偏微分方程定解问题

1.三个基本方程（波动、传导、场位方程）、初值、边值条件

2.一阶线性偏微分方程（利用特征线法化为一元，积分时注意积分常数是其他变量的函数）

3.二元二阶线性偏微分方程（利用特征线法化为标准型，部分方程分解后可解）

4.半无界一端固定的弦问题需要按边界延拓初值（注意初值导数奇偶性不变！）。

5.叠加原理

6.齐次化原理（非齐次泛定方程零初值问题化为齐次方程含初值问题）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}=Lu+f(t,\boldsymbol{x}),t>0,\boldsymbol{x}\epsilon R^n\\ u|_{t=0}=\cdots=\dfrac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}|_{t=0}=0\end{cases}\xrightarrow{u=\int_0^t\omega(t,x;\tau)d\tau}\begin{cases}\dfrac{\partial^m\omega}{\partial t^m}=L\omega,t>\tau>0,\boldsymbol{x}\epsilon R^n\\ \omega|_{t=\tau}=\cdots=\dfrac{\partial^{m-2}\omega}{\partial t^{m-2}}|_{t=\tau}=0,\dfrac{\partial^{m-1}\omega}{\partial t^{m-1}}|_{t=\tau}=f(t,\boldsymbol{x})\end{cases}$$

分离变量法

1.固有值问题

- 固有值问题
  - S-L型方程：$(ky')' - qy + \lambda\rho y = 0, a < x < b$
  - 附加边界条件（假定$k \in C^1[a,b], \rho \in C[a,b], q \in C[a,b]$，且在$(a,b)$上，$k,\rho > 0, q \geq 0$，$q$在端点至多是一级极点）
    - $if\ k(a) > 0, q(x)$在a连续，可附加一、二、三类边值条件：$\begin{cases}\alpha_1 y'(a) - \beta_1 y(a) = 0, \alpha_1, \beta_1 \geq 0 \\ \alpha_2 y'(a) + \beta_2 y(a) = 0, \alpha_2, \beta_2 \geq 0\end{cases}$
    - $if\ k(a) = k(b)$，可附加周期性条件：$\begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b)\end{cases}$
    - $if\ k(a) = 0$，可附加有界性条件：$|y(a)| < +\infty$

- 固有值问题
  - 固有值可数，且$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \to +\infty$，除附加周期性条件外，固有值与固有函数一一对应
  - $\lambda_n \geq 0$，存在$\lambda = 0$的条件是$q = 0$，且不附加一、三类边值条件
  - $(\lambda_m - \lambda_n)\langle y_m, y_n\rangle = 0, if\ m \neq n$
  - $\forall f \in L_\rho^2[a,b]$，有$f = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n y_n, c_n = \frac{\langle f, y_n\rangle}{\|y_n\|^2}$

2.非齐次边界问题先设特解化为齐次，对非齐次泛定方程混动问题可用特解法（消非齐次项）、齐次化原理（消初值）、固有函数展开法。

特殊函数

一、Bessel

1.v 阶 Bessel 方程：

$$(rR')' + (\lambda r - \frac{v^2}{r})R = 0 \xrightarrow{\lambda=\omega^2, x=\omega r} v\text{阶Bessel方程：}x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

它有幂级数解

$$y(x) = CJ_v(x) + DN_v(x)$$
$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+v+1)}(\frac{x}{2})^{2k+v}$$
$$N_v(x) = \frac{cosv\pi}{sinv\pi}J_v(x) - \frac{1}{sinv\pi}J_{-v}(x)$$

