期末考试试题分析

阿笠博士

July 11, 2024

注意：这份资料与涂涛班级的学生无关，这是给其他班级的学生阅读的。

1 简答题

(1) 写出$|0_A,0_B\rangle,|0_A,1_B\rangle,|1_A,0_B\rangle,|1_A,1_B\rangle$对应的列向量。

(2) 简述跃迁选择定则。

(3) 简述氢原子波函数描述与玻尔轨道模型的区别。

(4) 已知氢原子电子所处定态对应的主量子数$n=2$，写出所有可能的(n,l,m)。

(5) 描述单电子光谱精细结构和超精细结构的成因。

(6) 什么是不确定关系？给出例子。

(7) 写出氢原子波函数的三个本征方程，并解释三个量子数的含义。

(8) 已知$L=1,S=1,J=2$，求朗德g因子。

(9) 描述EPR佯谬。

(10) 对于双自旋体系，给出非耦合表象和耦合表象的本征态。

(11) 混合态对应Bloch球上哪些点？

(12) 描述量子不可克隆定理。

(13) 写出Hadamard算符的矩阵形式。

(14) 描述量子隐形传态，并说明是否违反了不可克隆定理，是否实现了超光速。

(15) 写出量子密钥分发安全性保证的物理原理。

2 计算题

(1) 写出$|\psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A + i\,|1\rangle_A)$与$|\psi\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_B + |1\rangle_B)$的直积态。

(2) 求解三个泡利算符对应的本征态和本征值。

(3) 写出快轴与水平方向夹角度为γ的半波片与1/4波片的操作矩阵。

(4) 设氢原子核外两个电子处于2s3d组态，它们在LS耦合下形成的原子态有几种？用原子态的符号表示出来。

(5) 两个态$|\psi_1\rangle$与$|\psi_2\rangle$的保真度定义为$F = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$，计算$|\psi_1\rangle = \cos\frac{\theta_1}{2}\,|0\rangle - \sin\frac{\theta_1}{2}\,|1\rangle$与$|\psi_2\rangle = \cos\frac{\theta_2}{2}\,|0\rangle + i\sin\frac{\theta_2}{2}\,|1\rangle$的保真度。

(6) 通过CNOT门可以将四个Bell态变为直积态，写出过程。

(7) 已知$L = 2, S = 1$，计算$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$的可能取值。

(8) 推导二维量子隐形传态的过程。

3 简答题答案

(1)

$$|0_A, 0_B\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$|0_A, 1_B\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$|1_A, 0_B\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$|1_A, 1_B\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(2) 氢原子从(n, l, m)跃迁到$(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{m})$需要满足$\tilde{l} - l = \pm 1$。

(3) 在玻尔轨道模型中，氢原子电子是沿着固定的轨道运动的；在波函数描述中，氢原子电子可以以特定的概率分布处于空间中的任何一个位置。

(4) 因为

$$l = 0, 1, ..., n-1,$$

所以$l = 0, 1$。

因为

$$m = -l, -l+1, ..., l-1, l,$$

所以当$l = 0$时$m = 0$，当$l = 1$时$m = -1, 0, 1$。

综上所述，所有可能的(n, l, m)为$(2, 0, 0), (2, 1, -1), (2, 1, 0), (2, 1, 1)$。

(5) 精细结构的成因是电子自旋角动量与轨道角动量的"自旋-轨道耦合"；超精细结构的成因是原子核自旋角动量与电子轨道角动量的"自旋-自旋耦合"。

(6) 不确定关系是指我们无法同时确定粒子的坐标(x, y, z)与动量(p_x, p_y, p_z)，即

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta p_x &\geq \frac{\hbar}{2},\\ \Delta y \Delta p_y &\geq \frac{\hbar}{2},\\ \Delta z \Delta p_z &\geq \frac{\hbar}{2}.\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}H\Psi_{n,l,m} &= -\frac{E_0}{n^2}\Psi_{n,l,m},\\ L^2\Psi_{n,l,m} &= l(l+1)\hbar^2\Psi_{n,l,m},\\ L_z\Psi_{n,l,m} &= m\hbar\Psi_{n,l,m}.\end{aligned}$$

其中n反映了氢原子的能量，l反映了氢原子角动量的大小，m反映了氢原子角动量沿着z方向分量的大小。

(8)

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} = \frac{3}{2}.$$

(9) 爱因斯坦认为波函数不会在测量之后的瞬间发生改变，他认为这违背了狭义相对论的原理。

(10) 非耦合表象的本征态是

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= |\uparrow\uparrow\rangle\,,\\ \Psi_2 &= |\uparrow\downarrow\rangle\,,\\ \Psi_3 &= |\downarrow\uparrow\rangle\,,\\ \Psi_4 &= |\downarrow\downarrow\rangle\,.\end{aligned}$$

