日期:　　/

定性理论

§动力系统，相空间，轨线

$$\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x}) & \text{不显含}t \Rightarrow \text{自治系统}\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0 & (8.1)\end{cases}$$

解记为 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t;t_0,x_0)$ (8.3)

称 $\vec{x}$ 所在空间 R^n 为相空间

$(t,\vec{x})$ 所在空间 $R\times R^n$ 为增广相空间

积分曲线为增广相空间中一条曲线

(8.3) 给出了相空间中的一条曲线，称为轨线

轨线为积分曲线沿 t 方向在相空间中投影

目标：研究轨线拓扑结构

若 $\exists x_0$, s.t. $\vec{f}(\vec{x}_0)=0$，则 $\vec{x}(t)\equiv\vec{x}_0$ 为解　称为平衡点

若 (8.3) 为非常数的周期运动，$\exists T$, s.t. $\varphi(t,t_0,x_0)=\varphi(t+T,t_0,x_0)$　$\forall t$

称 (8.3) 为相空间一条闭轨

ex.
$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2-1)\\ \frac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2-1)\end{cases}$$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

$$\begin{cases}\frac{dr}{dt}=r(r^2-1)\\ \frac{d\theta}{dt}=1 \quad\Rightarrow \theta=t+C_1\end{cases}$$

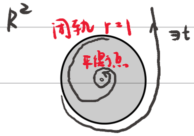
$r=0, r=1$ 为解，$\frac{dr}{r(r^2-1)}=dt$ 积分 $\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{r^2-1}{r^2}\right|=t+C$

$\Rightarrow \left|1-\frac{1}{r^2}\right|=Ce^{2t}\ (t>0)$

日期:　　/

若 $0<r<1$，$r=\frac{1}{\sqrt{1+Ce^{2t}}}$　$C>0$

若 $r>1$，$r=\frac{1}{\sqrt{1-Ce^{2t}}}$　$C>0$



基本性质：$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$　(8.1) (假设解存在唯一)

1、积分曲线的平移不变性

$x=\varphi(t)$ 为 (8.1) 一个解，

$\forall C\in R$，$x=\varphi(t+C)$ 为解，为经过同一个点的积分曲线

$\frac{d(\varphi(t+C))}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}(t+C)=f(\varphi(t+C))$

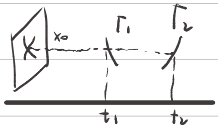
2、过相空间每一点轨线的唯一性

解存在性，经过 x_0 一定存在一条轨线

假设有2条轨线 l_1、l_2 经过 x_0，则 $\exists$ 积分曲线上一段 Γ_1，Γ_2

在相空间上投影为 l_1、l_2

将 Γ_1 平移 t_2-t_1，得到 Γ_1' 与 Γ_2 相交



由解唯一性，$\tilde{\Gamma}_1$ 与 Γ_2 在 (t_2, x_0) 附近重合

$\tilde{\Gamma}_1$ 与 Γ_1 有相同投影 $\Rightarrow$ Γ_1 与 Γ_2 在相空间 x_0 点附近有相同投影

3. 群的性质

$\varphi(t,x_0)=\varphi(t,0,x_0)$　0时刻以 x_0 为初值的解

则 $\varphi(t_2,\varphi(t_1,x_0))=\varphi(t_1+t_2,x_0)$

$\varphi(t,\varphi(t_1,x_0))$ 为过 $(0,\varphi(t_1,x_0))$ 的积分曲线

$\varphi(t_1+t,x_0)$ 为积分曲线（平移不变性），过 $(0,\varphi(t_1,x_0))$

日期: /

由解唯一性，$\varphi(t_1+t, x_0) = \varphi(t, \varphi(t_1, x_0))$

令 $t=t_2$ 即得

def. $\quad \phi_t: R^n \to R^n$

$\qquad x_0 \mapsto \varphi(t, x_0)$ 　　0处的初值 $\xrightarrow{\phi_t}$ t时刻，0时刻初值为 x_0 积分曲线的取值.