$J_v(x)$和$N_v(x)$称为第一类和第二类 Bessel 函数。

2.Bessel 函数

Bessel函数的基本性质

- 递推公式
  - $(x^vJ_v)' = x^vJ_{v-1}$
  - $(x^{-v}J_v)' = -x^{-v}J_{v+1}$
  - $2J_v' = J_{v-1} - J_{v+1}$
  - $2vx^{-1}J_v = J_{v-1} + J_{v+1}$
  - $(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^n(x^vJ_v) = x^{v-n}J_{v-n}$
  - $(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^n(x^{-v}J_v) = (-1)^nx^{-(v+n)}J_{v+n}$
- 极限性质：$J_v(0) = \begin{cases}1, v = 0\\ 0, v \geq 0\end{cases}, N_v(0) = \infty, J_v(+\infty) = N_v(+\infty) = 0$
- 零点和震荡性：J_v，J_v'，$J_v + hxJ_v'$有无穷可数个非负零点
- 整数阶Bessel函数的母函数和积分表示：$exp\{\frac{x}{2}(\xi - \xi^{-1})\} = \sum_{-\infty}^{\infty}J_n\xi^n$
  $J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(xsin\theta - n\theta)}d\theta$

3.Bessel 固有值问题

$$\begin{cases}(rR')' + (\lambda r - \frac{v^2}{r})R = 0, r \in (0, a)\\ |R(0)| < +\infty, \alpha R(a) + \beta R'(a) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_n = \omega_{kn}^2\\ R_n(r) = J_v(\omega_{kn}r)\end{cases}$$

其中ω_{kn}是边界条件的第 n 个正根，固有函数模：

$$||J_v(\omega_{kn}r)||^2 = \begin{cases}\frac{a^2}{2}J_{v+1}^2(\omega_{1n}a), k = 1\\ \frac{1}{2}(a^2 - \frac{v^2}{\omega_{2n}^2})J_v^2(\omega_{2n}a), k = 2\\ \frac{1}{2}(a^2 - \frac{v^2}{\omega_{2n}^2} + \frac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2})J_v^2(\omega_{3n}a), k = 3\end{cases}$$

对于第二类边界条件，$v = 0$ 时，需要增加$\lambda_0 = 0, R_0 = 1$。

需要注意，权函数r。

4.虚变量的 Bessel 方程

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + v^2)y = 0 \xrightarrow{\xi=ix} y(x) = CJ_v(ix) + DN_v(ix)$$

虚变量 Bessel 函数

$$I_v = e^{-i\frac{\pi}{2}v}J_v(ix) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+v+1)}(\frac{x}{2})^{2k+v}$$

$$K_v = \frac{\pi}{2sinv\pi}(-I_v + I_{-v})$$

于是，

$$y(x) = AI_v(x) + BK_v(x)$$

5.球 Bessel 函数

$$x^2y'' + 2xy' + [x^2 - l(l+1)]y = 0 \xrightarrow{z=\sqrt{x}y} x^2z'' + xz' + [x^2 - (l+\frac{1}{2})^2]z = 0$$

6.可化为 Bessel 函数

对于 Bessel 方程作变量代换

$$y = zt^\alpha, x = \lambda t^\beta$$

有

$$t^2z'' + (1+2\alpha)tz' + (\lambda^2\beta^2t^{2\beta} + \alpha^2 - \beta^2v^2)z = 0$$

二、Legendre

$$\frac{1}{sin\theta}(sin\theta\Theta')' + (\lambda - \frac{\mu}{sin^2\theta})\Theta = 0 \xrightarrow{\mu=m^2, x=cos\theta} m\text{阶伴随}Legendre\text{方程}[(1-x^2)y']' + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0$$

1.m 阶 Legendre 方程

（1）当$m = 0$时，有级数解：

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, x \in [-1,1]$$

$$\begin{cases} y_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k}\Gamma(k-\frac{l}{2})\Gamma(k+\frac{l+1}{2})}{(2k)!\Gamma(-\frac{l}{2})\Gamma(\frac{l+1}{2})} x^{2k} \\ y_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k}\Gamma(k+\frac{1-l}{2})\Gamma(k+\frac{2+l}{2})}{(2k+1)!\Gamma(\frac{1-l}{2})\Gamma(\frac{2+l}{2})} x^{2k+1} \end{cases}，其中\lambda = l(l+1)$$