耦合表象的本征态是

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= |\uparrow\uparrow\rangle\,,\\ \Psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle),\\ \Psi_3 &= |\downarrow\uparrow\rangle\,,\\ \Psi_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle).\end{aligned}$$

(详见资料“量子物理期末总结”)

(11) 混合态对应Bloch球内部点，相当于与球心距离小于1的点。

(12) 不可克隆定理是指我们无法复制一个未知的量子比特状态。

(13)

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

(14) 发送方Alice将一个量子比特与一个Bell态进行张量积，之后传送给接收方Bob，Bob利用一个Bell态与一个量子门将该量子态还原回Alice所需传输的量子比特。它不涉及克隆，因此没有违反不可克隆定理；它没有传递任何有关能量的信息，因此没有实现超光速。

(15) 量子不可克隆定理。

4 计算题答案

(1)

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B &= \frac{1}{2}(|0\rangle_A + i\,|1\rangle_A) \otimes (|0\rangle_B + |1\rangle_B)\\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + i\,|1\rangle_A \otimes |0\rangle_B + i\,|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B)\\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + i\,|10\rangle + i\,|11\rangle).\end{aligned}$$

(2) 三个泡利算符的矩阵表示为

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$对应的本征态$\psi_x, \psi_y, \psi_z$与本征值$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$满足

$$\sigma_x \psi_x = \lambda_x \psi_x,$$
$$\sigma_y \psi_y = \lambda_y \psi_y,$$
$$\sigma_z \psi_z = \lambda_z \psi_z.$$

可得

$$\psi_x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_x^1 = 1,$$
$$\psi_x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_x^2 = -1,$$
$$\psi_y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \lambda_y^1 = 1,$$
$$\psi_y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \lambda_y^2 = -1,$$
$$\psi_z^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_z^1 = 1,$$
$$\psi_z^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_z^2 = -1.$$

其中上标$1, 2$表示有2个根。

(3) 半波片的操作矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix},$$

1/4波片的操作矩阵为

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - i\cos 2\gamma & -i\sin 2\gamma \\ -i\sin 2\gamma & 1 + i\cos 2\gamma \end{pmatrix}.$$

(4) 2s组态对应

$$l_1 = 0, s_1 = \frac{1}{2},$$

3d组态对应

$$l_2 = 2, s_2 = \frac{1}{2}.$$

原子的角动量取值为

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, ..., |l_1 - l_2|,$$

因此$L = 2$。

原子的自旋取值为

$$S = s_1 + s_2, s_1 + s_2 - 1, ..., |s_1 - s_2|,$$

因此$S = 1, 0$。

原子的总角动量取值为

$$J = L + S, L + S - 1, ..., |L - S|,$$

因此，总共有4个组态：当$L = 2, S = 1$时，$J = 3, 2, 1$，对应组态为$^3\mathrm{D}_3, ^3\mathrm{D}_2, ^3\mathrm{D}_1$；当$L = 2, S = 0$时，$J = 2$，对应组态为$^1\mathrm{D}_2$。

(5) 因为

$$\langle\psi_1| = \cos\frac{\theta_1}{2}\langle 0| - \sin\frac{\theta_1}{2}\langle 1|,$$

根据$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$可得

$$\begin{aligned}
\langle\psi_1|\psi_2\rangle &= \left(\cos\frac{\theta_1}{2}\langle 0| - \sin\frac{\theta_1}{2}\langle 1|\right)\left(\cos\frac{\theta_2}{2}|0\rangle + i\sin\frac{\theta_2}{2}|1\rangle\right) \\
&= \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\langle 0|0\rangle + i\cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\langle 0|1\rangle - \sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\langle 1|0\rangle - i\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\langle 1|1\rangle \\
&= \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} - i\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}.
\end{aligned}$$

因此

$$F = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2} + \sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2}.$$

(6) 四个Bell态分别为

$$|\Phi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)\longleftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$|\Phi^-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle-|11\rangle)\longleftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$|\Psi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|10\rangle)\longleftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$|\Psi^-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|10\rangle)\longleftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{CNOT}\,|\Phi^+\rangle\longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{CNOT}\,|\Phi^-\rangle\longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{CNOT}\,|\Psi^+\rangle\longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{CNOT}\,|\Psi^-\rangle\longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

(7) 总角动量取值为

$$J=L+S,L+S-1,...,|L-S|\,.$$

因此

$$J = 3, 2, 1.$$

$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$的可能取值为

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = \frac{1}{2}\left(J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\right)\hbar^2 = 2\hbar^2, -\hbar^2, -3\hbar^2.$$

(8) 详见"量子物理"资料。