线性代数 B1 历年真题及参考解答

花开花败

2024 年 7 月 22 日

本答案仅供参考

有任何问题欢迎邮件联系

zzp211476@gmail.com

zzp211476@mail.ustc.edu.cn

目录

1 算是前言的一些东西

有任何问题欢迎邮件联系

zzp211476@gmail.com

zzp211476@mail.ustc.edu.cn

把 *gmail* 邮箱放在这里是因为我快毕业了 (我是 2021 级学生,2025 年毕业), 后面可能用科大邮箱的频率会越来越小, 毕业之后应该基本就不会再用了. 同时也正是因为我快毕业了, 所以之后就不会再带这门课的助教了. 大三的两个学期我都是线性代数 B1 这门课程的助教,2023 秋季学期在陈先进老师的班上,2024 春季学期在刘勇老师的班上. 毫无疑问这两个学期的助教经历是难忘的, 我结识了很多很多的朋友, 这也是我当助教的一个目的吧. 第一次写这份参考答案的时间应该是 2023-2024 的寒假, 这份参考答案一开始也是零散的几份试卷, 方便同学们复习用的, 然后寒假的时候因为我太无聊了, 并且已经写了一些试卷的解答, 索性就多写了一点, 期中期末各提供了九份参考答案. 又想想, 写都写了, 那就发出去吧, 于是就在评课社区上, 还有"我的科大" 上面都发了一份. 又想一想, 做都做了, 干脆就持续更新吧. 当然, 因为我后面肯定不在科大了, 没法拿到一手资料, 所以后面的更新还要靠其他人给我提供试题什么的. 当然, 如果有其它同学 (最好也是线性代数 B1 的助教同学) 愿意帮助我一起写参考答案, 我非常欢迎. 因为前两次更新都是我一个人在写, 难免出现错漏, 如果能有几个人一起写的话这些错漏相应的会少很多.

其实我也不知道 "前言" 该写些什么, 一不小心就写了上面那么多东西, 那下面就稍微写一点我的建议吧. 毫无疑问, 线性代数是一门非常有用的学科, 哪怕是对其他专业的同学们来说, 线性代数的重要性都是至关重要的 (比如量子力学). 但是就科大的课程及教材而言, 我认为写得不算好, 在 2024 春期末监考的时候, 同场的监考老师也跟我说过同样的问题, 他的原话是 "这份试卷出的太偏 trick 了". 所以我建议**学有余力**的同学可以去翻阅一下其它教材, 比如最出名的那本 "线性代数应该这样学". 当然, 我相信没有一本教材是完美的, 所以如果你对将来的方向十分确定的话可以去翻阅你那个领域的人写的书, 那可能更贴合你的方向. 扯远啦, 现在回到这门课吧. 有很多人学这门课的目的仅仅是为了拿个好成绩, 为了达到这个目的, 必要的练习是必不可少了 (顺带一提, 在 2024 春一位同学的建议下, 我计划把我的习题课

讲义整合一下也发出来, 在评课社区和我的科大上), 而且通过往年卷可以发现考的东西基本都是固定的某些, 所以我认为通过做题的方式可以拿到一个比较好的成绩. 这里我想强调一下我的态度, 我不认为“做题”是一个好的“学习”方式, 但是就拿一个好成绩来说, 做题毫无疑问是一个非常好的方式.

写到这里我才发现我已经写了一页多了, 我不知道这对于一个“前言”来说是不是有点过长了. 再放一遍我的邮箱吧, 这份解答有问题或者哪里写的不清楚, 或者有新的试题, 或者想帮忙写解答, 或者仅仅想跟我聊聊, 都欢迎联系我

zzp211476@gmail.com

zzp211476@mail.ustc.edu.cn

最后祝大家能够取得理想的成绩, 能够开心地过完大学生活.

第一部分　期中试题及参考解答

2　2024-2025 第一学期期中

2.1　填空题

1. 在关于 x 的多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}2 & x & -5 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & -2 & -3\\ -1 & 7 & -2 & -2\end{vmatrix}$ 中, 一次项的系数是

解答:

注意到行列式中仅有一个 x, 所以按照第一行展开就可以得到一次项的系数是 $A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ -1 & -2 & -3\\ -1 & -2 & -2\end{vmatrix}=-1$

2. 方程 $X\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 的解是 $X=$

解答:

$X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^n=$

解答:

归纳或者记住约当型矩阵的幂次结论, 答案是 $\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3}\\ 0 & 2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$

4. 对于行列式 $|A|=\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & x & y\end{vmatrix}$, 若其代数余子式的和 $A_{11}+A_{12}+A_{13}=1$, 则 $|A|=$

解答:

题目的条件等价于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & x & y \end{vmatrix} = 1$$

而

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & x & y \end{vmatrix} = 2 - x$$

所以可以得到 $x = 1$. 再将原行列式按照第一列展开

$$|A| = 2A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13}$$

$$= 2 + A_{13}$$

$$= 1$$

5. 对于矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -6 & 2 & a \end{pmatrix}$, 若存在列向量 $b \in R^3$ 使得线性方程组 $Ax = b$ 无解, 则 $a =$

解答:

线性方程组 $Ax = b$ 有解的条件是 $rank(A) = rank\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$, 而如果 $rank(A) = 3$, 则 $rank\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} \geqslant rank(A) = 3$, 另一方面, 受行数的限制,$rank\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} \leqslant 3$, 所以 $rank\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} = rank(A) = 3$, 从而方程组有解. 因此这里 $rank(A) < 3$, 对 A 做初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -6 & 2 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a+4 \end{pmatrix}$$

则 $a=-4$.

6. 线性空间 $R^{2\times2}$ 中向量组 $\{\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 2\end{pmatrix}\}$ 的秩是

解答:
取 $R^{2\times2}$ 中的自然基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, 则原向量组的坐标为

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\\2\end{pmatrix}$$

原向量组的秩等于坐标的秩, 因此只需要考虑对应的矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\2 & 1 & 0 & 3\\3 & 2 & 1 & 4\\1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

它的秩是 2, 所以原向量组的秩是 2.

2.2 判断题

1. 设 A 是 $n\times n$ 阶方阵,b 是 n 维列向量. 若线性方程组 $Ax=b$ 只有唯一解, 则线性方程组 $A^Tx=b$ 也只有唯一解.

解答:
正确的.
由 $Ax=b$ 有唯一解得到 A 可逆, 从而 A^T 可逆, 所以 $A^Tx=b$ 有唯一解.

2. 对于任意的 $m\times n$ 矩阵 A 与 $n\times m$ 阶矩阵 B, 有 $det(AB)=det(BA)$

解答:
错误的.

考虑反例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. 设 $n \times n$ 矩阵 A 满足 $A^2 = I_n$, 则 $A = I_n$ 或 $A = -I_n$

解答:
错误的.
考虑反例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 则

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

也是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系.

解答:
错误的
给出的向量组线性相关, 验证这点即可.

2.3 解答题

三、当 a 为何值时, 如下的线性方程组有解? 当有解时, 求出它的所有解.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = a^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = a^3 \end{cases}$$

考察方程组对应的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & a & a^3 \end{pmatrix}$$

做初等变换如下

$$\to \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 & a-1 \\ 1-a & 0 & a-1 & 0 & a^2-1 \\ 1-a^2 & 1-a & 1-a & 0 & a^3-a \end{pmatrix}$$

case 1:$a=1$

此时原方程组等价于方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1$$

从而此时方程组有解, 解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

case 2:$a\neq 1$

此时继续对原方程做初等变换

$$\to \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -a-1 \\ a+1 & 1 & 1 & 0 & -a^2-a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -a-1 \\ a+2 & 1 & 0 & 0 & -a^2-a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -a-1 \\ a+3 & 0 & 0 & 0 & -a^2-a \end{pmatrix}$$

case 2.1:$a\neq -3$

此时注意到增广矩阵的最后一行对应的方程是

$$0=-12$$

矛盾, 从而方程组无解.

case 2.2:$a \neq 1, -3$

此时系数矩阵的行列式非零 (我们通过初等变换已经几乎将系数矩阵变换成了一个对角阵), 所以原方程有唯一解, 解为

$$x = \begin{pmatrix} \frac{-a^2-2a-2}{a+3} \\ \frac{-a^2-a+1}{a+3} \\ \frac{2a+1}{a+3} \\ \frac{a^3+3a^2+2a+1}{a+3} \end{pmatrix}$$

四、计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

解答:

法一:

交换 1,4 列, 再交换 2,3 列, 得到原行列式等于

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & x+1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & x-1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$$

记变换后的矩阵为 D, 则有如下等式成立

$$D = xI + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

给出如下结论:

Prop. 设 $A \in C^{m\times n}, B \in C^{n\times m}$, 则下列等式成立 (在多项式相等的意义下)

$$x^n|xI_m + AB| = x^m|xI_n + BA|$$

结合上面的结论可以得到

$$x det(D) = x^4(x + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = x^5$$

两边同时约去 x(注意, 这里是在多项式意义下的约去, 所以不需要讨论 x 是否为 0) 得到 $det(D) = x^4$

法二:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x^4$$

五、设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求它的伴随矩阵 A^*.

解答:

$det(A) = 2$, 从而 A 可逆且 $A^* = 2A^{-1}$, 下面求 A^{-1}

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&0&0&0&1&-2&0&0\\0&1&0&0&0&1&-1&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&0&0&0&1&-2&0&0\\0&1&0&0&0&1&-1&0\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{1}{2}&-1&0&0\\0&1&0&0&0&1&-1&0\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, 从而

$$A^*=2A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&2&-2&0\\0&0&2&-2\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

六、设 $n\geqslant 2$ 是正整数,$R_{n-1}[x]$ 代表次数小于 n 的所有实系数多项式构成的线性空间, 对于正整数 k, 用 V_k 表示 $R_{n-1}[x]$ 中满足 $\int_0^k f(x)dx=0$ 的多项式的集合.

(1) 证明:V_k 是 $R_{n-1}[x]$ 的线性子空间

(2) 对于 $j=1,\cdots,n-1$, 设 $f_j(x)=1-\frac{j+1}{k^j}x^j$, 求证:$f_1,\cdots,f_{n-1}$ 是 V_k 的一组基.

(3) 设多项式 $f(x)$ 满足 $f(x)\in\bigcap_{k=1}^n V_k$, 求证 $f(x)=0$

解答:

(1) 由积分的线性性可以得到 V_k 是 $R_{n-1}[x]$ 的子空间

(2) 容易验证 $f_j(x)\in V_k$, 下面先验证它们线性无关. 事实上这点也是比较显然的, 因为 $f_j(x)$ 的次数不相同. 假设存在一系列常数 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\}$, 使得

$$\Sigma_{j=1}^{n-1}\alpha_j f_j(x)=0$$

比较两边各次项系数就可以得到 $\alpha_j=0$, 从而 $f_j(x)$ 线性无关.
假设 $g(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\in V_k$, 那么就可以得到

$$\int_0^k f(x)dx=\Sigma_{i=0}^{n-1}\frac{k^{i+1}}{i+1}a_i=0$$

很容易发现这是一个关于 $a_0,\cdots,a_{n-1}$ 的线性方程, 并且解空间 (即 V_k) 的维数是 $n-1$. 而我们已经证明向量组 $\{f_1,\cdots,f_{n-1}\}$ 线性无关, 而恰好其中有 $n-1$ 个向量, 从而它们就是 V_k 的一组基
(3)
法一: 假设 $g(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\in\bigcap_{k=1}^n V_k$, 则有

$$\int_0^k f(x)dx=\Sigma_{i=0}^{n-1}\frac{k^{i+1}}{i+1}a_i=0,k=1,\cdots,n$$

对应的线性方程组可以写成如下的形式

$$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2^2&\cdots&2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\\frac{a_1}{2}\\\vdots\\\frac{a_{n-1}}{n}\end{pmatrix}=0$$

注意到系数矩阵是 $Vandermonde$ 矩阵, 所以它的行列式非零, 从而该方程组有唯一解, 即零解
法二: 法一中有一步在我看来是比较巧妙的, 就是在最后将线性方程组的未知数转化成了 $\frac{a_i}{i+1}$. 这一步可能不是那么容易能想到. 下面提供一种在我看来更加自然的想法.
对 $g(x)\in\bigcap_{k=1}^n V_k, g(x)\neq 0$, 我们由积分的线性性可以得到

$$\int_i^{i+1} g(x)dx=0,i=0,\cdots,n-1$$

由积分中值定理得到存在 $\xi_0,\cdots,\xi_{n-1}$, 使得

$$g(\xi_i)=0,i=0,\cdots,n-1$$

其中 $\xi_i\in(i,i+1)$. 但是由于 $g(x)\neq 0$ 是一个次数小于 n 的多项式, 所以它至多有 $n-1$ 个零点, 矛盾. 所以 $g(x)=0$.

七、
(1) 设矩阵 A,B,C 依次为 $m\times n,n\times s,s\times t$ 矩阵. 证明下列关于矩阵的秩不等式:

$$r(ABC) \geqslant r(AB) + r(BC) - r(B)$$

(2) 设 A 是 n 阶方阵. 证明:

$$r(A^n) = r(A^{n+1}) = r(A^{n+2}) = \cdots$$

解答:

(1) 考虑分块初等变换如下:

$$\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix}$$

由此可得

$$r(ABC) + r(B) = r\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \geqslant r(AB) + r(BC)$$

(2) 首先, 我们证明如果存在一个 $k \in N^+$, 使得 $r(A^k) = r(A^{k+1})$, 那么

$$r(A^k) = r(A^{k+1}) = r(A^{k+2}) = \cdots$$

根据归纳法, 我们只需要证明 $r(A^{k+1}) = r(A^{k+2})$ 即可. 首先

$$r(A^{k+2}) = r(A^{k+1} \cdot A) \leqslant r(A^{k+1})$$

下面只需要证明 $r(A^{k+2}) \geqslant r(A^{k+1})$. 考虑下面三个线性方程组

$$A^k x = 0$$

$$A^{k+1} x = 0$$

$$A^{k+2} x = 0$$

它们的解空间分别记作 V_0, V_1, V_2. 注意到有一个显然的包含关系

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2$$

结合 $r(A^k) = r(A^{k+1})$ 得到 $dim(V_0) = dim(V_1)$, 从而 $V_0 = V_1$. 那么我们接下来证明 $V_2 \subseteq V_1$. 对任意 $x \in V_2$, 有

$$A^{k+2}x = A^{k+1} \cdot Ax = 0$$

从而我们得到 $Ax \in V_1$, 结合 $V_0 = V_1$ 得到 $Ax \in V_0$, 于是有

$$A^k \cdot Ax = 0$$

即 $A^{k+1}x = 0$, 所以 $x \in V_1$. 这就证明了 $V_2 \subseteq V_1$, 于是

$$dim(V_2) \leqslant dim(V_1)$$

所以就得到了

$$rank(A^{k+2}) \geqslant rank(A^{k+1})$$

再结合之前已经证明过的

$$rank(A^{k+2}) \leqslant rank(A^{k+1})$$

我们就得到了

$$rank(A^{k+1}) = rank(A^{k+2})$$

现在我们距离本题中得到的结论还差一步, 那就是证明存在一个 $k \leqslant n$, 使得 $r(A^k) = r(A^{k+1})$. 首先, 如果 A 可逆, 那么 A^k 可逆,$\forall k$. 这样的话题目中的结论就自然成立了, 所以我们下面只考虑 A 不可逆的情况. 我们假设这样的 k 不存在, 那么就有

$$r(A^k) > r(A^{k+1})$$

注意, 按照逻辑来讲, 这里得到的应该是 $r(A^k) \neq r(A^{k+1})$, 但是之前已经证明过了 $r(A^k) \leqslant r(A^{k+1})$, 所以这里就直接得到了 $r(A^k) > r(A^{k+1})$. 将这个结论稍微变形一下就得到了

$$r(A^{k+1}) \leqslant r(A^k) - 1$$

那么利用归纳法 (或者只是简单的递推) 就可以得到

$$r(A^n) \leqslant r(A) - (n-1)$$

由于 A 不可逆, 所以 $r(A) \leqslant n-1$, 从而 $r(A^n) \leqslant 0$, 这迫使 $r(A^n) = 0$, 即 A 是零矩阵, 那么题目中的结论自然成立. 综上, 我们得到了原结论成立

3 2022-2023 第二学期期中

3.1 填空题

1. 如果向量 $\vec{a_1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \vec{a_3} = \begin{pmatrix}2 & 4 & a\end{pmatrix}$ 线性相关, 则 $a =$

解答: 对矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & a\end{pmatrix}$ 做初等变换

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & a\end{pmatrix}\\ \to &\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & a-2\end{pmatrix}\\ \to &\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & a-6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因为原向量组线性相关, 所以这个矩阵的秩小于 3, 所以 $a = 6$.

2. 方程 $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 的解是 $X =$

因为本题都是二阶矩阵, 可以考虑直接求逆.

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

3. 设 $\vec{a_1} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix}2 & 4 & 6\end{pmatrix}, \vec{a_3} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix}13 & 32 & 52\end{pmatrix}$ 在 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ 下的坐标是

解答: 本题有问题, 这里把 $\vec{a_3}$ 替换成 $\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, 下面给出解答

设坐标为 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 4 & 6\\2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\32\\52\end{pmatrix}$$

接下来可以选择求解线性方程组, 也可以直接求矩阵逆. 这里直接求矩阵逆.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 4 & 6\\2 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}13\\32\\52\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & \frac{7}{2} & -1\\5 & -\frac{9}{2} & 2\\-2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13\\32\\52\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\25\\-14\end{pmatrix}$$

4. 矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -4\\-1 & -3 & -4 & -2\\2 & -1 & 4 & 4\end{pmatrix}$ 的相抵标准型是

用初等变换求出秩即可. 答案是

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

5. 记 $P_2[x]$ 是实数域 R 上次数不超过 2 次的多项式的集合, 按多项式的加法和数乘运算构成实数域上线性空间, 求 $P_2[x]$ 的一组基函数 $\{(1-x)^2, 2x(1-x), x^2\}$ 到自然基 $\{1, x, x^2\}$ 的过渡矩阵.

解答: 注意到以下等式成立

$$1=(1-x)^2+2x(1-x)+x^2$$

$$2x=2x(1-x)+2x^2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}2x(1-x)+x^2$$

$$x^2=x^2$$

所以就有

$$\begin{pmatrix}1 & x & x^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1-x)^2 & 2x(1-x) & x^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

即过渡矩阵是 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

6. 矩阵 $A = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 7\end{pmatrix}$, $B = P^{-1}AP$, 则 $PB^{2023}P^{-1} - A^2 =$

解答:

$$B^{2023} = (P^{-1}AP)^{2023} = P^{-1}A^{2023}P$$

所以我们要求的东西就可以化为

$$PP^{-1}A^{2023}PP^{-1} - A^2 = A^{2023} - A^2$$

那么接下来就是要求 A 的方幂. 直接计算可得

$$A^2 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

这样我们要求的东西就变成了

$$A^{2023} - A^2 = (A^4)^{505}A^3 - A^2 = A^3 - A^2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

3.2 判断题

1.$n \geqslant 2$, 向量组 $\alpha_1-\alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}-\alpha_n, 2(\alpha_n-\alpha_1)$ 一定线性相关.

正确的.

原命题等价于向量组 $\alpha_1-\alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}-\alpha_n, \alpha_n-\alpha_1$ 一定线性相关. 直接求和就可以得到 0, 从而该向量组线性相关, 从而原命题正确.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&5&5\\6&7&8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{pmatrix}$, 则 A 与 B 不相抵.

正确的.

直接计算秩即可,$rank(A)=2, rank(B)=3$.

3. 设 A 为 3 阶非零实方阵,A^* 为 A 的伴随方阵. 若 $A^*=-A^T$, 则 $det(A)<0$.

正确的.

先证明 A 可逆.

注意到 $rank(A)=rank(A^*)$ 在 $n=3$ 时当且仅当 A 可逆或 A 是零矩阵, 又由题目条件可知,A 可逆.

那么两边同时取行列式得到

$$det(A)^2=det(A^*)=(-1)^3det(A)$$

两边同时除以 $det(A)$ 得到 $det(A)=-1<0$.

另解:

先证明 A 可逆, 下面假设 A 不可逆. 两边同时右乘 A, 得到

$$det(A)I=A^*A=-A^TA \quad (1)$$

因为 A 不是 0 矩阵, 所以存在一个非零向量 x 使得 $Ax\neq 0$, 在 (1) 式左边乘 x^T, 右边乘 x, 得到

$$det(A)x^Tx=-x^TA^TAx$$

此时有 $x^Tx>0, x^TA^TAx=(Ax)^TAx>0$, 所以两边同时除以 x^Tx 得到

$$det(A) = -\frac{x^T A^T Ax}{x^T x} < 0$$

这与 A 不可逆矛盾. 所以 A 可逆. 那么两边同时取行列式得到

$$det(A)^2 = det(A^*) = (-1)^3 det(A)$$

两边同时除以 $det(A)$ 得到 $det(A) = -1 < 0$.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} \vec{a_1} & \vec{a_2} & \vec{a_3} & \vec{a_4} \end{pmatrix}$ 是 6×4 的矩阵,$\vec{a_i}$ 是列向量, 如果 $x_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}^T, x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 则 $\vec{a_4}$ 不能由 $\vec{a_2}, \vec{a_3}$ 线性表示.

错误的.

下面来构造反例. 我们想构造的反例是 $\vec{a_2}, \vec{a_3}$ 线性无关, 这样的话 $\vec{a_4}$ 就一定可以被 $\vec{a_2}, \vec{a_3}$ 线性表示. 那么根据条件进行计算就可以得到方程组

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 - \frac{6}{5}x_2 - x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{8}{5}x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

以 x_1, x_2 为基础解系. 所以这里取

$$\vec{a_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{6}{5} & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$$

$$\vec{a_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{8}{5} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a_1} = \vec{a_4} = \vec{a_2}$ 即可.

3.3 解答题

三、(本题 18 分) 设含参数 λ 的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2\lambda x_2 - 10x_3 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + (\lambda - 3)x_3 = 4 \end{cases}$$

1. 当 λ 取何值时, 该方程组无解;
2. 当 λ 取何值时, 该方程组有无穷多解, 并求此时通解的表达式;
3. 当 λ 取何值时, 该方程组有唯一解.

解答:

1. 对增广矩阵进行行变换.

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ 2 & 2\lambda & -10 & 0\\ 3 & 8 & \lambda-3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 2\lambda-6 & -8 & -2\\ 0 & -1 & \lambda & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\lambda-1 & 4\\ 0 & 0 & 2\lambda^2-6\lambda-8 & 2\lambda-8\\ 0 & -1 & \lambda & 1\end{pmatrix}$$

方程组无解等价于

$$rank(A)\neq rank\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}$$

即 $2\lambda^2-6\lambda-8$ 与 $2\lambda-8$ 不同时为 0, 即 $\lambda=-1$.

2. 在有解的情况下, 方程组有无穷多解等价于系数矩阵不可逆. 按照第一问的初等变换, 这等价于 $\lambda=4$. 此时经过变换后的增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 11 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

所以通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-11t\\ -1+4t\\ t\end{pmatrix}$$

3. 在方程组有解的情况下, 方程组有唯一解等价于系数矩阵可逆. 即 $\lambda\neq 4,-1$.

四 (本题 12 分)、设方阵

$$A=\begin{pmatrix}4+x&4&4&4\\3&3+x&3&3\\2&2&2+x&2\\1&1&1&1+x\end{pmatrix}$$

其中 $x>0$, 求 $det(A)$ 与 A^{-1}.

解答:

1. 先给出两个引理:

lemma1: 如果 $I_{(m)}-AB$ 可逆, 则 $I_{(n)}-BA$ 可逆, 且 $(I_{(n)}-BA)^{-1}=I_{(n)}+B(I_{(m)}-AB)^{-1}A$.

lemma2:$\lambda^n det(\lambda I_m-AB)=\lambda^m det(\lambda I_n-BA)$.

回到本题, 先求 $det(A)$, 注意到

$$A=xI+\begin{pmatrix}4&4&4&4\\3&3&3&3\\2&2&2&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}=xI+\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}$$

所以由 lemma2 可知

$$xdet(A)=x^4det(x+\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix})=x^4(x+10)$$

所以 $det(A)=x^3(x+10)$.

