,b] : f'(x)\text{不存在}\right\}, \quad \text{至多可数}$$

$$\forall (\alpha,\beta) \subset [a,b]$$

$$\begin{aligned}
|f(\beta) - f(\alpha)| &\leqslant m(f(\alpha,\beta)) \quad (\text{介值定理}) \\
&= m(f((\alpha,\beta) \cap A^c)) \quad (A\text{至多可数}) \\
&\leqslant \int_{(\alpha,\beta)\cap A^c} |f'(x)| dx \\
&\leqslant \int_{(\alpha,\beta)} |f'(x)| dx
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \int_{\bigsqcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)} |f'(x)| dx.$$

例题11: 微积分基本定理

- f在$[a,b]$处处可导, $f' \in L^1[a,b]$

$$\Longrightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

例题12:分部积分公式

- $f, g \in AC[a,b]$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

证明

- $f, g \in AC[a,b] \Longrightarrow fg \in AC[a,b]$
- $f, g \in AC[a,b] \Longrightarrow f'g \in L^1[a,b], \quad fg' \in L^1[a,b]$

$$\int_a^b (f(x)g(x))'dx = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b (f(x)g(x))'dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

例题13:积分第一中值定理

- $f \in C[a,b], \qquad g \in L^1[a,b] \cap L^+[a,b]$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx \xlongequal{\exists \zeta \in [a,b]} f(\zeta) \int_a^b g(x)dx$$

证明同Riemann积分情形。

例题14:积分换元公式(变量代换公式)

- $g : [a,b] \longrightarrow [c,d]$a.e.可导.
- $f \in L^1[c,d]$
- $F(x) = \int_c^x f(t)dt$

下列等价

(1) $F(g(t)) \in AC[a,b]$

(2) $f(g(t))g'(t) \in L^1[a,b]$, 而且

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dx \quad \forall [\alpha,\beta] \subset [a,b]$$

证明

- (2) $\Longrightarrow$ (1):

$$F(g(t)) - F(g(a)) \xlongequal{\text{F的定义}} \int_{g(a)}^{g(t)} f(x)dx$$
$$\xlongequal{\text{假设(2)}} \int_{a}^{t} f(g(u))g'(u)du$$

$$\Longrightarrow F \circ g \in AC[a, b].$$

证明

- $(1) \Longrightarrow (2)$:

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt \quad \Longrightarrow \quad F \in AC[a,b]$$

$$\xRightarrow{\text{需要证明}} \quad m(F(Z)) = 0, \quad \forall \text{零测集} Z.$$

$$(F(g(t)))' \; \overset{a.e.}{\underset{\text{需要证明}}{=\!=\!=}} \; f(g(t))g'(t) \in L^1[a,b]$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

$$= \int_\alpha^\beta (F(g(t)))'dt = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

补充证明

$$F \in AC[a,b] \quad \Longrightarrow \quad m(F(Z)) = 0, \quad \forall \text{零测集} Z.$$

- 存在开集G:

$$Z \setminus \{a,b\} \subset G \subset (a,b), \quad m(G) < \epsilon.$$

- $G = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$:
- 存在 $c_i, d_i \in [a_i, b_i]$:

$$F([a_i, b_i]) = [F(c_i), F(d_i)]$$

$$
\begin{aligned}
m^*(F(Z)) &= m^*(F(Z \setminus \{a, b\})) \\
&\leqslant m^*(F(\bigsqcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i))) \\
&\leqslant \sum_i m^*(F([a_i, b_i])) \\
&= \sum_i m([F(c_i), F(d_i)]) \\
&= \sum_i |F(c_i) - F(d_i)| < \epsilon
\end{aligned}
$$

补充证明: 复合函数的导数

假设下列条件满足：

- 函数几乎处处可导

$$
\begin{aligned}
g : [a,b] &\longrightarrow [c,d] \\
F : [c,d] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
F\circ g : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

- $F'(x) \xlongequal{a.e.} f(x)$:
- $m(F(Z)) = 0, \quad \forall$零测集$Z \subset [c,d]$

$$\Longrightarrow (F(g(t)))' \xlongequal{a.e.} f(g(t))g'(t)$$

证明:

- 构造集合

$$
\begin{aligned}
Z &:= \{x \in [c,d] : F\text{在}x\text{处不可导}\} \\
A &:= g^{-1}(Z) \\
B &:= [a,b] \setminus A
\end{aligned}
$$