则：① $\phi_0 = Id$

② $\phi_{t_2} \circ \phi_{t_1} = \phi_{t_1+t_2} \quad (\forall t_1, t_2 \in R)$

③ $\phi_t(x_0)$ 关于 t 连续 ($\Leftrightarrow$ $\varphi(t, x_0)$ 关于 t 连续)

x_0 连续（初值的连续依赖性）

满足①~③单参数变换群 $\{\phi_t\}_{t\in R}$ 称为动力系统

该三条性质对非自治系统不成立，由于平移不变性不满足

φ 为积分曲线，则 $\frac{d\varphi}{dt} = f(t, \varphi)$，$\frac{d\varphi(t+c)}{dt} = f(t+c, \varphi(t+c)) \neq f(t, \varphi(t+c))$

即 $\varphi(t+c)$ 不为积分曲线.

日期: /

§解的稳定性

考虑 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ (8.9)

$t\in(-\infty,\infty)$, $x\in G\subset R^n$ 连续, 且 s.t. 解存在且唯一

设 $x=\phi(t)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的解

由解对初值连续依赖性,

$\forall$ 有界闭区间 I, $\forall t_0\in I$, 有 $\forall\varepsilon$, $\exists\delta$,

$|x_0-\varphi(t_0)|<\delta$, $|\phi(t,t_0,x_0)-\phi(t)|<\varepsilon$

Q. 能否把有界换为无界?

ex. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x\\ x(0)=x_0\end{cases}$ $\Rightarrow x(t)=x_0e^t$ $t\to\infty$, $x(t)\to\infty$ (除非 $x_0=0$)

故解对初值的连续依赖性仅在有界闭区间内成立

def. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)$, 只要 $|x_0-\phi(t_0)|<\delta$,

就有 $|\phi(t,t_0,x_0)-\phi(t)|<\varepsilon$, $\forall t\in R$

称 $x=\phi(t)$ 为 Lyapunov 稳定

def. 若 $x=\phi(t)$ 稳定, 且 $\exists\delta_1>0$, s.t. $|x_0-\phi(t_0)|<\delta_1$

就有 $\lim\limits_{t\to\infty}|\phi(t,t_0,x_0)-\phi(t)|=0$

称 $x=\phi(t)$ 为 Lyapunov 渐近稳定

def. $t>0$ 正向 $t<0$ 负向

仅考虑方程 (8.9) 零解的稳定性, 考虑变换 $y=x-\varphi(t)$

$\frac{dy}{dt}=\frac{d(x-\varphi(t))}{dt}=\frac{dx}{dt}-\frac{d\varphi}{dt}=f(t,x)-f(t,\varphi(t))\triangleq g(t,y)$

且 $y\equiv0$ 为该方程的解, 将一般问题转化为特殊问题

日期:　　/

1、按线性近似判断

重新考察 (8.9)

若 $x=0$ 为一个解，则 $f(t,0)=0$

将 $f(t,x)$ 在 $x=0$ 处展开 $f(t,x)=A(t)X+N(t,x)$ A为方阵

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|N(t,x)|}{|x|}=0$ 关于t一致

$(8.9)\Rightarrow \frac{dx}{dt}=A(t)x+N(t,x)$ (8.14) （加入假设 $A(t)$ 连续，$N(t,x)$ 关于x lip）

对方程 $\frac{dx}{dt}=A(t)X$

若 $A(t)=A$ 为常数矩阵，有结论：

thm. 线性方程 (1) 零解正向（负向）渐近稳定

$\Leftrightarrow$ 所有特征根有负的（正的）实部

(2) 稳定

$\Leftrightarrow$ 实部非正（非负）

且实部为0的特征根对应Jordan可对角化

(3) 正向不稳定

$\Leftrightarrow$ 至少有一个特征根实部为正 / 至少有一个实部为0特征根

对应Jordan不可对角化

thm. 非线性方程 对 (8.14)，A为常矩阵，若A所有特征值实部为负

则零解正向渐近稳定

pr. 要证 $\exists\delta$，$|x_0|<\delta$，有 $\lim\limits_{t\to+\infty}|\underset{x(t)}{\varphi(t,x_0)}|=0$