2. 直接根据 lemma1 得到

$$A^{-1}=\tfrac{1}{x}(I_4+\begin{pmatrix}\frac{4}{x}\\\frac{3}{x}\\\frac{2}{x}\\\frac{1}{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix})^{-1}=\tfrac{1}{x}(I_4+\begin{pmatrix}\frac{4}{x}\\\frac{3}{x}\\\frac{2}{x}\\\frac{1}{x}\end{pmatrix}\tfrac{x}{x+10}\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix})$$

最终计算得到结果是

$$\tfrac{1}{x(x+10)}\begin{pmatrix}x+6&-4&-4&-4\\-3&x+7&-3&-3\\-2&-2&x+8&-2\\-1&-1&-1&x+9\end{pmatrix}$$

五、(本题 13 分) 记 $P_{2n-1}[x]$ 是实数域 R 上次数不超过 $2n-1$ 次的多项式的集合, 按多项式的加法和数乘运算构成实数域上线性空间. 给定 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, 对每个 $1 \leqslant k \leqslant n$, 可以证明存在 $f_k(x), g_k(x) \in P_{2n-1}[x]$ 满足:
$f_k(x_i) = \begin{cases} 1, k = i \\ 0, k \neq i \end{cases}$, $\frac{df_x}{dx}(x_i) = 0, g_k(x_i) = 0, \frac{dg_x}{dx}(x_i) = \begin{cases} 1, k = i \\ 0, k \neq i \end{cases}$ 其中 $i = 1, \cdots, n$.
1. 证明:$S = \{f_1(x), \cdots, f_n(x), g_1(x), \cdots, g_n(x)\}$ 线性无关, 从而构成 $P_{2n-1}[x]$ 上的一组基.
2. 求多项式 $q(x) = x^n + 23$ 在基 S 下的坐标.
3. 当 $n = 2$ 时, 计算三次多项式 $\{f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)\}$.

解答:
1. 假设存在 $\lambda_i, \mu_i \in R, i = 1, \cdots, n$ 使得

$$\Sigma_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) + \Sigma_{j=1}^n \mu_j g_j(x) = 0$$

取值 $x = x_k$, 得到

$$\Sigma_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_k) + \Sigma_{j=1}^n \mu_j g_j(x_k) = 0$$

结合 $f_i(x_k) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$, $g_i(x_k) = 0$ 可知

$$\lambda_k = 0, k = 1, \cdots, n$$

对 $\Sigma_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) + \Sigma_{j=1}^n \mu_j g_j(x) = 0$ 求导后再重复取值操作就可以得到

$$\mu_k = 0, k = 1, \cdots, n$$

所以 S 线性无关.
2. 思路与上一题是类似的, 也是进行取值. 首先设 $q(x) = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) + \Sigma_{j=1}^n \mu_j g_j(x)$, 取值 $x = x_k$ 可以得到

$$x_k^n + 23 = \lambda_k, k = 1, \cdots, n$$

求导后再重复取值操作, 得到

$$nx_k^{n-1} = \mu_k, k = 1, \cdots, n$$

这样就得到了 $q(x)$ 的坐标.
3. 先考虑 $f_k(x)$. 注意到 $\frac{df_i(x)}{dx}$ 是二次多项式, 而他们在 x_1, x_2 处取值都为 0, 说明 $(x-x_1)(x-x_2)|\frac{df_i(x)}{dx}, i=1,2$. 所以这里可以设

$$\frac{df_i(x)}{dx} = a_i(x-x_1)(x-x_2)$$

积分可得

$$f_i(x) = \frac{a_i}{3}x^3 - \frac{a_i(x_1+x_2)}{2}x^2 + a_i x_1 x_2 x + c_i$$

其中 c_i 是常数. 结合 $f_k(x_i) = \begin{cases} 1, k=i \\ 0, k\neq i \end{cases}$ 可知

$$f_1(x_1) = \frac{a_1}{3}x_1^3 - \frac{a_1(x_1+x_2)}{2}x_1^2 + a_1 x_1^2 x_2 + c_1 = 1$$

$$f_1(x_2) = \frac{a_1}{3}x_2^3 - \frac{a_1(x_1+x_2)}{2}x_2^2 + a_1 x_1 x_2^2 + c_1 = 0$$

联立上面两个方程组可以解得

$$\begin{cases} a_1 = \frac{6}{(x_2-x_1)^3} \\ c_1 = \frac{x_2^2(-x_2+3x_1)}{(x_1-x_2)^3} \end{cases}$$

类似, 还可以得到

$$\begin{cases} a_2 = \frac{6}{(x_1-x_2)^3} \\ c_2 = \frac{x_1^2(-x_1+3x_2)}{(x_2-x_1)^3} \end{cases}$$

至此, 我们就已经得到了 $f_i(x)$, 下面来考虑 $g_i(x)$. 由于 $g_k(x_i)=0$, 所以我们可以得到 $(x-x_1)(x-x_2)|g_i(x), i=1,2$, 所以可以设

$$g_i(x) = a_i(x-x_1)(x-x_2)(x-t_i)$$

求导得到

$$\frac{dg_i(x)}{dx} = a_i((x-x_1)(x-x_2) + (x-x_2)(x-t_i) + (x-x_1)(x-t_i))$$

结合 $\frac{dg_x}{dx}(x_i) = \begin{cases} 1, k=i \\ 0, k\neq i \end{cases}$ 可得

$$a_1(x_1-x_2)(x_1-t_1) = 1$$

$$a_1(x_2-x_1)(x_2-t_1) = 0$$

解这个线性方程组得到

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{(x_1-x_2)^2} \\ t_1 = x_2 \end{cases}$$

类似的, 可以得到

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{(x_1-x_2)^2} \\ t_2 = x_1 \end{cases}$$

六、(本题 7 分) 设 A, B, C 是 n 阶实方阵, 证明:
1. 如果存在矩阵 X, Y 满足 $XA - 3BY = C$, 则矩阵 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 相抵.
2. 上述命题的逆命题成立.

解答:
1. 对 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 做初等变换.

$$\to \begin{pmatrix} A & 0 \\ XA & B \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} A & 0 \\ XA - 3BY & B \end{pmatrix}$$

由条件,$XA - 3BY = C$, 所以原命题得证.
2. 设 $A = P_1 \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1, D = P_2 \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_2$, 其中 P_1, P_2, Q_1, Q_2 都是可逆方阵. 设

$$\begin{pmatrix} P_1^{-1} & O \\ O & P_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^{-1} & O \\ O & Q_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O & B_1 & B_2 \\ O & O & B_3 & B_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix} I_r & O & -B_1 & O \\ O & I & -B_3 & O \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & O & B_1 & B_2 \\ O & O & B_3 & B_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & O & O & -B_2 \\ O & I & O & O \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O & O & O \\ O & O & O & B_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}$$

与 $rank \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$ 相抵. 由 $rank \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = r + s$, 得 $B_4 = O$, 从而

$$B = P_1 \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} Q_2 = AQ_1^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix} Q_2 + P_1 \begin{pmatrix} O & O \\ B_3 & O \end{pmatrix} P_2^{-1} D$$

4 2020-2021 第二学期期中

4.1 填空题

1. 设三维欧式空间中有向量 a, b, c, 它们的模长相同且两两夹角相等. 已知在空间直角坐标系下 $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 那么 $c =$

解答:
计算可得 $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2. 设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $A^* =$

解答:

$$A^* = det(A)A^{-1} = \tfrac{1}{det(A^{-1})}A^{-1}$$

而 $det(A^{-1}) = 2$, 所以

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$,$M_{ij}$ 为余子式, 则 $M_{31} - M_{32} + M_{33} =$

解答:
根据行列式的展开定义, 等式左边等于下面的行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

计算可得该行列式的值为 36.

4. 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix}3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix}4 & 5 & 6 & k\end{pmatrix}$, 且 $rank\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 2$, 则 $k =$

解答:

记 $A = \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & k\end{pmatrix}$. 对 A 做初等变换.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & k\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k-6\end{pmatrix}$$

由此可以发现,$rank(A) = 2$ 等价于 $k = 7$.

5. 设 $P_3[x]$ 是实数域 R 上次数不超过 3 的多项式全体, 则基 $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ 到自然基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 的过渡矩阵 T 为

解答:

先考虑自然基到 $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ 的过渡矩阵. 计算即得过渡矩阵为

$$M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则 $T = M^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

4.2 判断题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -3\\ -1 & 3 & 2\\ 7 & -1 & -12\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & -4 & 3\end{pmatrix}$, 则 A 与 B 不相抵.

解答:

错误的

$rank(A)=rank(B)=2$, 从而他们相抵.

2. 设 A,B 是 n 阶方阵, 则 $\begin{vmatrix}A & B\\ B & A\end{vmatrix}=|A+B||A-B|$.

解答:

正确的.

对原矩阵做初等变换

$$\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ I & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B & B\\ A+B & A\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}I & 0\\ -I & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ I & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B & B\\ 0 & A-B\end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得到 $\begin{vmatrix}A & B\\ B & A\end{vmatrix}=|A+B||A-B|$.

3. 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关的充要条件是向量组中的任意一个向量 α_i 都可以由剩余的 $n-1$ 个向量线性表示.

解答:

错误的.

考虑向量组 $\{0,1\}$, 它们线性相关, 但是 1 无法被 0 线性表示.

4. 设 A,B 是满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵, 则一定有 A 的列向量线性相关,B 的行向量线性相关.

解答:

正确的.

记 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$,$B = (b_{ij})_{n\times m}$. 则由 $AB = 0$ 可知

$$\Sigma_{i=1}^n b_{ij}\alpha_i = 0, \forall j = 1, \cdots, m$$

因为 B 非零, 所以存在 j_0, 使得 b_{ij_0} 不全为零,$\forall i = 1, \cdots, n$. 所以得到 A 的列向量线性相关. 类似可以得到 B 的行向量线性相关.

5. 设 A 是 n 阶非零实方阵, 若 $A^T = A^*$, 则 A 可逆.

解答:

正确的.
假设 A 不可逆, 则 $det(A) = 0$, 从而有伴随矩阵的定义可以得到 $AA^* = 0$, 又因为 $A^* = A^T$, 所以 $AA^T = 0$, 这可以推出 $A = 0$(考察对角线元素即可), 矛盾. 所以 A 可逆.

4.3 解答题

3. 当 λ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

有解, 并求出它的通解.

解答:

对增广系数矩阵做初等变换

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix}$$

所以原方程有解等价于 $\lambda = 5$, 此时方程等价于

$$\begin{cases} -5x_2+3x_3-7x_4=-3 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2 \end{cases}$$

解得其通解为

$$x=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. 设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{pmatrix}$, 其中 $a>0$, 求 $det(A)$ 与 A^{-1}.

解答:

记 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 则 J 可逆且 $A=aI+\alpha\beta$. 下面证明两个引理

$Lemma\ 1$. 设 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{n\times m}$, 则

$$det(I_m-AB)=det(I_n-BA)$$

$Lemma\ 2$. 设 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{n\times m}$, 则 I_n-AB 可逆当且仅当 I_m-BA 可逆, 且 $(I_m-AB)^{-1}=I_m+A(I_n-BA)^{-1}B$.

$Proof\ of\ Lemma\ 1:$

对分块矩阵 $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m-AB \end{pmatrix}$ 做初等变换得到

$$\begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m-AB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} I_n - BA & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得 $Lemma\ 1$.

$Proof\ \ of\ \ Lemma\ 2:$
初等变换同上, 最后等式两边同时取逆即可得到 $Lemma\ 2$.

利用以上两个引理来对本题进行处理. 首先考虑行列式

$$det(A) = det(aI + \alpha\beta) = a^n det(I + \tfrac{1}{a}\alpha\beta)$$

利用 $Lemma\ 1$ 可得

$$det(A) = a^n(1 + \tfrac{n}{a})$$

再来考虑逆

$$A^{-1} = \tfrac{1}{a}(I + \tfrac{1}{a}\alpha\beta)^{-1}$$

利用 $Lemma\ 2$ 就可以得到

$$A^{-1} = \tfrac{1}{a}(I - \tfrac{1}{a}\alpha\tfrac{1}{1+\frac{n}{a}}\beta) = \tfrac{1}{a}(I - \tfrac{1}{a+n}\alpha\beta)$$

最终 $A^{-1} = b_{ij}$, 其中 $b_{ij} = \begin{cases} \frac{a+n-1}{a(a+n)}, i = j \\ -\frac{1}{a(a+n)}, i \neq j \end{cases}$.

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 令 V 是所有与 A 可交换的三阶实对称方阵的全体.
(1) 证明:V 按照矩阵的加法与数乘构成实数域 R 上的线性空间.
(2) 求 V 的维数与一组基.

解答:
(1) 只需验证 V 关于加法与数乘封闭. 首先可以注意到实对称矩阵之间的加法与数乘不改变实对称性质, 因此只需要验证与 A 可交换的性质. 对于任意的 $B, C \in V$, 有

$$(B + C)A = BA + CA = AB + AC = A(B + C)$$

所以 V 关于加法封闭. 对任意的 $B\in V,\lambda\in R$, 有

$$(\lambda B)A=\lambda BA=\lambda AB=A(\lambda B)$$

所以 V 关于数乘封闭. 则 V 是 $R^{3\times 3}$ 的子空间, 从而是 R 上的线性空间.

(2) 设 $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}\in V$, 则优 $AB=BA$ 可得到线性方程组

$$\begin{cases}b+e=0\\a-c-d=0\\c+d-f=0\end{cases}$$

由这个方程组的一组基础解系可以得到 B 的表达式如下

$$B=t_1\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

所以 V 是 3 维空间, 一组基是

$$M_1=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},M_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},M_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

6. 设 $A\in F^{m\times n},B\in F^{n\times p}$, 证明:$rank(AB)=rank(B)$ 成立的充分必要条件是方程组 $ABx=0$ 的解都是方程组 $Bx=0$ 的解.

解答:

$(\Rightarrow)$

设 V_1 是方程组 $ABx=0$ 的解空间,V_2 是方程组 $Bx=0$ 的解空间. 则有 $V_2\subseteq V_1$. 则

$$dim(V_2)\leqslant dim(V_1)$$

等号成立当且仅当 $V_1=V_2$, 即方程组 $ABx=0$ 与方程组 $Bx=0$ 同解. 而注意到

$$dim(V_2)=p-rank(B)$$

$$dim(V_1) = p - rank(AB)$$

所以 $dim(V_1) = dim(V_2)$ 等号成立, 因此就有 $ABx = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.
$(\Leftarrow)$
记号同上. 这里 $V_1 \subseteq V_2$, 所以 $V_1 = V_2$, 从而 $dim(V_1) = dim(V_2)$, 则由

$$dim(V_2) = p - rank(B)$$

$$dim(V_1) = p - rank(AB)$$

可以得到

$$rank(B) = rank(AB)$$

5 2019-2020 第一学期期中

5.1 填空题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$, 求 $rank(A^TA)$.

法一: 直接爆算, 我觉得很烦, 好处是不用动脑子

法二:$Claim: \ \ rank(A^TA) = rank(A)$.

下面来证明这个结论. 由解空间维数与相应矩阵秩的关系, 我们只需要证明 $A^TAx = 0$ 与 $Ax = 0$ 同解.

设 $A^TAx = 0$ 的解空间为 V_1,$Ax = 0$ 的解空间为 V_2. 首先, 对 $\forall x_0, s.t. Ax_0 = 0$, 一定有 $A^TAx_0 = A^T0 = 0$. 所以 $V_2 \subseteq V_1$.

其次, 对 $\forall x_0, s.t. A^TAx_0 = 0$, 左乘 x_0^T 得到

$$x_0^TA^TAx_0 = 0$$

注意到, 这是向量 Ax_0 与自身的点乘, 它一定是大于等于 0 的, 并且 $x_0^TA^TAx_0 = 0$ 当且仅当 $Ax_0 = 0$. 所以 $V_1 \subseteq V_2$.

结合上述, 得到了 $V_1 = V_2$. 所以

$$rank(A^TA) = n - dim(V_1) = n - dim(V_2) = rank(A)$$

对本题来说,$rank(A) = 2$, 所以 $rank(A^TA) = 2$.

Rmk. 可能看到这题的解答的时候会觉得非常的不自然, 这是正常的, 因为这里的想法来源于后面的内容, 矩阵的相合与二次型. 但是我个人认为这是一个值得记住的结论.

2. 设 A 是 5×8 的矩阵,$rank(A) = 3$, 求齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间维数.

没啥好说的, 利用解空间维数与矩阵秩之间的关系即得 $dim(V) = n - rank(A) = 8 - 3 = 5$

3. 设 $(a \neq 0)$, 求 $\begin{pmatrix}0 & a & 0 & 0\\ -a & 0 & a & 0\\ 0 & -a & 0 & a\\ 0 & 0 & -a & 0\end{pmatrix}$ 的逆.

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

4. 设 3 阶方阵 $A = (a, b, c), B = (2b, c, 2a)$, 其中 a, b, c 为三维列向量, 若 $det(A) = 1$, 求 $det(B)$.

应试角度, 可以令 $A = I$ 进行计算. 下面给出正经做法.

$det(B) = -det(2a, c, 2b) = det(2a, 2b, c) = 4det(a, b, c) = 4$.

5. 设 A, B 是三阶可逆方阵,$det(A) = \lambda$, $det(B) = \mu$,$M = \begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ B & 0 \end{pmatrix}$, 求 $det(M)$.

解答:

$$\begin{aligned} det(M) &= (-1)^3 det \begin{pmatrix} 2A^* & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &= -det(2A^*)det(B) \\ &= -8det(A^*)det(B) \\ &= -8(det(A))^2 det(B) \end{aligned}$$

$$= -8\lambda^2\mu$$

Rmk. 我个人认为这里的第一步非常容易错. 可以思考一下我的第一步为什么会出现 $(-1)^3$? 我做了什么操作? 要是我来出题, 我一定会把这里 A, B 的阶数改成四阶, 估计能骗到不少人.

5.2 判断题

1. 二阶方阵与其伴随方阵的行列式相同.

正确的.$det(A^*) = (det(A))^{n-1} = det(A)$

2. 设 A 是 $m\times n$ 的矩阵,B 是 $n\times m$ 的矩阵,则 $rank(AB) = rank(A^TB^T)$.

错误的. 考虑 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 则 $AB = 0$,$A^TB^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 他们的秩显然不同.

3. 已知 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 而 β 不是 $Ax = 0$ 的解, 则 $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

正确的. 假设 $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 则存在 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 使得 $\Sigma_{i=1}^s \lambda_i\alpha_i + \lambda_0\beta = 0$. 若 $\lambda_0 = 0$, 则 α_i 线性相关, 矛盾. 否则 β 可被 α_i 线性表出, 则 β 是 $Ax = 0$ 的一个解, 矛盾.

4. 所有行列式为 0 的 n 阶方阵全体 W 是 $F^{n\times n}$ 的线性子空间.

错误的. 考虑 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A, B \in W$, 但是 $det(A+B) = 1$,$A + B \notin W$. 从而 W 不是线性空间.

5.3 解答题

3.(10 分) 解线性方程组. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 - x_4 = 2 \end{cases}$

没啥好说的, 直接解就行. $x_1 = 2+x_4, x_2 = 1+x_4, x_3 = -2+x_4, x_4 = x_4$

4.(15 分) 计算 n 阶行列式 $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1-a & -1 & & & \\ a & 1-a & -1 & & \\ & a & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1-a & -1 \\ & & & a & 1-a \end{vmatrix}$.

按第一列展开 (也可以按第一行展开) 得到

$$\Delta_n = (1-a)\Delta_{n-1} - a \begin{vmatrix} -1 & & & \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 1-a & -1 \\ & & a & 1-a \end{vmatrix}$$

再按照第一行展开得到

$$\Delta_n = (1-a)\Delta_{n-1} + a\Delta_{n-2}$$

计算一下低阶的情况, 准备归纳.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-a & -1 \\ a & 1-a \end{vmatrix} = 1 - a + a^2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1-a & -1 & 0 \\ a & 1-a & -1 \\ 0 & a & 1-a \end{vmatrix} = 1 - a + a^2 - a^3$$

下面归纳证明 $\Delta_n = \Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i a^i$.

低阶情况前面已经验证, 假设 $k \leqslant n-1$ 的情况成立, 下面验证 $k = n$ 时结论成立.

由递推式得

$$\Delta_n = (1-a)\Delta_{n-1} + a\Delta_{n-2}$$

$$= (1-a)\Sigma_{i=0}^{n-1}(-1)^i a^i + a\Sigma_{i=0}^{n-2}(-1)^i a^i$$

$$= \Sigma_{i=0}^{n-1}(-1)^i a^i + \Sigma_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1} a^{i+1} - \Sigma_{i=0}^{n-2}(-1)^{i+1} a^{i+1}$$

$$= \Sigma_{i=0}^{n-1}(-1)^i a^i + (-1)^n a^n$$

$$= \Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i a^i$$

综上, 结论成立,$\Delta_n = \Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i a^i$.

5.(20 分) 设 V 是实数域上所有 2 阶对称方阵的集合, 即 $V = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} | a, b, c \in R\}$.

(1) 证明:V 是 $R^{2\times 2}$ 的线性子空间.

(2) 证明:$S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ 构成 V 的一组基.

(3) 求基 S 到基 $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ 的过渡矩阵.

(4) 求 $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 在基 S 下的坐标.

解答:

(1) 只需证明 V 关于加法, 数乘封闭.

对 $\forall A, B \in V$, 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$, 则 $A+B = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ b+y & c+z \end{pmatrix} \in V$, 即 V 关于加法封闭.

对 $\forall A \in V, \forall \lambda \in R$, 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, 则 $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda c \end{pmatrix} \in V$, 即 V 关于数乘封闭.

综上 V 是 $R^{2\times 2}$ 的一个线性子空间.

(2) 不难发现 $dim(V) = 3$. 所以只需要验证 $rank(S) = 3$ 即可. 假设存在 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

则有

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}$$

解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. 所以 $rank(S) = 3$. 从而 S 是 V 的一组基.

(3) 注意到如下等式成立

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

所以 S 到 $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

(4)

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

结合 (3) 即可得到

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 在基 S 下的坐标为 $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}^T$

6.(10 分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = 0$.

(1) 证明:$rank(A) \leqslant \frac{n}{2}$.

(2) 对每一个 n, 找一个方阵 A, 使得 $A^2 = 0$ 且 $rank(A) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

解答:

(1) 法一: 利用 $sylvester$ 秩不等式 (建议证明后再使用).

法二: 考察如下分块矩阵:

$$B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

对它做初等变换

$$\to \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -A^2 & A \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -A^2 & 0 \end{pmatrix}$$

由条件 $A^2=0$ 知, 我们通过初等变换将 B 化成了 $\begin{pmatrix}0 & I_n\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 所以 $rank(B)=rank(I_n)=n$.
另一方面, 我们设 $PAQ=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 其中 $r=rank(A)$. 那么又可以对 B 做初等变换如下:

$$\begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & I_n\\ 0 & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r & 0 & S_1 & S_2\\ 0 & 0 & S_3 & S_4\\ 0 & 0 & I_r & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

其中 $\begin{pmatrix}S_1 & S_2\\ S_3 & S_4\end{pmatrix}=PQ$. 继续做初等变换得到

$$\begin{pmatrix}I_r & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_4\\ 0 & 0 & I_r & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $rank(B)\geqslant 2rank(A)$. 综上,$rank(A)\leqslant \frac{n}{2}$.
(2) 分类讨论 n 的奇偶性.
. (a) $n=2k$.
令 $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. 则 $rank(J)=1$, 且 $J^2=0$.
取 $A_n=diag(J,J,\cdots,J)$ 即可, 其中共有 k 个 J.
. (b) $n=2k+1$.
取 $A_n=diag(A_{n-1},0)$ 即可.