- 固定$t \in B$, g在t点可导 (g a.e.可导)

$$\Longrightarrow g\text{在}t\text{点连续}, \quad g(t) \in Z^c, \quad F'(g(t)) = f(g(t))$$

- 构造

$$
\varphi(h) = \begin{cases} \frac{F(g(t+h)-F(g(t)))}{g(t+h)-g(t)}, & g(t+h)-g(t) \neq 0 \\ f(g(t)) & g(t+h)-g(t) = 0 \end{cases}
$$

证明续

- $\lim_{h\to 0}\varphi(h) = f(g(t))$
- 在B上成立(差商+极限)

$$(F(g(t)))' =\!=\!=\!= f(g(t))g'(t)$$

- 在A上成立

$$\begin{aligned} g(A) &\subset Z \\ m(g(A) &= m(F(g(A))) = 0 \\ g'(t) &\overset{a.e.}{=\!=} 0, \qquad (F(g(t)))' \overset{a.e.}{=\!=} 0 \\ \Longrightarrow & \quad (F(g(t)))' \overset{a.e.}{=\!=\!=} f(g(t))g'(t) \end{aligned}$$

补充证明

假设下列条件成立：

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
- $E \subset [a,b]$, f在E中每点处可导
- $m(f(E)) = 0$

$$\Longrightarrow \qquad f'(x) \xlongequal{a.e. x \in E} 0$$

$$B=\{x\in E:|f'(x)|>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$$

$$B_n=\left\{x\in E:|f(y)-f(x)|\geqslant\frac{1}{n}|y-x|\quad\forall y\in B(x,\frac{1}{n})\right\}.$$

只要证明B_n是零测集.

$\forall I$长度小于$\frac{1}{n}$的区间, $A := I \cap B_n$

$$f(A) \subset f(B_n) \subset f(E)\text{零测集}$$

$$\forall \epsilon > 0, \text{存在开区间列}\{I_k\}: \quad f(A) \subset \bigcup_k I_k, \quad \sum_k m(I_k) < \epsilon.$$

$$A_k := A \cap f^{-1}(I_k)$$

$$A = \bigcup_k A_k, \qquad A_k \subset A = I \cap B_n$$

$$f(A_k) \subset I_k$$

$$m^*(A_k) \leqslant \mathrm{diam}(A_k) \leqslant n\mathrm{diam}(f(A_k))$$

$$\Longrightarrow \qquad m^*(A) \leqslant n \sum_k \mathrm{diam}(I_k) < n\epsilon.$$

实分析(H), 第28次课

任广斌(中国科大)

2024-6-5

本讲主要内容

- $L^p(E)$是Banach空间.

$$E \subset \mathbb{R}^n \text{可测}, \quad p \in [1, +\infty].$$

注记

前五章	第六章	泛函分析
个体	整体	整体
$L^1(\mathbb{R}^n)$	$L^p(\mathbb{R}^n)$	抽象Banach空间

L^p的定义

$$L^p(E) \xlongequal{p\in[1,+\infty)} \left\{ f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\text{可测} : \quad \|f\|_p < +\infty \right\}$$

$$L^\infty(E) \xlongequal{\quad\quad} \left\{ f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\text{可测} : \quad f\text{在E上 } a.e. \text{ 有界} \right\}$$

$$\left(f \in L^\infty(E) \Longleftrightarrow \exists M > 0, \quad |f(x)| \overset{a.e.}{\leqslant} M \right)$$

- $L^p(E)$空间的约定:

$L^p(E)$空间中几乎处处相等视为恒等.

L^p空间的范数

$$\|f\|_{L^p(E)} \xlongequal{p\in[1,+\infty)} \|f\|_p := \left\{\int_E |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

$\mathbb{R}^n$	$L^p(E)$
绝对值	范数
有限维	无限维

L^∞空间的范数: 取范数尽可能小的代表元，尽可能大的代表元的范数是无穷

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^\infty(E)} &= \text{ess sup}_{x\in E}|f(x)| \\
&= \inf_{m(Z)=0} \sup_{x\in E\setminus Z} |f(x)| \\
&= \inf\left\{M>0: \quad \underbrace{|f(x)| \overset{a.e.}{\leqslant} M}_{\text{M是本性上界}} \right\} \\
&= \sup\left\{M>0: \quad \underbrace{m\{x\in E: \quad |f(x)|>M\}>0}_{\text{M不是本性上界}} \right\}
\end{aligned}
$$