A的所有特征值为负，则 $\exists\sigma>0$, s.t. $Re_{max}<-2\sigma$

$|e^{\lambda_s t}P_n(s)|\le e^{-2\sigma t}|P_n(s)|=e^{-\sigma t}e^{-\sigma t}|P_n(s)|\le A_0e^{-\sigma t}$

def. "|·|" 为最大元　　　　为 $e^{-\sigma t}|P_n(s)|$ 最大元的界

日期: /

故 $|e^{tA}| \le A_0 e^{-\sigma t}$

(8.14) $\Longleftrightarrow$ 积分方程 $x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} N(s, x(s))\,ds$

pr. $\frac{dx}{dt} = Ax + N(t,x)$

$$e^{-At}\left(\frac{dx}{dt} - Ax\right) = e^{-At} N(t,x)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x\right) = e^{-At} N(t,x)$$

积分 $e^{-At}x - x_0 = \int_0^t e^{-As} N(s, x(s))\,ds$

$\Longleftrightarrow x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} N(s, x(s))\,ds$

$|x(t)| \le A_0|x_0|e^{-\sigma t} + \int_0^t A_0 e^{-(t-s)\sigma}|N(s, x(s))|\,ds$

由于 $\lim\limits_{|x|\to 0} \frac{|N(t,x)|}{|x|} = 0$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1$, st. $|x| \le \delta_1$ 时, $|N(t,x)| \le \varepsilon|x|$

故 $|x(t)| \le A_0|x_0|e^{-\sigma t} + A_0\varepsilon \int_0^t e^{-(t-s)\sigma}|x(s)|\,ds$ (用到了 $x(s) \le \delta$ 恒成立的假设)

$e^{\sigma t}|x(t)| \le A_0|x_0| + A_0\varepsilon \int_0^t e^{\sigma s}|x(s)|\,ds$

由 Gronwall 知 $e^{\sigma t}|x(t)| \le A_0|x_0|\,e^{A_0\varepsilon t}$

$\Rightarrow |x(t)| \le A_0|x_0|\,e^{-(\sigma - A_0\varepsilon)t}$

选取极小的 ε, st. $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = 0$

现在证明 $\forall t \ge 0$, 有 $|x(t)| \le \delta_1$

令 $T^* = \sup\{T \mid x(t) \le \delta_1, \forall t \in [0, T]\}$

$\Rightarrow x(T^*) = \delta_1$

且对 $\forall t \in [0, T^*]$, 有

$$|x(t)| \le A_0|x_0|e^{-\sigma t} + \int_0^t A_0 e^{-(t-s)\sigma}|N(s, x(s))|\,ds$$

$$\le A_0|x_0|e^{-\sigma t} + A_0\varepsilon \int_0^t e^{-(t-s)\sigma}|x(s)|\,ds$$

日期:　　　/

再由 Gronwall 知 $|x(t)| \le A_0|x_0|e^{-(6-A_0\varepsilon)t}$

取 $|x_0|$ s.t. $A_0|x_0| < \frac{\delta_1}{2}$，取 ε 充分小，则 $|x(t)| \le A_0|x_0| < \frac{\delta_1}{2}$ $\forall t \in [0, T^*]$

故取同时满足 $\begin{cases} |x_0| < \delta_1 \\ A_0|x_0| < \frac{\delta_1}{2} \end{cases}$ 的 δ_2，可推出矛盾

$\Rightarrow T^* = +\infty$

thm. 对 (8.14)，A 为常矩阵，若 A 所有特征值至少有一个正的实部

则零解不稳定

日期:　　/

2. 第二方法

考察自治系统 $\frac{dy}{dt}=f(y)$ (8.19)　f, f_{y_j} 在 $D\subset R^n$ 上连续

$f(0)=0$，且 0 为 f 的一个孤立临界点，即存在 0 点的邻域，在这个邻域上 $f(y)$ 无其他零点.

