定理 1 (端点处的连续性) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的通项在区间 (a,b) 上连续且该级数在 (a,b) 上一致收敛于 $S(x)$. 如果对每个 n 左极限 $\lim\limits_{x\to b^-} u_n(x)$ 存在且有限, 那么 $\lim\limits_{x\to b^-} S(x)$ 存在且

$$\lim_{x\to b^-} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to b^-} u_n(x).$$

证明 定义 $u_n(b) = \lim\limits_{x\to b^-} u_n(x)$, 则 $u_n(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛于 $S(x)$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 N, 当 $n > N$ 时,

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon,$$

对一切 $x \in (a,b)$ 及一切自然数 p 成立. 令 $x \to b^-$ 知, 上式在 $(a,b]$ 也成立. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(a,b]$ 上一致收敛. 因而结论成立.

例 1 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$. 求 $\lim_{x\to 1} f(x)$.

解 当 $x\in[0,2]$ 时, 有

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$ 收敛, 所以根据 Weierstrass 判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$ 在区间 $[0,2]$ 上一致收敛. 由于通项是连续函数, 所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 因而

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

例 2 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$. 求证 $f(x)$ 是 $(0,2\pi)$ 上的连续函数.

证明 根据 Dirichlet 判别法可知对任意 $x\in(0,2\pi)$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 收敛, 因此 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上有定义. 对任意 $x\in(0,2\pi)$ 取 $0<\delta<\pi$ 使得 $x\in[\delta,2\pi-\delta]$. 根据 Dirichlet 判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致收敛, 因此 $f(x)$ 在 x 连续, 从而 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上连续.

定理 2 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项都在在区间 $[a,b]$ 上可积, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 那么 $f(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\gamma\in(0,\frac{\varepsilon}{3(b-a)})$. 由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 故存在 N 使得 $n>N$ 时, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\gamma \tag{1}$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立. 对固定的 $n_0>N$, 取 $[a,b]$ 的分割 T 使得

$$\overline{S}(f_{n_0},T)-\underline{S}(f_{n_0},T)<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{2}$$

由 (1) 式, 有 $f(x)<f_{n_0}(x)+\gamma$, 因此

$$\overline{S}(f,T)<\overline{S}(f_{n_0},T)+\gamma(b-a)<\overline{S}(f_{n_0},T)+\frac{\varepsilon}{3}.$$

从 (1) 式, 还可得 $f(x) > f_{n_0}(x) - \gamma$, 因此

$$\underline{S}(f, T) > \underline{S}(f_{n_0}, T) - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

于是

$$\overline{S}(f, T) - \underline{S}(f, T) < \varepsilon.$$

这就说明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 又当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) - f_n(x))\,dx\right| \\
&\leqslant \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \\
&\leqslant \gamma(b-a) < \frac{\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

推论 1 如果区间 $[a, b]$ 上的可积(连续)函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 那么 $f(x)$ 也在 $[a, b]$ 上可积(连续), 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

定理 3 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$. 如果通项 $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 那么和函数 $S(x)$ 也在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx.$$

例 3 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和, 这里 $x\in(-1,1)$.

解 对于任意 $\delta\in(0,1)$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{n-1}$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上一致收敛, 且通项连续. 于是

$$\begin{aligned}
f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,dt\\
&=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\,dt\\
&=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt\\
&=\ln\frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

定理 4 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足下面的条件:

1° 每个 $f_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 有连续的导函数;

2° $\{f'_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $g(x)$;

3° 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在某点 $x_0 \in [a,b]$ 收敛,

那么 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于某个连续可微的函数 $f(x)$, 且 $f'(x) = g(x)$, $x \in [a,b]$.

证明 由 1° 知 $f'_n(x)$ 连续, 由 2° 及前面的定理知, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续. 由 3° 不妨设 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛于 $f(x_0)$. 令

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + f(x_0),$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $f'(x) = g(x)$, $x \in [a,b]$. 下面证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

由 2° 和 3°, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [a, b]$ 有

$$|f_n'(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \left(\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt + f_n(x_0) \right) - \left(\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + f(x_0) \right) \right| \\
&\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)| dt \right| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon, \ \forall\, x \in [a, b].
\end{aligned}$$

所以 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

定理 5 如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足下面的条件:

1° 每个 $u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 有连续的导函数;

2° $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $g(x)$;

3° 至少有一点 $x_0 \in [a,b]$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛,

那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于某个连续可微的函数 $S(x)$, 且 $S'(x) = g(x)$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

例 4 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和函数.

解 对于 $x \in [-1,1]$, 有 $\left|\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right| \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 所以根据 Weierestrass 判别法知, 原级数在 $[-1,1]$ 上一致收敛. 对任意正数 $\delta < 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在区间 $[-\delta, \delta]$ 上一致收敛. 故, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 在 $(-1,1)$ 可以逐项求导, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\frac{1}{1-x}$. 因此,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x \ln\frac{1}{1-t}\,dt = -\int_0^x \ln(1-t)\,dt \\
&= -\left[t\ln(1-t)\Big|_0^x + \int_0^x \frac{t}{1-t}\,dt\right] \\
&= x + (1-x)\ln(1-x),\ x \in [-1,1].
\end{aligned}
$$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出