6 2018-2019 第二学期期中

6.1 填空题

1. 求方阵的方幂 $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix}^{2019}$

解答: 注意到

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix}^{2019} = (\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix})^{2019}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix})^{2018} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} (a_1b_1 + a_2b_2)^{2018} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= (a_1b_1 + a_2b_2)^{2018} \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix}$$

2. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,$A_{ij}$ 表示 $det(A)$ 中 (i,j) 元的代数余子式, 求 $A_{11} - A_{12}$

由行列式的递推定义, 上面的式子可以化成如下形式

$$A_{11} - A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

计算可得答案为-4

3. 方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}

答案是 $\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7}\\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7}\\ -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}$

4. 设 $A\in C^{4\times 4}, rankA=3,$, 求 $A^*x=0$ 的解空间维数.

从考试的角度来说, 这里可以直接令 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 那么 $A^*=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 从而 $A^*x=0$ 的解空间维数就是 $4-rankA^*=3$

从正经证明的角度, 下面提供两种方法:

法一: 利用标准型将问题化归到上面的形式

设 $A=P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Q$, 其中 P,Q 可逆. 利用 $(AB)^*=B^*A^*$ 可得 $A^*=Q^*\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^*P^*$, 所以 $A^*x=0$ 就等价于 $Q^*\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^*P^*x=0$, 令 $y=P^*x$, 由 P,Q 可逆知原方程等价于 $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}y=0$, 从而解空间维数是 3

法二: 利用秩不等式证明一个推论

$Claim:$

$(1) rankA=n$ 时,$rankA^*=n$

(2)$rankA = n - 1$ 时,$rankA^* = 1$
(3)$rankA < n - 1$ 时,$rankA^* = 0$
(1) 是显然的, 可以利用等式 $AA^* = det(A)I$ 给出 $(A^*)^{-1}$
(2): 首先证明 $rankA^* \geqslant 1$, 假设 $rankA^* = 0$, 那么 A 的所有 $n-1$ 阶子式都为 0, 这与 $rankA = n - 1$ 矛盾, 所以 $rankA^* \geqslant 1$. 再证明 $rankA^* \leqslant 1$. 由 $Sylvester$ 秩不等式,$rank(AB) + n \geqslant rank(A) + rank(B)$. 因为 $rank(A) < n$, 所以 $det(A) = 0$, 从而 $AA^* = 0$, 所以 $n \geqslant rank(A) + rank(A^*)$, 移项就得到了 $rankA^* \leqslant 1$. 综上,$rankA^* = 1$ (3) 也是显然的, 由秩的子式定义就可以知道 A 的所有 $n-1$ 阶子式为 0, 从而 $A^* = 0$
利用上面的结论, 在本题中,$rank(A^*) = 1$, 从而解空间维数是 3

5. 若向量组的秩 $rank(a_1, a_2, a_3, a_4) = 4$，求 $rank(a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_1)$.

从考试的角度来说, 可以分别令 $a_i = e_i$ 是 R^4 中的标准单位向量, 然后进行考虑. 下面给出严谨证明.

注意到 $(a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_1) = (a_1, a_2, a_3, a_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 因为 (a_1, a_2, a_3, a_4) 是他们生成的空间的基, 且 $(a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_1)$ 就在这个空间中, 所以 $rank(a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_1) = rank\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
通过初等变换即可得到他们的秩是 3

6.2 判断题

1. 设 A, B 均为行满秩的 $m \times n$ 的非零矩阵,$m < n$, 则 $det(AB^T) \neq 0$

这个命题是错误的. 考虑反例如下:$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB^T = 0$.

2. 设非零矩阵 A, B 满足 $AB = 0$, 则 A 的行向量线性相关.

这个结论也是错误的. 考虑反例如下:$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 则 $AB = 0$, 但 A 的行向量只有一个, 且非零, 所以线性无关.

3. 设 $A \in R^{5\times 3}$, 若 $Ax = 0$ 有非零解, 则对任意非零的列向量 $b \in R^5$,$Ax = b$ 存在无穷多解.

这个结论是错误的. 考虑 $A=0,b$ 的每个元素都是 1. 则 $Ax=b$ 无解.

4. 对于任意的 n 阶实方阵 A,B, 不存在非零的实数 μ, 使得 $AB-BA=\mu I_n$.

正确的.

假设存在这样的 μ, 对 $AB-BA=\mu I_n$ 等式两边同时取迹, 就可以得到

$$tr(AB-BA)=tr(\mu I_n)=n\mu\neq 0$$

但是我们知道

$$tr(AB-BA)=tr(AB)-tr(BA)=tr(AB)-tr(AB)=0$$

由此就导出了矛盾.

6.3 解答题

3.(15 分) 考虑方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$, 问 λ 为何值时, 该方程组有唯一解? 无解? 有无穷多解? 在有解的情况下给出通解.

直接对原方程的增广矩阵进行初等变换.

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & a & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3\lambda-3\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{pmatrix}$$

(a) 若 $\lambda=1$, 则通过上述初等变换得到的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

所以原方程组有无穷多组解

(b) 若 $\lambda\neq 1$, 继续对矩阵进行初等变换

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+\lambda & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2+\lambda & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix}$$

不难发现,$\lambda = -2$ 时, 方程的第一行就是 $0 = -3$, 矛盾, 此时方程组无解. 当 $\lambda \neq -2$ 时, 直接解方程组得到 $x_1 = \frac{-3}{2+\lambda}$, $x_2 = \frac{-3}{2+\lambda}$, $x_3 = \frac{\lambda-1}{\lambda+2}$, 此时方程组有唯一解.

4.(15 分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-n \end{vmatrix}$.

记该行列式为 Δ, 对行列式进行加边得到

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1-1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2-2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3-3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\Sigma_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \cdot n! \cdot (1-\Sigma_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k})$$

5.(15 分) 设 $F_3[x]$ 是数域 F 上不超过 3 的多项式的全体, 在多项式加法与数乘下构成了线性空间.

(1) 证明 $S=\{1,1+x,(1+x)^2,(1+x)^3\}$ 构成了该线性空间的一组基.

(2) 求基 S 到自然基 $\{a,x,x^2,x^3\}$ 的过渡矩阵 T.

(3) 求多项式 $1+x+x^2+x^3$ 在基 S 下的坐标.

解答:

(1) 注意到 $dim(F_3[x]) = 4, \{1,x,x^2,x^3\}$ 是一组基. 因此这里只需要证明 $rank\{1,1+x,(1+x)^2,(1+x)^3\} = 4$ 即可得到 S 是 $F_3[x]$ 的一组基.

假设存在 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, 使得 $1\cdot\lambda_1+\lambda_2(1+x)+\lambda_3(1+x)^2+\lambda_4(1+x)^3=0$, 化简得到 $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)+(\lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4)x+(\lambda_3+3\lambda_4)x^2+\lambda_4x^3=0$. 由 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 是一组基, 得到如下方程组:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0 \\ \lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4=0 \\ \lambda_3+3\lambda_4=0 \\ \lambda_4=0 \end{cases}$$

容易解得该方程组的解为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$. 所以 $rank\{1,1+x,(1+x)^2,(1+x)^3\}=4$. 则 S 是该线性空间的一组基.

(2) 注意到以下等式成立:

$$1=1$$

$$x=(1+x)-1$$

$$x^2=((1+x)-1)^2=(1+x)^2-2(1+x)+1$$

$$x^3=((1+x)-1)^3=(1+x)^3-3(1+x)^2+3(1+x)-1$$

所以有

$$\begin{pmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1+x & (1+x)^2 & (1+x)^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

得到过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(3) 结合 (2) 得到

$$1+x+x^2+x^3=$$
$$1+(1+x)-1+(1+x)^2-2(1+x)+1+(1+x)^3-3(1+x)^2+3(1+x)-1$$
$$=0+2(1+x)-2(1+x)^2+(1+x)^3$$

则它的坐标是 $\begin{pmatrix}0 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix}^T$.

6.(10 分) 设 A 是 n 阶方阵,I_n 是 n 阶单位阵.

(1) 若 $A^2=A$, 证明:$rank(A)+rank(I_n-A)=n$.

(2) 反之, 若 $rank(A)+rank(I_n-A)=n$, 证明:$A^2=A$.

解答:

(1) 注意到 $rank(A)+rank(I-A)=rank\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & I_n-A\end{pmatrix}$. 下面对右侧的分块矩阵进行初等变换, 我们希望得到一个 n 阶的单位阵.

$$\to\begin{pmatrix}A & I_n-A\\ 0 & I_n-A\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}I_n & I_n-A\\ I_n-A & I_n-A\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}I_n & I_n-A\\ 0 & (I_n-A)-(I_n-A)^2\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & (I_n - A) - (I_n - A)^2 \end{pmatrix}$$

而由条件,$(I_n - A) - (I_n - A)^2 = 0$. 所以得到 $rank(A) + rank(I_n - A) = n$.
(2) 同 (1) 中初等变换, 再次将分块矩阵变换为 $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & (I_n - A) - (I_n - A)^2 \end{pmatrix}$. 这个初等变换过程中并没有任何条件限制. 由此我们可以得到 $rank(A) + rank(I - A) \geqslant n$. 等号成立当且仅当 $(I_n - A) - (I_n - A)^2 = 0$, 即 $A = A^2$.

7 2018-2019 第一学期期中

7.1 填空题

1. 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第二列加到第一列得到矩阵 B, 再交换 B 的第二行与第三行得到矩阵 C,$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 C 与 A 的关系为 (写出矩阵等式)

解答:

本题考察初等方阵,$C = P_1 A P_2$.

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3 维列向量, 记矩阵 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 & \alpha$
若 $|A| = 1$, 则 $|B| =$

解答:

主要运用到行列式的多重线性性. 与高斯消元类似.

$$\begin{aligned} det(B) = det & \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 & \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= det \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_2 + 3\alpha_3 & 2\alpha_2 + 8\alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= det \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_2 + 3\alpha_3 & 2\alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= det \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 & 2\alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 2\alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= 2det(A) = 2 \end{aligned}$$

3. 设矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆, 则其逆矩阵为

解答:

注意到 $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ 形式的分块矩阵的逆为 $\begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, 所以这里的逆矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{e} \\ \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} & 0 \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & 0 \end{pmatrix}$$

4. 设 $A, B \in R^{2\times 2}$, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

解答:

注意到这里 A, B 均为偶数阶方阵, 所以分块矩阵的行列式就是 $det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = det(A)det(B) = 6$. 所以原分块矩阵的伴随矩阵就是

$$\begin{pmatrix} 0 & det(A)B^* \\ det(B)A^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$$

5. 从 R^2 的基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为

解答:

$$\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2$$

$$\beta_2 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2$$

所以过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

6. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}^T$, 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的的向量空间的维数为 2, 则 $a =$

解答:

向量组生成的子空间维数为 2 等价于以向量组为行向量组的矩阵的秩是 2, 对这个矩阵做初等变换

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\1&1&0&2\\2&1&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&-1&1&2\\0&-3&3&a\end{pmatrix}$$

因为原矩阵的秩是 2, 所以经过一步初等变换后后两行构成的矩阵的秩是 1, 所以后两行线性相关, 因此 $a=2\times3=6$.

7.2 判断题

1. 设矩阵 $A,B,C\in R^{n\times n}$, 若 $AB=C$ 且 B 可逆, 则 C 的行向量与矩阵 A 的行向量等价.

解答:

错误的.

考虑 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $C=AB=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. 易见,$A$ 的行向量组与 C 的行向量组不可互相线性表示, 所以不等价.

2. 若线性方程组有唯一解则可用 $Cramer$ 法则求解.

解答:

错误的.

$Cramer$ 法则只适用于系数矩阵是方阵的情况. 考虑系数矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}$ 即可.

3.R^n 中向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 生成的子空间维数比 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 生成的子空间维数小, 则 $s\leqslant t$.

解答:

错误的.

考虑 $\alpha_1=\alpha_2=0$,$\beta_1=1$.α_1,α_2 生成的是 0 维子空间, 而 β_1 生成的是 1 维子空间.

4.V 上所有 n 阶奇异方阵的全体, 则 V 可构成线性空间.

解答:

错误的.

考虑 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, 则 $A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 非奇异.

7.3 解答题

3. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&3\\1&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的行列式和逆矩阵.

解答:

将原矩阵与单位阵一起做初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2&1&0&0&0\\0&1&2&3&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&2&1&0&0&0\\0&1&2&3&0&1&0&0\\0&1&-1&-2&-1&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&2&1&0&0&0\\0&1&2&3&0&1&0&0\\0&0&-3&-5&-1&-1&1&0\\0&0&-2&-3&0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&2&1&0&0&0\\0&1&2&3&0&1&0&0\\0&0&-3&-5&-1&-1&1&0\\0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}$$

由于上面对 A 只是将 A 的某些行加到另一行, 所以 A 的行列式不变, 所以 A 的行列式是 -1. 继续做初等行变换得到

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -6 & 4 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 9 & -6 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -6 & 4 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(1) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3.

(2) 对 (1) 中的任意向量 ξ_2, ξ_3, 证明:ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

解答:

(1)$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. 解对应的线性方程组就可以得到

$$\xi_2 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \xi_3 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) 假设存在常数使得

$$\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3 = 0 \ \ (*)$$

同时左乘 A^2, 结合 ξ_2, ξ_3 的定义得到

$$\lambda_1 A^2\xi_1 + bA\xi_1 + c\xi_1 = 0$$

而 $A\xi_1 = A^2\xi_1 = 0$, 所以就得到了 $c = 0$, 再对 $*$ 同时左乘 A 得到 $b = 0$, 最后通过 $*$ 得到 $a = 0$. 从而 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

5. 设 $A \in R^{4\times 3}$,η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的三个线性无关解, 求 $Ax = \beta$ 的通解.

解答:

先考察一下 $rank(A)$, 设方程 $Ax = 0$ 的解空间为 V,$dim(V) = 3 - rank(A)$. 则由 $Ax = \beta$ 是非齐次方程可以知道它至多有 $dim(V) + 1 = 4 - rank(A)$ 个线性无关的解. 从而 $rank(A) \leqslant 1$. 而若 $rank(A) = 0$, 则 $Ax = \beta$ 一定是齐次方程, 否则无解. 所以 $rank(A) = 1$. 从而 $dim(V) = 2$. 又注意到 $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$ 是方程 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解, 所以 $V = span\{\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1\}$. 则方程 $Ax = \beta$ 的通解可以表示为

$$x = \eta_1 + t_1(\eta_2 - \eta_1) + t_2(\eta_3 - \eta_1)$$

6.$A = P^{-1}diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)P$, 其中 P, A 都是 R 上 n 阶方阵,$\{\lambda_i\}$ 两两不等.$V = \{B \in R^{n\times n} | AB = BA\}$.

(1) 证明:V 构成 R 上线性空间.

(2) 求 V 的维数与基.

解答:

(1) 由于 V 是 $R^{n\times n}$ 的一个子集, 所以只要验证 V 是 $R^{n\times n}$ 即可, 即验证 V 关于加法封闭, 关于数乘封闭.

对任意的 $B_1, B_2 \in V$, 有

$$A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2=B_1A+B_2A=(B_1+B_2)A$$

即 $B_1+B_2\in V$.
对任意的 $B\in V,\lambda\in R$, 有

$$A(\lambda B)=\lambda AB=\lambda BA=(\lambda B)A$$

即 V 关于 R 中数乘封闭. 从而 V 是 $R^{n\times n}$ 的一个线性子空间, 从而是线性空间.
(2) 记 $\tilde{B}=PBP^{-1}$, 则由 $AB=BA$ 可知

$$P^{-1}diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)PP^{-1}\tilde{B}P=P^{-1}\tilde{B}PP^{-1}diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)P$$

即

$$\tilde{B}diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\tilde{B}$$

分别考察两边的第 (i,j) 个元素得到

$$\lambda_j\tilde{b_{ij}}=\lambda_i\tilde{b_{ji}}$$

由于 $\lambda_i\neq\lambda_j,i\neq j$, 所以 λ_i 中至多有一个为 0. 所以 b_{ij} 一定可以表示为 b_{ji} 的常数倍. 于是 $\tilde{B}$ 的全体构成了一个 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维的线性空间 (如果 λ_i 全不为 0 的话则 $\tilde{B}$ 完全由对角元及上半部分确定, 存在 $\lambda_i=0$ 的话只需要对应的换到下半部分就可以了). 则 $B=P^{-1}\tilde{B}P$ 的全体构成了 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维的线性空间. 如果 λ_i 全不为 0, 则可取出一组基为 $P^{-1}E_{ij}P,i\leqslant j$. 如果 $\lambda_t=0$, 则可取出一组基为 $P^{-1}E_{ij}P,i\leqslant j,i\neq t$ 与 $P^{-1}E_{it}P,i\geqslant t$.

8 2017-2018 第二学期期中

8.1 填空题

1.$\alpha_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & -1\end{pmatrix}^T,\alpha_2=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix}^T,\alpha_3=\begin{pmatrix}4 & 2 & 6 & -2\end{pmatrix}^T,\alpha_4=\begin{pmatrix}4 & -3 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$, 则 $rank(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,)=$

解答:

做初等变换即可. 答案是 2.

$$2.A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}, \text{则 } det(AB)=$$

解答:

因为 $rank(A)\leqslant 2, rank(B)\leqslant 2$, 所以

$$rank(AB)\leqslant min\{rank(A),rank(B)\}\leqslant 2$$

所以 $det(AB)=0$.

$$3.A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 5 & 3 & -2 & 2\end{pmatrix}, \text{第四行元素的代数余子式的和为}$$

解答:

由行列式的展开定义, 答案等于

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

计算即得答案是 336.

4. 若 A^* 是 A 的伴随矩阵,$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A

解答:

因为 $A = det(A)(A^*)^{-1}$, 所以只要分别计算 $det(A)$ 与 $(A^*)^{-1}$ 即可.

$$det(A) = (det(A^*))^{\frac{1}{3}} = -2$$

$$(A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & c \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} b & c & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \end{pmatrix}$ 线性无关, 则 a, b, c 满足

解答:

三个向量线性无关等价于他们排列而成的方阵可逆, 等价于他们排列而成的方阵的行列式为 0.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ b & c & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = 2abc$$

所以只需要 a, b, c 全不为 0 即可.

8.2 判断题

1.$A \in R^{3\times5}, rank(A) = 3$, 则 $\exists b \in R^3$, 使得 $Ax = b$ 只有唯一解.

解答:

错误的.

考虑 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 即可.

2. 如果 $A, B \in R^{m\times n}, tr((A-B)(A^T - B^T)) = 0$, 则 $A = B$.

解答:

正确的

注意到 $tr((A-B)(A^T-B^T))$ 是 $A-B$ 所有元素的平方的和, 所以 $tr((A-B)(A^T-B^T)) = 0$ 等价于 $A-B=0$ 等于 $A=B$.

3. 设向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关,$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r$, 且 $\lambda_i \neq 0, i = 1, \cdots r$, 则 $\alpha_1, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

解答:

正确的

注意到基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 到向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_r$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 是一个可逆矩阵. 所以两个向量组的秩相同, 从而两个向量组都线性无关.

4.$A \in R^{m\times n}, B \in R^{n\times m}$, $det(AB) = det(BA)$.

解答:

错误的. 反例为本卷填空第二题.

8.3 解答题

3. 已知

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ bx_1 - x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = 1 - c \end{cases}$$

同解, 求 a, b, c 的值.

解答:

解第一个方程组得到方程组的解为

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

直接代入到第二个方程组整理得到

$$\begin{cases} (a-2)t = 4a - 8 \\ (b-4)t = 2b - 8 \\ 0 = 6 - c \end{cases}$$

于是得到 $a = 2, b = 4, c = 6$.

4.n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$, 求 $det(A)$ 及 A^{-1}.

解答:

本题采用归纳法, 即 n 阶方阵 A 的

5.$R^{2\times 2}$ 为实数域上所有 2×2 阶方阵组成的几何, 按照矩阵的加法与数乘构成线性空间.

(1) 证明:$S=\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\}$. 构成 $R^{2\times 2}$ 的一组基

(2) 求基 S 到自然基 E_{ij} 的过渡矩阵 T.

(3) 求 $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 在基 S 下的坐标.

解答:

(1) 考察自然基 E_{ij} 到 S 的过渡矩阵为 $M=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&1&1&-1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}$. 对该矩阵做初等变换得到

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&1&1&-1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&2&0\\0&0&2&2\\0&2&0&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&2&0\\0&0&2&2\\0&0&-2&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&2&0\\0&0&2&2\\0&0&0&4\end{pmatrix}$$

所以过渡矩阵 M 可逆, 从而 S 是一组基.

(2) 继续按照上面的步骤将 M 与单位矩阵同时进行初等变换可以得到

$$T=M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac14&\frac14&\frac14&\frac14\\-\frac14&\frac14&-\frac14&\frac14\\-\frac14&\frac14&\frac14&-\frac14\\-\frac14&-\frac14&\frac14&\frac14\end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}S_1 & S_2 & S_3 & S_4\end{pmatrix} T \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

所以原矩阵在 S 下的坐标就是

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$$

6.$A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$, 证明:$n+rank(I_m-AB) = m+rank(I_n-BA)$.

解答:

注意到等式左右分别是下列两个矩阵的秩

$$\begin{pmatrix}I_n & 0\\0 & I_m - AB\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}I_n - BA & 0\\0 & I_m\end{pmatrix}$$

只需要说明两个矩阵相抵即可.

$$\begin{pmatrix}I_n & 0\\0 & I_m - AB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & B\\0 & I_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_n & B\\0 & I_m - AB\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}I_n & 0\\A & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & 0\\0 & I_m - AB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & B\\0 & I_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_n & B\\A & I_m\end{pmatrix}$$

下面再对右侧矩阵做初等变换, 将其变换到 $\begin{pmatrix}I_n & B\\A & I_m\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}I_n - BA & 0\\0 & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & 0\\A & I_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_n - BA & 0\\A & I_m\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}I_n & B\\0 & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n - BA & 0\\0 & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & 0\\A & I_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_n - BA & B\\A & I_m\end{pmatrix}$$

综上, 左右两个矩阵相抵, 从而秩相同, 从而原等式成立.

9 2016-2017 第二学期期中

9.1 填空题

1.$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix}4 & 4 & 0\end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix}2 & 5 & 3\end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\end{pmatrix}$,
则
$rank\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix} =$

解答:
只需考察将四个向量排列成的矩阵的秩即可. 答案是 2.

2.$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & -1\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$, 求 A^{10}.

解答:
可以发现, 这里 A 的行向量是线性相关的, 秩为 1, 所以我们一定可以把他分解为两个向量的乘积.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & -1\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

这样的话, 原问题就转化成了一个我们熟悉的问题了.

$$A^{10} = (\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix})^{10} = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}(\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix})^9\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix} = A$$

3. 设 A 是 n 阶方阵,$det(A) = 5$,A^* 是 A 的伴随方阵, 则 $det(A^*) =$

解答:
$det(A^*) = (det(A))^{n-1} = 5^{n-1}$.

4. 设 $A = \begin{pmatrix}1 & 5 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 5 & 2 & 3\end{pmatrix}$,$A_{ij}$ 是代数余子式, 则 $A_{14}-3A_{24}+2A_{34}-$

$A_{44} =$

解答:
根据行列式的展开定义, 这里的答案就等于下面的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

计算即得答案是 6.

5. 若向量 $\beta = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ 不能由向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 3 \end{pmatrix}$ 线性表示, 则 $\lambda =$

解答:
由题, 三个向量一定线性相关, 否则他们构成 R^3 上的一组基. 那么把三个向量排列成的矩阵一定不可逆, 从而行列式为 0. 计算可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 3 \end{vmatrix} = -2 - 3\lambda$$

所以 $\lambda = -\frac{2}{3}$.

6. 设分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, 其中 B, C 是 n 阶可逆方阵,0 为零方阵, 则 $(A^T)^{-1} =$

解答:

$$(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C^T \\ B^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (B^T)^{-1} \\ (C^T)^{-1} & \end{pmatrix}$$

9.2 判断题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&5&-2\\5&11&-4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&-2\\5&0&4\\3&0&2\end{pmatrix}$, 则 A,B 不相抵.

解答:

错误的

计算即得两个矩阵的秩都是 2, 从而相抵.