令 $V(y)$ 为 Ω 上的标量连续函数，$0\in\Omega$

def. V 在 Ω 上正定，if. $V(0)=0$，且 $V(y)>0$，$\forall y\in\Omega\setminus\{0\}$

V 在 Ω 上负定，if. $-V$ 在 Ω 上正定

def. ($V(y)$ 关于方程组 $\frac{dy}{dx}=f(y)$ 的导数)

$$V^*(y)=(\nabla V)\cdot f(y)$$
$$=\frac{\partial V}{\partial y_1}f_1(y)+\cdots+\frac{\partial V}{\partial y_n}f_n(y)$$

Rmk. $y=\varphi(t)$ 为解，则

$$\frac{d}{dt}(V(\varphi(t)))=\frac{\partial V}{\partial y_1}\varphi_1'+\cdots+\frac{\partial V}{\partial y_n}\varphi_n'$$
$$=\frac{\partial V}{\partial y_1}f_1+\cdots+\frac{\partial V}{\partial y_n}f_n\Big|_{\varphi(t)}$$
$$=V^*(\varphi(t))$$

thm. 若 $\exists$ 标量函数 $V(y)$ 在 $0\in\Omega$ 正定，

且关于 (8.19) 有 $V^*(y)\le 0$，则 (8.19) 零解稳定.

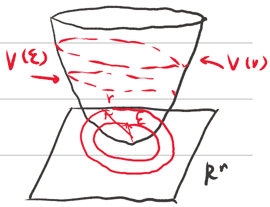
pr. 只需 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$. s.t. $|y_0|<\delta$，则 $|\varphi(t,y_0)|<\varepsilon$

令 $r>0$，$\exists\ \overline{B_r(0)}\subset\Omega$，取 $0<\varepsilon<r$，

$V(y)$ 在 $\overline{B_r(0)}$ 上正定，$V^*(y)\le 0$

令 $S=\{y\mid \varepsilon\le|y|\le r\}$

$V(y)$ 连续，令 $M=\min\limits_{y\in S}V(y)>0$



日期: /

由于$V(0)=0$，$V(y)$连续，

故$\exists\delta$, st. $\forall |y|<\delta$, 有$|V(y)|<M$

首先添加条件st. 经过y_0有唯一解$\phi(t)$，$|y_0|<\delta$

设其存在区间为$[0,t_1)$

$$\frac{d}{dt}(V(\phi(t))=V^*(\phi(t))\le 0$$

$$\Rightarrow V(\phi(t))\le V(\phi(0))<M \quad (\phi(0)=y_0 \quad |y_0|<\delta)$$

claim: $\forall t\in[0,t_1)$, $|\phi(t)|<\varepsilon$

否则$\exists \bar{t}\in[0,t_1)$, $|\phi(\bar{t})|=\varepsilon$

$\Rightarrow \phi(\bar{t})\in S$. 则$V(\phi(\bar{t}))\geq M$ 矛盾

表明未在有限区域内达到无穷

由延拓定理 $t_1=+\infty$. 即证明稳定性

thm. 若$\exists V(y)$在Ω上正定且$V^*(y)<0$，则(8.19)零解渐近稳定.

pr. 令$r>0$，$\exists \overline{B_r(0)}\subset\Omega$，由上thm. 零解稳定

取$\varepsilon=r$，$\exists\delta>0$. st. $\forall y_0\in B_\delta(0)$，$|\phi_t(y_0)|<r$，$\forall t\geq 0$

要证$t\to\infty$时，$|\underbrace{\phi_t(y_0)}_{=:\phi(t)}|\to 0$

$$\frac{d}{dt}(V(\phi(t))=V^*(\phi(t))<0$$

因此$V(\phi(t))$关于t单调递减，故$\lim\limits_{t\to+\infty}V(\phi(t))$存在

下面要证$\lim\limits_{t\to+\infty}V(\phi(t))$存在$=0$

否则$\exists\eta>0$. st. $\lim\limits_{t\to+\infty}V(\phi(t))=\eta \Rightarrow V(\phi(t))\geq\eta$