- 本性上确界

$$\textit{ess sup} = \textit{essential supremum}$$

- 例题

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1, \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0.$$

本性上确界的作用

- 积分论中, 本性上确界取代上确界的作用:

$$\int_E |f| \leqslant \|f\|_\infty m(E)$$

证明: 　左 $= \int_{E\setminus Z} |f| \leqslant \sup_{E\setminus Z} |f| \ \ m(E).$

- 本性上确界与上确界的关系:

$$\|f\|_{L^\infty(E)} \leqslant \sup_{x\in E\setminus Z} |f(x)|, \qquad \forall\ m(Z) = 0$$

共轭指数

- 共轭指数(p,q):

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\qquad p,q\in[1,\infty].$$

- 例子: $\quad (p,q)=(2,2),(1,\infty),(\infty,1).$

- Hölder不等式: 设p, q共轭, 则

$$\|fg\|_{L^1(E)} \leqslant \|f\|_{L^p(E)}\|g\|_{L^q(E)}$$

- 等号成立条件:

$$\text{等号成立} \xLeftrightarrow[\exists\text{常数}\lambda\geqslant 0]{p,q\in[1,+\infty)} |f(x)|^p \xlongequal{a.e.} \lambda|g(x)|^q, \quad \text{或}g(x) \xlongequal{a.e.} 0.$$

- Schwarz不等式:

$$f, g \in L^2(E) \Longrightarrow \|fg\|_{L^1(E)} \leqslant \|f\|_{L^2(E)}\|g\|_{L^2(E)}$$

$$\int_E |fg| \leqslant \sqrt{\int_E |f|^2}\sqrt{\int_E |g|^2}$$

- 等号成立条件:

$$\text{等号成立} \xLeftrightarrow[\exists \text{常数}\lambda\geqslant 0]{} |f(x)| \xlongequal{a.e.} \lambda|g(x)|, \quad \text{或} g(x) \xlongequal{a.e.} 0$$

设p,q是共轭指数， $p,q\in[1,+\infty)$， $a,b\geqslant 0$,则

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

$$\text{等式成立}\Longleftrightarrow a^p=b^q.$$

证明: $\log x$是$(0,+\infty)$严格凹函数.

Hölder不等式的证明

情形1：　p, q之一为∞, 不妨设$p = \infty$.

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^\infty} \int_E |g|.$$

情形2：　$p, q \neq \infty$

$$F(x) := \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}, \qquad G(x) := \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}}$$

$$\xRightarrow{\text{Young不等式}} \qquad |F(x)G(x)| \leqslant \frac{|F(x)|^p}{p} + \frac{|G(x)|^q}{q}$$

$$\|FG\|_{L^1} \leq \frac{\|F\|_p^p}{p} + \frac{\|G\|_q^q}{q} \xlongequal{\|F\|_p = \|G\|_q = 1} 1$$

Hölder不等式达到等式情形

$$\text{等号成立} \quad \Longleftrightarrow \quad |F(x)|^p \overset{a.e.}{=\!=} |G(x)|^q$$

$$\underset{\exists\text{常数}\lambda\geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad |f(x)|^p \overset{a.e.}{=\!=} \lambda|g(x)|^q, \quad \text{或}g(x) \overset{a.e.}{=\!=} 0.$$

Minkowski不等式

$$\|f+g\|_p \overset{\forall\, p\in[1,+\infty]}{\leqslant} \|f\|_p + \|g\|_p$$

证明: 不妨设$p \in (1, +\infty)$

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &\leqslant \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|f\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \|g\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p/q}
\end{aligned}
$$

Chebyshev不等式

设$p \in (0, +\infty)$,　$f \in L^p(E)$,　则

$$m[|f| \geqslant \epsilon] \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\epsilon}\right)^p$$

证明:

$$\|f\|_p^p \geqslant \int_{[|f|\geqslant\epsilon]} |f|^p \geqslant \epsilon^p m[|f| \geqslant \epsilon].$$

L^p收敛

$$f_k \xrightarrow{L^p(E)} f \quad \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \quad \|f_k - f\|_p \longrightarrow 0.$$

四种收敛

$$f_k \xrightarrow[p\in[1,\infty)]{L^p(E)} f \quad \xRightarrow{\text{Chebyshev}} \quad f_k \xrightarrow{m} f \quad \xRightarrow{\text{Riesz}} \quad f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$$

$$f_k \xrightarrow{L^\infty(E)} f \quad \Longrightarrow \quad f_k \xrightarrow{a.un.} f \quad \Longrightarrow \quad f_k \xrightarrow{m} f \qquad f_k \xrightarrow{a.e.} f$$