2. 设数组空间 F^n 中的向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关,$A\in F^{m\times l}$,$\begin{pmatrix}\beta_1&\cdots&\beta_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\cdots&\alpha_m\end{pmatrix}A$, 则向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 也线性相关.

解答:

错误的.

考虑 $n=1$,$\alpha_1=1$, 其余为 0,A 是第一个元素为 1, 其余为 0 的矩阵, 则 $\beta_1=1$ 线性无关.

3.A,B 是同阶实方阵, 则 $rank(AB)=rank(BA)$.

解答:

错误的.

构造反例可以参考如下思路. 我们不希望这个矩阵太复杂, 所以从二阶方阵入手. 首先, 这里 A,B 中有可逆方阵的时候, 原结论一定成立, 因为左乘或右乘可逆阵不改变矩阵的秩. 其次,A,B 中有零矩阵的时候结论显然成立. 所以在构造反例时, 我们必须让 A,B 都是秩为 1 的矩阵. 而我们知道秩为 1 的矩阵一定可以分解成列向量与行向量的乘积, 所以可以从构造向量的角度入手. 再考虑一下 AB,BA 秩的情况. 两个不可逆方阵一定不可能乘出一个可逆方阵, 所以他们的秩只可能是 0 或 1. 所以我们希望 $rank(AB)=0,rank(BA)=1$. 设 $A=x\cdot y^T,B=u\cdot v^T$. 那么我们就可以让 $y^T\cdot u=0$, 选定 y,u 后再构造其余的两个向量让 $BA\neq 0$. 这里我选取的是 $y=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},u=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},x=v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. 此时 $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,$BA=$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

4. 设向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r, 且任何向量 $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ 均可以被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

解答:

正确的

因为 α_i 可以被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性表示, 所以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的秩小于等于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 的秩, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 的秩大于等于 r, 所以是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

9.3 解答题:

3. 当 α 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

有解? 求出它的通解.

解答:

对方程组的增广矩阵做初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & -14 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & a-4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & -14 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

则方程组有解等价于 $a = 1$, 通解为

$$x = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -18 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. 设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $det(A), A^{-1}$.

解答:

矩阵太复杂了, 这里不写了. 简单介绍一些步骤. 从第二行开始, 依次用上一行减去当前行. 直至达到最后一行. 再从第一行开始, 用最后一行加上第一行的一半. 至此, 我们能够得到 $det(A)=2^{n-1}$. 再将前 $n-1$ 行除以 2. 就得到了 A^{-1}. 对角线上是 $\frac{1}{2}$, 上半三角的副对角线上是 $-\frac{1}{2}$,n 行 1 列的元素是 $\frac{1}{2}$.

5. 设 $P_3[x]$ 是实数域 R 上次数不超过 3 的多项式全体, 按多项式加法数乘构成线性空间.

(1) 证明:$S=\{1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3\}$ 构成了 $P_3[x]$ 上的一组基.

(2)

6. 设方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,$c=tr(A)$. 已知 $rank(A)=1$.

(1) 证明:$A^2=cA$.

(2) 计算 $det(I_n+A)$.

解答:

(1) 由 $rank(A)=1$ 知,A 中至少有一行不全为 0. 设第 i 行不全为 0, 记 $A=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$. 则存在一系列常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 使得 $r_j=\lambda_j r_i$, 其中 $\lambda_i=1$.

于是我们可以对 A 做如下分解:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} r_i$$

其中

$$r_i=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

那么 $A^2 = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}$. 注意到中间两个向量相乘就是一个数, 且恰好就是 $tr(A)$. 所以原命题得证.

(2) 先证明一个引理:$det(I_n - AB) = det(I_m - BA)$, 其中 $A \in R^{n\times m}, B \in R^{m\times n}$.

考虑如下矩阵, 并做初等变换:

$$\begin{pmatrix}I_n - AB & 0\\ 0 & I_m\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}I_n - AB & 0\\ B & I_m\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}I_m & A\\ 0 & I_n - BA\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & I_n - BA\end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得原结论. 将这个引理应用到本题, 结合 (1) 中得到的分解, 就可以知道

$$det(I_n + A) = det(I_n + \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}) =$$

$$1 + \begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = 1 + c$$

10 2016-2017 第一学期期中

10.1 填空题

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 是 3 维列向量, 且 $|A| = 1, |A - 2B| = -2$, 则 $|B| =$.

解答:

$$det(A-2B) = det \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \beta_1 - 2\beta_2 \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 - 2\beta_2 \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$= |A| - 2|B|$$

将 $|A - 2B| = -2$ 与 $|A| = 1$ 代入即得 $|B| = \frac{3}{2}$.

2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $A^T A$ 的秩为

解答:

$rank(A^T A) = rank(A) = 2$. 证明可以参考 $2019 - 2020$ 第一学期期中填空第一题.

3. 设 A 是四阶方阵,A^* 是 A 的伴随矩阵, 如果 A 的秩为 2, 则 $A^* X = 0$ 的解空间的维数为

解答:

书上有这样一个结论 (例题)

$$rank(A^*) = \begin{cases} n \ \ , rank(A) = n \\ n-1 \ \ , rank(A) = n-1 \\ 0 \ \ , rank(A) < n-1 \end{cases}$$

li 利用这个结论可以得到这里 $rank(A^*) = 0$, 所以方程组的解空间维数为 4.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 & -1 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ x & 1 & 2 & x \end{pmatrix}$,$f(x) = det(A)$, 则 $f(x)$ 中 x^3 的系数为

有两种方法, 可以考虑直接把行列式算出来, 计算量不算太大, 是可以接受的. 另一种是用行列式的完全展开定义考察可能取出 x^3 的下标排列. 以按行展开为例, 合适的列指标排列只有

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

它们的逆序数分别是

$$1, 4, 5$$

所以 x^3 的系数是

$$-1 + (-1) - 2 = -4$$

10.2 判断题

1. 若非齐次线性方程组 $Ax = b$ 对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解, 则 $Ax = b$ 有唯一解.

解答:
错误的.
考虑 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 则 $Ax = 0$ 有唯一解 $x = 0$, 但是 $Ax = b$ 无解.
Rmk.$Ax = 0$ 只有零解等价于 A 列满秩.

2. 若矩阵 A, B 满足 AB, BA 都有定义, 则 $det(AB) = det(BA)$.

解答:
错误的
考虑 $A=\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, 则 $AB=1$,$BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. 则 $det(AB)=1, det(BA)=0$.

3. 若向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 则 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性相关.

解答:
错误的
考虑 $m=s=1$,$\alpha_1=\beta_1=1$. 则 β_1 可以由 α_1 线性表示, 但是 β_1 线性无关.

4. 设 $R^{n\times n}$ 是所有 n 阶实方阵按照矩阵线性运算所构成的实数域上的线性空间,W 是所有迹等于 0 的 n 的实方阵构成的集合, 则 W 是 $R^{n\times n}$ 的子空间.

解答:
正确的.
验证子空间只需要验证对加法数乘封闭.
对任意的 $A,B\in W$, 有

$$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)=0+0=0$$

则 W 关于加法封闭. 对于任意的 $A\in W,\lambda\in R$, 有

$$tr(\lambda A)=\lambda tr(A)=\lambda\cdot 0=0$$

即 W 关于数乘封闭. 则 W 是 $R^{n\times n}$ 的子空间.

10.3 解答题

3. 设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$, 求 A 的逆矩阵.

解答:

一种方法是将 A 与单位矩阵同时进行初等行变换进行操作. 下面用一道书上的例题类似的方法来做. 参考书上第四章习题第 13 题

设方阵 A 满足 $A^k=0$,k 为正整数. 证明:$I+A$ 可逆, 并求 $(I+A)^{-1}$.

可以看到, 令 $J=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$, 则 J 与上面这题的 A 就有一样的条件, 即 $J^n=0$. 则原题等价于求 $(I+J)^{-1}$. 注意到 I 与 J 可交换, 则有等式成立:

$$(I+J)(I-J+J^2-\cdots+(-1)^{n-1}J^{n-1})=I-J^n=I$$

于是

$$(I+J)^{-1}=I-J+J^2-\cdots+(-1)^{n-1}J^{n-1}$$

4. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\2\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}$. 问当 a,b 满足什么条件时,

(1)β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 且表示方法唯一;

(2)β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示;

(3)β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 但是表示方法不唯一, 并求出所有的表示方法.

解答:

(1) 原命题等价于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 即它们排列成的矩阵秩为 3. 对矩阵做线性变换

$$\begin{pmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} a-6 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \\ -8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则原矩阵秩为 3 等价于 $a-6 \neq 0$, 即 $a \neq 6$.

(2) 记 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, 则原命题等价于 $rank(A) \neq rank \begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$. 对 $\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$ 做初等变换

$$\begin{pmatrix} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-6 & 0 & 0 & 1+b \\ 10 & 0 & 1 & -b \\ -8 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

则原命题等价于 $a = 6, b \neq -1$.

(3) 初等变换同 (2). 原命题等价于 $rank(A) = rank \begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} < 3$, 即 $a = 6, b \neq -1$.

5. 设 $R^{2\times 2}$ 是所有 2 阶实方阵对于矩阵的加法数乘构成的线性空间, 给定一组向量

$$I : A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 证明: 上述向量组构成 $R^{2\times 2}$ 中的一组基.

(2) 给定另一组 $R^{2\times 2}$ 中的一组基

$$II : B_1 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 I 到 II 的过渡矩阵.

解答:

(1) 考察自然基到 I 的过渡矩阵为 $M=\begin{pmatrix}5&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}$, 进行分块分为四个 2 阶方阵, 则 M 是一个准对角矩阵, 且对角线上的块矩阵都可逆, 所以 M 可逆. 所以 I 是 $R^{2\times 2}$ 中的一组基.

(2) 自然基到 II 的过渡矩阵为 $N=\begin{pmatrix}9&0&0&1\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, 则 I 到 II 的过渡矩阵为 $M^{-1}N=\begin{pmatrix}\frac{9}{5}&-\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\0&2&1&0\\0&0&4&-1\\0&0&-10&3\end{pmatrix}$.

6. 设 F 是数域,$A\in F^{n\times n}$, 且 $A^2=I$, 这里 I 是 n 阶单位阵.
(1) 证明:$rank(A+I)+rank(A-I)=n$.
(2) 设 $W_1=\{x\in F^n|Ax=x\}$,$W_2=\{x\in F^n|Ax=-x\}$. 证明:W_1 及 W_2 是 F^n 的子空间, 并且 W_1 的一组基与 W_2 的一组基合并就是 F^n 的一组基.

Rmk. 从后半学期的角度来看, 这里实际上就是要证明 A 可以相似对角化到矩阵 $\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$.

解答:

(1) 利用 $sylvester$ 不等式可以得到

$$rank(A+I)+rank(A-I)\leqslant n+rank((A+I)(A-I))=n$$

另一方面, 有

$$rank(A+I)+rank(A-I)\geqslant rank((A+I)-(A-I))=n$$

结合上述两个不等式就可以得到

$$rank(A+I)+rank(A-I)=n$$

(2) 首先证明 W_1 是 F^n 的子空间. 只需要验证对于加法与数乘封闭. 首先, 对于任意的 $x_1,x_2\in W_1$, 有

$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=x_1+x_2$$

所以 W_1 关于加法封闭. 对任意的 $x\in W_1,\alpha\in F$, 有

$$A(\alpha x)=\alpha A(x)=\alpha x$$

所以 W_1 关于数乘封闭. 综上 W_1 是 F^n 的子空间, 类似可得 W_2 是 F^n 的子空间. 下面来证明后半部分.
首先 $dim(W_1)=n-rank(A-I)$,$dim(W_2)=n-rank(A+I)$, 结合 (1) 可以知道

$$dim(W_1)+dim(W_2)=n$$

于是, 如果取出 W_1 的一组基 $\{\alpha_i\},i=1,\cdots,r$, 则可以取出 W_2 的一组基 $\{\beta_j\},j=i,\cdots,n-r$. 下面只需要证明 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}\}$ 线性无关. 假设它们线性相关, 则存在一系列系数 λ_i,μ_j, 使得

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_{n-r}\beta_{n-r}=0$$

等式两边同时作用 A 得到

$$\begin{gathered}A(\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_{n-r}\beta_{n-r})=\\ \lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r-\mu_1\beta_1+\cdots-\mu_{n-r}\beta_{n-r}=0\end{gathered}$$

记 $\alpha=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r$,$\beta=\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_{n-r}\beta_{n-r}$, 则上述两个方程就变成了

$$\alpha+\beta=0$$

$$\alpha-\beta=0$$

于是得到 $\alpha=\beta=0$, 再结合 α,β 的定义,$\{\alpha_i\},\{\beta_j\}$ 分别是一组基可以得到 $\lambda_i=\mu_j=0$,$i=1,\cdots,r,j=1,\cdots,n-r$. 所以 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}\}$ 线性无关, 从而它们是 F^n 中的一组基.

11 2015-2016 第二学期期中

11.1 填空题

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 则 $rankA^TA =$.

解答:
$rank(A^TA) = rank(A) = 2.$

2. 以 R^3 中三个向量 $e_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 是基, 向量 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 的坐标是

解答:
解线性方程组

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

就可以得到答案为 $\begin{pmatrix} 26 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的伴随矩阵是

解答:

$$(A^{-1})^* = det(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = \tfrac{1}{det(A)} A$$

结合 $det(A) = 2$ 得

$$(A^{-1})^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

4. 设 R^4 中向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ 线性相关, 则 $t =$

解答:

对矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 5 & -2\\ 2 & 0 & t & 0\end{pmatrix}$ 做初等变换

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 5 & -2\\ 2 & 0 & t & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 5 & -2\\ 0 & -4 & t+2 & -2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 5 & -2\\ 0 & 0 & t-3 & 0\end{pmatrix}$$

则 $t=3$.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, n\in N^*$, 则 $A^n=$

解答:

归纳即得答案为 $\begin{pmatrix}1 & n & -\frac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & -n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

11.2 判断题

1. 若非齐次方程组 $Ax=b$ 解唯一, 则对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解.

解答:

正确的.
假设 $Ax=0$ 有非零解 x_0,$Ax=b$ 有解 x_1, 则 x_1+tx_0 是 $Ax=b$ 的解.

2. 若矩阵 A,B 满足 AB,BA 都有定义, 则 $det(AB)=det(BA)$.

解答:
错误的
令 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 即可.

3. 若向量 β 不能由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 则向量组 $\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

解答:
错误的
考虑 $\beta=1,\alpha=0$ 即可.

4. 设 W 是 $R^{n\times n}$ 上所有行列式为 0 的矩阵全体, 则 W 是 $R^{n\times n}$ 的子空间.

解答:
错误的.
记 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, 则 $det(A+B)=1$, 则 W 关于加法不封闭, 从而不是子空间.

11.3 解答题

3. 已知实系数线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$$

(1) 讨论 λ 取何值时, 方程组无解、有唯一解和有无穷多组解.
(2) 当方程组有无穷多组解时, 求出通解.

解答:
对增广系数矩阵做初等变换

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3\lambda-3 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 3\lambda-3 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix}$$

$case\ 1: -\lambda^2-\lambda+2=0, 3\lambda-3\neq 0$, 即 $\lambda=-2$ 时, 此时原方程组无解.
$case\ 2: -\lambda^2-\lambda+2=3\lambda-3=0$, 即 $\lambda=1$ 时, 此时原方程组有无穷多组解.
$case\ 3: else$, 此时原方程组有唯一解.
(2) 由 (1) 可知, 方程组有无穷多组解等价于 $\lambda=1$, 同 (1) 中的初等变换可得原方程组等价于

$$x_1+x_2+x_3=-2$$

此时解为

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$
(1) 计算 A 的行列式
(2) 计算 A^{-1}.

解答:

(1) 记 $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 则 J

可逆且 $A = J + \alpha\beta$. 下面证明两个引理

$Lemma$ 1. 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$, 则

$$det(I_m - AB) = det(I_n - BA)$$

$Lemma$ 2. 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$, 则 $I_n - AB$ 可逆当且仅当 $I_m - BA$ 可逆, 且 $(I_m - AB)^{-1} = I_m + A(I_n - BA)^{-1}B$.

$Proof\ \ of\ \ Lemma\ \ 1:$
对分块矩阵 $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m - AB \end{pmatrix}$ 做初等变换得到

$$\begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m - AB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n - BA & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得 $Lemma\ \ 1$.

$Proof\ \ of\ \ Lemma\ \ 2:$
初等变换同上, 最后等式两边同时取逆即可得到 $Lemma\ \ 2$.

利用以上两个引理来对本题进行处理.

$$det(A) = det(J + \alpha\beta) = det(J)det(I_n + J^{-1}\alpha\beta)$$

注意到 $J^{-1}\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$, 再利用 $Lemma\ \ 1$ 就得到

$$det(A) = det(J)(1 + \beta J^{-1}\alpha) = n!(1 + \Sigma_{i=1}^{n}\frac{1}{i})$$

(2)

$$A^{-1} = (J + \alpha\beta)^{-1} = (I_n + J^{-1}\alpha\beta)^{-1}J^{-1}$$

利用 $Lemma$ 2 得到

$$A^{-1} = (I_n - J^{-1}\alpha\frac{1}{1+\Sigma_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}\beta)J^{-1}$$

最终 $A^{-1} = (b_{ij})_{n\times n}, b_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{1+\Sigma_{s=1}^{n}\frac{1}{s}}\frac{1}{ij}, i \neq j \\ \frac{1}{i} - \frac{1}{1+\Sigma_{s=1}^{n}\frac{1}{s}}\frac{1}{i^2}, i = j \end{cases}$

5. 设 $R^{2\times 2}$ 是所有 2 阶实方阵对于矩阵的加法数乘构成的线性空间, 给定一组向量

$$I : A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 证明: 上述向量组构成 $R^{2\times 2}$ 中的一组基.
(2) 给定另一组 $R^{2\times 2}$ 中的一组基

$$II : B_1 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 I 到 II 的过渡矩阵.

解答:

(1) 考察自然基到 I 的过渡矩阵为 $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, 进行分块分为四个 2 阶方阵, 则 M 是一个准对角矩阵, 且对角线上的块矩阵都可逆, 所以 M 可逆. 所以 I 是 $R^{2\times 2}$ 中的一组基.

(2) 自然基到 II 的过渡矩阵为 $N = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 I 到 II 的过渡矩阵为 $M^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.

6. 设 F 是数域,$A \in F^{n\times n}$, 且 $A^2 = I$, 这里 I 是 n 阶单位阵.
(1) 证明:$rank(A+I) + rank(A-I) = n$.

(2) 设 $W_1 = \{x \in F^n | Ax = x\}$,$W_2 = \{x \in F^n | Ax = -x\}$. 证明:$W_1$ 及 W_2 是 F^n 的子空间, 并且 W_1 的一组基与 W_2 的一组基合并就是 F^n 的一组基.

Rmk. 从后半学期的角度来看, 这里实际上就是要证明 A 可以相似对角化到矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解答:

(1) 利用 *sylvester* 不等式可以得到

$$rank(A+I) + rank(A-I) \leqslant n + rank((A+I)(A-I)) = n$$

另一方面, 有

$$rank(A+I) + rank(A-I) \geqslant rank((A+I)-(A-I)) = n$$

结合上述两个不等式就可以得到

$$rank(A+I) + rank(A-I) = n$$

(2) 首先证明 W_1 是 F^n 的子空间. 只需要验证对于加法与数乘封闭. 首先, 对于任意的 $x_1, x_2 \in W_1$, 有

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = x_1 + x_2$$

所以 W_1 关于加法封闭. 对任意的 $x \in W_1, \alpha \in F$, 有

$$A(\alpha x) = \alpha A(x) = \alpha x$$

所以 W_1 关于数乘封闭. 综上 W_1 是 F^n 的子空间, 类似可得 W_2 是 F^n 的子空间. 下面来证明后半部分.

首先 $dim(W_1) = n - rank(A-I)$,$dim(W_2) = n - rank(A+I)$, 结合 (1) 可以知道

$$dim(W_1) + dim(W_2) = n$$

于是, 如果取出 W_1 的一组基 $\{\alpha_i\}, i = 1, \cdots, r$, 则可以取出 W_2 的一组基 $\{\beta_j\}, j = i, \cdots, n-r$. 下面只需要证明 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{n-r}\}$ 线性无关. 假设它们线性相关, 则存在一系列系数 λ_i, μ_j, 使得

$$\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r + \mu_1\beta_1 + \cdots + \mu_{n-r}\beta_{n-r} = 0$$

等式两边同时作用 A 得到

$$A(\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_{n-r}\beta_{n-r})=$$
$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r-\mu_1\beta_1+\cdots-\mu_{n-r}\beta_{n-r}=0$$

记 $\alpha=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r$,$\beta=\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_{n-r}\beta_{n-r}$, 则上述两个方程就变成了

$$\alpha+\beta=0$$

$$\alpha-\beta=0$$

于是得到 $\alpha=\beta=0$, 再结合 α,β 的定义,$\{\alpha_i\},\{\beta_j\}$ 分别是一组基可以得到 $\lambda_i=\mu_j=0$,$i=1,\cdots,r,j=1,\cdots,n-r$. 所以 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}\}$ 线性无关, 从而它们是 F^n 中的一组基.

第二部分　期末试题及参考解答

12　2024-2025 第一学期期末

12.1　填空题

1. 考虑 R^3 中的线性变换 $\mathscr{A}\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}-x+y+2z & 2x+2y-2z & x+5y+z\end{pmatrix}$, 则 $\mathscr{A}$ 将 R^3 映射后的像的集合是 R^3 的子空间, 称为 $\mathscr{A}$ 的像空间, 记为 $Im(\mathscr{A})$. 给出 $Im(\mathscr{A})$ 的一组基

解答:

注意到 $Im(\mathscr{A})$ 中任意一个元素都可以被表示为如下三个向量的线性组合

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

所以这个向量组的极大无关组就是 $Im(\mathscr{A})$ 的一组基. 经验证, 从这三个向量中任意取两个向量都是极大无关组, 所以任取其中两个向量都可以.

2. 已知 $P^{-1}AP = diag(1,2,3)$, 其中 $P = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}$. 取 $Q = \begin{pmatrix}\alpha-\beta & \beta & \beta+\gamma\end{pmatrix}$, 则 $Q^{-1}AQ =$

解答:

由条件可以得到

$$A\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\alpha = \alpha \\ A\beta = 2\beta \\ A\gamma = 3\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(\alpha-\beta)=\alpha-2\beta=(\alpha-\beta)-\beta \\ A\beta=2\beta \\ A(\beta+\gamma)=2\beta+3\gamma=-\beta+3(\beta+\gamma) \end{cases}$$

$$A\begin{pmatrix}\alpha-\beta & \beta & \beta+\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-\beta & \beta & \beta+\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&-1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&-1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&x&-2\\-2&-2&y\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&z&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似, 则 $z=$

解答:

因为 A 与 B 相似, 所以它们拥有相同的特征值, 注意到 2 是 B 的一个二重特征值, 则 2 也是 A 的一个特征值, 代数重数至少为 2, 又因为 A 可相似对角化 (B 是对角阵), 所以 A 的特征值 2 的几何重数至少为 2, 从而有

$$rank(A-2I)\leqslant 1$$

即 $A-2I$ 的每行成比例, 所以得到

$$\begin{cases} x-2=2 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$$

再根据 $tr(A)=tr(B)$ 可以得到 $4+z=9$, 于是 $z=5$.

4. 设 A 为 3 阶方阵, 满足 $det(A+cI_3)=0, c=1,2,3$. 则对任意 $k, det(A+kI_3)=$

解答:
由题,A 的特征值是 $-1,-2,-3$, 从而 $A+kI_3$ 的特征值为 $k-1,k-2,k-3$, 于是 $det(A+kI_3)=(k-1)(k-2)(k-3)$

5. 设欧式空间 V 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 考虑 V 中的向量 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$, 则 β 的长度为

解答:

$$<\beta,\beta>=<\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3>$$

$$=<\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3>+2<\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3>-<\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3>$$

$$=<\alpha_1,\alpha_1>+2<\alpha_1,\alpha_2>+2<\alpha_2,\alpha_1>+2<\alpha_2,\alpha_2>-2<\alpha_2,\alpha_3>$$
$$-2<\alpha_3,\alpha_2>+<\alpha_3,\alpha_3>$$

$$=5$$

于是 $|\beta|=\sqrt{5}$

6. 已知实二次型 $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+tx_1x_2-x_1x_3+x_2x_3$ 正定, 则参数 t 的取值范围为

解答:
二次型对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

依次计算顺序主子式, 根据顺序主子式全大于零得到

$$\begin{cases} 1>0 \\ 2-\frac{t^2}{4}>0 \\ -\frac{1}{8}(4t^2+2t-26)>0 \end{cases}$$

解得 $\frac{-1-\sqrt{105}}{4} < t < \frac{-1+\sqrt{105}}{4}$

12.2　判断题

1. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 则 A 与它的伴随矩阵 A^* 一定相合.