$V(y)$连续，$V(0)=0$，故$\exists\alpha>0$, st. $\forall |y|<\alpha$, $V(y)<\eta$

故$|\phi(t)|\geq\alpha$，$\forall t\geq 0$

日期:　　　/

令 $S=\{y \mid \alpha\le|y|\le r\}$　$V^*(y)$ 在S上有最大值记为 $-M$　$M>0$

故 $\frac{d}{dt}V(\phi(t))=V^*(\phi(t))\le -M$

积分 $\Rightarrow V(\phi(t))\le V(\phi(0))-Mt$

令 $t\to\infty$，知 $V(\phi(t))<0$ 矛盾

thm. 若∃连续函数 $V(y)$ 满足 $V(0)=0$，s.t. $V^*(y)$ 正定

且在原点的任何邻域内存在 a，st. $V(a)>0$

则零解不稳定.

pr. $\exists\varepsilon>0$, st. $\forall\delta>0$，$\exists a\in B_\delta(0)$，st. $|\phi_t(a)|=\varepsilon$，$\exists t$

令 $r>0$，$\exists\ \overline{B_r(0)}\subset\Omega$，由于 V 在 Ω 上连续，

故 V 在 $\overline{B_r(0)}$ 上有界：$\exists M>0$，st. $|V(y)|\le M$，$\forall y\in\overline{B_r(0)}$

$\forall\delta>0$，$\exists a\in B_\delta(0)$. st. $V(a)>0$，下证 $\exists t$ st. $|\phi_t(a)|=r$

否则假设 $\phi_t(a)\in B_r(0)$，$\forall t\ge0$，由延拓thm，$\phi_t(a)\triangleq\phi(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在

由 $\frac{d}{dt}(V(\phi(t)))=V^*(\phi(t))\ge0 \Rightarrow V(\phi(t))\ge V(\phi(0))\triangleq V(a)>0$

由 $V(0)=0$. $\exists\alpha>0$，st. $|V(y)|<V(a)$，$\forall|y|<\alpha$

$\Rightarrow \alpha\le|\phi(t)|\le r$

令 $S=\{y \mid \alpha\le|y|\le r\}$，则 $V^*(y)$ 在S上有正的下界 M

$V^*(y)\ge M\quad\forall y\in S$

故 $\frac{d}{dt}(V(\phi(t))=V^*(\phi(t))\ge M$.

$\Rightarrow V(\phi(t))\ge V(\phi(0))+Mt=V(a)+Mt$.

故 $t\to\infty$ 时，$V(\phi(t))\to+\infty$

与 $V(\phi(t))\le M$ 矛盾

日期: /

thm. 若∃函数 V s.t. 在 $\Omega \ni 0$ 上 $V^* = \lambda V + W$ $(\lambda > 0)$

W 或者恒为零或者恒非正，恒非负且使得

在原点上任何邻域内存在一点 a，有 $V(a) \cdot W(a) > 0$

则零解不稳定

ex. $y'' + g(y) = 0$ 在 $|y| < k$ 上连续，$g(0) = 0$，$y g(y) > 0$

$y'y'' + g(y)y' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(y')^2 + \int_0^y g(s)ds = C$ 能量

令 $y_1 = y$ $\quad \frac{dy_1}{dx} = y_2$

$y_2 = y'$ $\quad \frac{dy_2}{dx} = -g(y_1)$

$V(y_1, y_2) \triangleq \frac{1}{2}(y_2)^2 + \int_0^{y_1} g(s)ds > 0$，$\forall (y_1, y_2) \neq 0 \in \Omega$

$V^*(y) = g(y_1) \cdot y_2 + y_2(-g(y_1)) = 0$ $\quad \Omega = \{(y_1, y_2) \mid |y_1| < k, -\infty < y_2 < +\infty\}$

