线性代数的趣味应用案例

中国科学技术大学数学院

陈发来

2023.9.6

背景

- 现有课堂教学只关注书本内容，不介绍知识的源头，也不介绍所学知识有什么应用，不关注“来龙”与“去脉”；

$$\boxed{\textbf{知识的源头}} \longrightarrow \boxed{\textbf{课本知识}} \longrightarrow \boxed{\textbf{知识的应用}}$$

- 学生学习过程中比较迷茫.

- 案例教学是解决“去脉”问题
- 案例教学加深学生对所学内容的理解与把握
- 案例教学同时会提高学生学习的积极性
- 如何针对不同的院系学生进行相应的案例教学？

Fibonacci数列

- 我们在中学就学习了Fibonacci数列及其通项公式求解方法，不过那时候是知其然，不知其所以然。现在我们用线性代数知识给出解答。
- **问题：** 给定Fibonacci数列的递推公式

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_1 = F_2 = 1$$

求Fibonacci数列的通项公式.

解: 设$\mathbb{R}^n$是实数域上的n维向量空间. 令

$$W := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_{i+2} = a_{i+1} + a_i, \ i = 1, \ldots, n-2\}$$

则W是$\mathbb{R}^n$的子空间, 且$(F_1, F_2, \ldots, F_n) \in W$.

Fibonacci数列

W的任何一个元素具有形式

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + 2a_2, \ldots, F_{n-2}a_1 + F_{n-1}a_2) \\ &= a_1(1, 0, 1, \ldots, F_{n-2}) + a_2(0, 1, 2, \ldots, F_{n-1}) \end{aligned}$$

即W的元素都是两个向量的线性组合，且这两个向量线性无关，因此$\dim W = 2$.

下面我们来求解W的一组特殊的基，其元素具有形式

$$a = a_0(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}) \in W$$

即a是一个等比数列.

Fibonacci数列

由$a \in W$知, λ满足$\lambda^2 = \lambda + 1$. 解得

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

因此, 对任意$a \in W$,

$$a = c_1(1, \lambda_1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^{n-1}) + c_2(1, \lambda_2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_2^{n-1}).$$

由$(F_1, F_2, \ldots, F_n) \in W$知,

$$F_n = c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1}.$$

Fibonacci数列

再由$F_1 = F_2 = 1$得

$$c_1 + c_2 = 1, \quad c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 1$$

解得

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = -\frac{\lambda_2}{\sqrt{5}}$$

因此

$$\begin{aligned} F_n &= c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Fibonacci数列

问题 对一般的线性递推公式数列

$$a_k = c_{k-1}a_{k-1} + \ldots + c_1 a_1,$$

其中$a_1, \ldots, a_{k-1}$给定，上述方法是否可以推广？

社团个数问题

问题: 某学校有n位学生，m个社团. 假设任意两个社团公共成员的数量都相同, 并且没有两个社团成员都一样. 证明: $m \leq n$.

证明： 引进一个$m \times n$阶矩阵$A = (a_{ij})$, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果第}j\text{号学生属于第}i\text{个社团} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

例如,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

表示有三个社团, 5名学生. 第一个社团有编号位1, 2, 3, 4的学生,第二个社团有编号位1, 3, 5的学生,第三个社团有编号位2, 3, 5的学生.

社团个数问题

设任意两个社团公共成员个数为k. 于是矩阵A的任意两行的内积为k, A的第i行的模长平方为第i社团成员个数, 记为$d_i > k$. 为此需要考虑矩阵$B = AA^T$. 则

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} d_1 & k & \cdots & k \\ k & d_2 & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k & k & \cdots & d_m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1 - k & & & \\ & d_2 - k & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_m - k \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

B显然是一个正定方阵. 因此, $rank(B) = m \leq n$.

社团个数问题

上述问题数学上可以抽象为

广义Fisher不等式: 设$C_1, C_2, \ldots, C_m$是集合$C(|C| = n)$的互不相同的非空子集, 且$|C_i \cap C_j|(i \neq j)$均相等. 则$m \leq n$.

上述问题可以有不同的变种, 比如

- 某学校有n个学生, m个社团. 假设每个社团人员个数都是奇数, 且任意两个社团公共成员个数是偶数. 则$m \leq n$.
- m个学生组织了n次集体活动, 每次至少有两人参加,并且任意两人一起参加的活动恰有一次. 则$m \leq n$ 或$n = 1$.

给定边长的单纯形是否存在?

问题1: 在平面上是否存在三角形$\Delta P_1P_2P_3$使得它们的三边长是给定的正实数m_1, m_2, m_3?

显然, 若m_1, m_2, m_3满足三角不等式$m_i < m_j + m_k$, 这里i, j, k是$1, 2, 3$的排列, 则这样的三角形$\Delta P_1P_2P_3$是存在的.

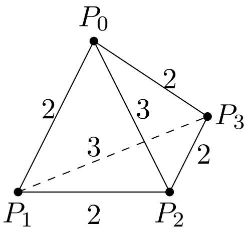
下面我们将问题向高维推广.

问题2: n维欧氏空间中是否存在n维单形$\Delta : P_0P_1 \cdots P_n$使得其任意两个顶点之间的边长是$P_iP_j$是给定的正实数?

显然, 边长之间满足三角不等式是必须的. 但是充分的吗?

给定边长的单纯形是否存在?

我们以三维空间为例说明, 仅仅满足边长之间的三角不等式关系是不能保证四面体的存在性.



给定边长的单纯形是否存在?

设$|P_iP_j| = m_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$. 用$\mathbf{v}_i$表示向量$\overrightarrow{P_0P_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 于是

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) &= \frac{1}{2}\left(||\mathbf{v}_i||^2 + ||\mathbf{v}_j||^2 - ||\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j||^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(m_{i0}^2 + m_{j0}^2 - m_{ij}^2\right) := g_{ij}.\end{aligned}$$

若存在单形$\Delta = P_0P_1\cdots P_n$具有给定边长$m_{ij}$, 则由$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$线性无关知,它们的Gram矩阵

$$G = \begin{pmatrix} (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) & \cdots & (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n) \\ (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) & \cdots & (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2) & \cdots & (\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) \end{pmatrix} = (g_{ij})$$

是对称正定的. 因此, m_{ij}要满足G正定的条件.

给定边长的单纯形是否存在?

反过来, 设给定边长m_{ij}满足G正定的条件. 则存在可逆方阵P使得$G = P^T P$. 令$\mathbf{v}_i$是矩阵P的第i列, $i = 1, 2, \ldots, n$. 则$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$的Gram矩阵就是$G$. 固定$P_0$, 令$P_i = P_0 + \mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$. 则n维单形$P_0 P_1 \cdots P_n$ 具有给定的边长m_{ij}. 因此, 给定边长的单形的存在性等价于Gram矩阵的正定性.

对前面的例子, 对应的Gram矩阵为

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 9/2 & -1/2 \\ 9/2 & 9 & 9/2 \\ -1/2 & 9/2 & 4 \end{pmatrix}$$

容易验证$\det(G)$不正定, 因而给定边长的四面体不存在.

给定边长的单纯形是否存在?

我们可以问一个更一般的问题:

问题: d维空间中是否存在$n+1$个点$P_0, P_1, \ldots, P_n$使得它们中两两的距离为给定的边长?

总结

- 给出了若干例子说明线性代数在一些趣味数学问题中的应用.
- 激发学生学习该课程的兴趣.
- 重视案例教学！重视知识的应用！

数学无处不在

数学无所不能