解答:
错误的.
考虑 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,$A^* = 0$, 秩不相同, 从而不相合.

2. 设 V 是 n 维线性空间,$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换, 若 $\mathscr{A}$ 在 V 的任意一组基下的矩阵都相等, 则 $\mathscr{A}$ 是 V 上的数乘变换.

解答:
正确的.
设 $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵为 A, 则由条件可知对任意的可逆矩阵 P, 有 $A = PAP^{-1}$, 于是 $AP = PA$, 所以 A 是对角阵.

3. 设 A, B 是 n 阶正交矩阵, 满足 $|A| + |B| = 0$, 则 $|A + B| = 0$

解答:
正确的.

$$
\begin{aligned}
|A+B| &= |BB^T \cdot A + B \cdot A^T A| \\
&= |B||B^T + A^T||A| \\
&= -|A|^2|B + A| \\
&= -|A + B|
\end{aligned}
$$

所以得到 $|A + B| = 0$

4. 设 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix}$ 是实对称正定矩阵, 其中 A, D 是 n 阶方阵. 则有 $|M| \leqslant |A||D|$, 且等号成立当且仅当 $B = 0$

解答:

正确的

对 M 做合同变换如下, 下面用到了 A 是一个对称矩阵

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^T A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - B^T A^{-1} B \end{pmatrix}$$

因为 M 是正定的, 所以 $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - B^T A^{-1} B \end{pmatrix}$ 也是正定的, 这就要求 $A > 0, D - B^T A^{-1} B > 0$. 注意到在上述合同变换中用到的可逆矩阵 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^T A^{-1} & I \end{pmatrix}$ 的行列式是 1, 所以说有下列等式成立

$$|M| = |N| = |A||D - B^T A^{-1} B|$$

那么我们要证明的结论就等价于证明

$$|D - B^T A^{-1} B| < |D|$$

因为 $D - B^T A^{-1} B$ 是正定的, 所以 $D = (D - B^T A^{-1} B) + B^T A^{-1} B$ 也是正定的. 记 $\tilde{A} = B^T A^{-1} B$, 并将它相合到规范型, 即

$$P^T \tilde{A} P = I$$

我们要证明的结论等价于证明

$$|P^T D P - I| < |P^T D P|$$

注意到 $P^T D P - I$ 与 $P^T D P$ 仍然是正定的, 所以它们的特征值全是正的, 而 $P^T D P - I$ 的特征值是 $P^T D P$ 的特征值减一, 所以

$$|P^T D P - I| < |P^T D P|$$

成立

设 R^3 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 将

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

变换到

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \beta_2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 A.
(2) 求 R^3 中的另外一组基, 使得 $\mathscr{A}$ 在 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的矩阵为对角阵 C, 并写出 C.

解答:
(1)

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} A$$

于是

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -4 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 计算得 A 的特征值为 $6, 2, -2$, 三个特征值对应的特征向量分别是

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

四、记 V 是所有 2 阶实对称方阵构成的实线性空间. 对于 V 中任意两个矩阵, 定义

$$< A, B >= tr(AB)$$

则 $(V, < \cdot, \cdot >)$ 构成一个欧式空间

(1) 考虑 V 中向量 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 将 A_1, A_2 扩充为 V 的一组基 Γ_1.

(2) 利用 *Schmidt* 正交化, 从 Γ_1 构造 V 的一组标准正交基 Γ_2.

解答:

(1) 答案很多, 一个可行的答案是 $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2)

$$C_1 = \frac{A_1}{|A_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = A_2 - < A_2, C_1 > C_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \frac{B_2}{|B_2|} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = A_3 - < A_3, C_1 > C_1 - < A_3, C_2 > C_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \frac{B_3}{|B_3|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

综上,$\Gamma_2 = \{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\}$, 需要注意的是, 这个答案是唯一的, 至多相差正负号.

五、考虑二次曲面

$$x^2 - y^2 - 4xz - 4yz + 2y + z = 0 \ (\star)$$

(1) 通过旋转与平移变换将 $(\star)$ 化为标准形式, 写清楚变换过程与最后的标准方程, 并指出该曲面的类型.
(2) 求 (1) 中所用的旋转变换的旋转轴的方向及旋转角度.

解答:
(1) 二次曲面所有二次项对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

经计算得到 A 的特征值是 $3, -3, 0$, 它们对应的特征向量为

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

经过标准正交化得到一组标准正交基为

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

令 $P = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 考虑换元

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

这是一个旋转变换, 则 $(\star)$ 式化为

$$3\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2 + 2\bar{y} - \bar{z} = 0$$

配方得到

$$3\bar{x}^2 - 3(\bar{y} - \tfrac{1}{3})^2 - (\bar{z} - \tfrac{1}{3}) = 0 \ \ (\star\star)$$

考虑平移

$$\tilde{x} = \bar{x}, \tilde{y} = \bar{y} - \tfrac{1}{3}, \tilde{z} = \bar{z} - \tfrac{1}{3}$$

则 $(\star\star)$ 化为

$$3\tilde{x}^2 - 3\tilde{y}^2 = \tilde{z}$$

于是上述二次曲面是双曲抛物面.
(2) 经计算,(1) 中的矩阵 P 的特征值为 $1, \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i, \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}i$, 其中特征值 1 对应的特征向量为

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

则旋转轴方向为 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 旋转角度为 $arccos\frac{1}{3}$

Rmk. 要验证一个矩阵是否为旋转矩阵只需要验证两件事:
i: 这个矩阵是否为正交阵
ii: 这个矩阵的行列式是否为 1
换言之, 旋转矩阵就是行列式为 1 的正交矩阵. 特别的, 对于三阶矩阵而言, 旋转轴就是特征值 1 对应的特征向量 (三阶旋转矩阵一定有特征值 1, 更一般的, 奇数阶旋转矩阵一定有特征值 1), 除 1 之外, 三阶旋转矩阵还有另外两个共轭特征值, 它们可以写作 $cos\theta \pm sin\theta i$, 这里的 θ 就是旋转角

六、考虑实对角阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$, 其中 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$, 设 P, Q 是 n 阶正交矩阵, 且 $PA = AQ$, 证明:$P = Q$.

解答:

注意到正交矩阵的行向量组与列向量组都是 R^n 的标准正交基, 所以我们可以考虑比较 PA 与 AQ 的列向量模长或行向量模长, 以行向量模长为例, 先来比较第一行

$$\Sigma_{j=1}^n a_j^2 p_{1j}^2 = a_1^2$$

但是, 注意到我们可以对左边进行如下放缩

$$\Sigma_{j=1}^n a_j^2 p_{1j}^2 \leqslant a_1^2 \Sigma_{j=1}^n p_{1j}^2 = a_1^2$$

其中等号成立当且仅当 $p_{1j} = 0, j = 2, \cdots, n$. 于是我们就得到了 $p_{1j} = 0, j = 2, \cdots, n$, 且 $|p_{11}| = 1$, 于是 $p_{i1} = 0, i = 2, \cdots, n$. 按照这个方法继续归纳下去就可以得到 P 是一个对角阵, 同样的,Q 也是一个对角阵. 结合 $a_i > 0$ 就能得到 $P = Q$.

13 2023-2024 第二学期期末

13.1 填空题

1. 次数不超过 3 的多项式空间 $R_3[x]$ 中,$1+x+x^2+x^3$ 在基 $\{1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3\}$ 下的坐标为

解答:
记 $t=x-1$, 则原多项式等于

$$1+t+1+(t+1)^2+(t+1)^3=t^3+4t^2+6t+4$$

所以原多项式的坐标为 $\begin{pmatrix}4\\6\\4\\1\end{pmatrix}$.

2. 方阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-2)(\lambda^2+9)$. 则 $I-A$ 的行列式为

解答:
由题,A 的特征值为 $2,3i,-3i$, 则 $A-I$ 的特征值为 $1,3i-1,-3i-1$, 所以可以得到

$$det(I-A)=(-1)^3det(A-I)=-(3i-1)(-3i-1)=-10$$

3. $\begin{pmatrix}-1&1\\-4&3\end{pmatrix}^{2024}=$

解答:
这题不能相似对角化, 所以这里采用归纳法证明

$$\begin{pmatrix}-1&1\\-4&3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}-2n+1&n\\-4n&2n+1\end{pmatrix}$$

4. 已知实二次型 $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-tx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 正定, 则参数 t 的取值范围为

解答:

二次型对应的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{t}{2} & 1 \\ -\frac{t}{2} & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 原二次型正定等价于这个矩阵的顺序主子式大于 0, 即

$$2 - \frac{t^2}{4} > 0$$

$$1 - t - \frac{t^2}{2} > 0$$

于是可以得到 t 的取值范围为 $-\sqrt{3} - 1 < t < -1 + \sqrt{3}$.

5. 设三维实线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A} : V \to V$ 在给定基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的方阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1\}$ 下的方阵为

解答:

只需要将原矩阵的 1, 2 行,1, 2 列互换, 再把 2, 3 行,2, 3 列互换即可, 得到

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 设平面 R^2 上的线性变换 $\mathscr{B} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$ 将单位圆 C 变为椭圆 E, 则 E 的长半轴的长度为

解答:

线性变换将圆上一点 $\begin{pmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{pmatrix}$ 变成 $\begin{pmatrix} cos\theta + sin\theta \\ sin\theta \end{pmatrix}$, 长半轴的长度就是像点到原点的最远距离, 所以考虑像点到原点的距离平方

$$(cos\theta + sin\theta)^2 + sin\theta^2 = 1 + sin\theta^2 + 2sin\theta cos\theta = 1 + sin2\theta + \frac{1-cos2\theta}{2}$$

注意到 $sin2\theta - \frac{1}{2}cos2\theta$ 的最大值为 $\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 所以像点到原点的距离最大值为

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

所以长半轴的长度为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Rmk. 本题一个常见的错误是求出线性变换对应的矩阵, 然后求出矩阵的特征值, 将绝对值最大的那个特征值作为长半轴的长度. 这个方法错误的原因在于这里的线性变换是无法对角化的.

13.2 判断题

1. 设 A 是 n 阶上三角实方阵, 若 A 是正交方阵, 则 A 必为对角阵.

解答:
正确
因为 A 是上三角实方阵, 所以 A 的对角元就是它的特征值, 从而 A 的特征值全为实数, 又因为 A 是正交阵, 所以 A 的特征值的模长是 ±1, 所以 A 的对角元为 ±1. 考察 $AA^T = I_n$ 的对角元得到 A 的非对角元全为 0. 所以 A 为对角阵.

2. 若复矩阵 A 满足 $AA^T = 0$, 则 $A = 0$.

解答:
错误
考察矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ 即可.

3. 设 A 与 B 均为 n 阶实对称方阵, 且 A 正定. 则存在正实数 c 使得 $cA + B$ 为正定阵.

解答:
正确
A 是正定阵, 所以可以将 A 相合到单位阵, 即存在 P 可逆, 使得 $PAP^T = I_n$, 那么考虑 $P(cA + B)P^T = cI_n + PBP^T$, 它的正定性与 $cA + B$ 的正定性相同. 注意到这是个实对称方阵, 所以 $cI_n + PBP^T$ 正定等价于它的特征值全部大于 0. 记 λ_0 是 PBP^T 的绝对值最大的特征值, 取 $c = |\lambda_0| + 1$ 即可得到 $cI_n + PBP^T$ 的特征值全部大于 0. 从而 $cA + B$ 正定.

4. 设 X 与 Y 均为 R^n 的线性子空间, 若 $X\bigcup Y$ 仍是线性子空间, 则一定有 $X\subseteq Y$ 或 $Y\subseteq X$.

解答:
正确.
不妨设 $\exists x\in X, x\notin Y$,$y\in Y, y\notin X$, 则考虑 $x+y$.
若 $x+y\in X\bigcup Y$, 则 $x+y\in X$ 或 $x+y\in Y$. 不妨设 $x+y\in X$, 则一定有 $(x+y)-x\in X$, 即 $y\in X$, 矛盾.

13.3 解答题

三、设实二次型 $Q=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+ax_2x_3$ 经过某个正交变换 $X=PY$ 后得到 $by_1^2+2y_2^2-7y_3^2$.
(1) 求 a,b 的值.
(2) 求正交方阵 P.
(3) 判断二次曲面 $Q(x_1,x_2,x_3)=1$ 的类型.

解答:
(1) 二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & \frac{a}{2}\\ 2 & \frac{a}{2} & -2\end{pmatrix}$$

经过正交变换后对应的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}b & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -7\end{pmatrix}$$

则两个矩阵相似, 考察两个矩阵的迹得到

$$b-5=-3$$

从而 $b=2$. 于是得到 A 的特征值分别为 $2,2,-7$. 又由 A 可相似对角化, 得到特征值 2 的几何重数是 2. 则矩阵 $A-2I$ 的秩为 1. 结合

$$A-2I=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&\frac{a}{2}\\2&\frac{a}{2}&-4\end{pmatrix}$$

由 $2,3$ 行线性相关得到 $\frac{a}{2}=-(-4)$, 即 $a=8$.

(2) 由 (1),$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$,$A$ 的特征值分别是 $2,2,-7$. 考察方程

$$(A-2I)x=0$$

$$(A+7I)x=0$$

可以得到 A 的三个特征向量分别是

$$x_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

经过正交化之后得到

$$x_1=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}\\0\\\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\\\frac{4\sqrt{5}}{15}\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

将三个正交向量排列成矩阵 P 即可.$P=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}&-\frac{2\sqrt{5}}{15}&-\frac{1}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

Rmk. 本题答案不唯一.

(3) 题干中已经给出了标准形式, 所以是单叶双曲面.

四、设 $R_3[x]$ 是次数不超过 3 的多项式组成的线性空间, 对于任意的 $f(x),g(x)$, 定义

$$<f(x),g(x)>=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$$

(1) 证明: $<\cdot,\cdot>$ 是 $R_3[x]$ 上的内积.

(2) 将 $R_3[x]$ 中的基 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 进行 *Schmidt* 标准正交化.

(3) 设 W 为 $R_3[x]$ 由 x,x^2 生成的线性子空间. 令 $h(x)=1+x^3$, 求 $k(x)\in W$,

使得 $h(x)-k(x)$ 的长度 $|h(x)-k(x)|$ 最小, 其中 $|\cdot|$ 代表在 (1) 中定义的内积下的长度.

解答:

(1) 分别验证线性性, 对称性, 正定性即可.

(2)

$$e_1=\tfrac{1}{|1|}=1$$

$$\beta_2=\alpha_2-<\alpha_2,e_1>e_1=x$$

$$e_2=\tfrac{x}{|x|}=\sqrt{3}x$$

$$\beta_3=\alpha_3-<\alpha_3,e_1>e_1-<\alpha_3,e_2>e_2=x^2-\tfrac{1}{3}$$

$$e_3=\tfrac{\beta_3}{|\beta_3|}=\tfrac{3\sqrt{5}}{2}(x^2-\tfrac{1}{3})$$

$$\beta_4=\alpha_4-<\alpha_4,e_1>e_1-<\alpha_4,e_2>e_2-<\alpha_4,e_3>e_3=x^3-\tfrac{3}{5}x$$

$$e_4=\tfrac{\beta_4}{|\beta_4|}=\tfrac{5\sqrt{7}}{2}(x^3-\tfrac{3}{5}x)$$

(3) 从几何上来看, 要 $h(x)-k(x)$ 长度最小, 就是要 $h(x)-k(x)$ 与 W 垂直, 即与 W 中所有向量垂直, 即与 x,x^2 垂直. 结合上一问求得的标准正交基, 与 x 垂直意味着

$$h(x)-k(x)=a\tfrac{5\sqrt{7}}{2}(x^3-\tfrac{3}{5}x)+b\tfrac{3\sqrt{5}}{2}(x^2-\tfrac{1}{3})+c$$

再结合

$$x^2=\tfrac{2}{3\sqrt{5}}\tfrac{3\sqrt{5}}{2}(x^2-\tfrac{1}{3})+\tfrac{1}{3}$$

与 $h(x)-k(x)$ 做内积可得

$$\tfrac{2}{3\sqrt{5}}b+\tfrac{1}{3}c=0$$

从而 $c=-\frac{2\sqrt{5}}{5}b$. 即 $h(x)-k(x)$ 具有如下形式

$$h(x)-k(x)=a\tfrac{5\sqrt{7}}{2}(x^3-\tfrac{3}{5}x)+b\tfrac{3\sqrt{5}}{2}(x^2-\tfrac{1}{3})-\tfrac{2\sqrt{5}}{5}b$$

因为 $k(x)\in W$, 所以 $k(x)$ 本身是 x,x^2 的线性组合, 因而 $h(x)-k(x)$ 的 x^3 项系数与 $h(x)$ 相同, 则

$$a\frac{5\sqrt{7}}{2}=1 \Rightarrow a=\frac{2}{5\sqrt{7}}$$

所以就可以将 $h(x)-k(x)$ 进一步化简为

$$x^3+b\frac{3\sqrt{5}}{2}x^2-\frac{3}{5}x-\frac{9\sqrt{5}}{10}b$$

因为 $h(x)-k(x)$ 的常数项一定是 1, 所以可以解得 $b=\frac{10}{9\sqrt{5}}$, 所以这里的 $k(x)=\frac{5}{3}x^2+\frac{3}{5}x$.

Rmk. 这里的 $k(x)$ 其实就是 $h(x)$ 在 W 下的正交投影, 如果知道下面结论的话会好做很多.

Prop. 对于线性空间 V,W 是它的一个子空间,$e_1,\cdots,e_l$ 是 W 的一组标准正交基, 则对于任意 $\alpha\in V$, 存在唯一的 $\beta\in W$, 使得 $\alpha-\beta\perp W$, 即 $\alpha-\beta$ 与 W 中任意一个向量垂直, 其中

$$\beta=\Sigma_{i=1}^{l}<\alpha,e_i>e_i$$

五、考虑全体 2×2 实方阵组成的实线性空间 $R^{2\times 2}$. 令 $M=\begin{pmatrix}7&1\\2&7\end{pmatrix}$. 考虑线性变换 $\mathscr{A}:R^{2\times 2}\to R^{2\times 2}$, 使得 $\mathscr{A}(X)=MX-XM$ 对任意的 $X\in R^{2\times 2}$ 成立.
(1) 计算 $\mathscr{A}$ 在基 $\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ 下的方阵. 其中 E_{ij} 是 (i,j) 处为 1, 其他均为 0 的基本方阵.
(2) 计算 $\mathscr{A}$ 的所有特征值以及相应的特征向量.

解答:
(1)

$$\mathscr{A}(E_{11})=\begin{pmatrix}7&1\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&1\\2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\2&0\end{pmatrix}=-E_{12}+2E_{21}$$

$$\mathscr{A}(E_{12})=\begin{pmatrix}7&1\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&1\\2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix}=-2E_{11}+2E_{22}$$

$$\mathscr{A}(E_{21})=\begin{pmatrix}7&1\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&1\\2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=E_{11}-E_{22}$$

$$\mathscr{A}(E_{22})=\begin{pmatrix}7&1\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&1\\2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&0\end{pmatrix}=E_{12}-2E_{21}$$

综上得到

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}E_{11}&E_{12}&E_{21}&E_{22}\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}E_{11}&E_{12}&E_{21}&E_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&1&0\\-1&0&0&1\\2&0&0&-2\\0&2&-1&0\end{pmatrix}$$

即线性变换在标准基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&1&0\\-1&0&0&1\\2&0&0&-2\\0&2&-1&0\end{pmatrix}$$

(2) 直接计算 A 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=2\sqrt{2},\lambda_4=-2\sqrt{2}$$

对应的特征向量为

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\-2\\-\sqrt{2}\end{pmatrix},x_4=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\\2\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

所以对应到 $R^{2\times 2}$ 中 $\mathscr{A}$ 的特征向量为

$$X_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&1\\-2&-\sqrt{2}\end{pmatrix},X_4=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-1\\2&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Rmk. 最后一步极其容易被遗忘.

六、设 A,B 均为 n 阶实对称方阵, 满足 $AB=BA$.

(1) 证明: 存在非零列向量 $v\in R^n$, 使得 v 同时为 A 和 B 的特征向量.

(2) 证明: 存在 n 阶正交方阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 均为对角阵.

解答:

注意到 (1) 是 (2) 的一个简单推论. 在取出 (2) 中的 P 后任取 v 是 P 的一个列向量即可. 下面证明 (2).

因为 A 是实对称方阵, 所以存在正交矩阵 P_1, 使得 $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda$ 是对角阵. 记 $\tilde{B} = P_1^{-1}BP$, 则根据 $AB = BA$ 可以得到

$$P_1^{-1}AP_1P_1^{-1}BP_1 = P_1^{-1}ABP_1 = P_1^{-1}BAP_1 = P_1^{-1}BP_1P_1^{-1}AP_1$$

即 $\tilde{B}$ 与 Λ 可交换. 将 Λ 与 $\tilde{B}$ 记为分块形式

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_s I_{r_s} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{ss} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}$$

其中 λ_i 是 A 的互不相同的特征值. 考察 $\Lambda\tilde{B}$ 与 $\tilde{B}\Lambda$ 的第 (i,j) 个分量得到

$$\lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij}$$

由于 $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$, 所以 $B_{ij} = 0, i \neq j$. 所以 $\tilde{B}$ 是准对角阵. 注意到 $\tilde{B}$ 是实对称阵, 所以 B_{ii} 是实对称阵, 从而对每一个 B_{ii}, 均存在一个 Q_i, 使得 $Q_i^{-1}B_{ii}Q_i$ 为对角阵. 记

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_s \end{pmatrix}$$

取 $P = P_1Q$, 则 P 满足题意.

14 2021-2022 第二学期期末

14.1 填空题

1. 已知向量 α 在 R^3 的自然基下的坐标为 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, 则 α 在 R^3 的基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$,$\alpha_2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}$,$\alpha_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 下的坐标为

解答:

$$\alpha = \tfrac{3}{2}\alpha_3 + \tfrac{1}{2}\alpha_2 - \alpha_1$$

所以坐标为 $\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$

2. 若 3 阶方阵 A 的特征值分别是 $2, 4, 6$, 则 $det(I + A) =$

解答:
$I + A$ 的特征值为 A 的特征值加一, 即 $3, 5, 7$. 所以行列式就是所有特征值的乘积, 即 105.

3. 设 R^3 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $diag(1, 2, 3)$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3$ 下的矩阵为

解答:

$$\mathscr{A}(\alpha_1) = \alpha_1$$

$$\mathscr{A}(\alpha_2 - \alpha_3) = \mathscr{A}(\alpha_2) - \mathscr{A}(\alpha_3) = 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 2(\alpha_2 - \alpha_3) - \alpha_3$$

$$\mathscr{A}(\alpha_3) = 3\alpha_3$$

所以 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

4. 在 R^3 中, 基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}2&0&2\\0&3&0\\2&0&3\end{pmatrix}$, 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 按原顺序 $Schmidt$ 正交化得到的标准正交基为

解答:

$$e_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-<\alpha_2,e_1>e_1=\alpha_2$$

$$e_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha_2$$

$$\beta_3=\alpha_3-<\alpha_3,e_1>e_1-<\alpha_3,e_2>e_2=\alpha_3-\alpha_1$$

$$e_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\alpha_3-\alpha_1$$

最终得到的标准正交基为 $\{\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1,\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha_2,\alpha_3-\alpha_1\}$.

5. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&y&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似, 则 x,y 的值分别是

解答:

由于 A,B 相似, 所以两矩阵的特征值相同. 注意到 3 是 A 的特征值, 所以 3 是 B 的特征值, 从而 $y=3$. 由于相似保持迹不变, 考察 $tr(A)$ 与 $tr(B)$ 就可以得到下面的方程

$$3+x=3$$

因此 $x=0$. 综上,$x=0,y=3$.

6. 若实正交方阵 A 的每个元素都是 $\pm\frac{1}{2n}$, 其中 n 为正整数, 则 A 的阶数为

解答:
设 A 的阶数为 m. 正交矩阵的行向量组是标准正交基, 所以任意行向量的模长是 1, 因此得到方程

$$m \cdot \tfrac{1}{4n^2} = 1$$

从而得到 $m = 4n^2$.

14.2 判断题

1. 若 n 阶方阵 A_1, A_2, B_1, B_2 满足相似关系 A_1 与 B_1 相似,A_2 与 B_2 相似, 则 $A_1 + A_2$ 与 $B_1 + B_2$ 相似.

解答:
错误的.
考虑 $A_1 = B_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 此时 $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 因为他们的特征值不同, 所以不相似.

2. 若两个同阶实对称矩阵有相同的特征多项式, 则这两个矩阵相似.

解答:
正确的
因为两个矩阵有相同的特征多项式, 所以他们的特征值相同, 且重数对应相同. 又因为他们是实对称阵, 从而一定可以正交相似对角化, 所以他们相似到相同的对角阵, 从而两个矩阵相似.

3. 在 $R^{m\times n}$ 上定义 $< A, B >= tr(A^T B)$, 则 $<,>$ 是 $R^{m\times n}$ 上的一个内积.

解答:
正确的.
线性性:

$$tr((A + B)^T C) = tr(A^T C + B^T C) = tr(A^T C) + tr(B^T C)$$

正定性:
注意到 $tr(A^TA)$ 是 A 中所有元素的平方和, 由实数的平方一定大于等于 0 知

$$< A, A > \geqslant 0$$

且等号成立当且仅当 $A = 0$.
对称性:

$$tr(B^TA) = tr((A^TB)^T) = tr(A^TB)$$

4. 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 4 阶单位阵相合.

解答:
错误的.
注意到该矩阵的 1 阶顺序主子式为 0, 则它不正定, 从而不能与单位阵相合.

14.3 解答题

3. 设 R^3 上实二次型 $Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.
(1) 利用正交变换将该二次型化为标准型, 并写出对应的正交变换.
(2) 判断 $Q(x) = 1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

解答:
(1) 二次型对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

通过计算可以得到 A 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -4$$

对应的特征向量为

$$x_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

经过标准正交化之后得到一组标准正交基

$$e_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{6}\\\frac{2\sqrt{2}}{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

令 $P=\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{pmatrix}$, 则 $A=P\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&-4\end{pmatrix}P^{-1}$, 所以经过正交变换 $y=P^{-1}x$, 二次型化为标准型

$$\tilde{Q}(y)=5\tilde{y_1}^2+5\tilde{y_2}^2-4\tilde{y_3}^2$$

(2) 根据上一问得到的标准型, 二次曲面为单叶双曲面.

4. 在数域 R 上次数不超过 3 的多项式全体构成的线性空间 $R_3[x]$ 上定义内积 $<f,g>=\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.
(1) 将向量组 $1,x,x^2$ 按顺序 $Schmidt$ 正交化得到单位正交向量组
(2) 令 $W=<1,x,x^2>$. 求多项式 $p(x)\in W$ 使得 $|x^3-p(x)|$ 达到最小.

解答:

(1)

$$e_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^1 dx}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta_2=\alpha_2-<\alpha_2,e_1>e_1=x$$

$$e_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^1 x^2dx}}=\frac{\sqrt{6}x}{2}$$

$$\beta_3=\alpha_3-<\alpha_3,e_1>e_1-<\alpha_3,e_2>e_2=x^2-\frac{1}{3}$$

$$e_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)$$

(2) 一种方法是设 $p(x)=ax^2+bx+c$ 去计算 $|x^3-p(x)|$, 这种方法没有什么需要用到线代的地方, 考试的时候推荐这么做. 下面给出一个用线代解决

的方法.
从几何的角度来理解, 这里的 $x^3 - p(x)$ 实际上就是 x^3 到超平面 W 的垂线. 也就是说,$x^3 - p(x)$ 要与 W 中的任意一个向量垂直, 这等价于与 W 的一组正交基垂直. 因此我们可以设

$$x^3 - p(x) = x^3 - ax^2 - bx - c$$

依次计算它与 (1) 中标准正交基的内积可以得到三个方程如下:

$$\int_{-1}^{1}(x^3 - ax^2 - bx - c)dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - ax^3 - bx^2 - cx)dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(x^3 - ax^2 - bx - c)(3x^2 - 1)dx = 0$$

解方程的时候注意利用奇偶性对方程进行化简, 最终可以解得

$$p(x) = \tfrac{3}{5}x$$

5. 设 A 是 n 阶实正定阵, 求证:

$$det(A) \leqslant (\tfrac{tr(A)}{n})^n$$

解答:
因为 A 是正定阵, 所以 A 的特征值全部大于 0. 题目中涉及到的两个与矩阵相关的量分别是 $det(A), tr(A)$, 它们与 A 的特征值有如下关系:

$$det(A) = \Pi_{i=1}^{n}\lambda_i$$

$$tr(A) = \Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i$$

其中 $\lambda_i > 0$, 因而我们可以利用基本不等式, 就可以得到

$$\Pi_{i=1}^{n}\lambda_i \leqslant (\tfrac{\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i}{n})^n$$

这也就是题目中要证的不等式.

6. 证明任意阶复方阵可相似于上三角阵.

Rmk. 这实际上是书上的定理.

解答:

对任意 $A \in C^{n\times n}$, 考虑数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 假设命题对 $n-1$ 阶方阵成立, 下面考虑 n 的情况.

设 λ_1 是 A 的一个特征值,x_1 是对应的特征向量. 将 x_1 扩充为 C^n 的一组基 $x_1, \cdots, x_n$, 令

$$T = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

则由 $x_1, \cdots, x_n$ 是一组基可知 T 可逆. 则由 x_1 是 λ_1 对应的特征向量可以知道

$$AT = A\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & Ax_2 & \cdots & Ax_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

因此对应分块后我们就能将 A 相似到一个准上三角阵

$$A = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}T^{-1}$$

注意到其中 A_1 是一个 $n-1$ 阶方阵, 所以由归纳假设可知存在 T_1 使得 $T_1A_1T_1^{-1}$ 是上三角阵 Λ, 令 $P = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$, 则

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}P^{-1}$$

这样我们就将 A 相似到了一个上三角阵.

15 2020-2021 第一学期期末

15.1 填空题

1. 方阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值是

法一: 根据定义进行计算即可, 答案是 $2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$

法二: 首先观察可得 2 是这个矩阵的一个特征值. 然后又注意到 $tr(A) = 2$, 所以剩下两个特征值必定是相反数. 我们希望找到一个 λ, 使得 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 线性相关, 也就是 $\lambda^2 = 3$, 所以取 $\lambda = \sqrt{3}$ 即可, 又因为剩下两个特征值是相反数, 所以 $-\sqrt{3}$ 也是特征值. 于是就得到了答案.

Rmk. 本题提供的法二实际上并不比直接计算简单, 这里只是提醒一下这个结论比较重要

$$tr(A) = \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$det(A) = \Pi_{i=1}^{n} \lambda_i$$

2.3 阶实对称阵组成的集合有几个相合等价类

我们知道, 实对称阵的相合标准型是

$$\begin{pmatrix} I_t & & \\ & -I_{r-t} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

分别考虑 r, t 即可, 最终答案是 10.

3. 实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (x_i - x_j)^2$ 的正惯性指数是多少

这个二次型显然是半正定的, 所以他的正惯性指数就等于对应矩阵的秩, 假设对应矩阵是 A, 那么只需要考察方程组 $Ax = 0$ 解的情况.

注意到这个方程组的解集一定包含于 $\{x | x^T A x = 0\}$, 而这个集合恰好是 $\{x | Q(x) = 0\}$, 也就是 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 生成的子空间, 所以方程 $Ax = 0$ 的解空间至多是 1 维的, 即 $rank(A)$ 至少是 3

而因为 $\{x|Q(x)=0\}\neq\{0\}$, 所以 $rank(A)\neq 4$, 所以 $rank(A)$ 只能是 3.

所以这个二次型的正惯性指数就是 3.

4. 设 R^3 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\0\\x_3\end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 是 R^3 中的任意向量, 则 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵是?

对所有 i, 分别考虑 $x_i=0, x_j\neq 0, i\neq j$ 即可.

答案是 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

5. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧式空间 V 上的线性变换,$\mathscr{A}(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\gamma)\gamma$, 其中 γ 是 V 中给定的单位向量, 则 $\mathscr{A}$ 的 n 个特征值为

假设 λ 是 $\mathscr{A}$ 的特征值,x 是对应的特征向量, 则有

$$\mathscr{A}x=\lambda x$$

结合题目中对 $\mathscr{A}$ 的定义可以得到

$$x-2(x,\gamma)\gamma=\lambda x$$

两边同时对 γ 做内积得到

$$(x,\gamma)-2(x,\gamma)(\gamma,\gamma)=\lambda(x,\gamma)$$

移项合并得到

$$(1-2(\gamma,\gamma)-\lambda)(x,\gamma)=0$$

若 $(x,\gamma)\neq 0$, 则有

$$1-2(\gamma,\gamma)-\lambda=0$$

于是得到 $\lambda=1-2(\gamma,\gamma)$. 若 $(x,\gamma)=0$, 则有

$$x=\lambda x$$

即,$\lambda=1$. 下面再考虑两个特征值的重数.

对于特征值 $\lambda=1$, 假设 x 是对应的特征向量, 则有

$$x-2(x,\gamma)\gamma=x$$

则由 γ 是单位向量得到

$$(x,\gamma)=0$$

于是 $\lambda=1$ 的特征子空间至少是 $n-1$ 维. 而因为 1 不是唯一的特征值, 所以这个特征子空间的维数至多是 $n-1$ 维的, 因此它就是 $n-1$ 维的, 代数重数与集合重数都是 $n-1$, 这迫使特征值 $\lambda=1-2(\gamma,\gamma)$ 的代数重数与几何重数都只能是 1.

15.2 判断题

1.n 维线性空间 V 的一个线性变换在两组不同的基下的矩阵彼此相合.

错误的.

是相似. 考虑如下反例:

令 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, 则 $B=PAP^{-1}$, 即 A,B 相似, 假设存在 Q, 使得 $B=QAQ^T$, 设 $Q=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a^2+ab+b^2&ac+ad+bd\\ac+bc+bd&c^2+cd+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$$

于是可以得到线性方程组

$$\begin{cases}a^2+ab+b^2=1\\ac+ad+bd=\frac{1}{2}\\ac+bc+bd=0\\c^2+cd+d^2=1\end{cases}$$

用第二个方程减去第三个方程得到

$$ad-bc=\tfrac{1}{2}$$

这意味着 $det(Q) = \frac{1}{2}$, 结合 $B = QAQ^T$ 可以得到 $det(B) = \frac{1}{4}det(A)$, 矛盾. 所以 A, B 不相合.

2. 任何一个 n 阶实方阵都实相似于上三角阵.

错误的.
是复相似. 考虑矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 如果它实相似于上三角阵, 由于相似保持特征值不变, 所以上三角阵的对角元就是该矩阵的特征值 $i, -i$, 而因为实方阵相似过程中只会出现实数的加减乘除运算, 不会出现复数, 矛盾.

3. 每一个正交矩阵都正交相似于对角矩阵.

错误的.
反例同上.

Rmk. 正交矩阵是实方阵.

4. 设 A, B 都是 n 阶实方阵, 若 A 可逆, 则 AB 与 BA 相似.

正确的.
$BA = A^{-1}(AB)A$

5. 设 A 是 n 阶实对称方阵, 若 A 的每一个顺序主子式都是非负的, 则 A 半正定.

错误的.
考虑反例如下:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

它对应的二次型是

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - x_3^2$$

显然不是半正定的.

15.3 解答题

3(12 分). 设 R^3 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 将 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2&3&5\end{pmatrix}^T$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}0&1&2\end{pmatrix}^T$,$\alpha_3=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}^T$ 变换为 $\beta_1=\begin{pmatrix}1&2&0\end{pmatrix}^T$,$\beta_2=\begin{pmatrix}2&4&-1\end{pmatrix}^T$,$\beta_3=\begin{pmatrix}3&0&5\end{pmatrix}^T$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵.

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵.

(1) 记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}$, 则

$$\mathscr{A}(\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3\end{pmatrix}A)=B$$

$$\mathscr{A}(\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3\end{pmatrix})A=\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3\end{pmatrix}B$$

于是得到

$$\mathscr{A}(\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3\end{pmatrix}BA^{-1}$$

所以 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵是

$$E=BA^{-1}=\begin{pmatrix}3&-20&11\\0&-16&10\\5&-15&7\end{pmatrix}$$

于是可以考虑在 β_i 上的作用

$$\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\mathscr{A}(e_1,e_2,e_3)B=(e_1,e_2,e_3)EB=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)B^{-1}EB$$

于是在基 β_i 下的矩阵为 $B^{-1}EB$, 即 $\begin{pmatrix}4&9&-5\\-10&-23&15\\-7&-16&13\end{pmatrix}$

4(16 分). 设 V 是 3 维欧式空间, 由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 给出的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&10&-2\\1&-2&2\end{pmatrix}$. 由这组基进行 *schmidt* 正交化给出一组标准正交基.

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$e_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - < \alpha_2, e_1 > e_1 = \alpha_2$$

$$e_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{\sqrt{10}}{10}\alpha_2$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - < \alpha_3, e_1 > e_1 - < \alpha_3, e_2 > e_2 = \alpha_3 + \frac{\alpha_2}{5} - \alpha_1$$

$$e_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|} = -\frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_1 + \frac{\sqrt{15}}{15}\alpha_2 + \frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_3$$

5. 给定二次曲面在直角坐标系下的方程是 $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz = 1$. 将它通过正交变换化为标准方程, 并指出这个曲面的类型.

方程左侧的二次型对应的矩阵为 $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

计算可得这个矩阵的三个特征值分别是 $6, 6, -2$, 对应的正交特征向量分别是

$$x_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

取 $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, 则 $QP = P\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 则 $Q = P\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}P^T$, 于是通过正交变换

$$\tilde{x} = P^T x$$

后, 得到了对应的标准方程是

$$6x^2 + 6y^2 - 2z^2 = 1$$

所以这个是单叶双曲面

6. 设 A, B 是两个 n 阶实对称矩阵, 满足 $AB = BA$. 求证: 存在 n 阶正交方阵 P, 使得 P^TAP 与 P^TBP 都是对角矩阵.

因为 A 是实对称方阵, 所以存在正交矩阵 P_1, 使得 $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda$ 是对角阵. 记 $\tilde{B} = P_1^{-1}BP$, 则根据 $AB = BA$ 可以得到

$$P_1^{-1}AP_1P_1^{-1}BP_1 = P_1^{-1}ABP_1 = P_1^{-1}BAP_1 = P_1^{-1}BP_1P_1^{-1}AP_1$$

即 $\tilde{B}$ 与 Λ 可交换. 将 Λ 与 $\tilde{B}$ 记为分块形式

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_s I_{r_s} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{ss} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix}$$

其中 λ_i 是 A 的互不相同的特征值. 考察 $\Lambda\tilde{B}$ 与 $\tilde{B}\Lambda$ 的第 (i,j) 个分量得到

$$\lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij}$$

由于 $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$, 所以 $B_{ij} = 0, i \neq j$. 所以 $\tilde{B}$ 是准对角阵. 注意到 $\tilde{B}$ 是实对称阵, 所以 B_{ii} 是实对称阵, 从而对每一个 B_{ii}, 均存在一个 Q_i 正交, 使得 $Q_i^{-1} B_{ii} Q_i$ 为对角阵. 记

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_s \end{pmatrix}$$

取 $P = P_1 Q$, 则 P 满足题意.

16 2019-2020 第二学期期末

16.1 填空题

1. 已知实系数线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=6 \\ x_1+ax_2+2x_3=9 \\ 2x_1-x_2+3x_3=3 \end{cases}$ 有唯一解, 则 a 满足的条件是

这个方程组有唯一解的条件是系数矩阵的行列式不为 0, 计算即得

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-3a & -7 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & -1-2a & -1 \end{vmatrix} = -1(3a-2-7-14a)$$

所以这个行列式不为 0 的条件是

$$a \neq -\frac{9}{11}$$

2. 已知 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, 计算 A^3.

注意到 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 所以

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 196A = \begin{pmatrix} 196 & 392 & 588 \\ 392 & 784 & 1176 \\ 588 & 1176 & 1764 \end{pmatrix}$$

3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R^4$, 线性无关, 则线性子空间 $V = span\{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3\}$ 的维数是

作为填空题, 这里肯定取标准基试一下.

正经做法: 考虑如下矩阵的秩即可

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

这个矩阵的秩是 2, 所以子空间的维数是 2.

4. 已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$, 在另一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 x, y.

注意到这两个矩阵相似, 所以两个矩阵的迹与行列式相等. 所以有

$$1 + x = y$$

$$-1 = -y$$

所以 $y = 1, x = 0$.

5. 在 R^3 中, 基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 由这组基按原顺序进行 *schmidt* 正交化得到的标准正交基是

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$e_1 = \tfrac{\beta_1}{|\beta_1|} = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - < \alpha_2, e_1 > e_1 = \alpha_2$$

$$e_2 = \tfrac{\beta_2}{|\beta_2|} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - < \alpha_3, e_1 > e_1 - < \alpha_3, e_2 > e_2 = \alpha_3 - \alpha_1$$

$$e_3 = \tfrac{\beta_3}{|\beta_3|} = \alpha_1 + \alpha_3$$

6. 若实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2tx_2x_3$ 正定, 则参数 t 满足的条件是

二次型对应的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & 6 \end{pmatrix}$$

这个矩阵正定的条件是各阶顺序主子式大于 0, 也就是这个矩阵的行列式大于 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 0 & t-1 & 5 \end{vmatrix} = 5-(t-1)^2$$

所以原二次型正定的条件是 $5-(t-1)^2>0$, 也就是 $t \in (1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5})$.

16.2 判断题

1. 已知向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关且可以由向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表示, 则 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性无关

正确的

2. 对 $\forall a \in R$, 方阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似.

错误的.

假设 $P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 注意到左边是单位阵, 右边不是单位阵.

3. 数域 R 上 n 阶正交阵的行向量组或列向量组都构成 R^n 的一组标准正交基.

正确的.

4. 记 V 是所有 3 阶实方阵全体构成的集合, 它在记作加法和数乘下构成一个 9 维实线性空间, 那么 V 中对称方阵全体构成它的一个 6 维子空间.

正确的.

16.3 解答题

3(12 分). 设某个 4 元线性方程组的系数矩阵 A 满足 $rankA = 3$, 已知 α_1, α_2, α_3 是它的 3 个解, 其中 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}^T$,$5\alpha_2 - 2\alpha_3 =$

$\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}^T$.

(1) 证明: 这个线性方程组是非齐次的

(2) 求出这个线性方程组的通解

(1) 假设这个线性方程组是齐次的, 则由 $rankA = 3$ 知方程组解空间的维数是 1, 从而齐次方程组的解为 $x = t\alpha_0$, 所以 α_1 是解空间的一组基, 所以 $5\alpha_2 - 2\alpha_3$ 与 α_1 线性相关, 矛盾.

(2) 在 (1) 中已经证明了方程组是非齐次的, 所以通解可以表示为 $x = \alpha_0 + tx_0$. 设

$$\alpha_1 = \alpha_0 + t_1x_0$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 + t_2x_0$$

$$\alpha_3 = \alpha_0 + t_3x_0$$

由此可以得到

$$3\alpha_1 - 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = (3t_1 - 5t_2 + 2t_3)x_0 = \begin{pmatrix}1 & -6 & -11 & 12\end{pmatrix}^T$$

所以可以令

$$x_0 = \begin{pmatrix}1 & -6 & -11 & 12\end{pmatrix}^T$$

所以通解可以表示为

$$\alpha_1 + tx_0 = \begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & 4\end{pmatrix}^T + t\begin{pmatrix}1 & -6 & -11 & 12\end{pmatrix}^T$$

4.(14 分) 用初等变换法求矩阵 A 的逆与行列式, 其中 $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0\end{pmatrix}$

将第一行分别加到下面所有行, 就将这个矩阵变成了上三角阵. 所以矩阵的行列式就是对角元的乘积, 即 $n!$

5(14 分).R^3 上线性变换 $\mathscr{A}$ 把 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}2 & 3 & 5\end{pmatrix}^T$,$\alpha_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$,$\alpha_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ 分别映为 $\beta_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}^T$,$\beta_2 = \begin{pmatrix}2 & 4 & -1\end{pmatrix}^T$,$\beta_3 = \begin{pmatrix}3 & 0 & 5\end{pmatrix}^T$. 求:

(1)$\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 A.

(2)$\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵 B.

(1) 记 $M=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$,$N=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}$. 则

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)M^{-1}N$$

所以 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 $A=M^{-1}N=\begin{pmatrix}4 & 9 & -5\\ -10 & -23 & 15\\ -7 & -16 & 13\end{pmatrix}$

(2)

$$\mathscr{A}(e_1,e_2,e_3)=\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)M^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)M^{-1}NM^{-1}=(e_1,e_2,e_3)NM^{-1}$$

所以在自然基下的矩阵为 $B=NM^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -20 & 11\\ 0 & -16 & 10\\ 5 & -15 & 7\end{pmatrix}$

6.(16 分) 设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$.

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准型, 并写出相应的正交变换矩阵.

(2) 判断 $Q(x_1,x_2,x_3)=1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

(1) 该二次型对应的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

计算该矩阵的特征值, 是 $5,5,-4$, 对应的正交特征向量为

$$x_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\\ 0\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

令 $P=(x_1,x_2,x_3)$, 则

$$AP=P\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

即

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^T$$

所以经过正交变换 $\tilde{x} = P^T x$ 后，二次型就变成了标准型 $g(y_1, y_2, y_3) = 5y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2$，所以 $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$ 在三维直角坐标系里表示的曲面是单叶双曲面

17　2019-2020 第一学期期末

欢迎来到历年真题中最离谱的一张试卷

17.1　填空题

1. 设三维向量 α, β 满足 $\alpha^T\beta = 2$, 则 $\beta\alpha^T$ 的特征值为

$\beta\alpha^T$ 与 $\alpha^T\beta$ 的非零特征值相同, 而 $\alpha^T\beta = 2$ 是一个实数, 所以它的特征值就是本身. 因此 $\beta\alpha^T$ 的特征值为 $0, 2$, 代数重数分别是 $2, 1$.

2. 设 4 阶矩阵 A 与 B 相似,I 为单位阵, 若 A 的特征值为 $1, 2, 3, 4$, 则 $|B^{-1} - I| =$

因为 A 与 B 相似, 所以他们的特征值相同, 即 B 的特征值是 $1, 2, 3, 4$. 下面证明 B^{-1} 的特征值就是 B 的特征值的倒数, 因为这是一个可以普遍使用的结论, 所以下面把他写成命题的形式.

Prop. 若 A 可逆, 有非零特征值 λ, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

证明:

设 λ 对应的特征向量为 x, 则有

$$Ax = \lambda x$$

两边同时乘 A^{-1} 得到

$$x = A^{-1}Ax = \lambda A^{-1}x$$

因为这里 $\lambda \neq 0$, 那么我们就可以把它除到左侧

$$\tfrac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$$

即 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值, 且 x 是对应的特征向量.#

那么利用这个结论我们就可以知道 B^{-1} 的特征值为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$, 而 $B^{-1} - I$ 的特征值就是 B^{-1} 的特征值减 1, 所以 $B^{-1} - I$ 的特征值是 $0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}$, 从而 $B^{-1} - I$ 的行列式就是特征值的乘积, 就是 0.

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似, 求 $a + b$.