$\Rightarrow$ 零解稳定

但不渐近稳定，$\forall (y_{10}, y_{20})$

令 $\phi(t)$ 为以 (y_{10}, y_{20}) 为初值的方程的解

则 $d(V(\phi(t))) = V^*(\phi(t)) = 0$

$\Rightarrow V(\phi(t)) = V(\phi(0)) \neq 0$ 故 $|\phi(t)|$ 不趋于 0

V通常难找，方程应有物理意义

ex. (Lienard 方程)

$y'' + y' + g(y) = 0$，$g(y)$ 满足前面假设

讨论零解稳定性

令 $\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{cases}$ 则 $\frac{dy_1}{dt} = y_2$

$\frac{dy_2}{dt} = -y_2 - g(y_1)$

def. $V(y_1,y_2)=\frac{1}{2}y_2^2+\int_0^{y_1} g(s)\,ds$

$\Omega=\{(y_1,y_2) \mid |y_1|<k,\ -\infty<y_2<+\infty\}$

则 V在 Ω 上正定

$V^*(y_1,y_2)= g(y_1)y_2+y_2(-y_2-g(y_1)) = -y_2^2 \le 0$

故零解是稳定的.

def. $V(y_1,y_2)=\frac{1}{2}y_2^2+\int_0^{y_1} g(s)\,ds+\beta g(y_1)y_2$

$\geq \frac{1}{2}y_2^2+\int_0^{y_1} g(s)\,ds-\frac{\beta}{2}(g(y_1)^2+y_2^2)$

$\lim\limits_{|y_1|\to 0}\frac{g(y_1)^2}{\int_0^{y_1} g(s)\,ds}=\lim\limits_{|y_1|\to 0}\frac{2g(y_1)g'(y_1)}{g(y_1)}=2g'(0)$

$\exists k_1$, s.t. $|y_1|<k_1$时, $|g(y_1)|^2\le C\int_0^{y_1} g(s)\,ds$

故 $V(y_1,y_2)\geq \frac{1}{2}(1-\beta)y_2^2+\int_0^{y_1} g(s)\,ds\,(1-\frac{\beta C}{2})>0$

iff $\beta<\min\{1,\frac{2}{C}\}$

hope $V^*<0$

$V^*(y_1,y_2)=(g(y_1)+\beta g'(y_1)y_2)y_2+(y_2+\beta g(y_1))(-y_2-g(y_1))$

$=-y_2^2-\beta g^2(y_1)+\beta g'(y_1)y_2^2-\beta g(y_1)y_2$

$|g'(y_1)|\le M$, 当 $|y_1|<k_1$

$\le -y_2^2-\beta g^2(y_1)+M\beta y_2^2+\frac{\beta}{2}(g^2(y_1)+y_2^2)$

$=(-1+M\beta+\frac{\beta}{2})y_2^2-\frac{\beta}{2}g(y_1)^2$

再取 $0<\beta$ 且 s.t. $M\beta+\frac{\beta}{2}<\frac{1}{2}$, 可使 $V^*(y_1,y_2)<0$

故零解渐近稳定

ex. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=(\varepsilon x+2y)(z+1)\\ \frac{dy}{dt}=(-x+\varepsilon y)(z+1)\\ \frac{dz}{dt}=-z^3\end{cases}$ 平衡点的稳定性

平衡点 $z=0$

$$\begin{cases} \varepsilon x+2y=0 \\ -x+\varepsilon y=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 平衡点为 $(0,0,0)$

线性化方程为 (只考虑线性部分)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=\varepsilon x+2y \\ \frac{dy}{dt}=-x+\varepsilon y \\ \frac{dz}{dt}=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & 0 \\ -1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A的特征值为 $-\lambda(\lambda-\varepsilon)^2+2$

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=\varepsilon+\sqrt{2}i,\ \lambda_3=\varepsilon-\sqrt{2}i$