证明: $\forall \epsilon > 0$, $\exists$零测集Z :

$$\sup_{E\setminus Z} |f_k - f| \leqslant \|f_k - f\|_\infty + \epsilon/2 \leqslant \epsilon \qquad (k \gg 1).$$

$\Longrightarrow$ 在$E \setminus Z$上, $f_k \xrightarrow{a.un.} f$

- $L^p(E)$是线性空间 $\quad (p \in [1, \infty])$.

注记: $\quad a, b \geqslant 0$

$$(a+b)^p \leqslant \begin{cases} 2^{p-1}(a^p + b^p), & \text{if} \quad p \geqslant 1 \\ \\ a^p + b^p, & \text{if} \quad 0 < p < 1. \end{cases}$$

L^p是赋范线性空间

- $L^p(E)$是赋范线性空间 $(p \in [1, \infty])$.

  - 非负性:

    $$\|f\|_p \geqslant 0, \qquad \|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0, \quad \text{即} f \xlongequal{a.e.} 0$$

  - 齐性:

    $$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

  - 三角不等式

    $$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Theorem 1

设$E \subset \mathbb{R}^n$可测， $p \in [1, +\infty]$. 则

$$L^p(E)\text{是}Banach\text{空间}.$$

注记

- Banach空间=完备赋范线性空间
- $L^p(E)$完备$\Longleftrightarrow$ Cauchy序列是收敛序列.
- $L^p(E)$中Cauchy序列:

$$\lim_{k,j\to\infty}\|f_k - f_j\|_p = 0$$

完备性证明

- $p \in [1, +\infty)$:

$$L^p\text{Cauchy} \xRightarrow{\text{Chebyshev}} \text{依测度Cauchy}$$

$$\Longrightarrow \text{依测度收敛}$$

$$\xRightarrow{\text{Riesz}} \exists a.e. \text{ 收敛子列}$$

$$\xRightarrow{\text{Fatou}} L^p \text{ 收敛}$$

回忆Chebyshev不等式：

$$m[|f| \geqslant \epsilon] \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\epsilon}\right)^p$$

完备性证明续

$$\int_E |f - f_k|^p \leqslant \varliminf_{j\to\infty} \int_E |f_{n_j} - f_k|^p < \epsilon^p, \qquad k \gg 1$$

$$\Longrightarrow \qquad f_k \xrightarrow{L^p} f, \qquad f = (f - f_k) + f_k \in L^p$$

完备性证明续

- $p=+\infty$：

$$L^{\infty}\text{Cauchy} \Longrightarrow \text{在}E\setminus Z\text{一致Cauchy}$$

$$\Longrightarrow \text{在}E\setminus Z\text{一致收敛}$$

$$\Longrightarrow \text{依}L^{\infty}(E\setminus Z)\text{收敛}$$

$$\Longrightarrow L^{\infty}(E)\ \text{收敛}$$

完备性证明续

证明: $\forall \epsilon > 0, \exists$零测集$Z_{kj}$:

$$\sup_{x\in E\backslash Z_{kj}} |f_k(x) - f_j(x)| \leqslant \|f_k - f_j\|_\infty + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \quad (k, j \gg 1)$$

$$\Longrightarrow \sup_{x\in E\backslash Z} |f_k(x) - f_j(x)| < \epsilon, \qquad (k, j \gg 1, \quad Z = \bigcup_{k,j=1}^{\infty} Z_{kj})$$

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)\chi_{E\backslash Z}(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \|f_k - f\|_{L^\infty} \leqslant \epsilon, \qquad f = (f - f_k) + f_k \in L^\infty$$

计数测度情形

- 测度空间$(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu =$ 计数测度$)$

$$L^p(\mathbb{N}, d\mu) = \ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \left\| \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \right\|_{\ell^p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

- 测度空间$(\mathbb{Z}_n, 2^{\mathbb{Z}_n}, \mu =$ 计数测度$)$

$$\mathbb{R}^n = L^2(\mathbb{Z}_n, d\mu) = \ell^2(\mathbb{Z}_n).$$

Minkowski不等式

- σ-有限测度空间(X,μ), (Y,ν),
- $f: X\times Y\to\mathbb{R}$可测,
- $p\in[1,+\infty]$.