由两个矩阵相似可得两个矩阵的特征值相同, 而 -2 显然是 A 的特征值, 从而 -2 是 B 的特征值, 因此 $b = -2$. 由两矩阵相似还可以得到 $tr(A) = tr(B)$, 即 $a - 1 = b + 1$. 所以 $a = 0$. 因此 $a + b = -2$.

4. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

没啥好说的, 直接计算即可.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 且 $rank(A) = 2$, 则 $a =$

做初等变换

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3-2a & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -5a & -2 \end{pmatrix}$$

由于 $rank(A) = 2$, 所以行列式等于 0, 计算可得

$$6 + 4a - 5a = 0$$

则 $a = 6$.

Rmk. 如果是解答题的话, 严谨来说还要验证 $a = 6$ 时 $rank(A)$ 是否等于 2, 因为由行列式等于 0 还可以推出 $rank(A) = 1$. 但是因为这是填空, 解出来也只有一个解, 所以可以偷个懒

6. 设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ 满足 $A^* = A^T$, 且 $a_{11} = a_{12} = a_{13}$, 求 a_{11}.

假设 $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a$, 下面对 a 的正负性进行讨论.

(a) 若 $a = 0$, 则由 $A^* = A^T$ 可得

$$a_{11} = A_{11}, a_{12} = A_{12}, a_{13} = A_{13}$$

从而 $A_{11} = A_{12} = A_{13} = 0$. 而若 $i > 1$, 则 A_{ij} 的第一行全零, 从而 $A_{ij} = 0$. 则 A 的所有二阶代数余子式全为 0, 从而 $rank(A) < 2$. 若 $rank(A) = 1$, 则有 $rank(A^*) = 0$, 这与 $A^T = A^*$ 矛盾, 因此 $rank(A) = 0$, 所以 $a_{11} = 0$ 满

足条件
(b) 若 $a \neq 0$, 则类似 (1) 可以得到

$$A_{11} = A_{12} = A_{13} = a > 0$$

所以 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3a^2 > 0$. 由 $A^T = A^*$ 可知

$$|A| = |A^*| = |A|^2$$

所以 $|A| = 1$, 则 $3a^2 = 1$, 结合 $a > 0$ 可知 $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

17.2　判断题

$$1.A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ 与 } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 是否相似? 是否相合?}$$

不相似, 相合.
考察 A 的特征值即可. 计算可得 A 的特征值为

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$$

因此 A 与 B 不相似, 考察正负惯性指数可得 A 与 B 相合.

2. 设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵,B 是 $n \times m$ 阶矩阵,$AB = I_m$, 则 $rank(A) = rank(B)$ 是否成立.

成立
下面证明 $rank(A) = rank(B) = m$.
首先, 一定有 $m \leqslant n$, 否则若 $m > n$, 则有

$$rank(AB) \leqslant min\{rank(A), rank(B)\} < n < m$$

这与 $AB = I_m$ 矛盾. 所以 $m \leqslant n$. 这就导致了 $rank(A) \leqslant m, rank(B) \leqslant m$, 再利用一遍上面的不等式

$$m \geqslant min\{rank(A), rank(B)\} \geqslant rank(AB) = m$$

这迫使 $rank(A)=rank(B)=m$.

3.$a_{ij}=\frac{i}{j},i,j=1,\cdots,n$, 二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\Sigma_{i=1}^n(\Sigma_{j=1}^n a_{ij}x_j)^2$ 的符号差是否为 n.

不是.

注意到 $f(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0$, 所以负惯性指数一定为 0. 因此考虑符号差只需要考虑正惯性指数是否为 n, 即 f 是否正定. 下面通过证明存在 $x\neq 0$, 使得 $f(x)=0$ 来证明 f 不是正定的

考虑方程组

$$\Sigma_{j=1}^n a_{ij}x_j=0, i=1,\cdots,n$$

它对应的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

注意到由 a_{ij} 的定义,A 可以写成

$$A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

因此 $rank(A)=1$, 从而存在 $x\neq 0$, 使得 $Ax=0$. 因此 f 不是正定的, 从而它的正惯性指数不是 n, 从而符号差不是 n.

4. 设方阵 A 的每行元素之和为 1, 那么 A^5 的每行元素之和是否为 1.

是

由题可得

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

归纳即得 $A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 从而 A^k 的每行元素之和为 1.

17.3 解答题

1. 设 3 阶实对称正交方阵 A 非负定,$|A| = -1$, 且 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ 为 -1 的特征向量, 求 A.

由于 A 是实对称阵, 所以 A 的特征值全是实数. 由于 A 非负定, 所以 A 的特征值不全为负数. 由于 A 是正交阵, 所以 A 的特征值的模长为 1, 结合 A 的特征值全是实数可知 A 的特征值只能是 1 或 -1. 又由于 A 非负定, 所以 A 的特征值不全为负数. 从而 A 有一个特征值是 1. 由题可得 -1 是 A 的特征值, 下面考虑第三个特征值. 若第三个特征值是 -1, 则 $det(A) = \Pi_{i=1}^3 \lambda_i = 1$, 矛盾, 所以第三个特征值一定是 1.

我们已经求出了 A 的特征值, 下面来考虑特征向量, 我们知道实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量彼此正交, 所以属于 1 的特征向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$ 一定满足

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

这个方程组的解空间的一组基为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

而因为实对称阵一定可以相似对角化, 所以一定有 3 个线性无关的特征向量, 所以 α_1, α_2 就是特征值 1 的特征向量. 所以记

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

则有

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

计算可得 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

2. 令 $A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,$\alpha=\begin{pmatrix}3&-1&2\end{pmatrix}^T$, 求 $lim_{n\to\infty}|A^n\alpha|$.

法一:

正常按照 $B1$ 的思想, 这题的做法应该是计算 A 的相似对角化, 这样 A^n 就能够用一个统一的形式表示出来. 但是通过计算可得这个矩阵是无法相似对角化的, 特征值 1 的代数重数与几何重数不相等. 个人认为本体比较自然的一个想法是归纳. 也就是算前几项观察一下, 你可能就能够发现

$$A^n\alpha=\begin{pmatrix}2+\frac{1}{2^n}\\-\frac{1}{2^n}\\2\end{pmatrix}$$

归纳证明即可.

法二:

有位同学为我提供了另一种方法, 计算可得 A 有两个特征值,1 与 $\frac{1}{2}$.1 对应的特征向量是

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$ 对应的特征向量是

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

所以我们就能将 α 分解为特征向量的线性组合

$$\alpha=2\alpha_1+\alpha_2$$

这样也能得到

$$A^n\alpha=\begin{pmatrix}2+\frac{1}{2^n}\\-\frac{1}{2^n}\\2\end{pmatrix}$$

3. 设 T 是 n 维线性空间 V 的线性变换,$n>1$,$\alpha\in V$. 设 $T^n\alpha=0$, 但是 $T^{n-1}\alpha\neq 0$.
(a) 证明: 向量组 $\alpha,T\alpha,\cdots,T^{n-1}\alpha$ 线性无关.
(b) 证明:T 不能对角化.

(a) 假设向量组线性相关, 则存在一系列常数使得

$$\lambda_0\alpha+\cdots+\lambda_{n-1}T^{n-1}\alpha=0$$

两边同时作用 $n-1,n-2,\cdots,1$ 次即可依次得到 $\lambda_i=0$.
(b) 假设 T 可对角化. 首先, 因为 $T^{n-1}\alpha\neq 0$, 所以 $T\neq 0$, 所以 T 的特征值不全为 0(T 可对角化.) 则存在向量 x, 使得 $T^nx\neq 0$, 这里只需要取 x 是非零特征值的特征向量即可. 在 (a) 中已经证明了向量组 $\alpha,T\alpha,\cdots,T^{n-1}\alpha$ 线性无关. 结合 $dim(V)=n$ 可得这个向量组是 V 的一组基, 从而 x 可以被这组基线性表示. 即

$$x=\mu_0\alpha+\cdots+\mu_{n-1}T^{n-1}\alpha$$

于是可以得到 $Tx=0$, 矛盾. 从而 T 不可对角化.

4. 设 $K=\{c_1+c_2x+c_3cosx|c_1,c_2,c_3\in R\}$ 在通常的函数加法与数乘下构成线性空间. 定义内积

$$<f,g>=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$$

从 $1,x,cosx$ 出发, 构造 K 的一个标准正交基.

$$e_1=\frac{1}{|1|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\alpha_2=x-<x,e_1>e_1=x$$

$$e_2=\frac{x}{|x|}=\frac{\sqrt{6}x}{2\pi^{\frac{3}{2}}}$$

$$\alpha_3=cosx-<cosx,e_1>e_1-<x,e_2>e_2=cosx$$

$$e_3=\frac{cosx}{\sqrt{\pi}}$$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}10&1&2&3&3\\1&10&2&1&0\\2&2&10&3&x\\3&1&3&10&x\\3&0&x&x&10\end{pmatrix}$, 证明: 当 $|x|<3$ 时,$|A|<10^5$.

先来证明一个引理.

lemma. 设 A 的对角元全正, 且 A 是严格主对角占优的对称矩阵, 即对任意的 i, 有

$$|a_{ii}|>\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$$

则 $A>0$

先来证明 A 可逆. 假设 $|A|=0$, 则方程组 $Ax=0$ 有非零解 $w=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix}$,

记 $|w_i|=max_{j=1}^{n}|w_j|$, 考察第 i 个方程

$$a_{i1}w_1+\cdots+a_{in}w_n=0$$

注意到 $w_i\neq 0$, 则

$$-a_{ii}=a_{i1}\frac{w_1}{w_i}+\cdots+a_{i,i-1}\frac{w_i-1}{w_i}+a_{i,i+1}\frac{w_i+1}{w_i}+\cdots+a_{i,n}\frac{w_n}{w_i}$$

等式两边同时取绝对值, 由绝对值的三角不等式可得

$$|a_{ii}|\leqslant\Sigma_{k=1,k\neq i}^{n}|a_{ik}||c_i|\leqslant\Sigma_{k=1,k\neq i}^{n}|a_{ik}|$$

这与 A 的严格主对角占优性质矛盾. 因此 $|A|\neq 0$. 下面考虑 A 的特征值. 对 A 的特征多项式 $det(\lambda I-A)$, 当 $\lambda\leqslant 0$ 时

$$det(\lambda I-A)=(-1)^n det(-\lambda I+A)$$

其中 $-\lambda\geqslant 0$, 从而 $-\lambda I+A$ 是严格主对角占优矩阵. 由上面的结论可知,$-\lambda I+A$ 可逆, 从而 $det(\lambda I-A)=(-1)^n det(-\lambda I+A)\neq 0$. 于是 A 的特征值不可能小于等于 0, 而对称阵的特征值一定是实数, 所以 A 的特征值全正. 所以 A 正定.

下面来回到这道题.

注意到 A 是一个对称阵, 所以 A 的特征值都是实数. 对于这题的结论, 我们可以联想到均值不等式

$$\sqrt[5]{\Pi_{i=1}^{5}\lambda_i} \leqslant \frac{\Sigma_{i=1}^{5}\lambda_i}{5}$$

假如能够使用均值不等式 (条件是 $\lambda_i \geqslant 0$), 那么结合

$$|A| = \Pi_{i=1}^{5}\lambda_i$$

$$tr(A) = \Sigma_{i=1}^{5}\lambda_i$$

就可以得到结论. 那么问题就是均值不等式的使用条件是否成立. 注意到, 在题目条件下,A 一定是一个严格主对角占优矩阵, 可以得到 A 正定从而 A 的特征值全部大于 0. 再利用均值不等式即得

$$|A| \leqslant 10^5$$

其中等号成立当且仅当 A 有五个相同的特征值, 结合 A 是实对称阵, 可以得到 A 相似于 $10I$, 但是我们知道与 $10I$ 相似的只有它本身, 导致矛盾, 因此等号无法取到.

6. 设 t 为参数, 讨论二次曲面的类型:

$$x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3 - 10 = 0$$

左侧配方得到

$$(2x_1 + x_2)^2 - (\sqrt{3}x_1 - \tfrac{\sqrt{3}}{3}x_3)^2 + (t + \tfrac{1}{3})x_3^2 + x_3 - 10 = 0$$

下面对 t 的取值进行讨论.
case 1:$t > -\frac{1}{3}$.
此时左侧可以继续配方得到

$$(2x_1 + x_2)^2 - (\sqrt{3}x_1 - \tfrac{\sqrt{3}}{3}x_3)^2 + (\sqrt{t + \tfrac{1}{3}}x_3 + \tfrac{1}{2\sqrt{t+\frac{1}{3}}})^2 = 10 + \tfrac{1}{4(t+\frac{1}{3})}$$

则进行对应换元后可以得到这个二次型的规范型为

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 1$$

对应着的二次曲面为单叶双曲面.
case 2:$t = -\frac{1}{3}$.
此时原等式化为

$$(2x_1+x_2)^2-(\sqrt{3}x_1-\tfrac{\sqrt{3}}{3}x_3)^2+x_3-10=0$$

进行对应换元后, 这个等式就可以化为

$$\tilde{x}^2-\tilde{y}^2=\tilde{z}$$

对应的曲面是双曲抛物面.
case 3:$t<-\frac{1}{3}$.
则可以继续配方得到

$$(2x_1+x_2)^2-(\sqrt{3}x_1-\tfrac{\sqrt{3}}{3}x_3)^2-(\sqrt{-t-\tfrac{1}{3}}x_3-\tfrac{1}{2\sqrt{-t-\frac{1}{3}}})^2=10+\tfrac{1}{4(t+\frac{1}{3})}$$

此时我们还需要继续分类
case 3.1:$t<-\frac{1}{3}$ 且 $10+\frac{1}{4(t+\frac{1}{3})}>0$.
此时进行相应换元后, 原等式等价于

$$\tilde{x}^2-\tilde{y}^2-\tilde{z}^2=1$$

这对应着双叶双曲面, 此时的 t 的取值范围是 $t<-\frac{43}{120}$.
case 3.2:$t=-\frac{43}{120}$.
则进行相应换元之后原等式等价于

$$\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=\tilde{z}^2$$

这对应这个圆锥.
case 3.3:$-\frac{43}{120}<t<-\frac{1}{3}$.
进行对应换元后原等式等价于

$$\tilde{x}^2+\tilde{y}^2-\tilde{z}^2=1$$

这对应着单叶双曲面.

7. 设 K 是次数小于 3 的实系数多项式在通常的数乘及加法运算下构成的线性空间.
(a) 证明:$1,x+2,x^2+x+3$ 是 K 的一个基.
(b) 求线性变换 $Tf:=f''-f$ 在这个基下的矩阵.
(c) 求 T 的特征向量.

(a) 考虑这个向量组到自然基的过渡矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & x+2 & x^2+x+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

过渡矩阵是一个对角元非零的上三角阵, 从而可逆. 所以这个向量组是一组基.

(b)

$$T(1) = -1$$

$$T(x+2) = -(x+2)$$

$$T(x^2+x+3) = 2 - (x^2+x+3)$$

则有

$$T\begin{pmatrix}1 & x+2 & x^2+x+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x+2 & x^2+x+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

即在这组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

(c) 在 (b) 中我们已经求出了 T 在一组基下的矩阵, 所以我们可以先计算这个矩阵的特征向量. 显然这个矩阵有唯一特征值 -1. 考察方程组 $(-I-A)x = 0$ 可得特征向量为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

对应到 V 中的特征向量就是 $1, x$.

18　2018-2019 第二学期期末

18.1　填空题

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 R^3 上的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为

解答:

直接计算可得本题答案为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2. 设 R^3 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $diag(1, 2, 3)$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3$ 下的矩阵为

解答:

$$\mathscr{A}\alpha_1 = \alpha_1$$

$$\mathscr{A}(\alpha_2 - \alpha_3) = 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 2(\alpha_2 - \alpha_3) - \alpha_3$$

$$\mathscr{A}\alpha_3 = 3\alpha_3$$

则

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

所以答案是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3. 若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y

解答:
A, B 相似, 所以特征值相同, 因为 B 是对角阵, 所以 B 的特征值就是 $-1, y, 1$, 又注意到 3 是 A 的一个特征值, 所以 $y = 3$, 再考察两个矩阵的迹就可以得到 $x = 0$.

4. 若实正交矩阵 A 的每个元素都是 $\pm\frac{1}{2n}$, 其中 $n \in N^*$, 则 A 的阶数为

解答:
设 A 的阶数为 m. 因为 A 是正交阵, 所以 A 的行向量组是一组标准正交基, 所以模长为 1, 即

$$\tfrac{m}{4n^2} = 1$$

所以 $m = 4n^2$.

5. 若实二次型

$$Q(x_1, x_2, x_3) = tx_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + 2(t-1)x_1x_3$$

正定, 则参数 t 满足什么条件

解答:
二次型 Q 对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} t & \sqrt{2} & t-1 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ t-1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Q 正定等价于 A 正定, 等价于 A 的顺序主子式全正, 即

$$t > 0$$

$$2t - 2 > 0$$

$$-2t^2 + 8t - 6 > 0$$

最终解得 $1 < t < 3$.

18.2 判断题

1. 若 n 阶方阵 A_1, A_2, B_1, B_2 满足相似等价关系 $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$, 则 $A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$.

解答:
错误的.
考虑 $A_1 = A_2 = B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 即可,$A_1 + A_2$ 与 $B_1 + B_2$ 的特征值不相同, 从而不相似.

2. 若两个同阶实对称阵具有相同的特征多项式, 则这两个方阵相似.

解答:
正确的
因为两个矩阵有相同的特征多项式, 所以他们的特征值相同, 且重数对应相同. 又因为他们是实对称阵, 从而一定可以正交相似对角化, 所以他们相似到相同的对角阵, 从而两个矩阵相似.

3. 在 $R^{m\times n}$ 上定义 $< A, B >= tr(A^T B)$, 则 $<, >$ 是 $R^{m\times n}$ 上的一个内积.

解答:
正确的.
线性性由 tr 的线性性以及矩阵运算的线性性给出.
对称性:

$$< A, B >= tr(A^T B) = tr((A^T B)^T) = tr(B^T A) =< B, A >$$

正定性:
$< A, A >= tr(A^T A)$ 是 A 中所有元素的平方和, 所以有正定性.

4. 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 4 阶单位阵相合.

解答:
错误的
4 阶单位阵正定, 但是给定矩阵的 1 阶顺序主子式为 0, 从而非正定, 因此与单位矩阵不相合.

18.3 解答题

3. 给定 4 阶方阵 $A = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$, 其中 α_i 是 4 维列向量,$i = 1, 2, 3, 4$, 且
α_1, α_2 线性无关. 若 $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 = 3\alpha_3 + \alpha_4$, 且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

解答:
由给定等式

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 = 3\alpha_3 + \alpha_4$$

可得

$$\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 - 3\alpha_3 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2$$

则方程 $Ax = \beta$ 等价于方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

等价于方程

$$(x_1 + x_3 - 2x_4)\alpha_1 + (x_2 - x_3 + 3x_4 - 3)\alpha_2 = 0$$

由 α_1, α_2 线性无关, 上述方程等价于

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

所以原方程组的通解为

$$x=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

4. 设实二次型 $Q(x,y,z)=-2x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+8yz$.
(1) 利用正交变换将该二次型化为标准型, 并写出相应的正交变换矩阵.
(2) 判断 $Q(x,y,z)=-1$ 在三维直角坐标系内所表示的曲面的类型.

解答:

(1) 二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-2&2&2\\2&1&4\\2&4&1\end{pmatrix}$, 求出它的特征值为

$$\lambda_1=6,\lambda_2=-3,\lambda_3=-3$$

对应的特征向量为

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

经过正交化之后得到一组标准正交基

$$e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\0\\\frac{\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\\\frac{4\sqrt{5}}{15}\end{pmatrix}$$

令 $P=\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3\end{pmatrix}$, 则 $AP=P\begin{pmatrix}6&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$, 即

$$P^TAP=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

(2) 结合 (1), 方程的标准型为

$$6\tilde{x}^2-3\tilde{y}^2-3\tilde{z}^2=-1$$

所以是单叶双曲面.

5. 证明:n 阶全 1 方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与同阶方阵 $\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 相似.

解答:

记 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 下面来证明 A, B 都可以相似到对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

首先考察 B. 首先, 可以观察到 $n, 0$ 都是 B 的特征值 (这里并没有观察到 B 只有这两个特征值). 考察这两个特征值的几何重数. 方程

$$Bx = 0$$

的解空间的一组基为

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, x_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以特征值 0 的几何重数为 $n-1$. 方程

$$(B - nI)x = 0$$

的解空间的一组基为

$$x_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{n-1}{n} \\ \frac{n-2}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

所以特征值 n 的几何重数为 1, 结合特征值几何重数之和不超过 n 可以知道 B 没有其它特征值, 且因为 B 有 n 个线性无关的特征向量, 所以 B 可相似对角化, 结合重数可以得到 B 相似于 Λ.
再来考察 A. 类似于上面分析特征值与特征向量就可以. 首先通过上面的分析, 可以猜测 $0, n$ 是 A 的特征值, 下面来考察对应的方程组.

$$Ax = 0$$

的解空间的一组基为

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, x_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

所以 0 是 A 的特征值, 且几何重数为 $n-1$. 方程

$$(A - nI)x = 0$$

的解空间的一组基为

$$x_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以 n 是 A 的特征值, 且几何重数为 1. 因为几何重数之和不能超过 n, 所以 A 只有这两个特征值, 且考察重数可以得到 A 可以相似对角化到 Λ.
综上,A, B 都相似于 Λ, 从而 A, B 相似.

6. 设 V 是 n 维欧式空间,$\alpha_1,\cdots,\alpha_s\in V$, 对于 s 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{s\times s}$, 其中
$a_{ij}=<\alpha_i,\alpha_j>$,$<,>$ 是内积, 证明: 矩阵 A 的秩等于向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的秩.

解答:
设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的秩是 r, 不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.
先来证明 $rank(A)\geqslant r$.
将 A 分块为 $\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$, 其中 A_{11} 是 r 阶方阵. 则对任意的 $x\in R^r$

$$x^TA_{11}x=<x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r,x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r>\geqslant 0$$

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关知等号成立当且仅当 $x=0$. 所以 A_{11} 正定, 从而 $rank(A_{11})=r$, 所以 $rank(A)\geqslant rank(A_{11})=r$.
下面再来证明 $rank(A)\leqslant r$.
因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大无关组, 所以 $\forall t=r+1,\cdots,s,\alpha_t$ 可以被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表示. 设

$$\alpha_t=\lambda_{t1}\alpha_1+\cdots+\lambda_{tr}\alpha_r,t=r+1,\cdots,s$$

则

$$<\alpha_t,\alpha_i>=\lambda_{t1}<\alpha_i,\alpha_1>+\cdots+\lambda_{tr}<\alpha_i,\alpha_r>,t=r+1,\cdots,s,i=1,\cdots,s$$

即 A 的后 $s-r$ 行可以被前 r 行线性表示. 所以 $rank(A)\leqslant r$.
综上,$rank(A)=r$.

19 2018-2019 第一学期期末

19.1 填空题

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 =$

解答:

令 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则原矩阵 $A = I + B$, 且 $B^2 = I$. 则

$$A^4 = I + 4B + 6B^2 + 4B^3 + B^4 = 8I + 8B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

2. 向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$,$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 的秩等于

解答:

只需要考察对应的矩阵的秩即可.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

则原向量组的秩为 3.

3. 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有无穷多组解, 则

$\lambda =$

解答:

记系数矩阵为 A, 增广矩阵为 $C = \begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$, 则原方程组有无穷多组解等价于 $rank(A) = rank(C) < 3$. 对增广矩阵做初等变换可得

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

所以原命题等价于

$$-\lambda^2 - \lambda + 2 = 1 - \lambda = 0$$

等价于

$$\lambda = 1$$

4. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且存在可逆矩阵 P, 使得 $B = P^{-1}AP - PAP^{-1} + I$. 如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 B 的 n 个特征值, 则 $\Sigma_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i =$

解答:

特征值的和就是 B 的迹, 所以只需要计算 $tr(B)$ 即可.

$$tr(B) = tr(P^{-1}AP - PAP^{-1} + I) = tr(P^{-1}AP) - tr(PAP^{-1}) + tr(I)$$

注意到 $P^{-1}AP$ 与 PAP^{-1} 相似, 所以它们的迹相同. 因此

$$tr(B) = tr(I) = n$$

则本题答案为 n.