① $\varepsilon>0$，则零解不稳定

② $\varepsilon<0$，则零解渐近稳定

def. $V(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$ (从简单形式设起)

$V^*=2ax(\varepsilon x+2y)(z+1)+2by(-x+\varepsilon y)(z+1)+2cz(-z^3)$

$=(2a\varepsilon x^2+(4a-2b)xy+2b\varepsilon y^2)(z+1)-2cz^4$

令 $\Omega=\{(x,y,z)\mid z>-1\}$上，令 $a=1,\ b=2,\ c=1$

$V^*=(2\varepsilon x^2+4\varepsilon y^2)(z+1)-2z^4<0 \quad \forall\ \Omega\setminus\{0\}$

则零解渐近稳定

③ $\varepsilon=0$，方程即 $\frac{dx}{dt}=2y(z+1)$

$\frac{dy}{dt}=-x(z+1)$

$\frac{dz}{dt}=-z^3 \Rightarrow z=\frac{1}{(2t+C)^{\frac{1}{2}}}$

$x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$

$\frac{1}{2}x^2+y^2=C$

日期:　　/

故零解稳定但不渐近稳定

§ 平面上的动力系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Y(x,y) \end{cases} \qquad (8.20)$$

X、Y为平面上连续可微函数

def. (x_0,y_0)为(8.20)初等奇点

$X(x_0,y_0)=0$, $Y(x_0,y_0)=0$

$$\det \frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}\Big|_{(x_0,y_0)} \neq 0$$

若(0,0)为(8.20)初等奇点，令 $a=\frac{\partial X}{\partial x}(0,0)$, $b=\frac{\partial X}{\partial y}(0,0)$, $c=\frac{\partial Y}{\partial x}(0,0)$, $d=\frac{\partial Y}{\partial y}(0,0)$

故原方程 $\Leftrightarrow$ $\frac{dx}{dt} = ax+by+\varphi(x,y)$

$\frac{dy}{dt} = cx+dy+\psi(x,y)$

线性化：$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

令 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ T为常数矩阵

$$T\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} T\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} T\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

选取T st. $T^{-1}AT$为Jordan型，故不妨设A为Jordan型

$A = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} \lambda & \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ $\beta\neq 0$, $\lambda,\mu\neq 0$

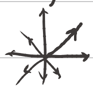
(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$

此时 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ \frac{dy}{dt} = \mu y \end{cases}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{\lambda}\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$ $\Rightarrow$ $y = C|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}$ $C\in\mathbb{R}$

双向结点.

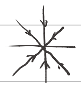
画相图描述动力性质

① $\mu=\lambda>0$



(直结点)

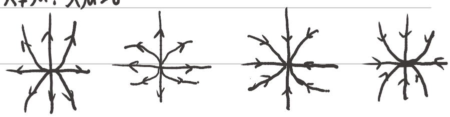
② $\mu=\lambda<0$



(直结点)

星形结点.

③ $\lambda\neq\mu$, $\lambda\mu>0$

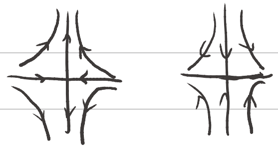


$\mu>\lambda>0$ $\lambda>\mu>0$ $\lambda<\mu<0$ $\mu<\lambda<0$

日期: /

鞍点

④ $\lambda \neq 0$, $\lambda\mu < 0$



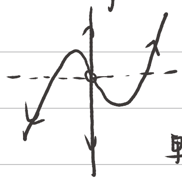
$\lambda < 0 < \mu$.

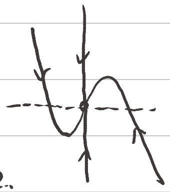
(2) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ \frac{dy}{dt} = x + \lambda y \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda} + \frac{y}{x}$$

$u = \frac{y}{x}$ $\quad u + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{\lambda} + u \Rightarrow u = \frac{1}{\lambda}\ln|x| + C \Rightarrow y = \frac{1}{\lambda}x\ln|x| + Cx$

若 $x \equiv 0$, $y = e^{\lambda t}$





单向结点.