如果l不为整数，则y_1和y_2在$x = \pm 1$发散。当$l = n$，可以得到多项式解，

$$\begin{cases} P_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} x^{n-2k} \\ Q_n = \frac{1}{2} P_n ln \frac{1+x}{1-x} - \sum_{k=0}^{[\frac{n+1}{2}]} \frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)} P_{n-2k+1} \end{cases}$$

P_n称为 Legendre 函数，在$x = \pm 1$收敛，Q_n在$x = \pm 1$发散。

（2）设$v(x)$是$m = 0$的解，则$m \neq 0$的解为

$$y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} v(x)$$

记

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

为 m 阶 Legendre 函数。

2.Legendre 函数

Legendre函数等价表示

- 微分表示：$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$
- 二项式展开表示：$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$
- 积分表示：$P_n(x)=\frac{1}{2^n 2\pi i}\oint_C\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{1-x^2}icos\theta)^n d\theta$
- 母函数表示：$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n,|t|<1$

Legendre函数性质

- 奇偶性：$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$
- 次数性质：$P_n(x)$是n次多项式
- 特殊点函数值：$P_n(0)=\begin{cases}0,n=2m+1\\ \frac{(-1)^m(2m-1)!!}{(2m)!!},n=2m\geq 2\\ 1,n=0\end{cases}$, $P_n(1)=1,P_n(-1)=(-1)^n,Q_n(\pm 1)=\infty$
- 递推公式：$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0,nP_n(x)-xP_n{}'(x)+P_{n-1}{}'(x)=0$
  $nP_{n-1}(x)-P_n{}'(x)+xP_{n-1}{}'(x)=0,P_{n+1}{}'(x)-P_{n-1}{}'(x)=(2n+1)P_n(x)$
- 模的平方以及正交性：$\langle P_n,P_m\rangle=\delta_{nm}\frac{2}{n+m+1}$
- 广义Fourier展开：$\forall f(x)\in L_1^2[-1,1]$，$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\langle f,P_n\rangle}{||P_n||^2}P_n(x)$

m 阶 Legendre 函数的模：

$$\langle P_n^m,P_l^m\rangle=\delta_{nl}\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

常用公式：

$$\int_0^1 x^m P_n(x)dx=\frac{m}{n+m+1}\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)dx\,,n,m\geq 1$$

$$\int_{-1}^1 x^m P_n(x)dx=\begin{cases}0,m<n\\ \frac{m!\,[1+(-1)^{m-n}]}{(m-n)!!\,(m+n+1)!!},m\geq n\end{cases}$$

$$\int_0^1 P_n(x)dx=\begin{cases}1,n=0\\ \frac{1}{2},n=1\\ 0,n=2k\\ \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!},n=2k+1\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, |m-n| \neq 1 \\ \dfrac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}, m = n+1 \\ \dfrac{2n}{4n^2-1}, m = n-1 \end{cases}$$

3.Legendre 固有值问题

$$\begin{cases} [(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, x \in [-1,1] \\ |y(\pm 1)| < +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_n = n(n+1) \\ y_n = P_n(x) \end{cases}$$

三、球函数固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_{\theta\varphi} Y + \lambda Y = 0, 0 < \theta < \pi \\ |Y(0,\varphi)| < +\infty, |Y(\pi,\varphi)| < +\infty \\ Y(\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi+2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi) \\ \dfrac{1}{sin\theta}(sin\theta\Theta)' + (\lambda - \dfrac{\mu}{sin^2\theta})\Theta = 0 \\ |\Theta(0)| = |\Theta(\pi)| < +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = m^2 \\ \lambda = n(n+1) \\ Y_{nm}^{(1)} = P_n^m(cos\theta)cosm\varphi \\ Y_{nm}^{(2)} = P_n^m(cos\theta)sinm\varphi \end{cases}$$

球函数模：

$$\langle Y_{nm}^{(i)}, Y_{nm}^{(i)} \rangle = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{2n+1}, m = 0 \\ \dfrac{2\pi}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, m \geq 1 \end{cases}$$