5. 实二次型 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 的正惯性指数为

解答:

二次型对应的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, 它的特征值是 $5,-1,-1$(如果对全 1 矩阵的特征值熟悉的话应该可以直接写出来), 所以二次型的正惯性指数为 1.

6. 设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-2tx_1x_2-2x_1x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围为

解答:

二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-t&-1\\-t&4&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$, 二次型正定等价于 A 正定, 等价于 A 的顺序主子式全正, 即

$$1>0$$

$$4-t^2>0$$

$$4-2t^2>0$$

解得答案为 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

19.2 判断题

1. 若 0 是矩阵 A 的特征值, 则 A 一定不可逆.

解答:

正确的

注意到 A 的行列式为特征值的乘积, 所以 A 的行列式为 0, 所以 A 可逆.

2. 若 f 为线性空间 V 上的一个线性变换, 且 f 在 V 的某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$, 则在 V 中存在一组基, 使得 f 在这组基下的矩阵为对角阵.

解答:
错误的.
原命题等价于存在可逆矩阵 P 将 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似到对角阵. 而 A 的特征值为 $2, 2$, 所以只能相似到 $2I$. 但是与 $2I$ 相似的只能是它本身, 所以导出了矛盾.

3. 设 $V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 | a_i \in R, i = 0, 1, 2\}$, 即次数不超过 2 的实系数多项式构成的 R 上的线性空间. 若对任意的 $f(x), g(x) \in V$, 定义 $< f(x), g(x) >= f(0)g(0)$, 则此二元运算构成 V 上的一个内积.

解答:
错误的.
考虑 $f(x) = x$, 则 $< f(x), f(x) >= 0$, 则 $<, >$ 不满足正定性.

4. 设 $2n$ 阶实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_2 \end{pmatrix}$, 其中 A_1, A_2 均为 n 阶方阵, 若 A 正定, 则 $A_1 + A_2$ 正定.

解答:
正确的.
首先, 因为 A 正定, 所以顺序主子式全正, 所以 A_1 正定. 因为 A 是实对称阵, 所以 $C = B^T$. 对 A 做合同变换可得

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^T & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 - B^T B \end{pmatrix}$$

合同变换保持正定性不变, 再次考察顺序主子式可得 $A_2 - B^T B$ 正定. 注意到正定矩阵加上半正定矩阵仍然是正定矩阵, 所以

$$A_2 = (A_2 - B^T B) + B^T B$$

仍为正定矩阵. 从而 $A_1 + A_2$ 正定.

19.3 解答题

3. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T, \alpha_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T, \alpha_3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解.

(1) 求 $Ax = 0$ 的通解.

(2) 求 $Ax = b$ 的通解.

(3) 求满足题设条件的一个非齐次线性方程组.

解答:

(1) 因为 $Ax = b$ 是有解的非齐次线性方程组, 所以 $A \neq 0$. 又因为题中给出了 $Ax = b$ 的三个线性无关解, 所以 $Ax = 0$ 的解空间至少是 2 维的. 所以 $rank(A) \leqslant 1$, 则 $rank(A) = 1$. 设 $Ax = 0$ 有两个线性无关的解为 x_1, x_2, 则 $Ax = b$ 的通解可以表示为

$$x = \alpha_1 + t_1 x_1 + t_2 x_2$$

而 $\alpha_2 - \alpha_1 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\alpha_3 - \alpha_1 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 线性无关, 所以可以令

$$x_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$x_2 = \alpha_3 - \alpha_1 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则 $Ax = 0$ 的通解为

$$x = t_1 x_1 + t_2 x_2$$

(2) 同 (1), 同解为

$$x = \alpha_1 + t_1 x_1 + t_2 x_2$$

(3)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

4. 设

$$M_1 = \{\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

$$M_2 = \{\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$$

分别是 R^3 的两组基. 设 σ 是 R^3 上的一个线性变换, 且

$$\sigma(\beta_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \sigma(\beta_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \sigma(\beta_3) = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

分别求出 σ 在 M_1, M_2 下的矩阵.

解答:

先看 M_2, 重新改写一下条件.

$$\sigma(\beta_1) = -5\beta_1 - 2\beta_2 - 2\beta_3$$

$$\sigma(\beta_2) = -\beta_2$$

$$\sigma(\beta_3) = -3\beta_1 - 5\beta_2 - 4\beta_3$$

所以 σ 在 M_2 下的矩阵为

$$T_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

记 $B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$, 则

$$\sigma \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} BT_2B^{-1}$$

所以 σ 在 M_1 下的矩阵为 $T_1 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

5. 设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 可以经过正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T = P \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^T$ 化为标准型 $y_2^2 + 2y_3^2$.

(1) 确定 a, b 的值.

(2) 求出满足题设条件的一个正交变换.

解答:

由题目条件可知 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似. 则 $0, 1, 2$ 是 A 的特征值, 依次计算 $det(A), det(A-I), det(A-2I)$ 可以得到如下三个方程:

$$-(a-b)^2 = 0$$

$$2ab = 0$$

$$(a+b)^2 = 0$$

对应可解得 $a = b = 0$.

(2) 由 (1),$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 特征值为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

对应的特征向量为

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

标准正交化后得到

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

所以可以取 $P = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_2 \end{pmatrix}^T$

6. 设 $A \in C^{n \times n}$, 且 $A^2 = 2A$. 证明:A 相似于对角阵.

解答:

设 λ 是 A 的特征值,x 是对应的特征向量, 则有

$$A^2x = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

$$A^2x = 2Ax = 2\lambda x$$

结合上面两个等式就可以得到 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 2$. 再考察对应的线性方程组

$$Ax = 0$$

$$(A - 2I)x = 0$$

记他们的解空间为 V_1, V_2, 那么只需要证明 $dim(V_1) + dim(V_2) = n$ 即可证明 A 可对角化. 由齐次线性方程组解的结构可以知道

$$dim(V_1) = n - rank(A)$$

$$dim(V_2) = n - rank(A - 2I)$$

所以只需要证明 $rank(A) + rank(A - 2I) = n$. 一方面, 由 $sylvester$ 秩不等式可以得到

$$rank(A) + rank(A - 2I) \leqslant n - rank((A)(A - 2I)) = n$$

另一方面,

$$rank(A) + rank(A - 2I) \geqslant rank(A - (A - 2I)) = n$$

结合上面两个不等式就可以得到 $rank(A) + rank(A - 2I) = n$, 命题得证.

7. 设 A 是 n 阶正定阵,$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是 R^n 中的 s 个非零向量, 且 $\alpha_i^T A\alpha_j = 0, 1 \leqslant i < j \leqslant s$. 证明:$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

解答:

假设向量组线性相关, 则存在非零的实数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 使得

$$\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_s\alpha_s = 0$$

则有

$$(\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_s\alpha_s)^T A(\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_s\alpha_s) = 0$$

但是把上面的等式左侧展开, 利用 $\alpha_i^T A\alpha_j = 0, 1 \leqslant i < j \leqslant s$ 就可以得到

$$\lambda_1^2\alpha_1^T A\alpha_1 + \cdots + \lambda_s^2\alpha_s^T A\alpha_s = 0$$

由于 $A > 0$, 所以 $\alpha_i^T A\alpha_i > 0$. 所以上面的等式左侧是一系列大于零的数的和, 不可能等于 0, 矛盾. 则原向量组线性无关.

20 2017-2018 第二学期期末

20.1 填空题

1. 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1\\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda\\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2\end{cases}$ 有无穷多解, 则 $\lambda =$

解答:

记系数矩阵为 A, 增广矩阵为 $C = \begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$, 则原方程组有无穷多组解等价于 $rank(A) = rank(C) < 3$. 对增广矩阵做初等变换可得

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 0 & 1-\lambda\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

所以原命题等价于

$$-\lambda^2 - \lambda + 2 = 1 - \lambda = 0$$

等价于

$$\lambda = 1$$

2. 若 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & t \end{pmatrix}$ 生成 R^3 的二维子空间, 则 $t =$

解答:

原命题等价于矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & t \end{pmatrix}$ 的秩为 2. 做初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & t-2 \end{pmatrix}$$

所以要求 $t-2=2$, 则 $t=4$.

3. 若方阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 的特征值为 $1,-3,-4$, 则 $det(I+A)=$

解答:
$I+A$ 的特征值为 A 的特征值加一, 即 $2,-2,-3$, 所以 $det(I+A)=\Pi_{i=1}^{3}\lambda_i=12$.

4. 设 $M_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 与 $M_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 是线性空间 V 的两组基, 且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$,$\beta_2=\alpha_2$,$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3$, 如果向量 α 在基 M_1 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 则在基 M_2 下的坐标为

解答:

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_3=\tfrac{1}{2}\beta_3+\tfrac{1}{2}\beta_1-\beta_2$$

所以 α 在 M_2 下的坐标为

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

5. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a & 0 & -1\end{pmatrix}^T$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}1 & b & 1\end{pmatrix}^T$,$\alpha_3=\begin{pmatrix}c & 1 & 2\end{pmatrix}^T$ 分别是三阶实对称矩阵 A 的三个不同特征值对应的特征向量, 如果 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$, 则 $det(B)=$

解答:
我们知道, 实对称矩阵不同特征值对应的特征向量彼此正交, 所以由三个向量两两做内积等于 0 可以列出三个方程

$$a-1=0$$

$$ac-2=0$$

$$b+c+2=0$$

解方程得到

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{cases}$$

代入到 B 计算就可以得到 $det(B) = -18$.

6. 设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2$, 若二次型正定, 求 t 的取值范围

解答:

二次型对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

二次型正定等价于矩阵正定, 等价于顺序主子式全正, 于是得到三个方程 (第三个方程可以被前两个方程替换, 这里不列出了)

$$t > 0$$

$$t^2 - 1 > 0$$

解不等式得到 $t > 1$

20.2 判断题

1. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

解答:

错误的.

下面证明 A 不可对角化. 考虑 1 对应的特征子空间, 即方程 $(A - I)x = 0$ 的解. 容易知道解空间的一组基为

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

但是 1 的代数重数是 2, 所以特征值 1 的几何重数小于代数充数, 则 A 不可对角化, 从而无法相似于 B

2. 设 $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 | a_i \in R, i = 0, 1, 2\}$, 即次数不超过 2 的实系数多项式构成的 R 上的线性空间, 若定义 $< f(x), g(x) >= f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2), \forall f(x), g(x) \in V$, 则 $<, >$ 是 V 上的一个内积.

解答:

正确的.

依次验证正定性, 对称性, 线性性即可.

3. 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是欧式空间 R^n 的一组基, 如果非零向量 β 与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 这 $n-1$ 个向量都正交, 则 β, α_n 线性相关.

解答:

错误的.

考虑 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ 即可.

4. 设实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_2 \end{pmatrix}$, 且 A_1, A_2 均为方阵, 如果 A 正定, 则 A_1, A_2 正定.

解答:

正确的.

首先, 因为 A 正定, 所以顺序主子式全正, 所以 A_1 正定. 因为 A 是实对称阵, 所以 $C = B^T$. 对 A 做合同变换可得

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^T & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 - B^TB \end{pmatrix}$$

合同变换保持正定性不变, 再次考察顺序主子式可得 $A_2 - B^TB$ 正定. 注意到正定矩阵加上半正定矩阵仍然是正定矩阵, 所以

$$A_2 = (A_2 - B^T B) + B^T B$$

仍为正定矩阵.

20.3 解答题

3. 设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的通解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, 其中 k 是任意实数.

(1)α_1 能否由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示?

(2)α_3 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性表示?

解答:

(1) 可以.

由线性方程组解的结构可知, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 是方程组 $Ax = 0$ 的解, 则

$$\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0$$

从而

$$\alpha_1 = \alpha_2 - 2\alpha_4$$

(2) 不可以.

假设可以, 设

$$\alpha_3 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_4 \alpha_4$$

则 $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ -1 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$ 是方程组 $Ax = 0$ 的解, 所以 $Ax = 0$ 的解空间至少是二维的, 与 $Ax = b$ 的通解形式矛盾.

4. 设 σ 是 R^3 上的线性变换, 在基 $M_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\-8&-7&6\end{pmatrix}$
(1) 求 σ 在基

$$M_2=\{\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3,\beta_2=3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3\}$$

下的矩阵.
(2) 设向量 $\xi=\alpha_1+6\alpha_2-\alpha_3$,$\eta=\beta_1-\beta_2+\beta_3$, 求 $\sigma(\xi),\sigma(\eta)$ 分别在基 M_1 下的坐标.

解答:
(1) 设 $\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}T$, 则

$$T=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\3&1&2\end{pmatrix}$$

于是就可以得到

$$\sigma\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}=\sigma\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}T$$

结合题目条件得到

$$\sigma\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}A$$

所以就可以得到

$$\sigma\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}AT=\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}T^{-1}AT$$

于是 σ 在 M_2 下的矩阵为 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-\frac{61}{3}&-32&-\frac{32}{3}\\\frac{38}{3}&18&\frac{16}{3}\\\frac{44}{3}&16&\frac{25}{3}\end{pmatrix}$
(2)

$$\sigma(\xi)=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-56\\-78\\-56\end{pmatrix}$$

即 $\sigma(\xi)$ 在 M_1 下的坐标为 $\begin{pmatrix} -56 \\ -78 \\ -56 \end{pmatrix}$.

$$\eta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 - 3\alpha_1 - 4\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = \alpha_2 + 4\alpha_3$$

类似上面的做法可以得到

$$\sigma(\eta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 17 \end{pmatrix}$$

即 $\sigma(\eta)$ 在 M_1 下的坐标为 $\begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 17 \end{pmatrix}$.

5. 设实二次型 $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz$.
(1) 利用正交变换化该二次型为标准型, 并且给出具体的正交变换;
(2) 判断 $Q(x,y,z) = 1$ 所表示的二次曲面类型.

解答:

二次型对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

计算得到特征值为

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

对应的特征向量为

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

经过标准正交化之后得到的标准正交基为

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

则令 $P = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$, 有 $A = P \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$, 则经过线性变换 $y = P^{-1}x$ 后二次型变成了标准型.
(2) 根据上一问, 标准型对应的方程为

$$5\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 1$$

因此是双叶双曲面.

6. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + 3A + 2I = 0$.
(1) 请给出 A 的可能的全部互异特征值.
(2) 试证明: 当 n 为奇数时,A 的伴随矩阵 A^* 正定.

解答:
(1) 假设 λ 是 A 的特征值,x 是对应的特征向量, 则

$$(A^2 + 3A + 2I)x = (\lambda^2 + 3\lambda + 2)x$$

另一方面, 由题目条件可知

$$(A^2 + 3A + 2I)x = 0$$

于是得到方程

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

解得 $\lambda = -1$ 或 $\lambda = -2$.
(2) 由伴随矩阵的定义得到

$$A^* = det(A)A^{-1}$$

首先, 因为 A 实对称, 所以 A^{-1} 实对称, 则 A^* 实对称. 另外还可以得到 A^* 的特征值是 A^{-1} 的 $det(A)$ 倍. 下面分别考虑 $det(A)$ 与 A^{-1} 的特征值.
$det(A) = \Pi_{i=1}^{n}\lambda_i$. 在 (1) 中已经证明了 A 的特征值全是负的, 在 (2) 中又有条件 n 为奇数, 所以 $det(A) < 0$.
A^{-1} 的特征值为 A 的倒数, 即 -1 或 $-\frac{1}{2}$.
结合上述, 可以得到 A^* 的特征值全正, 从而正定.

21 2017-2018 第一学期期末

21.1 填空题

1. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2018} =$

解答:

归纳即得答案为 $\begin{pmatrix} 1 & 2018a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. 若方阵 $A = (a_{ij})_{3\times3}$ 的特征值为 $1, 2, 3$, 设 A_{ii} 是 a_{ii} 的代数余子式,$i = 1, 2, 3$, 则 $A_{11} + A_{22} + A_{33} =$

解答:

注意到这三个代数余子式的和恰好是 $tr(A^*)$, 因此只需要考虑 A^* 的特征值即可. 由伴随矩阵的定义得到

$$A^* = det(A)A^{-1}$$

所以 A^* 的特征值就是 A^{-1} 特征值的 $det(A)$ 倍. 首先,A^{-1} 的特征值是 A 特征值的倒数, 即 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. 其次,$det(A) = \Pi_{i=1}^{3}\lambda_i = 6$, 所以就可以得到 A^* 的三个特征值分别是 $6, 3, 2$, 则有

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = tr(A^*) = \Sigma_{i=1}^{3}\lambda_i^* = 11$$

3. 设 $M_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$,$M_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 是线性空间 V 的两组基, 且 $\beta_1 = \alpha_1$,$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$,$\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$. 如果向量 α 在基 M_1 下的坐标为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则在基 M_2 下的坐标为

解答:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_3 - 3\beta_2 + 3\beta_1$$

所以坐标为 $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

4. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, 则 $b =$

解答:

注意到 -2 一定是 A 的一个特征值, 从而由 A,B 相似可知 -2 是 B 的一个特征值, 则 $b=-2$. 结合相似矩阵的迹相同, 就可以得到 $a-1=b+1$, 从而 $a=0$.

5. 方程 $x_1^2+x_2^2-2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3=1$ 所表示的二次曲面类型为

解答:

只需要考察二次型的标准型即可. 二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

计算可得 A 的特征值为 $-4,2,2$. 所以标准型对应的方程为

$$2\tilde{x}^2+2\tilde{y}^2-4\tilde{z}^2=1$$

所以该二次型对应的曲面为单叶双曲面.

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$,$B=(tI_3+A)^2,t\in R$, 则 B 正定当且仅当 t 满足

解答:

首先,B 是实对称矩阵, 所以 B 正定当且仅当 B 的特征值全正. 设 λ 是 A 的特征值, 则 $(t+\lambda)^2$ 是 B 的特征值 (并且是一一对应的关系). 所以 B 正定当且仅当对 A 的任意一个特征值 λ, 有 $t+\lambda\neq 0$. 而计算可得 A 的特征值为 $2,2,0$, 所以 B 正定的条件为 $t\neq 0$ 且 $t\neq -2$.

21.2 判断题

1. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$ 不相似于 $B=\begin{pmatrix}6 & 7 & 8\\ 0 & 1 & 9\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

解答:
错误的.
由于 A 有三个互异的特征值, 所以 A 可对角化, 同理,B 可对角化. 又因为 A,B 的特征值相同, 所以他们相似.

2. 若 0 是矩阵 A 的特征值, 则 A 一定不可逆.

解答:
正确的.
因为 $det(A)=\Pi_{i=1}^{n}\lambda_i=0$, 所以 A 不可逆.

3. 设 R^n 中,$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 是正交向量组. 如果 $\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性无关, 且 $\gamma,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 也线性无关, 则 β,γ 线性相关.

解答:
错误的
考虑 $n=2$,$\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$,$\beta=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$,$\gamma=\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}$ 即可.

4. 若 A 正定, 则 A 的主对角线上的元素均为正实数.

解答:
正确的.
假设 $A(i,i)\leqslant 0$, 考虑 x 是第 i 个元素为 1, 其他元素为 0 的 n 维向量. 则

$$x^TAx=A(i,i)\leqslant 0$$

这与 A 正定矛盾.

21.3 解答题

3. 设 f 是 $R^{2\times2}$ 上的线性变换:$f(X)=AX-XA,\forall X\in R^{2\times2},A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.
(1) 求证:f 是 $R^{2\times2}$ 上的线性变换.

(2) 求出 f 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.
(3) 求 $W = \{X \in R^{2\times 2} | f(X) = 0\}$.

解答:
(1) 只需要验证线性性即可.
对任意的 $X, Y \in R^{2\times 2}$, 有

$$f(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A = AX - XA + AY - YA = f(X) + f(Y)$$

对任意的 $X \in R^{2\times 2}, \lambda \in R$, 有

$$f(\lambda X) = A(\lambda X) - (\lambda X)A = \lambda AX - \lambda XA = \lambda(AX - XA) = \lambda f(X)$$

线性性成立, 所以 f 是线性变换.
(2)

$$f(E_{11}) = AE_{11} - E_{11}A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -2E_{12} + 3E_{21}$$

$$f(E_{12}) = AE_{12} - E_{12}A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -3E_{11} - 3E_{12} + 3E_{22}$$

$$f(E_{21}) = AE_{21} - E_{21}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 2E_{11} + 3E_{21} - 2E_{22}$$

$$f(E_{22}) = AE_{22} - E_{22}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{12} - 3E_{21}$$

(3) 设 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W$, 则按照四个分量等于零可以得到方程组

$$\begin{cases} a + 2c = a + 3b \\ b + 2d = 2a + 4b \\ 3a + 4c = c + 3d \\ 3b + 4d = 2c + 4d \end{cases}$$

解这个方程组就可以得到一组基础解系为

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $W=\{t_1X_1+t_2X_2|t_1,t_2\in R\}$.

4. 设 R^4 的内积为 $<X,Y>=\Sigma_{i=1}^4 x_iy_i, \forall X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}^T, Y=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3 & y_4\end{pmatrix}^T\in R^4$. 用 *Schmidt* 正交化将下列向量化为 R^4 在该内积下的一组标准正交基.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$e_1=\tfrac{\beta_1}{|\beta_1|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-<\alpha_2,e_1>e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$e_2=\tfrac{\beta_2}{|\beta_2|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-<\alpha_3,e_1>e_1-<\alpha_3,e_2>e_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$$

$$e_3=\tfrac{\beta_3}{|\beta_3|}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\beta_4 = \alpha_4 - <\alpha_4, e_1> e_1 - <\alpha_4, e_2> e_2 - <\alpha_4, e_3> e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_4 = \frac{\beta_4}{|\beta_4|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. 已知三阶实对称阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$, 并且有 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}^T$ 是属于特征值 $1, 2$ 的特征向量.
(1) 求 A 属于特征值 3 的特征向量全体
(2) 求矩阵 A

解答:
(1) 我们知道, 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是互相垂直的, 所以特征值 3 的特征向量一定与 α_1, α_2 垂直. 设 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$ 是属于特征值 3 的特征向量, 则通过与 α_1, α_2 内积等于 0 可以得到如下方程组

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

解方程得到

$$\alpha_3 = t \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T$$

(2) 根据 (1) 中求出的特征向量, 我们就能将 A 相似到一个对角阵, 过程如下:

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{30}{13} & -\frac{15}{26} & \frac{19}{26} \\ -\frac{6}{13} & \frac{21}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{4}{13} & \frac{27}{13} \end{pmatrix}$$

6. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是正定矩阵,d_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式. 证明:

$$det(A)\leqslant a_{nn}d_{n-1}$$

解答:
本题考虑使用数学归纳法. 首先, 对 $n=2$

$$det(A)\leqslant a_{11}a_{22}-a_{12}^2\leqslant a_{11}a_{22}$$

结论成立. 假设 $n-1$ 时情况成立, 下面考虑 n 的情况.
对矩阵 A 进行如下分块

$$A=\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha^T & a_{nn}\end{pmatrix}$$

其中 A_{n-1} 是 $n-1$ 阶方阵. 由于 A 正定, 所以 A 的各阶顺序主子式大于 0, 所以 A_{n-1} 的各阶顺序主子式大于 0, 所以 A_{n-1} 正定, 所以 A_{n-1} 可逆. 对 A 做合同变换如下:

$$\begin{pmatrix}I_{n-1} & 0\\ -\alpha^T A_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha^T & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}\alpha\end{pmatrix}$$

注意到上述合同变换所用到的初等矩阵的行列式都为 1, 因此 A 的行列式就是上述准对角阵的行列式, 即

$$det(A)=det(A_{n-1})(a_{nn}-\alpha^T A_{n-1}\alpha)$$

因为 A_{n-1} 正定, 所以

$$\alpha^T A_{n-1}\alpha\geqslant 0$$

所以就可以得到

$$det(A)\leqslant det(A_{n-1})a_{nn}=a_{nn}d_{n-1}$$