$\lambda > 0$ $\qquad$ $\lambda < 0$

(3) $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y \\ \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y \end{cases}$$

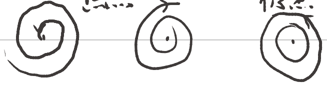
令 $y = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$

则 $\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \alpha r \\ \frac{d\theta}{dt} = \beta \end{cases} \Rightarrow$ $\quad r(t) = Ce^{\alpha t}$ $\quad C > 0$

$\theta(t) = \beta t$ $\quad \beta > 0$ 逆时针

$\beta < 0$ 顺时针

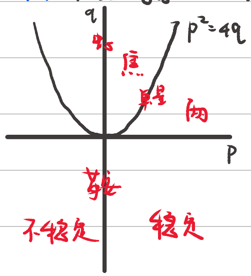
焦点. $\qquad$ 中心点.



$\alpha < 0$, $\beta > 0$ $\qquad$ $\alpha > 0$, $\beta > 0$ $\qquad$ $\alpha = 0$ $\beta > 0$

日期:　　　/

thm. P265 8.5 (初等奇点类型判断)



$p=-trA=-(a+d)$

$q=\det A=ad-bc$

当 $t\to+\infty$ / $-\infty$ 时，有的轨线沿某个方向趋向/远离奇点，该方向为特殊方向（双向: 2

单向: 1

鞍: 2）

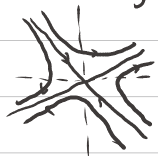
ex. $\frac{dx}{dt}=2x+3y$　　在[0.0]附近相图

$\frac{dy}{dt}=2x-3y$

$(0,0)$ 为奇点，$A=\begin{pmatrix}2&3\\2&-3\end{pmatrix}$　　$p=1,\ q=-12<0$

鞍点，有2个特殊方向，设 $y=kx$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-3y}{2x+3y}$　　$k=\frac{2-3k}{2+3k}\Rightarrow k_1=\frac{1}{3},\ k_2=-2$



$(x,y)=(1,0)$ 处，$\frac{dx}{dt}>0,\ \frac{dy}{dt}>0$

ex. $\frac{dx}{dt}=3x$

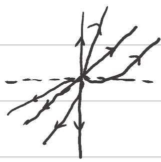
$\frac{dy}{dt}=2x+y$

$A=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}$　　$p=-trA=-4$　　$q=3$

$p^2-4q>0$

双向结点，有2个特殊方向

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{3x}$　　$k=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}k\Rightarrow k=1$



设特殊方向为 $x=ky$，则　$k=\frac{3k}{2k+1}\Rightarrow k_1=0,\ k_2=1.$

日期:　　　/

已经解决了线性系统相图

Nullcline 方法，解决非线性系统

ex. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2 \end{cases}$　　x-Nullcline $y = x^2$　　y-Nullcline $x = 2$

平衡点为 $(2,4)$

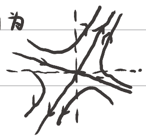
令 $\tilde{x} = x-2$，$\tilde{y} = y-4$，原方程转化为 $\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = -4\tilde{x} + \tilde{y} - \tilde{x}^2 \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{x} \end{cases}$　(※) 平衡点为 $(0,0)$

线性化 $\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = -4\tilde{x} + \tilde{y} \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{x} \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　$p = 4$，$q = -1$　$(0,0)$ 为鞍点.

设 $\tilde{y} = k\tilde{x}$ 为特殊方向　$k = \dfrac{1}{-4+k}$　$k_1 = 2+\sqrt{5}$，$k_2 = 2-\sqrt{5}$

相图为



取 $(1,0)$，表明方向为 ↖

ex $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x\left(y - a\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right) \end{cases}$　a 为常数

① $a = 0$　$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -xy \end{cases}$　　X-Nullcline $x = \pm 1$　　y-Nullcline $x / y = 0$