需要注意，球函数空间有权$sin\theta$，这里需要声明，作变量代换后，权函数会发生变化。

积分变换方法

一、Fourier 变换求解法

1.定义：

正变换：

$$F(\lambda)=F[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

反变换：

$$f(x)=F^{-1}[F(\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

2.性质：

Fourier变换性质 $F[f(x)]=F(\lambda)$

- 线性：$F[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]=c_1F[f_1(x)]+c_2F[f_2(x)]$
- 奇偶性：$F[f^*(x)]=F^*(-\lambda)$
- 尺度变换：$F[f(ax)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\lambda}{a}), a\neq 0$
- 翻转：$F[f(-x)]=F(-\lambda)$
- 时移：$F[f(x+x_0)]=F(\lambda)e^{i\lambda x_0}$
- 频移：$F[f(x)e^{i\lambda_0 x}]=F(\lambda-\lambda_0)$
- 时域微分：$F[f^{(n)}(x)]=(i\lambda)^nF(\lambda), f(\pm\infty)=\cdots=f^{(n-1)}(\pm\infty)=0$
- 时域积分：$F[\int_0^x f(\xi)d\xi]=\frac{1}{i\lambda}F(\lambda)$，如果$F[\int_0^x f(\xi)d\xi]$存在
- 频域微分：$F[-ixf(x)]=F'(\lambda)$
- 时域卷积：$F[f_1*f_2(x)]=F_1(\lambda)F_2(\lambda)$
- 频域卷积：$F[2\pi f_1(x)f_2(x)]=F_1*F_2(\lambda)$

3.高维 Fourier 变换

$$F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\int_{(-\infty,+\infty)^n}f(x_1,\cdots,x_n)e^{-i\sum_{k=1}^n\lambda_k x_k}dx_1\cdots dx_n$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{(-\infty,+\infty)^n}F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)e^{i\sum_{k=1}^n\lambda_k x_k}d\lambda_1\cdots d\lambda_n$$

$$F[\frac{\partial}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}}f(x_1,\cdots,x_n)]=i^k\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_k}F(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

4.正余弦变换

正弦变换：$\bar{f}_s(\lambda)=\int_0^{+\infty}f(x)sin\lambda xdx$，$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\bar{f}_s(\lambda)sin\lambda xd\lambda$

余弦变换：$\bar{f}_c(\lambda)=\int_0^{+\infty}f(x)cos\lambda xdx$，$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\bar{f}_c(\lambda)cos\lambda xd\lambda$

5.常用结果

$$F[\frac{1}{a^2+x^2}]=-\frac{\pi}{a}e^{a\lambda}$$

$$F[e^{-ax^2}]=\sqrt{\frac{\pi}{a}}exp(-\frac{\lambda^2}{4a})$$

二、Laplace 变换

1.定义：

$$F(p)=L[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt\,,p\in\mathbb{C}$$

Fourier 变换处理全空间问题，Laplace 变换域正余弦变换处理半空间问题。

2.性质：

Laplace变换性质 $L[f(t)]=F(p)$

- 线性：$L[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]=c_1L[f_1(t)]+c_2L[f_2(t)]$
- 位移定理：$L[f(t)e^{\lambda t}]=F(p-\lambda)$
- 像函数微分法：$L[t^nf(t)]=(-1)^nF^{(n)}(p)$
- 微分性质：$L[f^{(n)}(t)]=p^nF(p)-\sum_k^{n-1}p^kf^{(n-1-k)}(+0)$
- 本函数积分法：$L[\int_0^t f(\xi)d\xi]=\frac{F(p)}{p}$
- 卷积性质：$L[f*g(t)]=F(p)G(p)$
- 延时定理：$L[f(t-\tau)H(t-\tau)]=e^{-p\tau}F(p)$

3.常用结果：

常用结果

$$L[1]=\frac{1}{p},L[e^{at}]=\frac{1}{p-a},L[cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2},L[sin\omega t]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$f(t)=L^{-1}[F(p)]=\sum_{k=1}^{n}Res[F(p)e^{pt},p_k]\,,p_k$是$F(p)$的所有奇点，且$\lim_{p\to\infty}F(p)=0$