则

$$\left(\int_Y\left|\int_X f(x,y)d\mu(x)\right|^p d\nu(y)\right)^{1/p}\leqslant\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|^p d\nu(y)\right)^{1/p}d\mu(x)$$

若$p\in(1,\infty)$, 且不等式两边有限，则等式成立仅当

$$|f(x,y)|\xlongequal{a.e.}\varphi(x)\phi(y),$$

其中$\varphi(x),\phi(y)$是非负可测函数。

例题1:　反向Hölder不等式

- 反向Hölder不等式:　设$p, q \in (-\infty, 1)$,　$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\|fg\|_{L^1(E)} \geqslant \|f\|_{L^p(E)} \|g\|_{L^q(E)}$$

- 等号成立条件:

$$\text{等号成立} \quad \xLeftrightarrow[\exists \text{常数}\lambda \geqslant 0]{p,q\in(-\infty,1)} \quad |f(x)|^p \xlongequal{a.e.} \lambda |g(x)|^q, \quad \text{或} g(x) \xlongequal{a.e.} 0.$$

反向Hölder不等式的证明

不妨设$p > 0, g \neq 0$,　共轭指数

$$u = \frac{1}{p}, \qquad v = \frac{1}{1-p}.$$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p} &= \|f^p g^p g^{-p}\|_{L^1}^{1/p} \\
&\leqslant \left(\|f^p g^p\|_{L^u} \|g^{-p}\|_{L^v}\right)^{1/p} \\
&= \frac{\|fg\|_{L^1}}{\|g\|_{L^q}}.
\end{aligned}$$

例题2: L^p包含关系

- $L^p[a,b]$关于p严格↓ (Hölder不等式)
- $L^p(\mathbb{R})$ 对不同的p互不包含.

$$L^p(\mathbb{R}) \supset A^p := \left\{ f_\alpha, g_\beta : \beta < \frac{1}{p} < \alpha \right\}$$

$$f_\alpha := \frac{1}{x^\alpha}\chi_{[1,+\infty)} \in L^p(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > \frac{1}{p}$$
$$g_\beta := \frac{1}{x^\beta}\chi_{(0,1)} \in L^p(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \beta < \frac{1}{p}$$

临界值$\frac{1}{p}$

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(E)} \xlongequal{m(E)\in(0,+\infty)} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

证明: $$\|f\|_{L^p(E)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(E)} m(E)^{1/p}$$

$$\xrightarrow{\text{取上极限}} \varlimsup_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(E)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(E)}$$

$$\forall\ M < \|f\|_{L^\infty(E)}$$

$$\Longrightarrow A = \Big\{x \in E: \quad |f(x)| > M\Big\}, \qquad m(A) > 0$$

$$\Longrightarrow \|f\|_{L^p(E)} \geqslant M\, m(A)^{1/p},$$

$$\xRightarrow{\text{取下确界}} \varliminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(E)} \geqslant \|f\|_{L^\infty(E)}$$

例题4: Hölder不等式的推广

- $f, g \in L^+(E)$, $\quad p, q \in [1, \infty)$, $\quad r \in [1, +\infty]$. $\quad$ 约定$0^0 = 1$.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

$$\Longrightarrow \int_E f(x)g(x)dx \leqslant \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}} \|f\|_q^{1-\frac{q}{r}} \Big(\int_E f^p(x)g^q(x)dx \Big)^{\frac{1}{r}}.$$

证明

$$fg = (f^p g^q)^{\frac{1}{r}} (f^{1-\frac{p}{r}} g^{1-\frac{q}{r}}) \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$$

$$\int_E fg dm \leqslant \Big(\int_E f^p g^q dm\Big)^{\frac{1}{r}} \Big(\int_E (f^{1-\frac{p}{r}} g^{1-\frac{q}{r}})^{r'} dm\Big)^{\frac{1}{r'}}$$

$$(f^{1-\frac{p}{r}} g^{1-\frac{q}{r}})^{r'} = (f^p)^{r'(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} (g^q)^{r'(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}$$

$r'(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})$与$r'(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})$倒数共轭

例题5

- $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad p, q, r$同上例题$, r \neq \infty$

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)dt$$

$$\Longrightarrow \|h\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

证明思路： 计算 $\int_{\mathbb{R}^n} (h(x))^r dx$, 利用前例题+Fubini定理

作业

P.250　第3题

P.253　第5题

P.289　第1, 2题