注：若a是$f(z)$的m级极点，则$Res[f(z),a]=\lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^mf(z)]$。

基本解方法

一、δ函数

1.定义：

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, x=0\\ 0, x\neq 0\end{cases}, \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$$

2.运算性质

（1）筛选性：$\forall\varphi(x)\in C(R), \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$, 且$\int_a^b\delta(x-\xi)\varphi(x)dx=\begin{cases}\varphi(\xi), \xi\in[a,b]\\ 0, \xi\notin[a,b]\end{cases}$

（2）对称性：$\delta(x)=\delta(-x)$

（3）卷积性质：$\delta(x)*\varphi(x)=\varphi(x)*\delta(x)=\varphi(x)$

（4）Fourier变换：$F[\delta(x)]=1$，反变换$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}dx=\delta(x)$

（5）Fourier展开：$when\ x,\xi\in(-l,l), \delta(x-\xi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cos\frac{n\pi x}{l}+b_n sin\frac{n\pi x}{l})$，式中$a_n=\frac{1}{l}cos\frac{n\pi\xi}{l}, b_n=\frac{1}{l}sin\frac{n\pi\xi}{l}$

（6）导数：$if\ \varphi(x)\in C^n(R), \int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(x)\varphi(x)dx=(-1)^n\varphi^{(n)}(0)$

（7）原函数：$H(x)+C$，其中$H(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$

3.高维δ函数

$$\delta(x_1,\cdots,x_n)=\delta(x_1)\cdots\delta(x_n)$$

4.坐标变换

$$\delta(X)=\delta(Y)|\frac{\partial Y}{\partial X}|$$

二、Lu=0 型方程基本解

1.若$LU=\delta(M)$，则$u=U*f$是$Lu=f(M)$的解。

2.常用基本解结论：

$$\Delta_3 U=\delta(x,y,z)\Longrightarrow U=-\frac{1}{4\pi r}$$
$$\Delta_2 U=\delta(x,y)\Longrightarrow U=-\frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{r}$$

3.格林公式：

$$\oiint(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}})dS=\iiint(u\Delta_3 v-v\Delta_3 u)dV$$
$$\oint(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}})dl=\iint(u\Delta_3 v-v\Delta_3 u)dA$$

三、边值问题的格林函数法

1.问题转化

$$\begin{cases}\Delta u=-f(M), M\in V\\ u|_{\partial V}=\varphi\end{cases}\xrightarrow{u=\int_V f(M')G(M,M')dV'-\int_{\partial V}\varphi(M')\frac{\partial G}{\partial n'}(M,M')dS'}\begin{cases}\Delta G=-\delta(M-M'), M, M'\in V\\ G|_{\partial V}=0\end{cases}$$

2.格林函数解法

求解格林函数

- 镜像法
- 保形变换法：D为z平面上单连通区域，如果$\omega=\omega(z,z_0)$将D映射为ω平面上单位圆，且z_0映射为0，则$G(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{|\omega(z)|}$。
- Fourier变换法：构造同边界条件的固有值问题，广义Fourier展开后利用原方程定系数

四、初值问题的基本解法

1.传导类

$$\begin{cases}u_t=Lu+f(t,M), t>0, M\in V\\ u|_{t=0}=\varphi(M)\end{cases}\xrightarrow{u=U*\varphi+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)d\tau}\begin{cases}U_t=LU, t>0, M\in V\\ U|_{t=0}=\delta(M)\end{cases}$$

2.波动类

$$\begin{cases}u_{tt}=Lu+f(t,M), t>0, M\in V\\ u|_{t=0}=\varphi(M), u_t|_{t=0}=\psi(M)\end{cases}\xrightarrow{u=U*\psi+\frac{\partial}{\partial t}[U*\varphi]+\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)d\tau}\begin{cases}U_{tt}=LU, t>0 M\in V\\ U|_{t=0}=0, U_t|_{t=0}=\delta(M)\end{cases}$$

3.降维法